



Sistemas Dinâmicos Não-Autônomos e Aplicações Ambientais

Relatório Final

Felipe Hikari Kawahama

Orientadores

Leonardo Bacelar Lima Santos

Elbert Einstein Nehrer Macau

Patricia Romano Cirilo

São José dos Campos

2019

Resumo

A modelagem matemática é uma importante ferramenta que nos ajuda a compreender fenômenos da natureza a partir de resultados analíticos do modelo e simulações numéricas. Um fenômeno em particular que desperta muito interesse são as epidemias. Entre elas, as doenças transmitidas por vetores representam grande preocupação ao redor do mundo, especialmente no Brasil. Nos últimos anos, o sistema de saúde brasileiro enfrentou recorrentes casos de epidemias como Dengue e Malária e novos casos de Chikungunya, Zika e Febre Amarela. O controle vetorial continua sendo uma das mais importantes medidas de combate a epidemias como essas. Modelos matemáticos são importantes ferramentas para planejamento das estratégias de controle vetorial. Neste trabalho apresentamos uma abordagem para calcular qual a mínima intensidade de controle vetorial necessária para obter estabilidade em um modelo simples de dinâmica de populações de mosquitos. Combinamos simulações numéricas com resultados analíticos. Os primeiros passos da pesquisa trataram da análise de estabilidade e bifurcações de modelos epidemiológicos simplificados. A segunda parte foi constituída no desenvolvimento de um modelo próprio, diferentes simulações variando os parâmetros e suas respectivas análises. Este projeto é desenvolvido com apoio de uma bolsa de Iniciação Científica pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Capítulo 1

Introdução

Os anos de 2017 e 2018 configuraram o Biênio da Matemática no Brasil, por isso, nesses anos e os que os sucedem, é de suma importância, promover projetos na área que tenham uma grande relevância no âmbito científico, tecnológico e social. A aplicação escolhida para o projeto foi voltada para a área da saúde, mais especificamente as epidemias transmitidas por mosquitos, doenças que assolam países de todo o mundo.

O mosquito *Aedes aegypti* é o vetor transmissor de várias doenças, como a Dengue, Chikungunya, Zika e Febre Amarela. Nos últimos anos, houve um grande aumento de casos dessas doenças [1, 2, 3, 4], o qual se tornou um grave problema para sistemas de saúde em vários países tropicais, especialmente o Brasil. Essa situação se dá devido a vários fatores sociais que criam ambientes favoráveis ao crescimento acentuado do mosquito, principalmente locais com uma quantidade considerável de água acumulada parada, causadas por uma grande concentração de pessoas [5]. O controle vetorial é um dos principais meios de frear esse crescimento e se dá através de várias estratégias: desde a remoção mecânica dos sítios de reprodução do mosquito até a utilização de venenos.

Existem diversos trabalhos que desenvolvem modelos matemáticos para essas doenças [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] e vamos utilizar os valores para determinados parâmetros que foram considerados nestes. Nesse trabalho, construímos modelos simples para o crescimento da população de mosquitos, baseados nos artigos já citados até chegarmos em um modelo que leva em consideração mecanismos de controle vetorial a serem usados separadamente e em conjunto. Baseado no estudo qualitativo de sistemas de equações diferenciais ordinárias (análise de estabilidade) e simulações numéricas, nossos resultados classificam a estabilidade linear dos sistemas dos diferentes modelos e revelam as condições necessárias

para que a população de mosquitos cresça indefinidamente, cresça de forma controlada ou morra após um certo tempo. Em um simples modelo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), porém de maneira geral e de fácil reprodução, ilustramos o processo de quantificar o valor mínimo necessário para os parâmetros do modelo para impedir o crescimento da população e/ou mantê-la estável.

Assim, o objetivo desse relatório é apresentar as atividades referentes ao projeto na segunda metade de 2018 e primeira metade de 2019.

Capítulo 2

Modelos & Métodos

2.1 Modelos

Os modelos desenvolvidos levam em consideração a dinâmica da população de mosquitos propagadores (vetores) da Febre Amarela, e foram divididos nos seguintes compartimentos: $E(t)$ representa a população de ovos, em um instante t ; $L(t)$, a população de larvas; $P(t)$, a população de pupas e $M(t)$, a população de mosquitos adultos. Com isso modelamos a taxa de variação de cada população utilizando um sistema de EDOs de três maneiras diferentes, cujas equações são dadas abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi_m \cdot M(t) - \sigma_e \cdot E(t) \\ \frac{dL}{dt} = \sigma_e \cdot E(t) - \sigma_l \cdot L(t) \\ \frac{dP}{dt} = \sigma_l \cdot L(t) - \sigma_p \cdot P(t) \\ \frac{dM}{dt} = \sigma_p \cdot P(t) - \mu_m \cdot M(t) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi_m \cdot M(t) - \sigma_e \cdot E(t) \\ \frac{dL}{dt} = \sigma_e \cdot E(t) - \sigma_l \cdot L(t) \\ \frac{dP}{dt} = \sigma_l \cdot L(t) - \sigma_p \cdot P(t) \\ \frac{dM}{dt} = \sigma_p \cdot P(t) \left(1 - \frac{M(t)}{k_m}\right) - \mu_m \cdot M(t) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \phi_m \cdot M(t) - (\sigma_e + \mu_e) \cdot E(t) \\ \frac{dL}{dt} = \sigma_e \cdot E(t) - (\sigma_l + \mu_l) \cdot L(t) \\ \frac{dP}{dt} = \sigma_l \cdot L(t) - (\sigma_p + \mu_p) \cdot P(t) \\ \frac{dM}{dt} = \sigma_p \cdot P(t) \left(1 - \frac{M(t)}{k_m}\right) - \mu_m \cdot M(t) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Um resumo dos parâmetros se encontra na tabela 2.1.

