

sid.inpe.br/mtc-mxx/aaaa/00.00.00.00-XXX

ÓRBITAS PARABÓLICAS E A EQUAÇÃO DE KEPLER

Leonardo de Oliveira Ferreira

Relatório Final de Iniciação Científica,
orientada pelo Dr. Hélio Koiti Kuga e
pela Dra. Paula Cristiane Pinto
Mesquita Pardal.

URL do documento original:
<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE
São José dos Campos
2016

ÓRBITAS PARABÓLICAS E A EQUAÇÃO DE KEPLER

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Leonardo de Oliveira Ferreira (Universidade de São Paulo, Bolsista
PIBIC/CNPq)
E-mail: leonardo.of@webmail.eel.usp.br

Helio Koiti Kuga (ITA/DCTA, Orientador)
E-mail: helio.kuga@inpe.br

Paula Cristiane Pinto Mesquita Pardal (DEBAS/EEL/USP, Orientadora)
E-mail: paulapardal@usp.br

COLABORADORES

Dra. Roberta Veloso Garcia (DEBAS/EEL/USP)

Julho de 2016

Esta ficha será revisada pelo SID.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Cutter Ferreira, Leonardo de Oliveira.
Órbitas quase parabólicas e a equação de Kepler / Leonardo de Oliveira Ferreira - São José dos Campos: INPE, 2016.

Relatório Final (Iniciação Científica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2016.
Orientador: Hélio Koiti Kuga e Paula Cristiane Mesquita Pardal.

1. Dinâmica Orbital. 2. Equação de Kepler. 3. Métodos Numéricos.
I. Título

CDU



Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

[Informar aqui sobre marca registrada](#)

FOLHA DE APROVAÇÃO
CONFECCIONADA PELO SPG E INCLUÍDA PELO SID

RESUMO

Este trabalho de Iniciação Científica tem como objetivo estudar métodos utilizados para contornar o problema da solução da equação de Kepler, uma equação transcendental que motivou diversos desenvolvimentos matemáticos ao longo dos séculos. Para órbitas quase parabólicas, são propostos dois métodos clássicos para a aproximação de soluções da equação de Kepler: o Método das Aproximações Sucessivas, que utiliza uma expansão em série envolvendo um pequeno parâmetro; e o Método de Gauss, que apresenta um método prático de substituições sucessivas. Para a realização do projeto, foi implementado computacionalmente o Método de Newton-Raphson, aplicado para as equações de Kepler nas formas elíptica e hiperbólica, utilizado como referência. O Método das Aproximações Sucessivas, cujo desenvolvimento analítico só estava disponível até os quatro primeiros termos, foi estendido até os oito primeiros termos e adaptado para órbitas quase parabólicas com excentricidade pouco maior do que a unidade (órbitas hiperbólicas). Os três métodos foram implementados em linguagem de programação MATLAB. Para obtenção e posterior análise dos resultados, foram varridos diferentes intervalos de excentricidade e de anomalia média, para o caso elíptico, e de excentricidade e do equivalente da anomalia média, para o caso hiperbólico. Os resultados obtidos nos Métodos de Newton-Raphson e das Aproximações Sucessivas, anomalia excêntrica para órbitas elípticas e seu equivalente para órbitas hiperbólicas, foram comparados por meio do erro relativo. Os métodos também foram comparados pelo tempo de execução de seus algoritmos.

Palavras-chave: Dinâmica Orbital. Equação de Kepler. Métodos Numéricos.

NEAR PARABOLIC ORBITS AND KEPLER'S EQUATION

ABSTRACT

This work is meant to study methods used to solve the problem for the solution of Kepler's equation, a transcendental equation that motivated several mathematical developments over the centuries. For near parabolic orbits, two classical methods are proposed for the approximation of solutions for Kepler's equation: The Method of Successive Approximations, that uses a series expansion with a small parameter; and Gauss' Method, that presents a practical method of successive substitutions. For performing this project, Newton's Method applied for Kepler's equation in elliptic and hyperbolic form was implemented and used as reference. The Method of Successive Approximations, presented in the literature with the first four terms, was expanded to the first eight terms and adapted for near parabolic orbits with the eccentricity slightly larger than the unity (hyperbolic orbits). All three methods were implemented in the MATLAB programming language. To obtain an analyze the results different intervals of eccentricity and mean anomaly were used as input values, in the case of elliptic orbits, and different intervals of eccentricity and the analogous to the mean anomaly, for the case of hyperbolic orbits. The results obtained for Newton's Method and the Method of Successive Approximations were compared using the relative error. The methods were also compared in terms of the processing time of their algorithms.

Keywords: Orbital Dynamics. Kepler's Equation. Numerical Methods.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 - Distâncias de um ponto aos focos em uma elipse..	17
Figura 2.2 - Ponto arbitrário na elipse	19
Figura 2.3 - Elipse com algumas variáveis importantes indicadas	21
Figura 3.1 - Exemplo de aplicação do método de Newton-Raphson para uma função genérica $Y=f(X)$	27
Figura 3.2 - Gráfico de curvas de nível relacionando o número de iterações com a excentricidade e a anomalia média.	29
Figura 3.3 - Gráfico relacionando o número de iterações com a anomalia média e com a excentricidade.	31
Figura 3.4 - Gráfico obtido com a alteração nos incrementos.	32
Figura 3.5 - Gráfico de barras comparando as equações na forma de séries de potência e na forma simplificada.	34
Figura 3.6 - Gráfico de barras comparando as equações na forma de série de potência e na forma racional.	35
Figura 3.7 - Gráfico de barras comparando as equações na forma simplificada e na forma racional.....	36
Figura 4.1 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iteraões com a excentricidade e a anomalia média.....	53
Figura 4.2 - Anomalia excêntrica em função da excentricidade e de M (Método de Newton).	54
Figura 4.3 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iteraões com a excentricidade e a anomalia média para órbitas quase parabólicas.	55
Figura 4.4 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iteraões com a excentricidade e a N para órbitas quase parabólicas.	56

Figura 4.5 - Gráfico de contorno que relaciona a solução (anomalia excêntrica) com a excentricidade e a anomalia média..	57
Figura 4.6 - Comparativo entre as soluções com a utilização de diferentes números de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson	58
Figura 4.7 - Gráfico de contorno que relaciona a solução (H) com a excentricidade e N.....	59
Figura 4.8 - Comparativo entre as soluções com a utilização de diferentes números de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson	60
Figura 4.9 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média para cinco termos.....	62
Figura 4.10- Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média para seis termos.....	63
Figura 4.11 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média para sete termos.	64
Figura 4.12 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média para oito termos.	65
Figura 4.13 - Solução com o uso de sete termos.....	66
Figura 4.14 - Solução com o uso de oito termos.....	67
Figura 4.15 - Comparativo entre as soluções com a utilização de um número ímpar de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson...	68
Figura 4.16 - Comparativo entre as soluções com a utilização de um número par de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson.....	69
Figura 4.17 - Gráfico com os valores dos termos da série até o oitavo termo .	70

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 3.1 - Pontos desconsiderados na geração do gráfico de curvas de nível	30
Tabela 3.2 - Valores das médias do número de iterações para a utilização das três equações para a aproximação inicial.	36
Tabela 4.1 - Tempos de processamento para $e = 0,999$	71
Tabela 4.2 - Tempos de processamento para $e = 0,900$	72
Tabela 4.3 - Tempos de processamento para $e = 1,001$	73
Tabela 4.4 - Tempos de processamento para $e = 1,100$	74

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	15
2 A EQUAÇÃO DE KEPLER	17
2.1. MOVIMENTO ELÍPTICO	17
2.2. MOVIMENTO HIPERBÓLICO	25
3 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KEPLER.....	27
3.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	27
3.1.1. VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON- RAPHSON.....	29
3.1.2. EQUAÇÕES PARA A APROXIMAÇÃO INICIAL.....	32
3.2. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS	37
3.2.1. ALGORITMO PARA ÓRBITAS ELÍPTICAS	43
3.2.2. ALGORITMO PARA ÓRBITAS HIPERBÓLICAS	44
3.3. MÉTODO DE GAUSS.....	44
4 RESULTADOS.....	53
4.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	53
4.2. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS	56
4.2.1. ÓRBITAS ELÍPTICAS	56
4.2.2. ÓRBITAS HIPERBÓLICAS	58
4.3. MÉTODO DE GAUSS.....	60
4.4. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS.....	60
4.4.1. ÓRBITAS ELÍPTICAS	61
4.4.2. ÓRBITAS HIPERBÓLICAS	65
4.4.3. TEMPO DE PROCESSAMENTO	70
5 CONCLUSÃO	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

1 INTRODUÇÃO

A equação de Kepler, que fornece uma relação entre a anomalia excêntrica e o tempo, é uma das mais famosas equações transcendentais e motivou diversos desenvolvimentos matemáticos. Um grande número de soluções gráficas e analíticas foi proposto pelos mais proeminentes matemáticos desde Isaac Newton e, com o advento da era moderna de voos espaciais, novos algoritmos foram desenvolvidos para a obtenção de aproximações na busca de solução da equação (BATTIN, 1999).

Entretanto, para órbitas quase parabólicas as formas elíptica e hiperbólica da equação de Kepler tendem a se tornar indeterminadas, pois, à medida que o semieixo maior cresce, as anomalias média e excêntrica se tornam desprezivelmente pequenas (BATTIN, 1999).

Métodos computacionais podem ser utilizados para abordar o problema. Neste projeto, propõe-se estudar três métodos, com o intuito de avaliar o comportamento da equação de Kepler nas vizinhanças de uma órbita parabólica: o Método de Newton-Raphson, cuja solução será adotada como referência; o Método das Aproximações Sucessivas; e o Método de Gauss. Os resultados obtidos serão avaliados de acordo com os seguintes critérios: tempo de convergência dos métodos (submetidos aos mesmos critérios de convergência); e erros relativos entre os métodos.

O Método de Newton-Raphson é um método simples e muito utilizado para a aproximação de raízes de equações por iterações sucessivas. O Método das Aproximações Sucessivas envolve a obtenção de termos que podem ser utilizados na expansão em série do método para aproximar uma solução para a anomalia excêntrica. O Método de Gauss é um método prático que envolve substituições sucessivas para a aproximação de soluções para a equação de Kepler em órbitas quase parabólicas, com o estabelecimento de uma tolerância. A seguir, os métodos, os resultados e as análises serão discutidos.

2 A EQUAÇÃO DE KEPLER

2.1. MOVIMENTO ELÍPTICO

Para uma cônica, a excentricidade é definida como (CAMARGO; BOULOS, 2005)

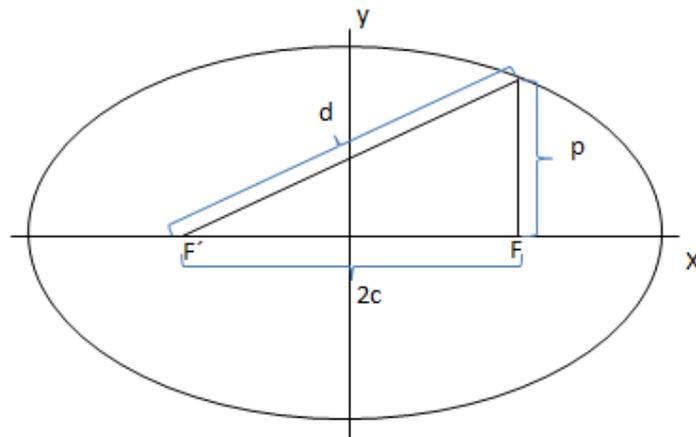
$$e \equiv \frac{c}{a} \quad (2.1)$$

Sendo c a distância do centro ao foco e a o semieixo maior.

Para uma elipse, parâmetro p , conhecido como semi-latus rectum, é dado por (KUGA et al., 2012)

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.2)$$

Figura 2.1 - Distâncias de um ponto aos focos em uma elipse.



Fonte: Produção do autor.

A Equação 2.2 pode ser desenvolvida partindo da igualdade abaixo, conhecida para elipses (CAMARGO; BOULOS, 2005)

$$d + p = 2a \quad (2.3)$$

E portanto

$$d = 2a - p \quad (2.4)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado

$$d^2 = 4a^2 - 4ap + p^2 \quad (2.5)$$

Para o triângulo mostrado na Figura 2.1, a relação de Pitágoras é dada por

$$d^2 = p^2 + 4c^2 \quad (2.6)$$

Subtraindo a Equação 2.6 da Equação 2.5, obtemos

$$4a^2 - 4ap - 4c^2 = 0 \quad (2.7)$$

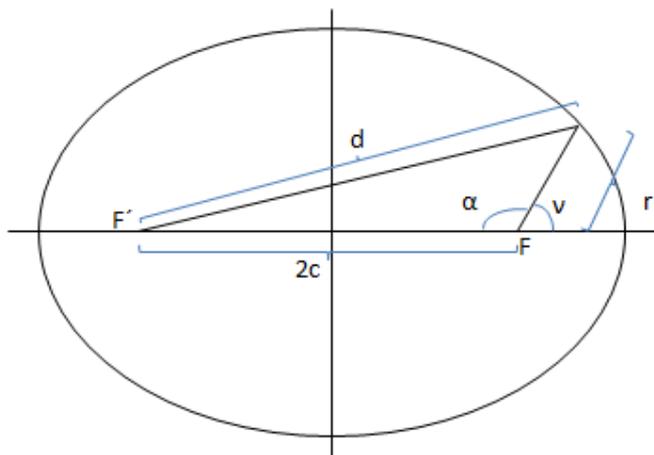
Dividindo a equação por quatro e substituindo a excentricidade de acordo com a Equação 2.1

$$a^2 - ap - a^2e^2 = 0 \quad (2.8)$$

Rearranjando para isolar o parâmetro p e simplificando, obtemos a Equação 2.2.

A demonstração da equação polar para um elipse pode ser feita com o auxílio da Figura 2.2 abaixo.

Figura 2.2 - Ponto arbitrário na elipse.



Fonte: Produção do autor.

