



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



# **PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE QUE UTILIZA UM VOLANTE DE INÉRCIA SUSPENSO POR DOIS EIXOS CARDAN**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Raphael Willian Peres (FATESF, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: raphael-peres@hotmail.com

Mário César Ricci (DMC/ETE/INPE, Orientador)  
E-mail: mariocesarricci@uol.com.br

Julho de 2014

Peres, R. W.

Projeto de um sistema de controle de atitude que utiliza um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan / Peres, R. W. - São José dos Campos: INPE, 2014.  
130p.

1. Satélite. 2. Controle. 3. Atitude. 4. Volante de inércia.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao orientador deste projeto Dr. Mário Cesar Ricci, pela atenção, dedicação orientação, apoio e pelas inúmeras revisões feitas neste trabalho no qual sem dúvidas contribuiu muito na qualidade do texto e das equações.

Ao CONSELHO NACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO – CNPq pelo apoio financeiro recebido através da Bolsa de Iniciação Científica junto ao Programa PIBIC do INPE.

E, finalmente, a minha família e esposa por fazerem parte da minha vida.

## RESUMO

O objetivo final deste trabalho, o qual tem prazo para finalização em julho de 2015, é aplicar a teoria clássica de controle no projeto de um sistema de controle de atitude de satélites. Pretende-se com este trabalho apresentar os procedimentos de projeto para um sistema de controle de atitude contendo um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan (gimbals), para um satélite estabilizado em três eixos numa órbita geostacionária. A utilização de um volante de inércia com dois eixos cardan é uma opção bastante interessante porque, com apenas um dispositivo, é possível controlar o torque em torno dos três eixos do veículo, através do controle de velocidade da roda e do fenômeno do girotorqueamento com dois graus de liberdade. Se o tamanho da roda e a velocidade são determinados adequadamente é possível cancelar torques cíclicos sem empregar jatos de gás, usando-os apenas periodicamente para cancelar torques de perturbação seculares (que crescem linearmente com o tempo). Nesse sistema, baseado em um volante de inércia, é necessário apenas um sensor de arfagem/rolamento (sensor de Terra) para a manutenção precisa da atitude. Diferentemente de sistemas de controle baseados em expulsão de massa, os quais têm necessidade de utilização contínua de propulsores, além dos sensores de rolamento, arfagem e guinada. Considera-se que o satélite está na trajetória nominal em órbita e, portanto, que a fase de aquisição da atitude já tenha transcorrido. Serão determinados propriedades específicas, leis de controle e parâmetros do sistema com o intuito de anular o torque de perturbação de pressão de radiação e o torque devido ao desalinhamento dos propulsores do sistema de controle de órbita. Será analisada a estabilidade do sistema de controle e serão obtidas respostas para torques de perturbação impulsivos, em degrau e cíclico. Até o presente momento, foi obtida toda a base teórica necessária para o desenvolvimento do projeto através de estudos preliminares. Também foram obtidas as equações não lineares de movimento, partindo do pressuposto que o satélite é um corpo rígido com uma roda de inércia capaz de gerar momento angular internamente, o qual somado com o momento angular do veículo fornece o momento angular total. Os torques que agem sobre o satélite, que foram considerados no modelo, são os torques de distúrbio devido à pressão de radiação solar, torques de desalinhamentos do vetor empuxo dos jatos de gás e o torque devido ao gradiente de gravidade. O objetivo, a partir de agora, é obter as três equações linearizadas para os movimentos de rolamento, arfagem e guinada, em torno das condições nominais e realizar o controle nos três eixos.