A dinâmica nos modelos é parecida: o aumento na população de ovos se dá através da taxa de oviposição ϕ_m e a diminuição é dada através da taxa de transição σ_e nos modelos 2.1 e 2.2, já a diferença no modelo 2.3 se dá através do parâmetro de controle μ_e que representa a taxa de mortalidade dessa população, o qual consideramos desprezível nos primeiros dois modelos. A taxa de crescimento da população $L(t)$ se dá através da parcela de $E(t)$ que eclode e diminui conforme a população de larvas se desenvolvem para pupas, representada pela taxa de transição σ_l ; novamente consideramos mortalidade apenas no modelo 2.3. A dinâmica da população $P(t)$ se dá analogamente. A população $M(t)$ no modelo 2.1 cresce conforme a taxa de transição σ_p e diminui conforme essa população vai morrendo μ_m , já nos modelos 2.2 e 2.3, acrescentamos um termo logístico $\left(1 - \frac{M(t)}{k_m}\right)$ para controlar o crescimento populacional.

Note que o modelo 2.1 é um sistema linear de EDOs, então é esperado que tenha apenas um ponto fixo (ponto em que todas as derivadas são 0) e que os resultados ob-

Tabela 2.1: Resumo dos parâmetros.

Símbolo	Parâmetro	Unidade	Domínio	Valor
σ_e	Taxa de transição per-capita entre E e L	dia^{-1}	$[0,1]$	$\frac{1}{5}$
σ_l	Taxa de transição per-capita entre L e P	dia^{-1}	$[0,1]$	$\frac{1}{7}$
σ_p	Taxa de transição per-capita entre P e M	dia^{-1}	$[0,1]$	$\frac{1}{3}$
μ_e	Taxa de mortalidade per-capita de E	dia^{-1}	$[0,1]$	-
μ_l	Taxa de mortalidade per-capita de L	dia^{-1}	$[0,1]$	-
μ_p	Taxa de mortalidade per-capita de P	dia^{-1}	$[0,1]$	-
μ_m	Taxa de mortalidade per-capita de M	dia^{-1}	$[0,1]$	$\frac{1}{7}$
ϕ_m	Taxa de ovoposição de um mosquito fêmea	dia^{-1}	$(0,\infty)$	-
k_m	Capacidade de suporte para a população M	-	$(0,\infty)$	100

tidos deste sejam relativamente simples e não representativos da realidade. As equações que o constituem são razoavelmente acoplados: as entradas de um compartimento é a saída do anterior, por isso podemos considerar a entrada e a saída do sistema como um todo, dependem dos parâmetros ϕ_m e μ_m e é esperado que a estabilidade desse sistema dependa desses parâmetros. Enquanto isso, o modelo 2.2 é um sistema não-linear devido ao termo logístico adicionado na população $M(t)$, o que vai acarretar o surgimento de um segundo ponto fixo no sistema. É esperado que a estabilidade ainda dependa dos mesmos parâmetros do primeiro modelo devido à semelhança entre eles, mas este novo ponto fixo vai proporcionar um comportamento diferente no sistema. Finalmente, o modelo 2.3 também é constituído de um sistema de EDOs não-linear mas perde sua característica de acoplamento pois estamos considerando agora a taxa de mortalidade dada por estratégias de combate vetorial, nos outros compartimentos. Assim o que sai de uma determinada população não vai toda para o outro compartimento como acontecia antes. Logo, é esperado que sua estabilidade não dependa apenas de dois parâmetros.

Na Tabela 2.1, não especificamos os valores dos novos parâmetros de mortalidade adicionados pois estes serão variados nas simulações para determinar o valor mínimo de cada um para erradicar a população dos mosquitos.

2.2 Métodos

Para estudar a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio de sistemas não-lineares localmente lineares, podemos nos restringir a uma análise local ao redor do ponto fixo. Para isso, calculamos a matriz Jacobiana do sistema e a avaliamos no ponto de equilíbrio. Mais especificamente, é possível aproximar linearmente o sistema autônomo $\mathbf{X}' = F(\mathbf{X})$ por $\mathbf{X}' = J(P) \cdot \mathbf{X}$ onde $J(P)$ é a matriz Jacobiana de F calculada no ponto de equilíbrio P :

$$J(P) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Assim, os autovalores dessa matriz são calculados e é possível concluir que se todos tiverem parte real negativa, o ponto fixo é localmente estável, ou seja as soluções que começam próximas a ele permanecem próximas; enquanto que se um dos autovalores tiver parte real positiva, podemos concluir que o ponto fixo é instável, ou seja, as soluções que começam próximas a ele se distanciam. Essas afirmações estão devidamente provadas em [13],[14].