Sabe-se que, para a elipse, é válida a relação abaixo, sendo r a distância de um ponto na elipse ao foco F

$$r + d = 2a \quad (2.9)$$

Assim, elevando ambos os lados ao quadrado

$$d^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad (2.10)$$

Pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo mostrado na Figura 2.2

$$d^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr \cos \alpha \quad (2.11)$$

Subtraindo a Equação 2.11 da Equação 2.10, obtemos

$$4a^2 - 4ar - 4c^2 + 4cr \cos \alpha = 0 \quad (2.12)$$

Simplificando e substituindo a excentricidade de acordo com a Equação 2.1

$$a - r - ae^2 + er \cos \alpha = 0 \quad (2.13)$$

Rearranjando

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \alpha} \quad (2.14)$$

Como $\alpha = 180^\circ - f$

$$\cos \alpha = -\cos f \quad (2.15)$$

Substituindo a Equação 2.15 na Equação 2.14

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (2.16)$$

Substituindo a Equação 2.2 na Equação 2.16, pode-se obter a equação polar para uma elipse

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.17)$$

O ângulo f é também conhecido como anomalia verdadeira.

A dedução da Equação de Kepler parte da inversão da Equação 2.17 (KUGA et al., 2012)

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos f}{p} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e \cos f}{a(1 - e^2)} \quad (2.18)$$

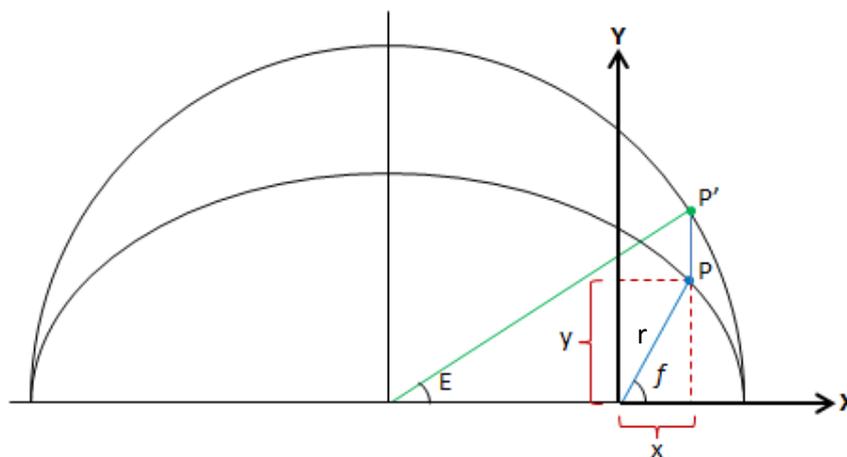
Derivando ambos os lados em relação a f

$$\frac{d}{df} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{df} = \frac{-e \sin f}{a(1 - e^2)} \quad (2.19)$$

Rearranjando

$$r^2 df = \frac{a(1 - e^2)}{e \sin f} dr \quad (2.20)$$

Figura 2.3 - Elipse com algumas variáveis importantes indicadas.



Fonte: Produção do autor

Pela Figura 2.3 acima, as seguintes igualdades podem ser observadas

$$x = r \cos f = a \cos E - c = a(\cos E - e) \quad (2.21)$$

$$y = r \sin f \quad (2.22)$$

A Equação 2.17 pode ser escrita na forma

$$p = r + e r \cos f \quad (2.23)$$

Pela Equação 2.2, Equação 2.21 e Equação 2.23

$$a(1 - e^2) = r + e a (\cos E - e) \quad (2.24)$$

Isolando r

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.25)$$

Ou seja,

$$dr = ae \sin E dE \quad (2.26)$$

Também pela Figura 2.3 e pela Equação 2.21 e Equação 2.25

$$\begin{aligned} y^2 = r^2 - x^2 &= a^2(1 - e \cos E)^2 - a^2(\cos E - e)^2 \\ &= a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Portanto,

$$y = a \sqrt{(1 - e^2)} \sin E \quad (2.28)$$

Pela Equação 2.22

$$\sin f = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{(1 - e^2)} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (2.29)$$

Substituindo a Equação 2.26 e a Equação 2.29 na Equação 2.20

$$\begin{aligned} r^2 df &= \frac{a(1 - e^2)}{e} \frac{1 - e \cos E}{\sqrt{(1 - e^2)} \sin E} ae \sin E dE \\ &= a^2 \sqrt{(1 - e^2)} (1 - e \cos E) dE \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sabe-se que (KUGA; CARRARA; RAO, 2012)

$$r^2 \frac{df}{dt} = h = \sqrt{(\mu p)} \quad (2.31)$$

Sendo h o momento angular específico e μ uma constante dada por

$$\mu = GM_{\text{Terra}} \quad (2.32)$$

Onde G é a constante gravitacional universal e M_{Terra} a massa da Terra.

Assim, dividindo ambos os lados da Equação 2.30 por dt, vem

$$\sqrt{(\mu p)} = a^2 \sqrt{(1 - e^2)} (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} \quad (2.33)$$

$$\sqrt{(\mu p)} dt = a^2 \sqrt{(1 - e^2)} (1 - e \cos E) dE$$

Pela Equação 2.2

$$\sqrt{\mu a(1 - e^2)} dt = a^2 \sqrt{(1 - e^2)} (1 - e \cos E) dE \quad (2.34)$$

$$\sqrt{\mu a} dt = a^2 (1 - e \cos E) dE$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt = (1 - e \cos E) dE$$

Integrando a Equação 2.34, vem

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) = [E - e \sin E]_0^E = E - e \sin E \quad (2.35)$$

O ângulo M , conhecido como anomalia média, é dado por

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau) \quad (2.36)$$

A equação de Kepler na forma elíptica, que relaciona a anomalia média M e a excentricidade e com a anomalia excêntrica E , podem ser expressas como (CURTIS, 2005)

$$M = E - e \sin E \quad (2.37)$$

A Equação 2.37 é transcendental em E , não existindo uma função elementar $E = f(M, e)$ que possa resolvê-la. Sendo assim, a única solução para a equação não pode ser expressa com um número finito de termos.

2.2. MOVIMENTO HIPERBÓLICO

A equação de Kepler análoga na forma hiperbólica é expressa como (CURTIS, 2005)

$$N = e \sinh H - H \quad (2.38)$$

Sendo N correspondente à anomalia média e dado por (BATTIN, 1999)

$$N = \sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}} (t - \tau) \quad (2.39)$$

A Equação 2.39 é transcendental em H .

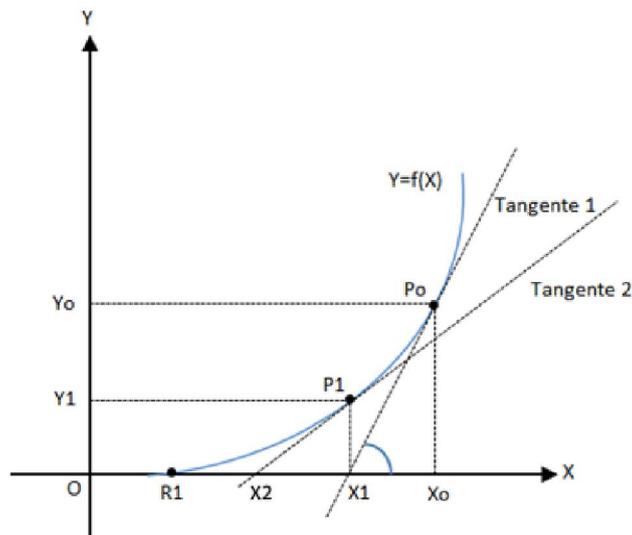
3 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KEPLER

3.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O Método de Newton-Raphson, também conhecido como Método de Newton, é um método numérico para estimar raízes de funções que consiste em, partindo de um valor inicial, aproximar o valor das raízes por iterações sucessivas (STEWART, 2006).

A Figura 1 abaixo ilustra geometricamente como funciona o método.

Figura 3.1 - Exemplo de aplicação do método de Newton-Raphson para uma função genérica $Y=f(X)$.



Fonte: Produção do autor.

Considerando a curva $Y = f(X)$, com raiz R_1 , se uma aproximação inicial x_0 for dada, a reta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$ corta o eixo X em um ponto x_1 , mais próximo da raiz do que o ponto x_0 . O ponto x_1 pode ser utilizado para encontrar um ponto x_2 ainda mais próximo da raiz, se o processo for repetido. O processo pode ser repetido até que uma condição de parada seja alcançada. Uma possível condição de parada é a determinação de uma tolerância para o

valor de $f(x_n)$, que deve aproximar-se de zero (um número de casas decimais de tolerância pode ser estipulado).

Assim, a equação para uma aproximação x_{n+1} , segundo o Método de Newton-Raphson, é obtida por (STEWART, 2006)

$$\begin{aligned}f'(x_n) &= \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \\x_n - x_{n+1} &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para aplicar o método na equação de Kepler, é necessário reescrever a Equação 2.37 na forma

$$f(E) = E - e \sin E - M\tag{3.2}$$

Derivando $f(E)$ em função da anomalia excêntrica, obtém-se

$$f'(E) = 1 - e \cos E\tag{3.3}$$

Aplicando a Equação 3.2 e a Equação 3.3 na Equação 3.1, sendo E a variável de interesse, obtêm-se

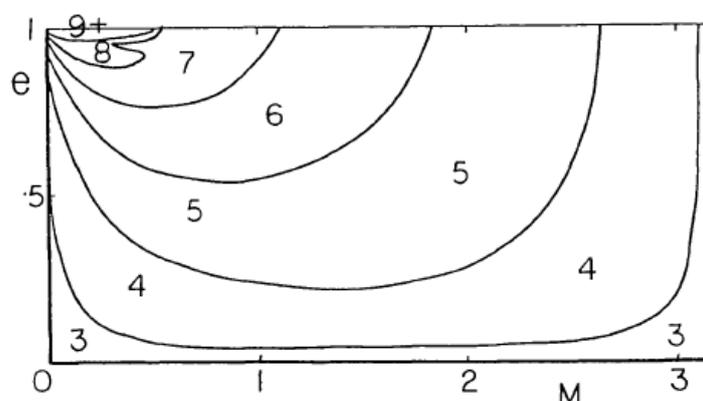
$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}\tag{3.4}$$

Desta forma, o Método de Newton pode ser aplicado iterativamente para aproximar a raiz da Equação 3.2, a forma excêntrica da equação de Kepler.

3.1.1. VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Como referência para a validação da implementação do método de Newton foi utilizado o gráfico de curvas de nível apresentado em Danby e Burkardt (1983), relacionando o número de iterações com a excentricidade e a anomalia média. Para a plotagem do gráfico, foram atribuídos valores no intervalo $[0 ; 1]$ para a excentricidade e no intervalo $[0 ; \pi]$ para a anomalia média. Os incrementos foram $\Delta M = 0,025$ rad e $\Delta e = 0,020$. A condição de parada utilizada foi $|f| < 10^{-12}$. A equação para a aproximação inicial do Método de Newton foi $x_0 = M$ (sendo x_0 a primeira aproximação para a anomalia excêntrica). O gráfico apresentado é mostrado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Gráfico de curvas de nível relacionando o número de iterações com a excentricidade e a anomalia média.



Fonte: Danby e Burkardt (1983).

Para validar a implementação do método, uma função foi codificada em MATLAB para o cálculo da aproximação da solução para a Equação de Kepler pelo método de Newton, também resultando em um gráfico em curvas de nível

que relaciona o número de iterações com a excentricidade e a anomalia média, atribuindo valores do intervalo $[0; 1]$ para a excentricidade e do intervalo $[0; \pi]$ para a anomalia média. Os incrementos foram $\Delta M = 0,025$ rad e $\Delta e = 0,020$. A condição de parada foi $|f| < 10^{-12}$. A equação para a aproximação inicial também foi $x_0 = M$. Para fins de análise, alguns pontos que apresentaram números de iterações relativamente altos foram desconsiderados na construção do gráfico e são relacionados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Pontos desconsiderados na geração do gráfico de curvas de nível.

Excentricidade	Anomalia Média (rad)	Número de iterações
1.000000	0.080554	95
1.000000	0.161107	79
1.000000	0.322215	23
1.000000	0.483322	60

O gráfico obtido é apresentado na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Gráfico relacionando o número de iterações com a anomalia média e com a excentricidade.



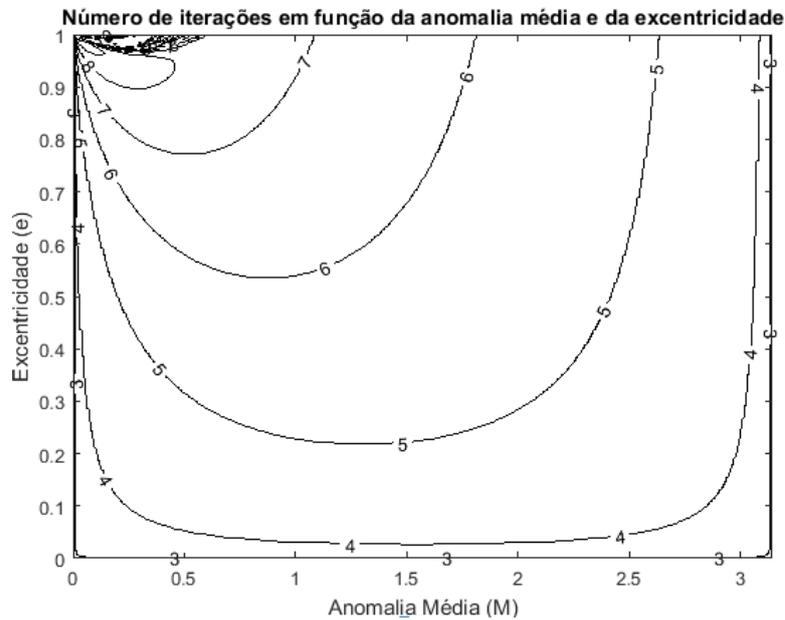
Fonte: Produção do autor.

Mostrando um comportamento semelhante ao gráfico apresentado no artigo.

Deve-se ressaltar que a curva mais suave apresentada na Figura 3.2 é resultado da interpolação de alguns valores utilizada por Danby e Burkardt (1983), em função do pequeno tamanho da grade.

Visando melhorar a análise do comportamento da excentricidade e da anomalia média, alteraram-se os incrementos para $\Delta M = 0,0025$ rad e $\Delta e = 0,0020$, o que se traduz em menores passos de iteração. Com base nestas alterações, um segundo gráfico foi obtido, conforme apresentado na Figura 3.4.

Figura 3.4 - Gráfico obtido com a alteração nos incrementos.



Fonte: Produção do autor.

Sendo desconsiderados os pontos em que o número de iterações superou o valor de 10.

Pelo comportamento semelhante dos gráficos obtidos, a implementação do algoritmo é considerada válida.