# **DESIGN OF A CONTROL SYSTEM THAT USES A WHEEL ATTITUDE OF INERTIA SUSPENDED FOR TWO GIMBALS**

## **ABSTRACT**

The final objective of this work, which has the time for completion in July 2015, is to apply the classical control theory in designing a system for attitude control of satellites. The purpose of this work present the design procedures for a system of attitude control containing a flywheel suspended for two gimbals, for three axis stabilized satellite in geostationary orbit. The use of a flywheel with two drive shafts is an interesting option because, with only one device, you can control the torque around the three axes of the vehicle by controlling the speed of the wheel and the phenomenon of with two turning torque degrees of freedom. If the wheel size and speed are determined properly you can cancel cyclic torques without using gas jets, by using them only periodically to cancel secular disturbance torques (growing linearly with time). In this system, based on a flywheel, just a sensor pitch / roll sensor (Earth) is necessary for the maintenance accurate of attitude. Differently from control systems based on mass expulsion, which need continuous use of propellants besides the sensors roll, pitch and yaw. It is considered that the satellite is in orbit in the nominal trajectory and therefore the acquisition phase of attitude has already elapsed. Specific properties, control laws and system parameters are determined in order to cancel the torque disturbance of radiation pressure and the torque due to misalignment of the thrusters of the orbit control system. The stability control system is analyzed and responses to impulsive disturbance torques in step and cyclic are obtained. Until now, the entire necessary theoretical basis for the development of the project was obtained through preliminary studies. The nonlinear equations of motion were also obtained, assuming that the satellite is a rigid body with inertia wheel capable of generating angular momentum internally, which coupled with the angular momentum of the vehicle provides the total angular momentum. The torques acting on the satellite, which was considered in the model, are the disturbance torques due to solar radiation pressure, torque thrust vector misalignments of gas jets and the torque due to gravity gradient. The objective now is to get the three linearized equations for the motions of roll, pitch and yaw, around the nominal conditions and make the control in all three axes.

## LISTA DE FIGURAS

	<b><u>Pág.</u></b>
2.1 Momento angular de m em O. ....	3
2.2 Construção dos Ângulos de Euler. ....	7
2.3 Taxa de Variação dos Ângulos de Euler. ....	9
2.4 Momento Angular de um Corpo Rígido.....	11
2.5 Princípio do conceito de torque devido ao Gradiente de Gravidade. ....	16
2.6 Modelo de Gradiente de Gravidade.....	16
2.7 Concepção artística do satélite estabilizado em três eixos. ....	23
2.8 Nomenclatura para as duas rodas de momento – Orientação nominal.....	24
2.9 Componentes do momento angular .....	25

## LISTA DE TABELAS

	<b><u>Pág.</u></b>
2.1 Parâmetros e Requisitos de Projeto .....	24

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2 DESENVOLVIMENTO .....</b>	<b>2</b>
2.1 Definição de Atitude .....	2
2.2 Princípios Físicos .....	2
2.2.1 Leis de Newton .....	2
2.2.2 Momento angular .....	3
2.3 Sistemas de Coordenadas e suas Transformações .....	5
2.3.1 Sistema de Referência Inercial .....	5
2.3.2 Transformações Fundamentais .....	6
2.3.3 Ângulos de Euler .....	7
2.4 Equações de Euler e Dinâmica de Atitude .....	11
2.4.1 Momento Angular de um Corpo Rígido .....	11
2.4.2 Equações de Euler do Movimento .....	14
2.5 Torque devido ao Gradiente de Gravidade .....	15
2.6 Projeto de um sistema de controle de atitude que utiliza um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan.....	23
<b>3 CONCLUSÃO .....</b>	<b>30</b>
<b>4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>31</b>



## **1 INTRODUÇÃO**

O objetivo deste trabalho é aplicar a teoria clássica de controle no projeto de um sistema de controle de atitude de satélites. A teoria de controle automático aplicada aqui pode ser pensada como um conjunto de técnicas especiais para resolver equações diferenciais lineares. Os métodos a serem utilizados para atingir o objetivo são: aprofundamento nos estudos teóricos dos assuntos relacionados ao projeto, notoriamente nas áreas da física (dinâmica de corpos rígidos), cálculo diferencial, cálculo vetorial, fundamentos da dinâmica orbital e de atitude, manobras de atitude, dispositivos para controle de atitude e teoria clássica de sistemas de controle automáticos.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 DEFINIÇÃO DE ATITUDE

A atitude de um veículo espacial é definida como sendo a orientação em relação a um referencial conhecido. O movimento capaz de alterar a atitude é, de forma resumida, qualquer rotação do veículo em torno do seu centro de massa. O conhecimento de atitude é de fundamental importância para o desenvolvimento de qualquer sistema de controle de atitude.

### 2.2 PRINCÍPIOS FÍSICOS

Algumas propriedades físicas foram largamente utilizadas a fim de conhecer e controlar a atitude. Estes princípios são extremamente importantes tal que uma breve base teórica será introduzida neste trabalho.