Quanto aos pontos de bifurcação do sistema (os pontos no domínio dos parâmetros em que o comportamento do sistema muda radicalmente), estes são determinados a partir do cálculo dos autovalores para um determinado conjunto de valores dos parâmetros do sistema enquanto variamos um deles no seu domínio. Para os modelos construídos, quando temos dois pontos de equilíbrio, estes tem sempre comportamento inverso, ou seja, quando o primeiro é estável, o outro é instável e vice e versa. Portanto, a bifurcação ocorre quando o sinal de um dos autovalores é trocado. Mais especificamente, queremos estudar, dado um conjunto de valores para os parâmetros, quando que a população dos mosquitos cresce indefinidamente, converge para um certo ponto fixo ou vai para 0.

Um algoritmo do método de Runge-Kutta de quarta ordem foi utilizado nas simulações numéricas para os sistemas de EDOs, o software SCILAB foi usado para a análise espectral dos autovalores e o software Origin foi usado para plotar os gráficos.

Capítulo 3

Resultados & Discussões

Nessa seção, mostraremos a análise de estabilidade dos modelos, com foco maior no 2.3, onde será feito um estudo sobre os valores mínimos dos parâmetros de mortalidade para que o ponto fixo trivial seja estável, representando a extinção da população.

3.1 Modelo 1

O sistema linear do primeiro modelo possui apenas um único ponto de equilíbrio e é o trivial: $(E, L, P, M) = (0, 0, 0, 0)$, sem a presença de mosquitos. Para qualquer ponto, sua matriz jacobiana é dada por 3.1

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma_e & 0 & 0 & \phi_m \\ \sigma_e & -\sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\mu_m \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

O sinal das raízes do polinômio característico de sua Jacobiana calculada no seu único ponto fixo depende de dois parâmetros: ϕ_m e μ_m . Caso $\mu_m > \phi_m$, todos os autovalores da matriz 3.1 têm parte real negativa (sendo duas delas complexas e duas reais) e portanto, o ponto fixo é estável. Caso contrário, se $\mu_m < \phi_m$, existe um autovalor com parte real positiva e os restantes têm parte real negativa (um complexo e seu conjugado, e outro real), o que faz com que o ponto fixo seja instável. Esse comportamento se dá devido à bifurcação presente quando $\phi_m = \mu_m$, melhor ilustrado no diagrama da figura 3.1.

O eixo vertical representa a população M (quarta coordenada do ponto de equilíbrio)

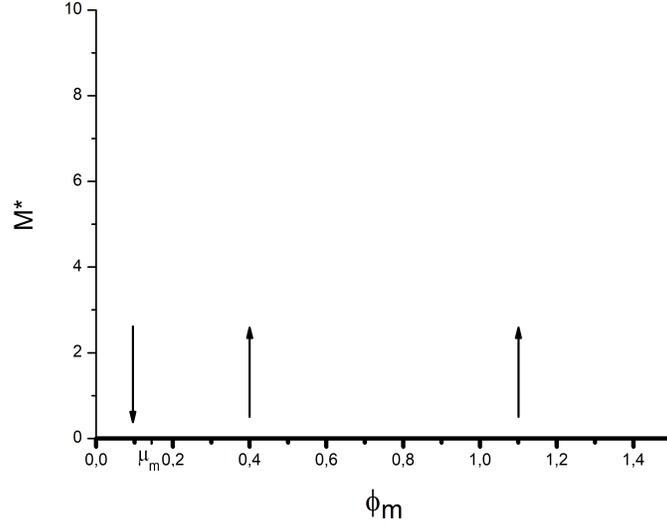


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação com os parâmetros assumindo os valores mostrados na Tabela 2.1.

e o eixo horizontal, os diferentes valores de ϕ_m . A curva destacada é a quarta coordenada da solução dada pelo ponto fixo ($M=0$). As flechas apontando para fora da curva, representam que a solução dada pelo ponto de equilíbrio é instável, enquanto que uma flecha apontando em direção a curva indica que o ponto é estável. É fácil ver que ocorre uma bifurcação em $\phi_m = \mu_m$.

Como existe apenas um ponto de equilíbrio, se este for instável a população de mosquitos cresce indefinidamente, caso contrário, a população irá tender ao ponto $(0,0,0,0)$ para uma quantidade de tempo suficientemente grande.

3.2 Modelo 2

O sistema não-linear 2.2 têm dois pontos de equilíbrio: o trivial, o qual vamos denotar por $\mathbf{0}$ a partir de agora e $P^* = (E, L, P, M) = k_m(\phi_m - \mu_m) \left(\frac{1}{\sigma_e}, \frac{1}{\sigma_l}, \frac{1}{\sigma_p}, \frac{1}{\phi_m} \right)$ é o segundo ponto fixo. Sua matriz jacobiana geral é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma_e & 0 & 0 & \phi_m \\ \sigma_e & -\sigma_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p - \frac{\sigma_p M(t)}{k_m} & -\mu_m - \frac{\sigma_p P(t)}{k_m} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Calculando sua matriz Jacobiana em $\mathbf{0}$ nos dá a mesma matriz do primeiro modelo e portanto, tem o mesmo polinômio característico. Assim a conclusão sobre o ponto do fixo trivial é a mesma que a do primeiro modelo: o ponto fixo trivial será instável se $\phi_m > \mu_m$ e estável caso contrário. Contudo, o termo logístico adicionado impede a população de crescer indefinidamente devido ao segundo ponto fixo.