3.1.2. EQUAÇÕES PARA A APROXIMAÇÃO INICIAL

O método de Newton exige que uma primeira aproximação seja conhecida antes do início do processo iterativo.

Esta primeira aproximação, que será chamada E_0 , pode ser dada por um número arbitrário que pertença ao domínio da função. Entretanto, para aperfeiçoar o método e economizar tempo e operações na execução do processo iterativo, a aproximação inicial deve estar nas proximidades da raiz.

Neste projeto, foram estudadas três diferentes equações para a aproximação inicial e seus respectivos desempenhos na implementação do método de Newton-Raphson.

1) Equação na forma simplificada

A equação para a aproximação inicial na forma simplificada é dada por (CURTIS, 2005)

$$E_{01} = M + \frac{e}{2}, \quad M < \pi \quad (3.5)$$

2) Equação na forma de série de potência

A equação para a aproximação inicial na forma de série de potência é dada por (WINTER, 2015)

$$E_{02} = M + e \operatorname{sen} M + \frac{1}{2}e^2 \operatorname{sen}(2M) + e^3 \left(\frac{3}{4} \operatorname{sen} 3M - \frac{1}{8} \operatorname{sen} M \right) \quad (3.6)$$

3) Equação na forma racional

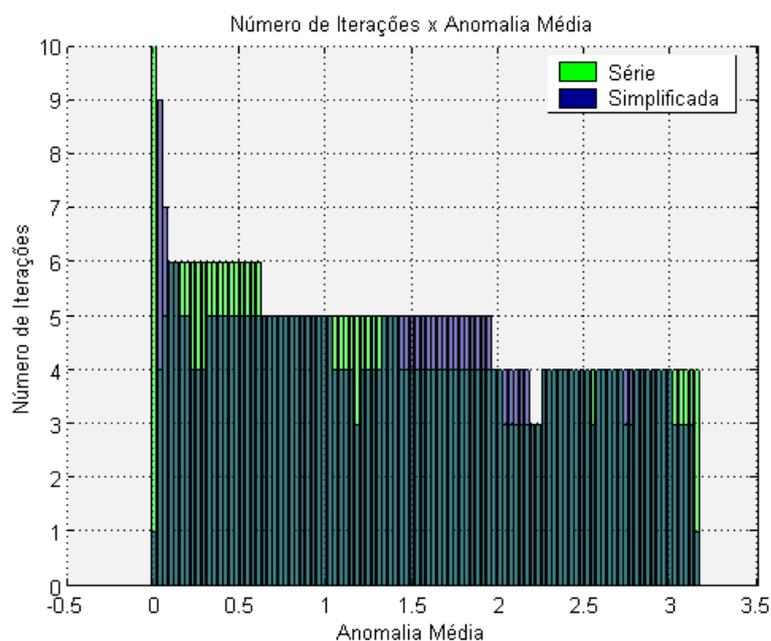
A equação para a aproximação inicial na forma racional é dada por (BATTIN, 1999)

$$E_{02} = M + e \operatorname{sen} M + \frac{1}{2}e^2 \operatorname{sen}(2M) + e^3 \left(\frac{3}{4} \operatorname{sen} 3M - \frac{1}{8} \operatorname{sen} M \right) \quad (3.7)$$

Para a comparação entre as três equações foram gerados gráficos de barra relacionando valores de anomalia média no intervalo $[0 ; \pi]$ e o número de

iterações para cada equação para a aproximação inicial, com a excentricidade $e = 0,999$. A comparação das equações foi feita duas a duas, para facilitar a comparação dos resultados. Os gráficos gerados são apresentados nas Figuras 3.5 a 3.7. Os resultados poderão ser avaliados por meio das médias do número de iterações, que são apresentadas na Tabela 3.2.

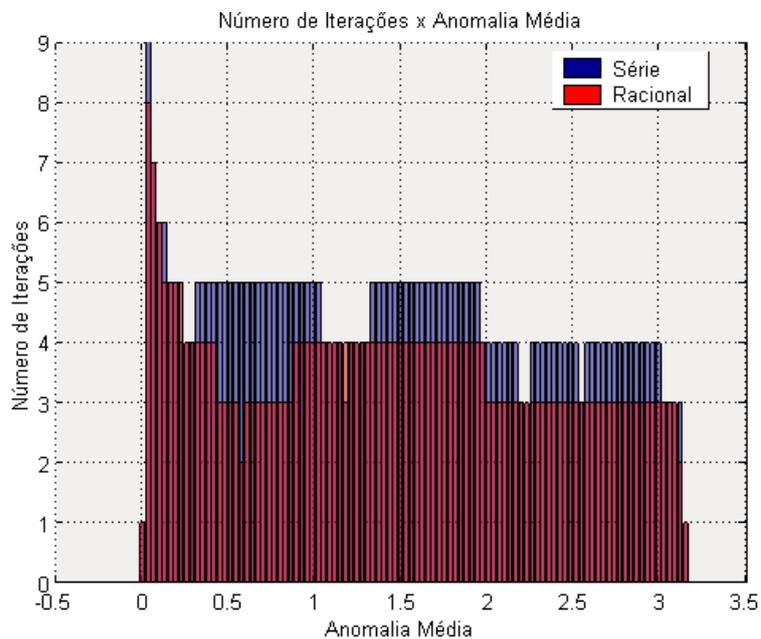
Figura 3.5 - Gráfico de barras comparando as equações na forma de séries de potência e na forma simplificada.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 3.5 é possível observar que, para a maioria dos valores de anomalia média, a equação para a aproximação inicial na forma de série de potência é a que apresenta os menores números de iterações quando comparada com a equação na forma simplificada.

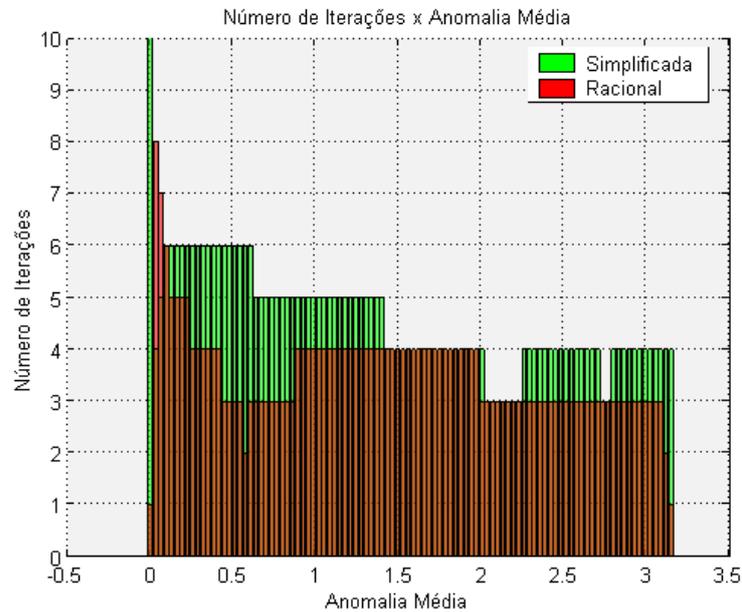
Figura 3.6 - Gráfico de barras comparando as equações na forma de série de potência e na forma racional.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 3.6 é possível observar que, para a maioria dos valores de anomalia média, a equação para a aproximação inicial na forma racional é a que apresenta os menores números de iterações quando comparada com a equação na forma de série de potência.

Figura 3.7 - Gráfico de barras comparando as equações na forma simplificada e na forma racional.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 3.7 é possível observar que, para a maioria dos valores de anomalia média, a equação para a aproximação inicial na forma racional é a que apresenta os menores números de iterações quando comparada com a equação na forma simplificada.

A Tabela 3.2 contém os valores das médias para cada equação.

Tabela 3.2 - Valores das médias do número de iterações para a utilização das três equações para a aproximação inicial.

\bar{E}_{01}	\bar{E}_{02}	\bar{E}_{03}
4,5700	4,4300	3,5500

A Tabela 3.2 mostra que a equação na forma racional apresenta, em média, os menores números de iterações. A equação na forma simplificada apresentou, em média, os maiores valores para o número de iterações.

Desta forma, por apresentar os melhores resultados, a equação na forma racional foi a equação escolhida para a obtenção dos resultados finais do método de Newton-Raphson.

3.2. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Uma versão do clássico método das Aproximações Sucessivas para lidar com órbitas quase parabólicas (órbitas elípticas ou hiperbólicas com excentricidade próxima de 1) é apresentada em Battin (1999). O método consiste em representar a solução como uma série de potência, expressando a equação de Kepler em termos de um parâmetro. Cada termo da série proporciona uma ordem de aproximação maior para a solução.

O parâmetro apropriado é dado por (BATTIN, 1999)

$$\lambda = \frac{1 - e}{1 + e} \quad (3.8)$$

É possível observar que conforme a excentricidade e se aproxima de 1, como no caso de órbitas quase parabólicas, λ se aproxima de 0.

É conveniente definir (BATTIN, 1999)

$$w = \tan \frac{1}{2} f \quad (3.9)$$

sendo f a anomalia verdadeira. Desta forma, procura-se uma solução para a equação de Kepler como uma série de potência em λ (BATTIN, 1999)

$$w = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots \quad (3.10)$$

Se q representar a distância do pericentro (perigeu), a equação da órbita pode ser escrita em uma forma particularmente útil para estudo de órbitas parabólicas, como (BATTIN, 1999)

$$r = q \frac{1 + w^2}{1 + \lambda w^2} \quad (3.11)$$

A Equação 3.12 e a Equação 3.13 são apresentadas em Battin (1999)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (3.12)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{df}{(1 + e \cos f)^2} \quad (3.13)$$

Pela Equação 3.9 obtém-se

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{1}{2}f\right) \frac{df}{dt} \quad (3.14)$$

Combinando as Equações 3.12, 3.13 e 3.14, é possível obter

$$\frac{\sqrt{\mu p}}{2q^2} dt = \frac{1 + w^2}{(1 + \lambda w^2)^2} dw \quad (3.15)$$

Expandindo a função $f(\lambda) = (1 + w^2)/(1 + \lambda w^2)^2$ em série de MacLaurin, obtém-se

$$f(\lambda) = (1 + w^2) - 2\lambda(w^2 + w^4) + 3\lambda^2(w^4 + w^6) - 4\lambda^3(w^6 + w^8) \dots \quad (3.16)$$

Assim, integrando ambos os lados da Equação 4.8 termo por termo, obtém-se

$$\frac{\sqrt{\mu p}}{2q^2}(t - \tau) = w + \frac{w^3}{3} - 2\lambda\left(\frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5}\right) + 3\lambda^2\left(\frac{w^5}{5} + \frac{w^7}{7}\right) - 4\lambda^3\left(\frac{w^7}{7} + \frac{w^9}{9}\right) + \dots \quad (3.17)$$

Substituindo w na Equação 3.17 e igualando coeficientes com correspondentes potências de λ , o termo de ordem zero é a única raiz real da equação

$$a_0 + \frac{1}{3}a_0^3 = \frac{\sqrt{\mu p}}{2q^2}(t - \tau) \quad (3.18)$$

Os termos de ordens superiores são obtidos em função do termo de ordem zero. Os termos de ordem um a três são apresentados em Battin (1999).

$$a_1 = \frac{2a_0^3}{1 + a_0^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{a_0^2}{5} \right) \quad (3.19)$$

$$a_2 = -\frac{3a_0^5}{1 + a_0^2} \left(\frac{1}{5} + \frac{a_0^2}{7} \right) + a_0 a_1 \left(2a_0 - \frac{a_1}{1 + a_0^2} \right) \quad (3.20)$$

$$a_3 = \frac{4a_0^7}{1 + a_0^2} \left(\frac{1}{7} + \frac{a_0^2}{9} \right) + 2a_0 a_1^2 \left(1 + \frac{a_0^2}{1 + a_0^2} \right) - 3a_0^4 a_1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a_1^3}{1 + a_0^2} \right) + 2a_0^2 a_2 - \frac{2a_0 a_1 a_2}{1 + a_0^2} \quad (3.21)$$

Os termos a partir do termo de ordem quatro foram obtidos estendendo as Equações 3.10 e 3.17.