O sinal dos autovalores da matriz jacobiana do sistema calculada em P^* ainda depende dos parâmetros ϕ_m e μ_m mas a dependência é contrária à do ponto $\mathbf{0}$: se $\phi_m > \mu_m$, então todos os autovalores têm parte real negativa e portanto o ponto fixo não-trivial é estável, enquanto que se $\phi_m < \mu_m$, um dos autovalores tem parte real positiva e por isso o ponto é instável.

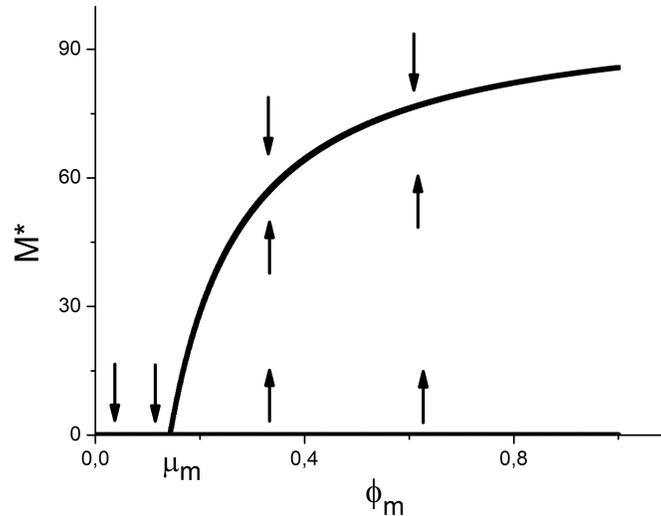


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação com os parâmetros assumindo os valores da Tabela 2.1.

Note que uma bifurcação ocorre novamente em $\phi_m = \mu_m$, e nesse ponto, os pontos trocam de estabilidade. Por [15], afirmamos que neste ponto, ocorre uma bifurcação transcritical. Nesse modelo, a população de mosquitos não vai crescer indefinidamente já que vai convergir para um dos pontos críticos: se $\phi_m < \mu_m$, a população vai toda morrer eventualmente e caso $\phi_m > \mu_m$, ela vai convergir para ponto fixo não-trivial. Tipicamente, os valores de ϕ_m são maiores que os de μ_m . Essa relação nos mostra a importância do controle vetorial.

Todas as simulações vão ter como ponto inicial $(E, L, P, M) = (1, 0, 0, 0)$. A

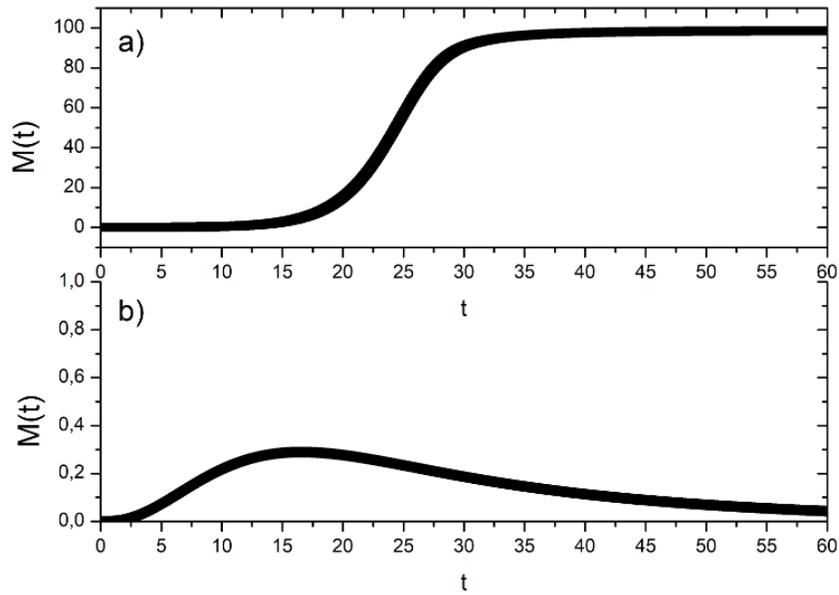


Figura 3.3: Série temporal da população dos mosquitos para o modelo 2.2.

simulação mostrada na figura 3.3 mostra exatamente o que acontece caso tenhamos o parâmetro ϕ_m maior ou menor que o ponto de bifurcação. Usando os parâmetros mostrados na Tabela 2.1 e colocando ϕ_m como 10 na Figura 3.3a e, como $\frac{1}{25}$ na figura 3.3b, note que no primeiro caso ($\phi_m > \mu_m$) a população de mosquitos converge para a quarta coordenada do ponto fixo não trivial e no segundo ($\phi_m < \mu_m$), converge para 0.