$$\begin{aligned}
 a_4 = & -\frac{5a_0^9}{1+a_0^2} \left(\frac{1}{9} + \frac{a_0^2}{11} \right) - 3a_1^2 a_0^3 \left(2 + \frac{a_0^2}{1+a_0^2} \right) \\
 & + 4a_0 a_1 a_2 \left(1 + \frac{a_0^2}{1+a_0^2} \right) - 3a_0^4 a_2 + 4a_0^6 a_1 + 2a_0^2 a_3 \\
 & + \frac{4a_0^2 a_1^3 + (2/3)a_1^3 - a_1^2 a_2 - a_0 a_2^2 - 2a_0 a_1 a_3}{1+a_0^2}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 a_5 & \tag{3.23} \\
 = & -\frac{a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3 + 2a_0 a_1 a_4 + 2a_0 a_2 a_3}{1+a_0^2} \\
 & + \frac{2a_0 a_2^2 + 2a_0 a_1^4 + 2a_1^2 a_2 + 2a_0^2 a_4 + 2a_0^4 a_4 + 4a_0^3 a_2^2}{1+a_0^2} \\
 & + \frac{12a_0^2 a_1^2 a_2 + 4a_0 a_1 a_3 + 8a_0^3 a_1 a_3}{1+a_0^2} \\
 & - \frac{3a_0^4 a_3 + 3a_0^6 a_3 + 6a_0^2 a_1^3 + 15a_0^4 a_1^3 + 12a_0^3 a_1 a_2 + 18a_0^5 a_1 a_2}{1+a_0^2} \\
 & + \frac{4a_0^6 a_2 + 4a_0^8 a_2 + 12a_0^5 a_1^2 + 16a_0^7 a_1^2}{1+a_0^2} - \frac{5a_0^8 a_1 + 5a_0^{10} a_1}{1+a_0^2} \\
 & + \frac{6a_0^{11}}{1+a_0^2} \left(\frac{1}{11} + \frac{a_0^2}{13} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_6 \tag{3.24} \\
&= - \frac{(a_2^3/3) + a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_5 + 2a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3}{1 + a_0^2} \\
&+ \frac{(2a_1^5/5) + 2a_1 a_2^2 + 2a_1^2 a_3 + 2a_0^2 a_5 + 2a_0^4 a_5}{1 + a_0^2} \\
&+ \frac{12a_0^2 a_1 a_2^2 + 12a_0^2 a_1^2 a_3 + 4a_0 a_1 a_4 + 4a_0 a_2 a_3}{1 + a_0^2} \\
&+ \frac{8a_0 a_1^3 a_2 + 8a_0^3 a_1 a_4 + 8a_0^3 a_2 a_3}{1 + a_0^2} \\
&- \frac{3a_0 a_1^4 + 3a_0^4 a_4 + 3a_0^6 a_4 + 6a_0^3 a_2^2 + 15a_0^3 a_1^4}{1 + a_0^2} \\
&- \frac{9a_0^5 a_2^2 + 18a_0^2 a_1^2 a_2 + 45a_0^4 a_1^2 a_2 + 12a_0^3 a_1 a_3 + 18a_0^5 a_1 a_3}{1 + a_0^2} \\
&+ \frac{4a_0^6 a_3 + 4a_0^8 a_3 + 20a_0^4 a_1^3 + (112a_0^6 a_1^3/3)}{1 + a_0^2} \\
&+ \frac{24a_0^5 a_1 a_2 + 32a_0^7 a_1 a_2}{1 + a_0^2} \\
&- \frac{5a_0^8 a_2 + 5a_0^{10} a_2 + 20a_0^7 a_1^2 + 25a_0^9 a_1^2}{1 + a_0^2} + \frac{6a_0^{10} a_1 + 6a_0^{12} a_1}{1 + a_0^2} \\
&- \frac{7a_0^{13}}{1 + a_0^2} \left(\frac{1}{13} + \frac{a_0^2}{15} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_7 \tag{3.25} \\
&= \frac{a_1 a_3^2 + a_2^2 a_3 + a_1^2 a_5 + 2a_0 a_1 a_6 + 2a_0 a_2 a_5 + 2a_0 a_3 a_4 + 2a_1 a_2 a_4}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{\frac{2}{3} a_2^3 + 2a_0 a_3^2 + 2a_1^2 a_4 + 2a_1^4 a_2 + 2a_0^2 a_6 + 2a_0^4 a_6}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{4a_0^2 a_2^3 + 4a_0^3 a_3^2 + 12a_0 a_1^2 a_2^2 + 12a_0^2 a_1^2 a_4}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{4a_0 a_1 a_5 + 4a_0 a_2 a_4 + 4a_1 a_2 a_3 + 8a_0 a_1^3 a_3 + 8a_0^3 a_1 a_5}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{8a_0^3 a_2 a_4 + 24a_0^2 a_1 a_2 a_3}{-(1 + a_0^2)} \\
&+ \frac{\frac{3}{5} a_1^5 + 3a_0^4 a_5 + 3a_0^6 a_5 + 9a_0^2 a_1^5 + 18a_0^2 a_1 a_2^2}{-(1 + a_0^2)} \\
&+ \frac{18a_0^2 a_1^2 a_3 + 60a_0^3 a_1^3 a_2 + 45a_0^4 a_1 a_2^2 + 45a_0^4 a_1^2 a_3}{-(1 + a_0^2)} \\
&+ \frac{12a_0 a_1^3 a_2 + 12a_0^3 a_1 a_4 + 12a_0^3 a_2 a_3 + 18a_0^5 a_1 a_4 + 18a_0^5 a_2 a_3}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{4a_0^6 a_4 + 4a_0^8 a_4 + 20a_0^3 a_1^4 + 12a_0^5 a_2^2 + 56a_0^5 a_1^4 + 16a_0^7 a_2^2}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{60a_0^4 a_1^2 a_2 + 112a_0^6 a_1^2 a_2 + 24a_0^5 a_1 a_3 + 32a_0^7 a_1 a_3}{-(1 + a_0^2)} \\
&+ \frac{5a_0^8 a_3 + 5a_0^{10} a_3 + \frac{140}{3} a_0^6 a_1^3 + 75a_0^8 a_1^3 + 40a_0^7 a_1 a_2 + 50a_0^9 a_1 a_2}{-(1 + a_0^2)} \\
&- \frac{6a_0^{10} a_2 + 6a_0^{12} a_2 + 30a_0^9 a_1^2 + 36a_0^{11} a_1^2}{-(1 + a_0^2)} + \frac{7a_0^{12} a_1 + 7a_0^{14} a_1}{-(1 + a_0^2)} \\
&+ \frac{8a_0^{15}}{1 + a_0^2} \left(\frac{1}{15} + \frac{a_0^2}{17} \right)
\end{aligned}$$

A obtenção de termos de ordem superior a sete não está compreendida na proposta inicial deste projeto de Iniciação Científica.

3.2.1. ALGORITMO PARA ÓRBITAS ELÍPTICAS

O algoritmo pode ser implementado fornecendo um valor de anomalia média e um valor de excentricidade como entrada.

1. Calcular a_0 de acordo com a equação

$$a_0 + \frac{a_0^3}{3} = \frac{\sqrt{\mu p}}{2q^2} (t - \tau) = \frac{M\sqrt{1-e^2}}{2(1-e)^2} \quad (3.26)$$

cuja raiz real é dada por

$$a_0 = \left[\frac{\frac{3(M\sqrt{1-e^2})}{2(1-e)^2} + \sqrt{\frac{9M^2(1-e^2)}{4(1-e)^4} + 4}}{2} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{\frac{3(M\sqrt{1-e^2})}{2(1-e)^2} + \sqrt{\frac{9M^2(1-e^2)}{4(1-e)^4} + 4}}{2} \right]^{\frac{-1}{3}} \quad (3.27)$$

Além da Equação 2.1, da Equação 2.2 e da Equação 2.36, a seguinte igualdade foi considerada para se obter a Equação 3.26:

$$q = a(1 - e) \quad (3.28)$$

2. Calcular os valores dos demais termos, utilizando os resultados da Equação 3.19 a Equação 3.25 e multiplicando-os por suas respectivas potências de λ , de acordo com a Equação 3.10.

3. Conhecendo os valores de w e λ , é possível calcular a anomalia excêntrica pela equação (BATTIN, 1999)

$$\tan \frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2}E \quad (3.29)$$

3.2.2. ALGORITMO PARA ÓRBITAS HIPERBÓLICAS

O algoritmo para órbitas hiperbólicas pode ser desenvolvido de forma análoga ao para órbitas elípticas, tendo como valores de entrada excentricidade e N .

Obtidos w e λ , como já mostrado, é possível calcular H pela equação (BATTIN, 1999)

$$\tan \frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{e-1}} \tanh \frac{1}{2}H \quad (3.30)$$

3.3. MÉTODO DE GAUSS

O Método de Gauss, conforme apresentado em Battin (1999), consiste em transformar a equação de Kepler (na forma da equação Eq. 34) para a forma de uma equação de terceira ordem. A solução é, então, obtida por substituições sucessivas.

A equação de Barker, válida para parábolas, é dada por (BATTIN, 1999)

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau) = \tan \frac{1}{2}f \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \frac{1}{2}f \right) \quad (3.31)$$

O desenvolvimento abaixo é referente a órbitas elípticas e é apresentado em Battin (1999).

Lembrando a Equação 3.29, para quando a órbita é quase parabólica $e \cong 1$, $E \cong 0$ e

$$\tan \frac{1}{2} f \cong \frac{E}{\sqrt{2(1-e)}} \quad (3.32)$$

Substituindo este resultado na Equação 3.31

$$\sqrt{\frac{\mu(1-e)^3}{q^3}} (t - \tau) \approx E \left[(1-e) + \frac{1}{6} E^2 \right] \quad (3.33)$$

Onde q é a distância do centro ao perigeu, dada por $q = a(1-e)$.

Como, por expansão em série de Taylor e com $E \cong 0$

$$\text{sen } E \approx E \quad (3.34)$$

$$\frac{E - \text{sen } E}{\text{sen } E} \approx \frac{1}{6} E^2 \quad (3.35)$$

Podemos escrever a equação de Kepler na forma

$$\sqrt{\frac{\mu(1-e)^3}{q^3}} (t - \tau) = \text{sen } E \left[(1-e) + \frac{E - \text{sen } E}{\text{sen } E} \right] \quad (3.36)$$

Escrevendo $\text{sen } E$ na forma

$$\text{sen } E = \sqrt{\frac{\text{sen}^3 E}{6(E - \text{sen } E)}} \sqrt{\frac{6(E - \text{sen } E)}{\text{sen } E}} \quad (3.37)$$

Sendo B o primeiro destes dois fatores e expandindo-o em série de Taylor

$$B^2 = \frac{\text{sen}^3 E}{6(E - \text{sen } E)} = 1 - \frac{9}{20}E^2 + \frac{237}{2800}E^4 + \dots \quad (3.38)$$

Seja A definido por

$$A = \frac{3(E - \text{sen } E)}{2 \text{sen } E} = \frac{1}{4}E^2 + \frac{7}{240}E^4 + \frac{31}{10080}E^6 + \dots \quad (3.39)$$

A equação de Kepler pode ser reescrita como

$$\sqrt{\frac{\mu(1-e)^3}{2q^3}}(t - \tau) = B\sqrt{2A} \left[(1-e) + \frac{2A}{3} \right] \quad (3.40)$$

O fator $(1 - e)$ deve ser eliminado. Assim, substituímos A por ω definido como

$$A = \frac{1}{2}(1 - e)\omega^2 \quad (3.41)$$

E a forma final da equação de Kepler é dada por

$$\frac{1}{B} \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - \tau) = \omega + \frac{1}{3}\omega^3 \quad (3.42)$$

Esta equação transformada é próxima da equação de Barker e exatamente esta quando $E = 0$.

Faz-se necessário reverter a série da Equação 3.39. Para tal, pode-se utilizar a série

$$\frac{1}{4}E^2 = \rho_1 A + \rho_2 A^2 + \rho_3 A^3 + \dots \quad (3.43)$$

Sendo ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 coeficientes a serem determinados.

A Equação 3.39 pode ser reescrita como

$$A = \frac{1}{4}E^2 + \frac{7}{15}\left(\frac{1}{4}E^2\right)^2 + \frac{62}{315}\left(\frac{1}{4}E^2\right)^3 + \dots \quad (3.44)$$

Como a série é absolutamente convergente, pode-se substituir a Equação 3.43 na Equação 3.44 e obter

$$A = (\rho_1 A + \rho_2 A^2 + \rho_3 A^3 + \dots) + \frac{7}{15}(\rho_1 A + \rho_2 A^2 + \rho_3 A^3 + \dots)^2 + \frac{62}{315}(\rho_1 A + \rho_2 A^2 + \rho_3 A^3 + \dots)^3 + \dots \quad (3.45)$$

E, portanto,

$$A = (\rho_1)A + \left(\rho_2 + \frac{7}{15}\rho_1^2\right)A^2 + \left(\rho_3 + \frac{7}{15}(2\rho_1\rho_2) + \frac{62}{315}\rho_1^3\right)A^3 + \dots \quad (3.46)$$

Assim, comparando ambos os lados da equação

$$\begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \rho_2 + \frac{7}{15}\rho_1^2 = 0 \\ \rho_3 + \frac{7}{15}(2\rho_1\rho_2) + \frac{62}{315}\rho_1^3 = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Resolvendo o sistema, a equação reversa é obtida

$$\frac{1}{4}E^2 = A - \frac{7}{15}A^2 + \frac{376}{1575}A^3 + \dots \quad (3.48)$$

Substituindo na Equação 3.38 e calculando a raiz, obtém-se

$$B = 1 - \frac{9}{10}A + \frac{969}{1400}A^2 + \dots \quad (3.49)$$

O algoritmo é simples de ser implementado.

1. Assumir $B = 1$;
2. Resolver a Equação 3.42 para ω ;
3. Resolver a Equação 3.41 para A ;
4. Calcular um novo valor para B pela Equação 3.49;
5. Repetir as etapas 2 a 4 até que a alteração de A seja inferior a uma tolerância estipulada.

Um desenvolvimento análogo pode ser feito para órbitas hiperbólicas, partindo da Equação 3.30 e da equação

$$\sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}}(t - \tau) = e \sinh H - H \quad (3.50)$$

As equações obtidas são apresentadas abaixo.

$$B^2 = \frac{\sinh^3 H}{6(\sinh H - H)} = 1 + \frac{9}{20}H^2 + \frac{237}{2800}H^4 + \dots \quad (3.51)$$

$$A = \frac{3(\sinh H - H)}{2 \sinh H} = \frac{1}{4}H^2 - \frac{7}{240}H^4 + \frac{31}{10080}H^6 + \dots \quad (3.52)$$

$$\sqrt{\frac{\mu(e-1)^3}{2q^3}}(t - \tau) = B\sqrt{2A} \left[(e-1) + \frac{2A}{3} \right] \quad (3.53)$$

$$A = \frac{1}{2}(e-1)\omega^2 \quad (3.54)$$

$$\frac{1}{B} \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - \tau) = \omega + \frac{1}{3}\omega^3 \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{4}H^2 = A + \frac{7}{15}A^2 + \frac{376}{1575}A^3 + \dots \quad (3.56)$$

O algoritmo pode ser implementado de forma análoga ao algoritmo para órbitas elípticas.

Para órbitas elípticas, Battin (1999) ainda apresenta o Método de Gauss com modificações que aperfeiçoam a convergência do procedimento, tornando B o mais insensível possível a mudanças em E.

Primeiramente, considera-se a equação de Kepler modificada na forma

$$\sqrt{\frac{\mu(1-e)^3}{q^3}}(t - \tau) = Q \left[(1-e) + [\beta + (1-\beta)e] \frac{P}{Q} \right] \quad (3.57)$$

Onde

$$P = E - \text{sen } E \quad (3.58)$$

$$Q = E - \beta(E - \text{sen } E) \quad (3.59)$$

Para $\beta = 1$, a equação de Kepler assume a forma usual.

Pode-se escrever

$$Q = \sqrt{\frac{Q^3 6P}{6P Q}} = 2B\sqrt{A} \quad (3.60)$$

Onde

$$A = \frac{3P}{2Q} \quad (3.61)$$

$$B^2 = \frac{Q^3}{6P} = 1 + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2}\beta\right)E^2 + \dots \quad (3.62)$$

Escolhendo $\beta = \frac{1}{10}$ a dependência quadrática de B com a anomalia excêntrica é eliminada.