3.3 Modelo 3

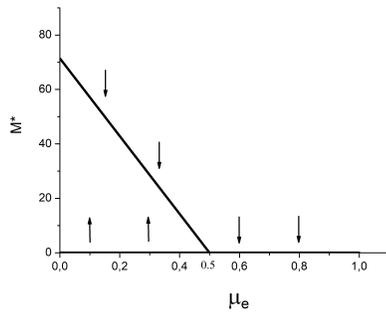
O sistema não-linear 2.3 também possui dois pontos de equilíbrio: o trivial e

$$P^* = (E, L, P, M) = k_m(\alpha - \beta) \left(\frac{\phi_m}{\alpha(\sigma_e + \mu_e)}, \frac{\phi_m \sigma_e}{\alpha(\sigma_e + \mu_e)(\sigma_l + \mu_l)}, \frac{\mu_m}{\beta \sigma_p}, \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3.3)$$

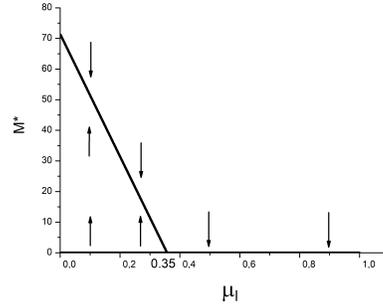
onde $\alpha = \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi_m$ e $\beta = \mu_m(\mu_e + \sigma_e)(\mu_l + \sigma_l)(\mu_p + \sigma_p)$.

Nesse modelo, os sinais de seus autovalores não dependem apenas dos parâmetros de oviposição e mortalidade, mas também de outros parâmetros. Mais especificamente, dependem dos parâmetros α e β explicitados acima. E a relação entre eles é parecida com a dos outros modelos: para o ponto fixo trivial, se $\alpha < \beta$ cada autovalor tem parte real negativa e se $\alpha > \beta$, um dos autovalores tem parte real positiva. Logo, no primeiro caso, o ponto fixo trivial é estável, enquanto que no segundo, ele é instável. Já para o ponto P^* , temos a relação oposta: se $\alpha > \beta$ o ponto é estável e caso $\alpha < \beta$ é instável.

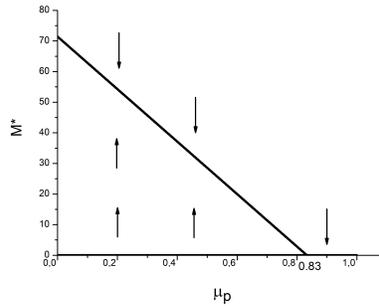
Agora, para determinar o mínimo de controle vetorial em cada população (E,L,P) necessário para extinguir a população de mosquitos, vamos analisar cada parâmetro de mortalidade separadamente, isto é variamos um dos parâmetros de mortalidade e zeramos os outros dois. Assim, obtemos os diagramas de bifurcação apresentados na figura 3.4.



(a) Diagrama de bifurcação para μ_e



(b) Diagrama de bifurcação para μ_l



(c) Diagrama de bifurcação para μ_p

Figura 3.4: Diagrama de bifurcação para os três casos: zerando μ_p e μ_l e variando μ_e em a; zerando μ_p e μ_e e variando μ_l em b; zerando μ_e e μ_l e variando μ_p em c

Podemos calcular o ponto exato da bifurcação utilizando a relação $\alpha = \beta$. Portanto, usando os parâmetros da Tabela 2.1 e colocando $\phi_m = \frac{1}{2}$ a fim de melhor visualização dos gráficos a seguir, o ponto de bifurcação na Figura 3.4a é $\mu_e = \frac{1}{2}$, na Figura 3.4b é $\mu_l = \frac{5}{14}$ e na Figura 3.4c é $\mu_p = \frac{5}{6}$.

Simulações foram executadas para ilustrar os resultados obtidos.

Na Figura 3.5a foi usado $\mu_e = 0,30$ e na Figura 3.5b, $\mu_e = 0,55$. Na Figura 3.6a, colocamos $\mu_l = 0,30$ e na Figura 3.6b, $\mu_l = 0,45$. Na Figura 3.7a, usamos $\mu_p = 0,75$ e na Figura 3.7b $\mu_p = 0,95$.

Finalmente, usando os valores usados nas simulações em que as populações não convergem para 0 em uma mesma simulação, ou seja $\mu_e = 0,30, \mu_l = 0,30, \mu_p = 0,75$, a

Figura 3.8 mostra que a população de mosquitos eventualmente morrerá, evidenciando a importância da combinação das estratégias de controle vetorial em toda fase do mosquito.