A equação de Kepler se torna

$$\sqrt{\frac{\mu(1-e)^3}{q^3}}(t - \tau) = 2B\sqrt{A} \left[(1-e) + \left[\frac{1}{10} + \frac{9}{10}e \right] \frac{2A}{3} \right] \quad (3.63)$$

Onde

$$A = \frac{15(E - \text{sen } E)}{9E + \text{sen } E} \quad (3.64)$$

$$B = \frac{9E + \text{sen } E}{20\sqrt{A}} \quad (3.65)$$

Substituindo A por ω onde

$$A = \frac{(1 - e)}{1 + 9e} \omega^2 \quad (3.66)$$

Temos

$$\frac{1}{B} \sqrt{\frac{\mu}{q^3} \frac{1 + 9e}{20}} (t - \tau) = \omega + \frac{1}{3} \omega^3 \quad (3.67)$$

Expandindo A e B

$$A = \frac{1}{4} E^2 - \frac{1}{120} E^4 - \frac{1}{20160} E^6 + \frac{1}{144000} E^8 - \dots \quad (3.68)$$

$$B = 1 + \frac{3}{2800} E^4 - \frac{1}{84000} E^6 + \frac{71}{258720000} E^8 - \dots \quad (3.69)$$

Revertendo a série da Equação 3.68 e substituindo na Equação 3.69

$$B = 1 + \frac{3}{175} A^2 + \frac{2}{525} A^3 + \frac{471}{336875} A^4 + \frac{10904}{21896875} A^5 + \frac{434741}{2299171875} A^6 + \dots \quad (3.70)$$

O algoritmo é também de simples implementação.

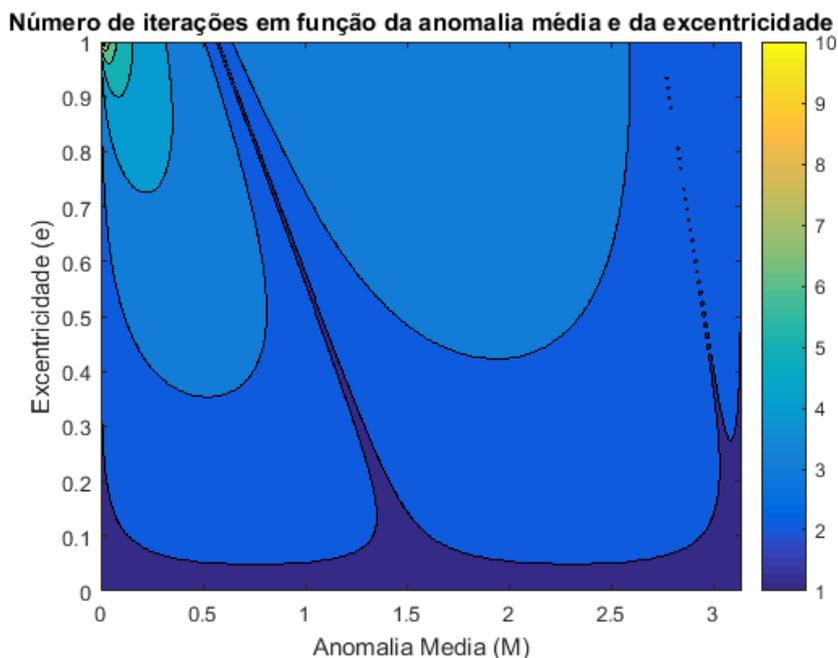
1. Assumir $B = 1$;
2. Resolver a Equação 3.67 para ω ;
3. Resolver a Equação 3.66 para A;
4. Calcular um novo valor para B pela Equação 3.70;
5. Repetir as etapas 2 a 4 até que a alteração de A seja inferior a uma tolerância estipulada.

4 RESULTADOS

4.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O número de iterações do método utilizando a equação na forma racional para a aproximação inicial, até alcançar a tolerância $|f| < 10^{-12}$, sendo o incremento para a anomalia média $\Delta M = 0,0063$ rad, no intervalo $[0 ; \pi]$, e o incremento para a excentricidade $\Delta e = 0,0020$, no intervalo $[0 ; 1]$, é relacionado com a excentricidade e a anomalia média conforme consta na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iterações com a excentricidade e a anomalia média.

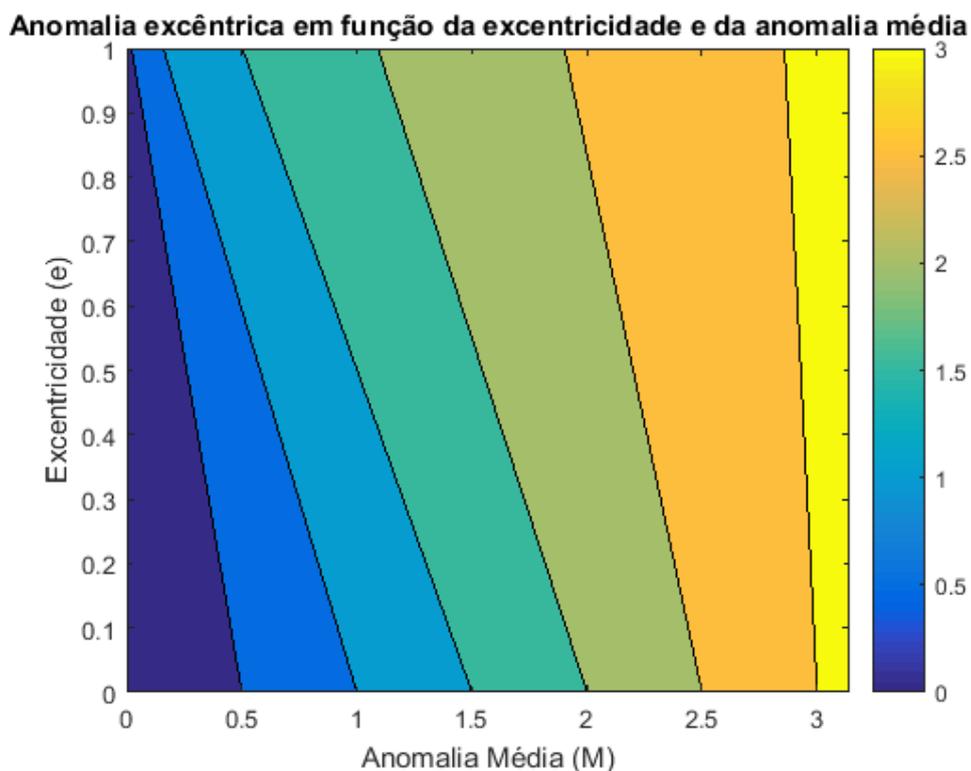


Fonte: Produção do autor.

Excluindo-se o ponto de excentricidade 1 e anomalia média 0,007874 rad, para o qual o número de iterações foi 14.

Com os mesmos valores, um gráfico relacionando a anomalia excêntrica com a excentricidade e a anomalia média foi obtido e é apresentado na Figura 4.2.

Figura 4.2 - Anomalia excêntrica em função da excentricidade e de M (Método de Newton).

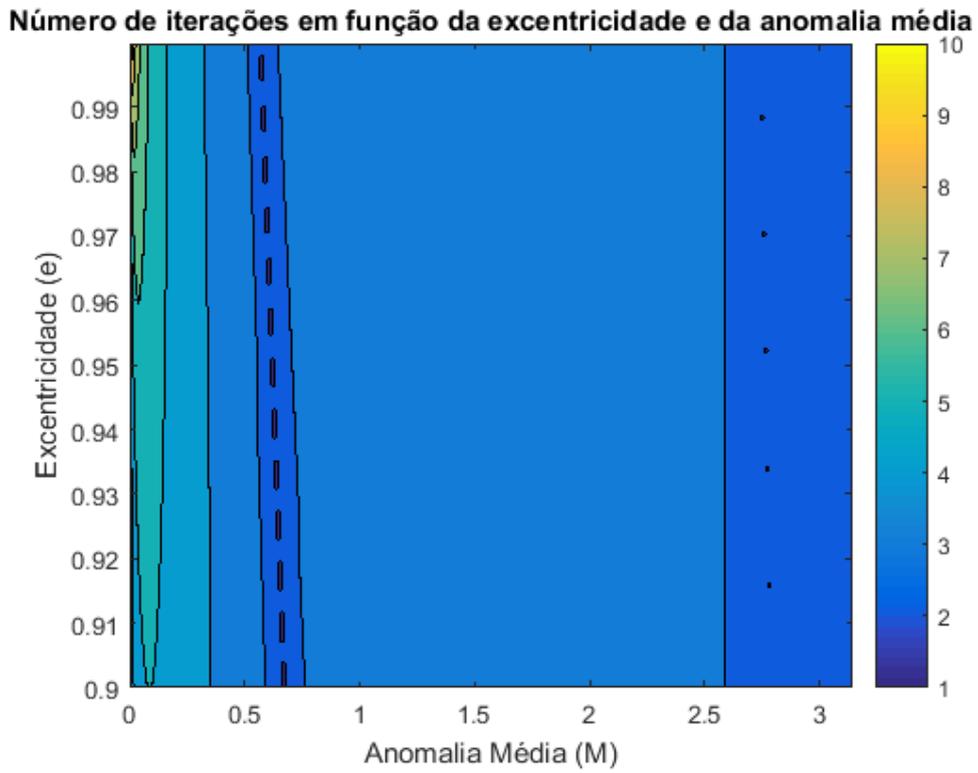


Fonte: Produção do autor.

A tolerância $|f| < 10^{-12}$ foi escolhida por ser aceitável nas escalas de interesse do trabalho, pois se traduzem em erros em posição na ordem de centímetros, no problema de satélites artificiais em órbita em torno da Terra.

Para o caso de órbitas quase parabólicas, a excentricidade tende a 1, tanto no caso elíptico quanto no hiperbólico. Para destacar esta região específica, os gráficos foram refeitos para o intervalo $[0,9; 1[$ e $]1; 1,1]$, como mostrado nas Figuras 4.3 e 4.4. Foram excluídos os pontos onde o número de iterações é maior do que 10.

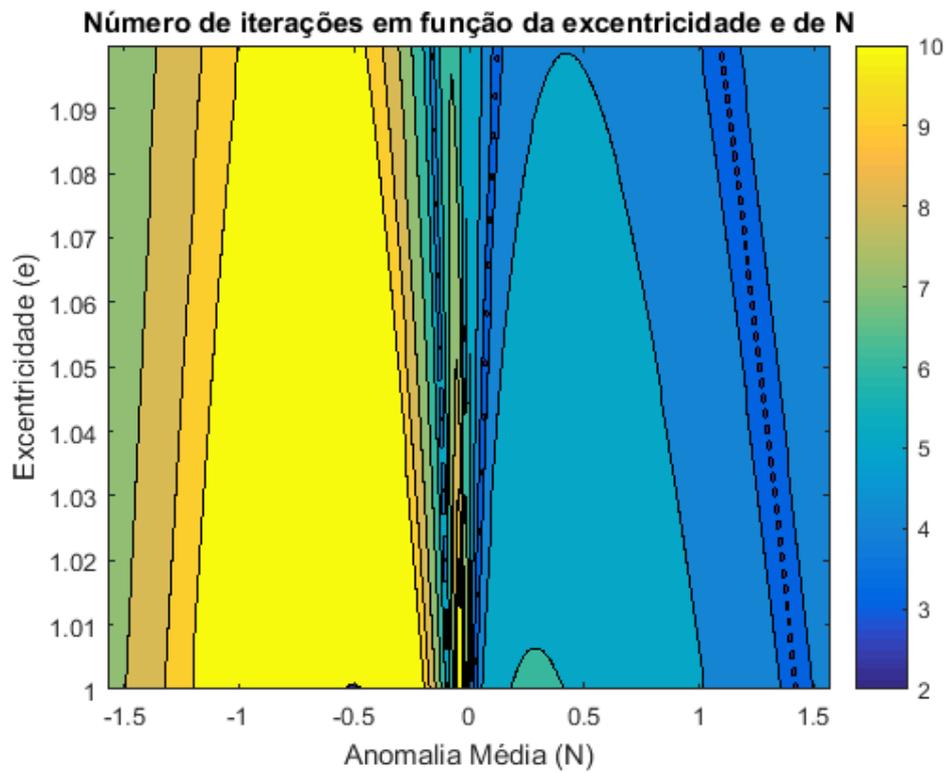
Figura 4.3 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iterações com a excentricidade e a anomalia média para órbitas quase parabólicas.



Fonte: produção do autor.

A Figura 4.3 mostra que os maiores números de iterações se encontram em excentricidades próximas da unidade e anomalias médias próximas de zero.

Figura 4.4 - Gráfico de contorno relacionando os valores do número de iterações com a excentricidade e a N para órbitas quase parabólicas.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 4.4 mostra que os maiores números de iterações se encontram na região em que N é negativo.

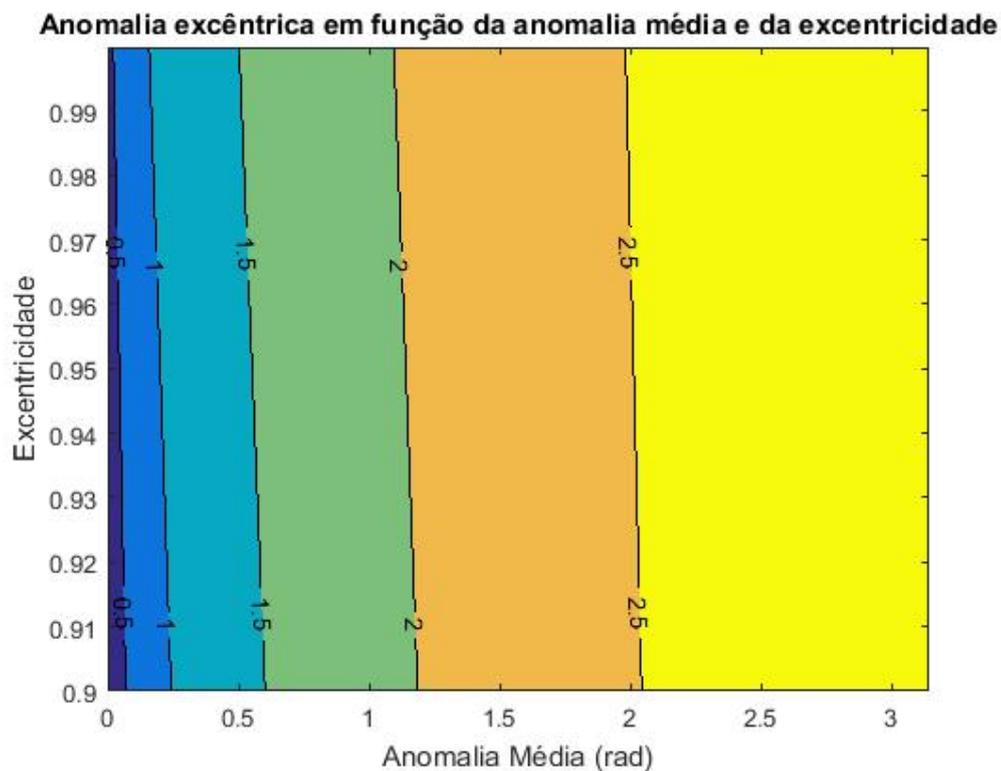
4.2. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

4.2.1. ÓRBITAS ELÍPTICAS

A anomalia excêntrica foi calculada pelo método das Aproximações Sucessivas variando a excentricidade no intervalo $[0,9; 1[$, com $\Delta e = 0,0001$, e variando a anomalia média no intervalo $[0; \pi]$, com $\Delta M = 0,0031$ rad. A solução foi

calculada até o termo de ordem sete. O gráfico de contorno que relaciona os valores para a anomalia excêntrica com a excentricidade e a anomalia média é apresentado na Figura 4.5.