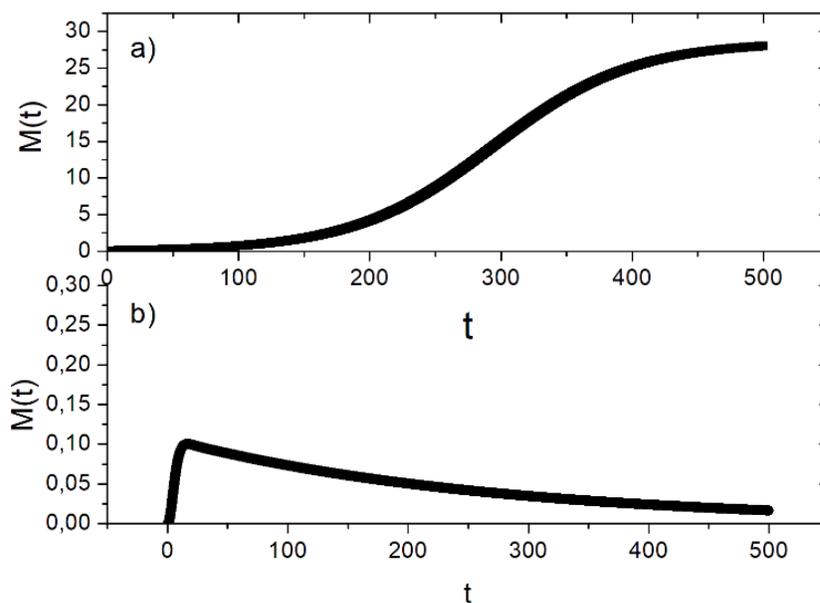


Figura 3.5: Série temporal para a população M considerando apenas μ_e . (a) $\mu_e = 0.30$. (b) $\mu_e = 0.55$.

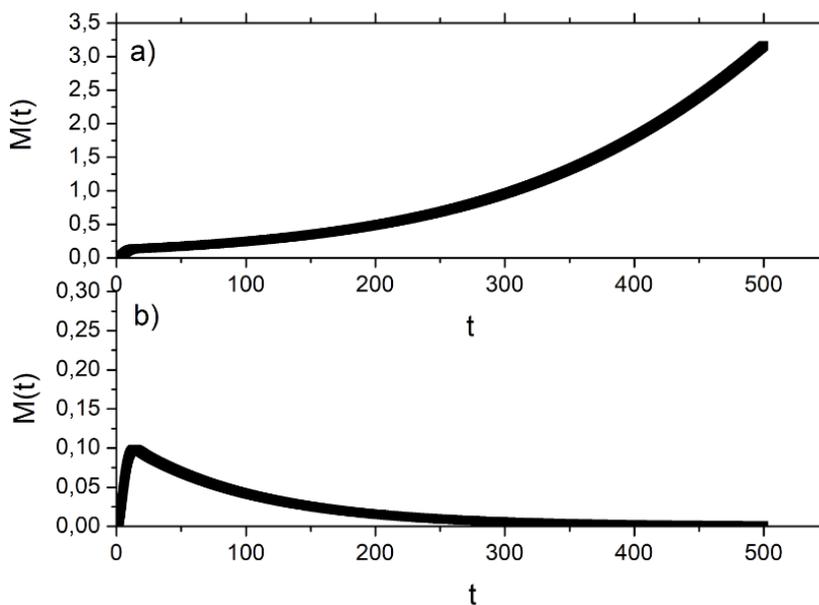


Figura 3.6: Série temporal para a população M considerando apenas μ_l . (a) $\mu_l = 0.30$. (b) $\mu_l = 0.45$.

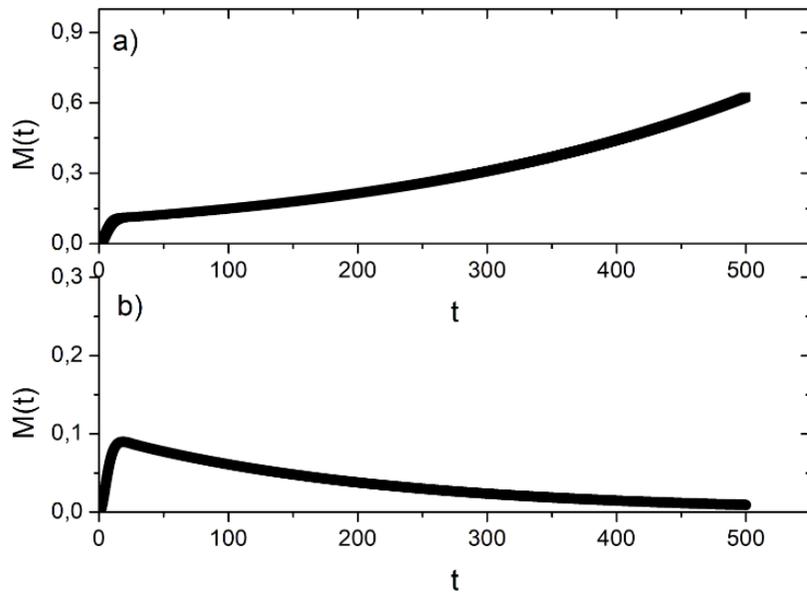


Figura 3.7: Série temporal para a população M considerando apenas μ_p . (a) $\mu_p = 0.75$.
 (b) $\mu_p = 0.95$.

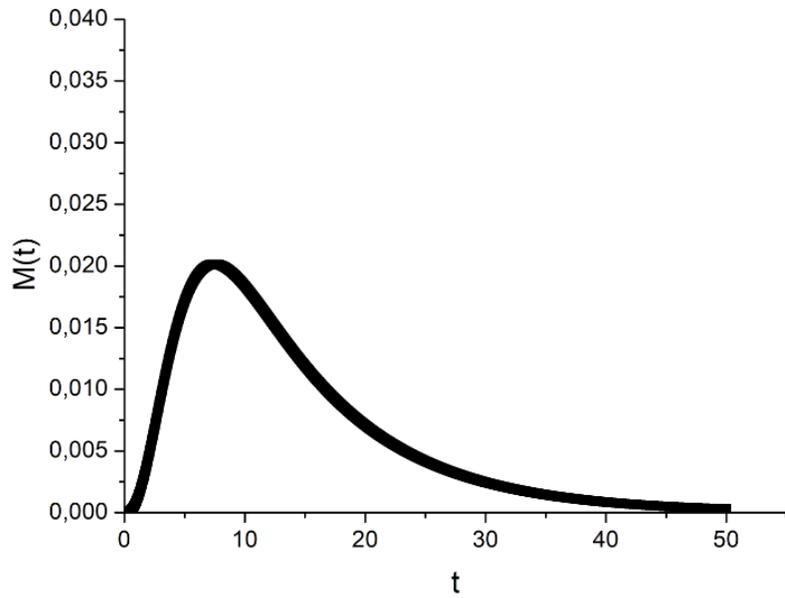


Figura 3.8: Série temporal para a população M considerando controle vetorial em todas as populações.

Utilizando a relação $\alpha = \beta$ e adotando como variáveis independentes μ_l e μ_p , a função

$$\mu_e = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi_m}{\mu_m (\mu_l + \sigma_l) (\mu_p + \sigma_p)} - \sigma_e \quad (3.4)$$

Utilizando os valores da tabela 2.1, mas com $\phi_m = \frac{1}{2}$, podemos plotar o gráfico de 3.4, visto na figura 3.9.

Note que a região abaixo da curva é a região na qual $\beta < \alpha$ e é onde a população converge para o ponto fixo não trivial enquanto que acima da curva é a região na qual $\beta > \alpha$ e é onde a população converge para o ponto fixo trivial.

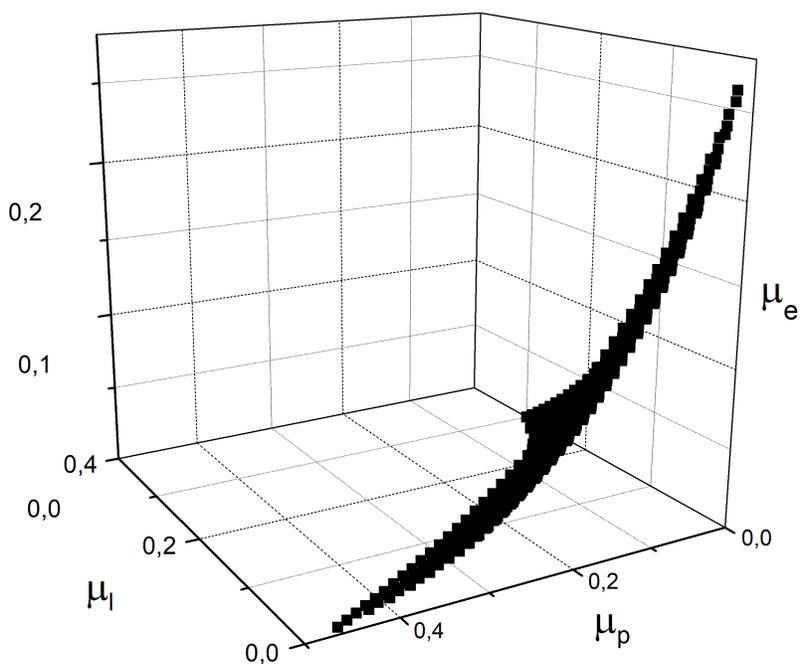


Figura 3.9: Gráfico da função dada pela equação 3.4.

Capítulo 4

Alterações & Atividades

4.1 Alterações

O projeto inicial previa modelar outros processos de propagação de informação, como problemas de escoamento e enchentes, contudo, devido a uma literatura ampla e diversificada sobre o assunto, o bolsista junto com seus orientadores decidiram fazer um modelo para um processo epidemiológico, apenas, mas com parâmetros que variam com o tempo, além de incorporar conceitos recentes relacionados a dinâmica do sistema. A alteração também se deve ao fato de que o Brasil atualmente passa por um surto de Febre Amarela, que já causou 81 mortes desde o começo de Julho de 2017, e mais de 200, desde 2016, segundo o Ministério da Saúde. Assim a mudança no projeto é pontual dada a situação do país.