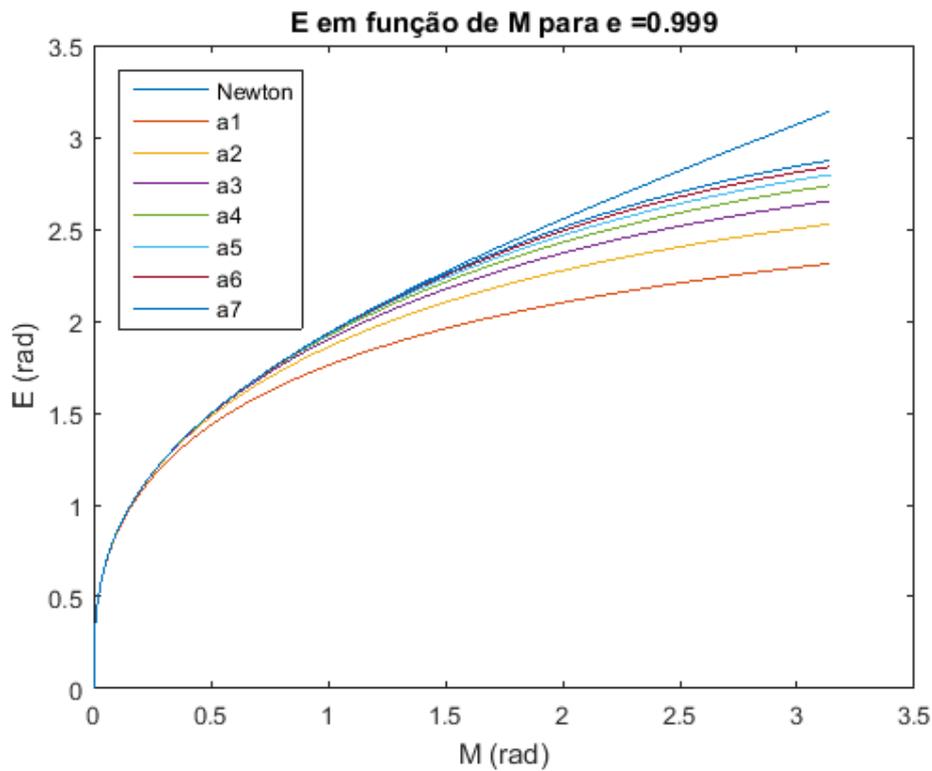
Figura 4.5 - Gráfico de contorno que relaciona a solução (anomalia excêntrica) com a excentricidade e a anomalia média.



Fonte: Produção do autor.

Para a obtenção dos valores de E em função de M com a utilização do Método de Aproximações Sucessivas fixando uma excentricidade de $e = 0,999$, variou-se M no intervalo $[0, \pi]$, com $\Delta M = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para diferentes números de termos são mostrados na Figura 4.6 abaixo.

Figura 4.6 - Comparativo entre as soluções com a utilização de diferentes números de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson.



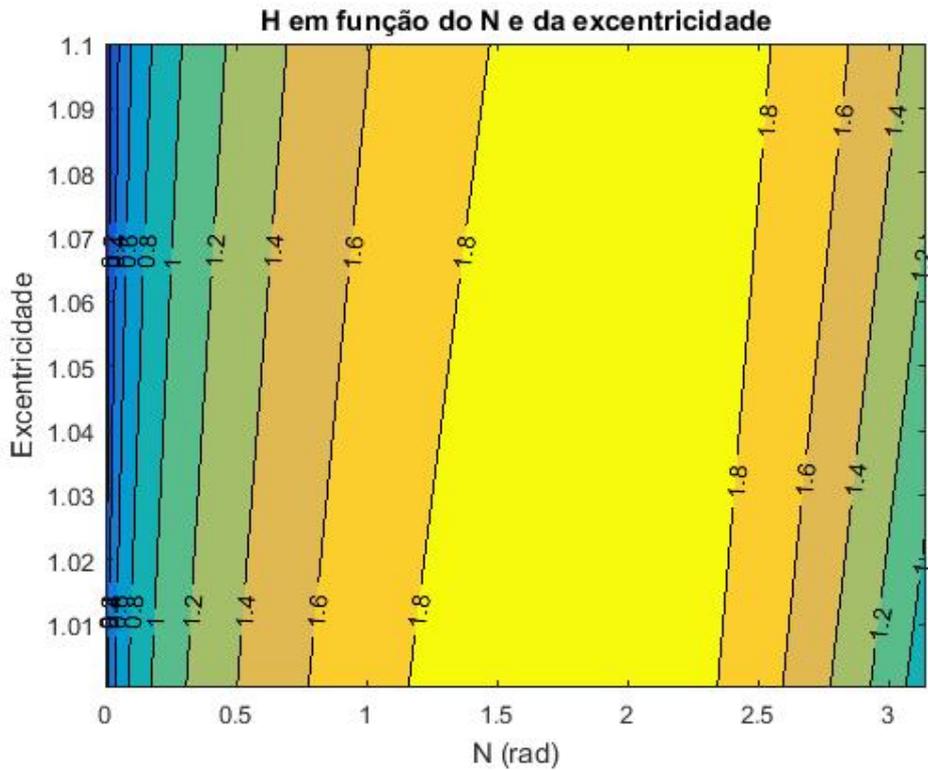
Fonte: Produção do autor.

Pode-se observar, na Figura 4.6, que com o acréscimo de termos o valor obtido pelo Método das Aproximações Sucessivas se aproxima do obtido pelo Método de Newton-Raphson.

4.2.2. ÓRBITAS HIPERBÓLICAS

O valor de H foi calculado pelo método das Aproximações Sucessivas variando a excentricidade no intervalo $]1 ; 1,1]$, com $\Delta e = 0,0001$, e variando o N no intervalo $[0 ; \pi]$, com $\Delta N = 0,0031$ rad. A solução foi calculada até o termo de ordem sete. O gráfico de contorno que relaciona os valores para o H com a excentricidade e N é apresentado na Figura 4.7.

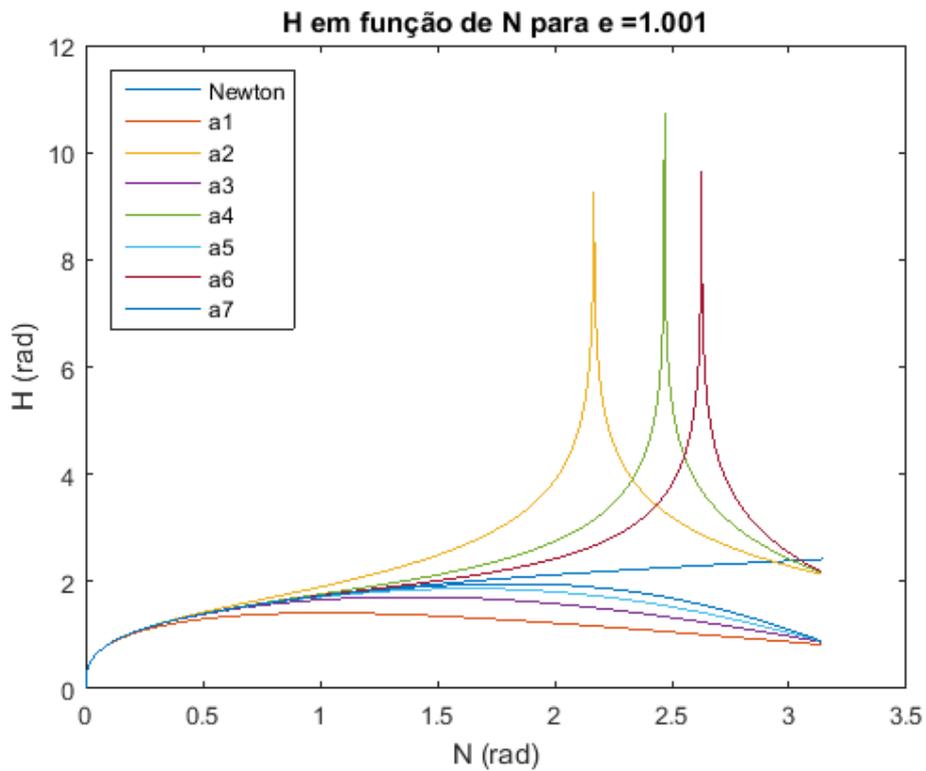
Figura 4.7 - Gráfico de contorno que relaciona a solução (H) com a excentricidade e N.



Fonte: Produção do autor.

Para a obtenção dos valores de H em função de N com a utilização do Método de Aproximações Sucessivas fixando uma excentricidade de $e = 1,001$, variou-se M no intervalo $[0, \pi]$, com $\Delta N = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para diferentes números de termos são mostrados na Figura 4.8 abaixo.

Figura 4.8 - Comparativo entre as soluções com a utilização de diferentes números de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson.



Fonte: Produção do autor.

4.3. MÉTODO DE GAUSS

Os resultados obtidos para o Método de Gauss, tanto para órbitas elípticas quanto para órbitas hiperbólicas, foram inconclusivos, podendo levar a erros de interpretação. Como não houve tempo hábil para investigar e encontrar uma solução satisfatória, optou-se (em uma decisão conjunta dos orientadores) por suprimir os resultados associados a este método deste relatório de Iniciação Científica.

4.4. COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

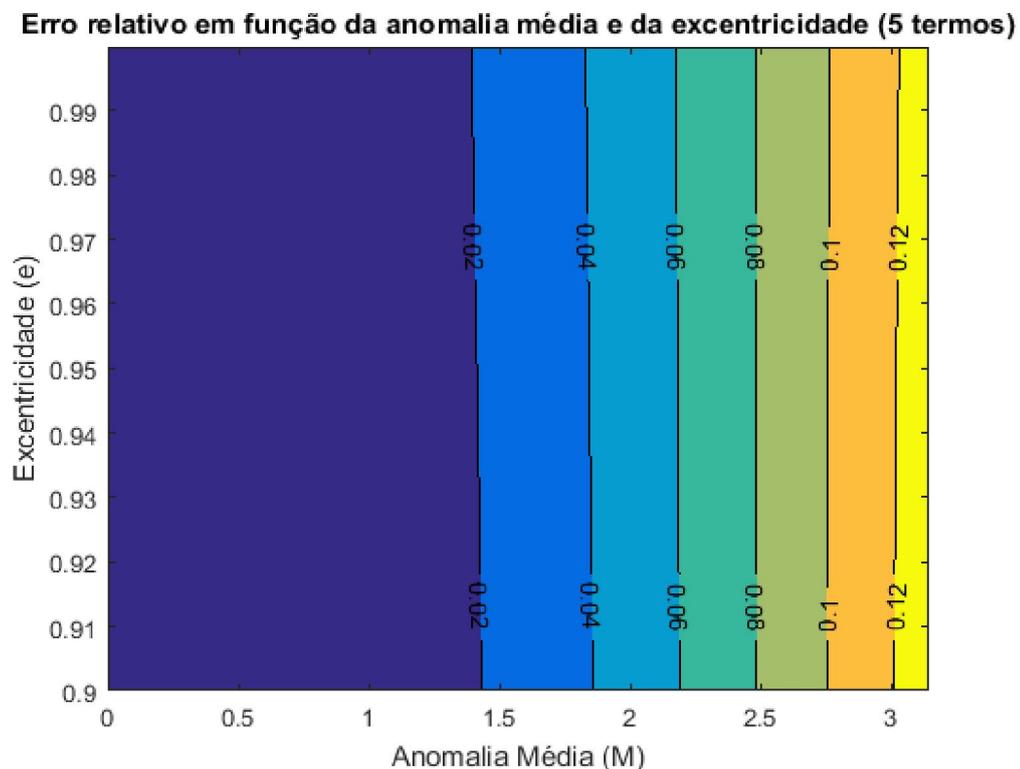
A comparação entre os valores para a anomalia excêntrica obtidos pelo método de Newton-Raphson e os obtidos pelo Método das Aproximações Sucessivas foi feita calculando o erro relativo. O erro considerado foi o módulo da diferença entre os valores dividida pela solução do método de Newton. Para uma dada excentricidade e uma dada anomalia média, o erro relativo pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \text{erro relativo} & \qquad \qquad \qquad (4.1) \\ & = \left| \frac{\text{solução(aproximações sucessivas)} - \text{solução(Newton)}}{\text{solução(Newton)}} \right| \end{aligned}$$

4.4.1. ÓRBITAS ELÍPTICAS

Variando a excentricidade no intervalo $[0,9 ; 1[$, com $\Delta e = 0,0001$, e variando a anomalia média no intervalo $[0 ; \pi]$, com $\Delta M = 0,0031$ rad, o gráfico que relaciona os valores para o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média é apresentado nas Figuras 4.9 a 4.12.

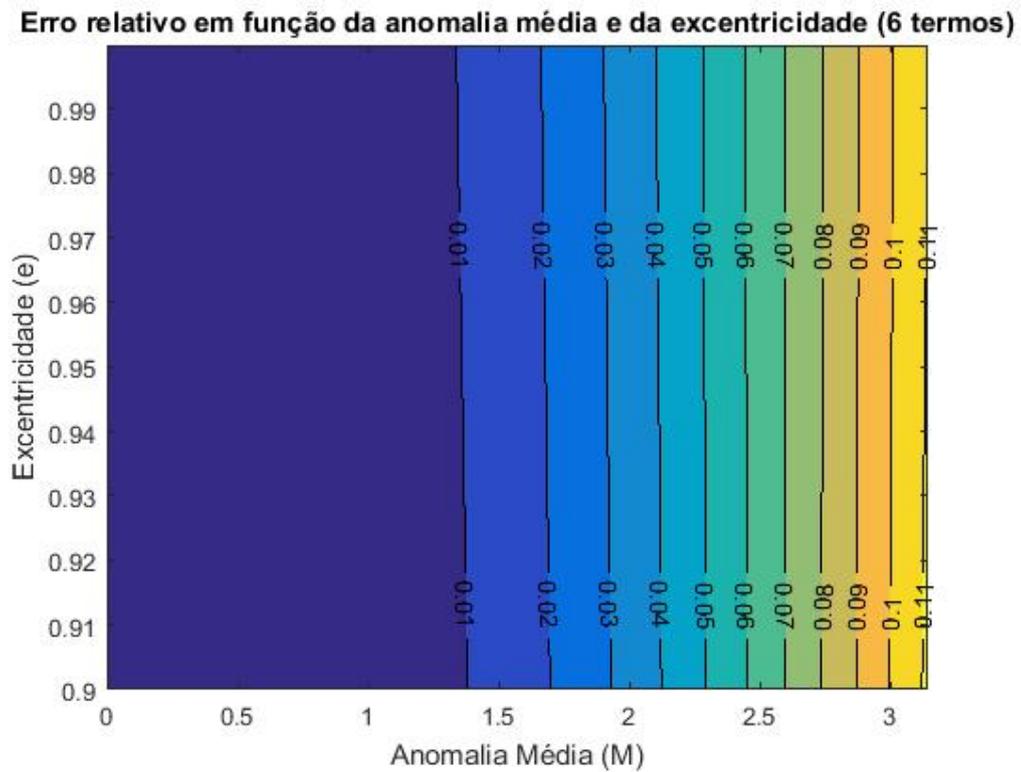
Figura 4.9 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média. Foram usados cinco termos do método das aproximações sucessivas.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 4.9 acima, a solução do método das Aproximações Sucessivas foi calculada até o termo de ordem quatro.

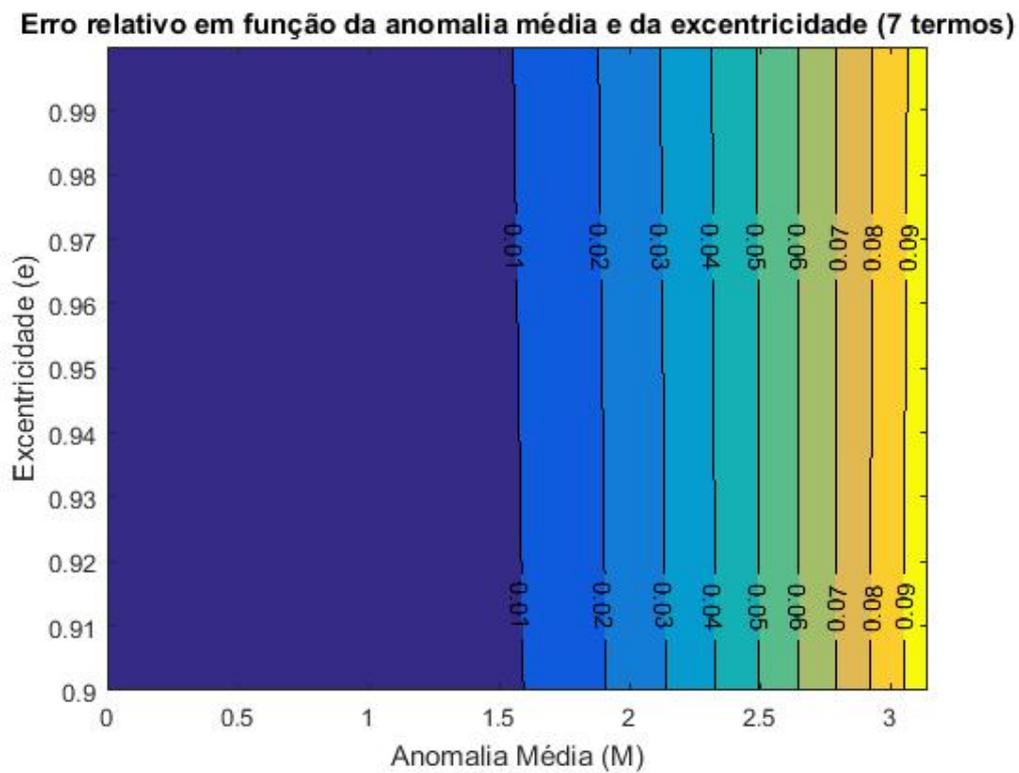
Figura 4.10 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média. Foram usados seis termos do método das aproximações sucessivas.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 4.10 acima, a solução do método das Aproximações Sucessivas foi calculada até o termo de ordem cinco.

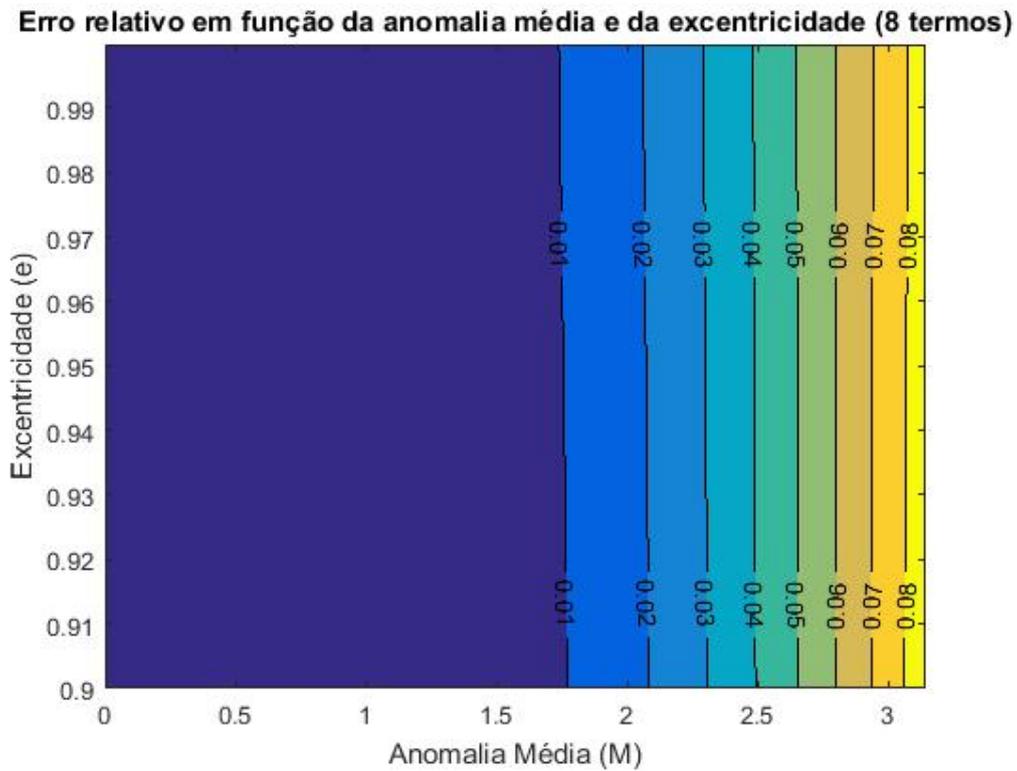
Figura 4.11 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média. Foram usados sete termos do método das aproximações sucessivas.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 4.11 acima, a solução do método das Aproximações Sucessivas foi calculada até o termo de ordem seis.

Figura 4.12 - Gráfico de contorno relacionando o erro relativo com a excentricidade e a anomalia média. Foram usados oito termos do método das aproximações sucessivas.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura 4.12 acima, a solução do método das Aproximações Sucessivas foi calculada até o termo de ordem sete.

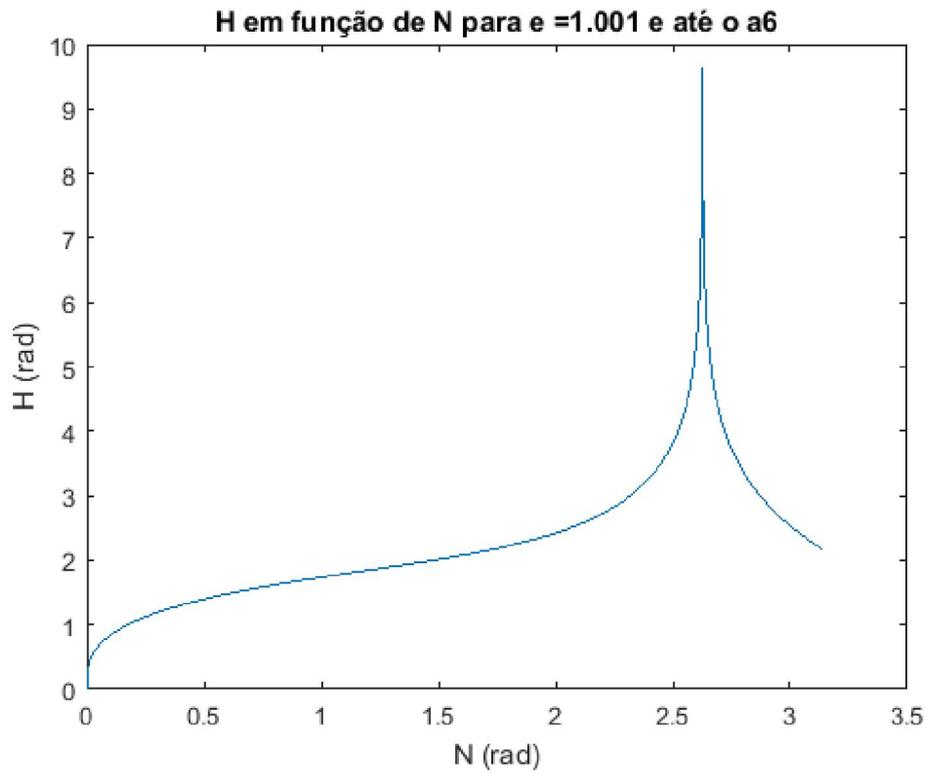
É possível observar que, para todos os números de termos considerados, os maiores valores para o erro relativo estão associados aos maiores valores de anomalia média.

4.4.2. ÓRBITAS HIPERBÓLICAS

Para a obtenção dos valores de H em função de N com a utilização do Método de Aproximações Sucessivas, foi fixada excentricidade de $e = 1,001$ e variou-se N no intervalo $[0, \pi]$, com $\Delta N = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado

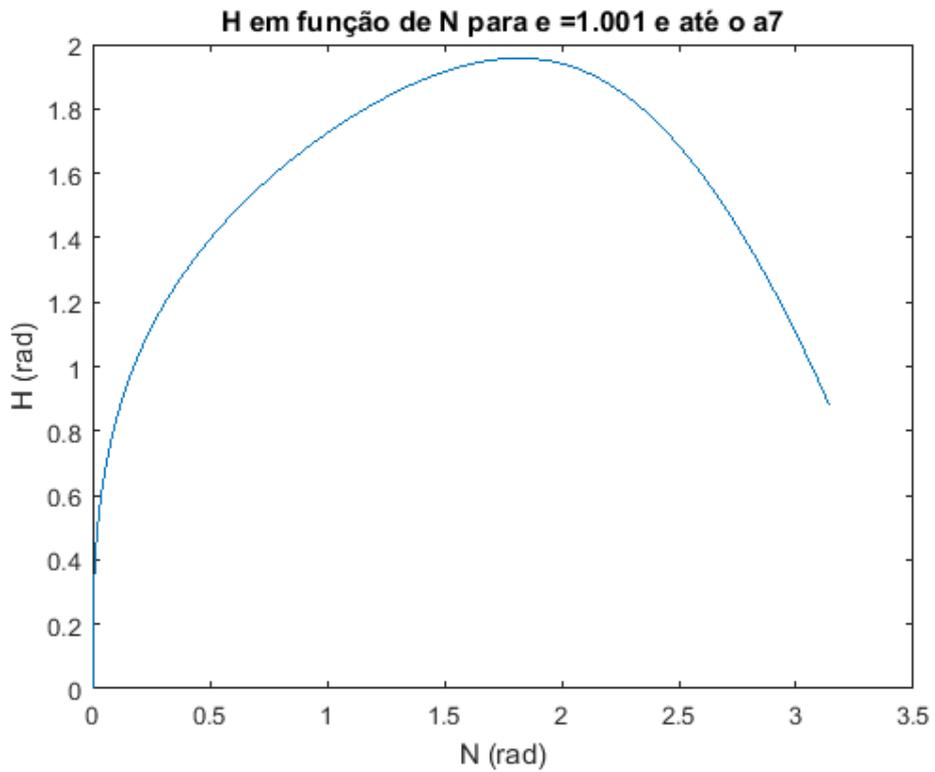
o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} .
Os resultados são mostrados nas Figuras 4.13 a 4.16 abaixo.

Figura 4.13 - Solução com o uso de sete termos.



Fonte: Produção do autor.

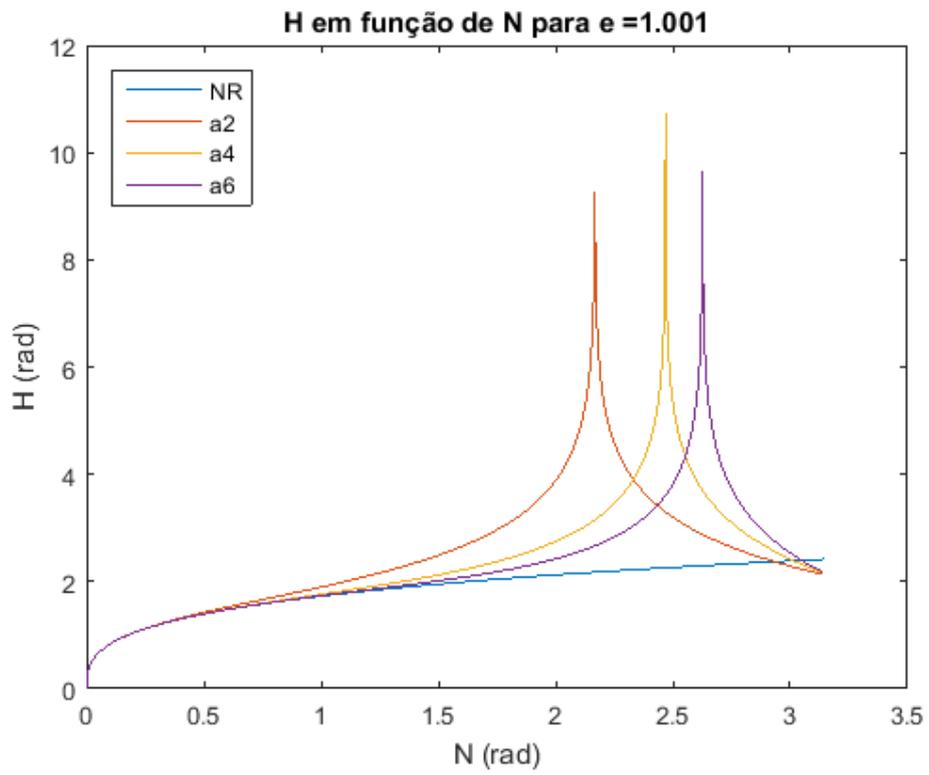
Figura 4.14 - Solução com o uso de oito termos.