4.2 Atividades Realizadas

O bolsista participou de eventos no segundo semestre de 2018 apresentando o trabalho em questão. O primeiro foi o V Workshop and School on Dynamics, Transport and Control in Complex Networks realizado entre os dias 26 de Agosto a 1 de Setembro, nas dependências do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, na cidade de Cachoeira Paulista - SP, onde o bolsista participou como ouvinte e apresentou pôster em sessão técnica. O segundo foi o XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), realizado no IMECC/UNICAMP na cidade de Campinas-SP entre os dias 17 a 21 de Setembro, onde o bolsista participou como ouvinte e apresentando pôster

em sessão técnica, sob o nome *A brief mathematical model of Yellow Fever*, ganhando destaque como um dos 20 trabalhos mais bem avaliados na categoria Iniciação Científica.

Além disso, um artigo sobre o trabalho foi submetido em Dezembro de 2018, à revista Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA) da SBMAC, sob o nome *Minimum vector control intensity to get a stable fixed point in a mosquito dynamic model* e aguarda avaliação.

A experiência adquirida pelo bolsista na iniciação científica o ajudou em duas unidades curriculares de sua graduação em Bacharelado em Matemática Computacional, na Universidade Federal de São Paulo: Modelagem Computacional e Resolução de Problemas via Modelagem Matemática, nos anos de 2018 e 2019. Em ambas disciplinas, foram apresentados problemas envolvendo modelagem de epidemias.

Capítulo 5

Conclusões

Nossos resultados, baseados na análise de estabilidade e simulações numéricas, evidenciam a importância da inclusão do parâmetro de capacidade do suporte do ambiente k_m (representado na transição entre o modelo 1 e 2) e os parâmetros de controle vetorial (diferença entre o modelo 2 e 3). Para os sistemas não-lineares (segundo e terceiro), tipicamente o valor de ϕ_m são bem maiores que o de μ_m . O controle vetorial possibilita o sistema alcançar soluções não triviais estáveis até mesmo para valores mais realistas de ϕ_m .

É notável também que o controle vetorial atuando em diferentes etapas da população separadamente demanda uma intensidade muito grande, contudo, quando combinamos estratégias de controle nos ovos (remoção mecânica e química), larvas (remoção e química) e pupas (remoção) é possível obter soluções não triviais até mesmo para valores maiores de ϕ_m , mesmo sem controle na população de mosquitos.

Bibliografia

- [1] C. T. Codeço, D. A. Villela, and F. C. Coelho, “Estimating the effective reproduction number of dengue considering temperature-dependent generation intervals,” *Epidemics*, vol. 25, pp. 101–111, 2018.
- [2] S. M. Raimundo, M. Amaku, and E. Massad, “Equilibrium analysis of a yellow fever dynamical model with vaccination,” *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2015, 2015.
- [3] B. Wahid, A. Ali, S. Rafique, and M. Idrees, “Global expansion of chikungunya virus: mapping the 64-year history,” *International Journal of Infectious Diseases*, vol. 58, pp. 69 – 76, 2017.
- [4] R. Lowe, C. Barcellos, P. Brasil, O. G. Cruz, N. A. Honório, H. Kuper, and M. S. Carvalho, “The zika virus epidemic in brazil: From discovery to future implications,” *Int J Environ Res Public Health*, vol. 15(1):96, pp. 1–18, 2018.
- [5] L. Barsante, R. Cardoso, J. Luiz Acebal, C. Silva, and A. Eiras, “Modelo entomológico determinístico sob efeito da pluviosidade para o aedes aegypti e o aedes albopictus,” *TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 19 n 2, pp. 289–303, 2018.
- [6] L. B. L. Santos, S. T. R. Pinho, R. F. S. Andrade, and et al, “Periodic forcing in a three-level cellular automata model for a vector-transmitted disease,” *Physical Review E*, vol. 80, 2009.
- [7] H. M. Yang, J. L. Boldrini, A. C. Fassoni, and et al, “Fitting the incidence data from the city of campinas, brazil, based on dengue transmission modellings considering time-dependent entomological parameters,” *PLOS One*, 2016.

- [8] F. B. Augusto, S. Bewick, and W. F. Fagan, “Mathematical model of zika virus with vertical transmission,” *Infectious Disease Modelling*, vol. 2, pp. 244–267, 2017.
- [9] L. Z. Goldani, “Yellow fever outbreak in brazil, 2017,” *Brazilian Society of Infectious Diseases*, vol. 21, no. 2, pp. 123–124, 2017.
- [10] G. Phaijoo and D. Gurung, “Mathematical model of dengue disease transmission dynamics with control measures,” *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, vol. 23, pp. 1–12, 2017.
- [11] G. Adamu, M. Bawa, M. Jiya, and U. Chado, “A mathematical model for the dynamics of zika virus via homotopy perturbation method,” *Journal of Applied Sciences and Environmental Management*, vol. 21, p. 615, 2017.
- [12] R. M. Lana, M. M. Morais, T. F. M. d. Lima, T. G. d. S. Carneiro, L. M. Stolerma, J. P. C. dos Santos, J. J. C. Cortés, A. E. Eiras, and C. T. Codeço, “Assessment of a trap based aedes aegypti surveillance program using mathematical modeling,” *PLOS One*, vol. 13, pp. 1–16, 2018.
- [13] D. L. Kreider, R. G. Kuller, and D. R. Ostberg, *Elementary Differential Equations*. Edgard Blucher, 1972.
- [14] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Westview Press, 2003.
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.