Fonte: Produção do autor.

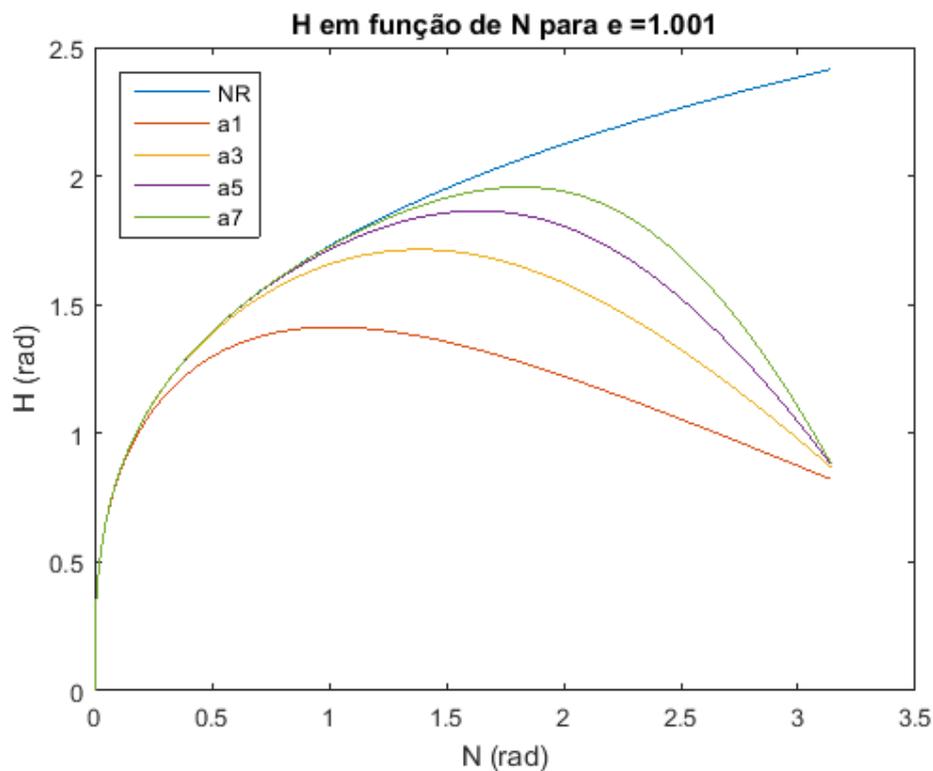
Nas Figuras 4.13 e 4.14 é possível observar que o comportamento para o uso de um número ímpar de termos (Figura 4.13) se difere do comportamento para um número par de termos (Figura 4.14), mostrando um pico para certo valor de N.

Figura 4.15 - Comparativo entre as soluções com a utilização de um número ímpar de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.16 - Comparativo entre as soluções com a utilização de um número par de termos e a solução pelo Método de Newton-Raphson.



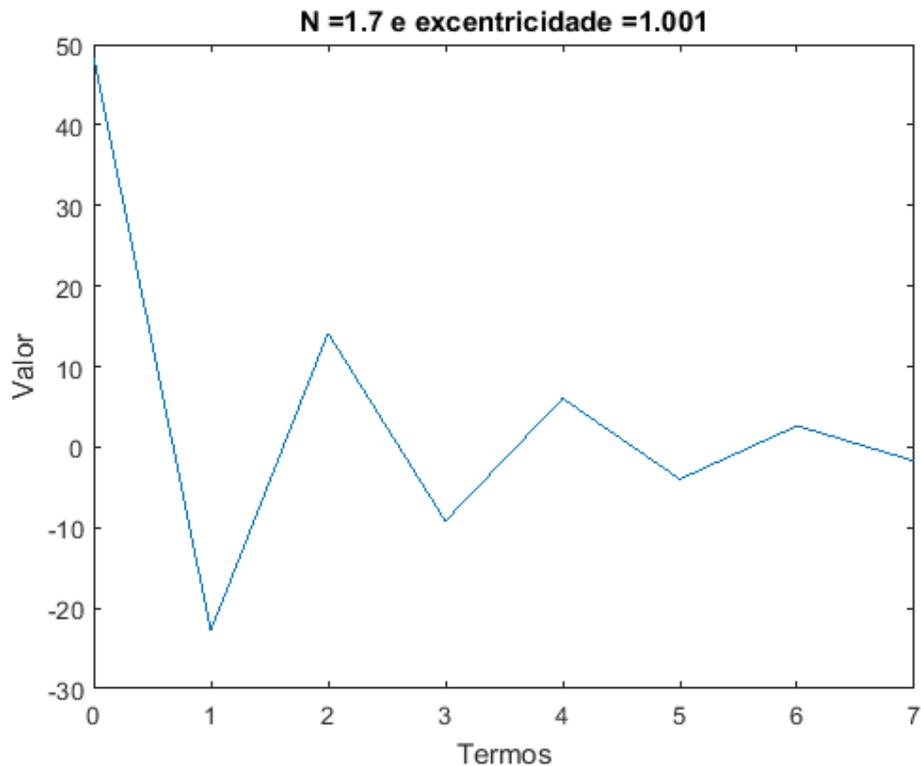
Fonte: Produção do autor.

Na Figura 4.15 é possível observar que o comportamento do resultado encontrado pelo Método das Aproximações Sucessivas para o uso de um número ímpar de termos é divergente.

Na figura 4.16 é possível observar que o resultado encontrado pelo Método das Aproximações Sucessivas se aproxima da referência (Método de Newton-Raphson) para o uso de um número par de termos. A aproximação se dá em certo intervalo de valores para N, que depende do número de termos que estão sendo usados.

Na Figura 4.17 abaixo foram plotados os valores de cada termo da série isoladamente, fixando $e = 1,001$ e $N = 1,7$ rad.

Figura 4.17 - Gráfico com os valores dos termos da série até o oitavo termo.



No eixo horizontal, 0 implica o termo a_0 da expansão, 1 indica o termo a_1 da expansão e assim sucessivamente até 7, que indica o termo a_7 da expansão.

Fonte: Produção do autor.

A Figura 4.17 mostra que a série do Método das Aproximações Sucessivas

$$w = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots$$

não é monotônica, pois não se verificam as inequações $a_i \leq a_{i+1}$ ou $a_i \geq a_{i+1}$, isto é, os termos oscilam entre termos positivos e termos negativos, não mantendo um único comportamento crescente ou decrescente (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

4.4.3. TEMPO DE PROCESSAMENTO

Para a contagem do tempo de processamento foi utilizado um computador com as seguintes configurações:

Processador: Intel® Core™ i3-2310M CPU @ 2.10GHz 2.10GHz

Memória instalada (RAM): 4,00 GB (utilizável: 3,41 GB)

Tipo de sistema: Sistema Operacional de 32 Bits (Windows 7 Professional)

Para órbitas elípticas, o tempo de processamento do Método das Aproximações Sucessivas foi calculado fixando-se a excentricidade em $e = 0,999$ e variando-se M no intervalo $[0, \pi]$, com $\Delta M = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para as médias dos tempos de processamento são mostrados na Tabela 4.1 abaixo.

Tabela 4.1 – Tempos de processamento para $e = 0,999$.

	Tempo (s)
a_1	0.001092445952279
a_2	0.002633559459701
a_3	0.004495415162049
a_4	0.006751266859903
a_5	0.009484753941573
a_6	0.012504279882573
a_7	0.015917896628924
Newton-Raphson	$2.793469458767724 \times 10^{-6}$

Fonte: Produção do autor.

Os resultados sugerem que o Método de Newton-Raphson tem, em média, processamento mais rápido do que o Método das Aproximações Sucessivas para a excentricidade $e = 0,999$.

Ainda para órbitas elípticas, o tempo de processamento do Método das Aproximações Sucessivas foi também calculado fixando-se a excentricidade em $e = 0,900$ e variando-se M no intervalo $[0, \pi]$, com $\Delta M = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para as médias dos tempos de processamento são mostrados na Tabela 4.2 abaixo.

Tabela 4.2 - Tempos de processamento para $e = 0,900$.

	Tempo (s)
a_1	0.001088033384795
a_2	0.002548128458543
a_3	0.004396030986203
a_4	0.006625700505473
a_5	0.009220331726942
a_6	0.012204744304201
a_7	0.015556031396720
Newton-Raphson	$2.760725852445568 \times 10^{-6}$

Fonte: Produção do autor.

Os resultados sugerem que, também para a excentricidade $e = 0,900$, o Método de Newton-Raphson é, na média, mais rápido no processamento do que o Método das Aproximações Sucessivas.

Para órbitas hiperbólicas, o tempo de processamento do Método das Aproximações Sucessivas foi calculado fixando-se a excentricidade em $e = 1,001$ e variando-se N no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, com $\Delta N = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para as médias dos tempos de processamento são mostrados na Tabela 4.3 abaixo.

Tabela 4.3 - Tempos de processamento para $e = 1,001$.

	Tempo (s)
a_1	0.001115383581574
a_2	0.002571886144128
a_3	0.004426419985133
a_4	0.006658981204681
a_5	0.009279442244432
a_6	0.012290784727405
a_7	0.015664869189293
Newton-Raphson	$1.928842767645929 \times 10^{-5}$

Fonte: Produção do autor.

Os resultados sugerem que o Método de Newton-Raphson tem, em média, processamento mais rápido do que o Método das Aproximações Sucessivas para a excentricidade $e = 1,001$.

Para órbitas hiperbólicas, o tempo de processamento do Método das Aproximações Sucessivas foi também calculado fixando-se a excentricidade em $e = 1,100$ e variando-se N no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, com $\Delta N = 0,0031$ rad. Para comparação, foi utilizado o Método de Newton-Raphson com os mesmos valores e tolerância de 10^{-12} . Os resultados para as médias dos tempos de processamento são mostrados na Tabela 4.4 abaixo.

Tabela 4.4 - Tempos de processamento para $e = 1,100$.

	Tempo (s)
a_1	0.001089590905292
a_2	0.002546936493531
a_3	0.004399786726719
a_4	0.006632784364781
a_5	0.009260648880535
a_6	0.012285494924497
a_7	0.015702452496113
Newton-Raphson	$4.473167592040037 \times 10^{-6}$

Fonte: Produção do autor.

Os resultados sugerem que o Método de Newton-Raphson tem, em média, processamento mais rápido do que o Método das Aproximações Sucessivas para a excentricidade $e = 1,100$.

5 CONCLUSÃO

Os resultados indicam que o erro relativo apresentado pelo método das Aproximações Sucessivas é devido ao truncamento do método no oitavo termo (a_7), sendo esperado que, com um número maior de termos conhecidos e considerados, o método apresente uma melhora na aproximação de uma solução para a equação de Kepler.

Entretanto, fazendo uso da equação para a aproximação inicial na forma racional, o Método de Newton-Raphson, utilizado neste projeto como parâmetro de avaliação, apresentou um tempo médio de execução consideravelmente menor do que o apresentado pelo Método das Aproximações Sucessivas, mesmo quando utilizados poucos termos deste último. Foi observado também que, com o aumento do número de termos da série do Método das Aproximações Sucessivas, o tempo de processamento também aumenta.

Assim, os resultados das comparações levaram a concluir que o desempenho do Método de Newton-Raphson é superior ao do Método das Aproximações Sucessivas, mesmo para órbitas quase parabólicas. O acréscimo de termos no Método das Aproximações Sucessivas melhoraria a aproximação, mas teria processamento oneroso quando comparado ao do Método de Newton-Raphson. Desta forma, a aplicação do método vai depender do problema em questão.

Como sugestão para futuros desenvolvimentos, propõe-se a obtenção de mais termos para o Método das Aproximações Sucessivas, possivelmente com um algoritmo que desenvolva um número ilimitado de termos. Além disso, propõe-se também o desenvolvimento e a investigação do Método de Gauss, que neste trabalho apresentou resultados inconclusivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATTIN, Richard H. **An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics**. Reston, Va: American Institute Of Aeronautics And Astronautics, 1999. 798p.
- CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica**, um tratamento vetorial. 3. Ed. Rev. e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- CURTIS, Howard D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. [S.l.]: Elsevier Butterworth-heinemann, 2005. 673p.
- DANBY, J. M. A.; BURKARDT, T. M.. The solution of Kepler's equation, I. **Celestial Mechanics**, [S.l.], v. 31, n. 2, 95-107p., out. 1983. Springer Science + Business Media. DOI: 10.1007/bf01686811.
- KUGA, Hélio Koiti; CARRARA, Valdemir; RAO, Kondapalli Rama. **Introdução à Mecânica Orbital**. 2. ed. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2012. 67p. Disponível em: <<http://marte3.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m05/2012/06.28.14.21.24/doc/publicacao.pdf>>. Acesso em: 19 jun. 2016.
- STEWART, James. **Cálculo, volume I**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. 348-351p.
- THOMAS, George B; WEIR, Maurice D; HASS, Joel. **Cálculo, volume 2**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Tradução de Carlos Scalici; revisão técnica de Cláudio Hirofume Asano.
- WINTER, S. G. **Introdução à Mecânica Celeste**. 39p. Disponível em: <<http://www.feg.unesp.br/~vcarruba/apostilaA.pdf>>. Acesso em: 08 dez. 2015.

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o International Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São as sequências de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.