#### 2.2.1 LEIS DE NEWTON

Newton pode ser identificado como sendo a pessoa responsável por formalizar as leis físicas com o qual determinam completamente o movimento linear. Ele provou três leis mecânicas sendo elas:

- 1) A taxa de variação temporal da quantidade de movimento retilíneo de um corpo é proporcional à resultante das forças aplicadas sobre o corpo, ou seja,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (2.1)$$

$m$  é a massa do corpo e  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade linear do corpo. Se a massa é constante, então, (2.1) pode ser expressa como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.2)$$

em que

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

- 2) Para um sistema de partículas, se a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 uma força  $\mathbf{F}_{12}$ , então a partícula 1 exercerá sobre a partícula 2 uma força igual e

contrária,  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Se não há força externa aplicada o centro de massa (ou baricentro) permanece imóvel ou em movimento retilíneo uniforme.

3) Quaisquer duas partículas se atraem uma à outra com uma força de magnitude

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.3)$$

$m_1$  e  $m_2$  são as massas das partículas,  $r$  é a distancia entre  $m_1$  e  $m_2$  e  $G = 6,6695 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$  é a constante da gravitação universal.

A lei da gravitação universal, na forma mais completa, também pode ser representada vetorialmente, ou seja,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  representam as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

### 2.2.2 MOMENTO ANGULAR

O conceito de *momento angular* é importante tanto na dinâmica do corpo rígido quanto na dinâmica de partículas. A figura 2.1 mostra o movimento de uma partícula de massa  $m$  em relação a um ponto  $O$  arbitrário e em relação a um ponto  $O'$  fixo no espaço.

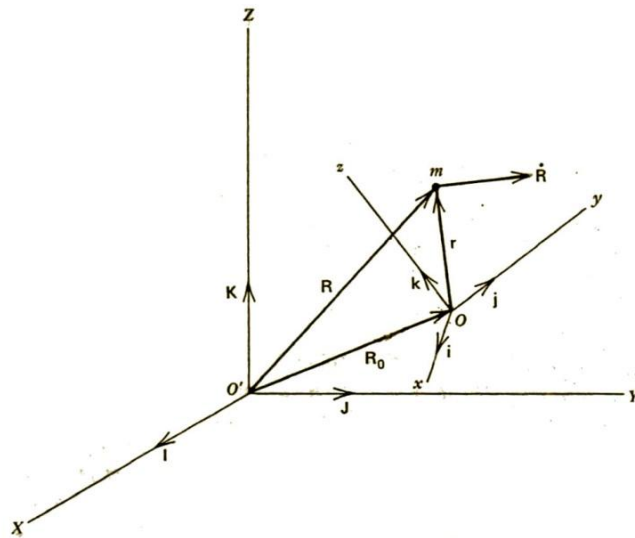


Figura 2.1 Momento angular de  $m$  em  $O$ .

FONTE: Kaplan (1976), p. 6.

O vetor *quantidade de movimento retilíneo* da partícula de massa  $m$  da Fig. 2.1, também denominado de *momento linear*, é definido por

$$\mathbf{p} \triangleq m\dot{\mathbf{R}}. \quad (2.5)$$

O *momento do momento linear* em relação a um ponto arbitrário  $O$  é definido por

$$\mathbf{h}_O \triangleq \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}, \quad (2.6)$$

Uma vez que  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{r}}$ , (2.6) pode ser escrita por

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.7)$$

O primeiro termo do lado direito de (2.7) é definido como *o momento angular aparente* no sistema de referência  $x,y,z$ , que está em movimento e o segundo termo do lado direito de (2.7) é a correção devido ao movimento do ponto  $O$ .

A taxa de variação temporal de  $\mathbf{h}_O$  é de grande importância para o desenvolvimento das equações de movimento de atitude. Expandindo a derivada com relação ao tempo em (2.7), tem-se

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}}_O.$$

Porém  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ , então

$$\dot{\mathbf{h}}_O = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.8)$$

Cada termo do lado direito em (2.8) tem um significado físico. O primeiro representa a taxa de variação aparente do momento angular no sistema não inercial  $x,y,z$ . O segundo termo representa a correção devido à velocidade do ponto  $O$ . O último termo representa o efeito da aceleração do ponto  $O$ .

A taxa de variação do momento angular pode ser relacionada com um torque aplicado sobre o mesmo ponto  $O$ , definido como  $\mathbf{M}_O$ . O momento de uma força agindo em  $m$  com relação ao ponto  $O$  é expresso por

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.9)$$

Neste caso,  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}}$ , que substituída em (2.9) resulta

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{r} \times m(\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{R}}_O + \mathbf{r} \times m \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.8) e rearranjando, tem-se

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O - \dot{\mathbf{r}} \times m \dot{\mathbf{R}}_O. \quad (2.11)$$

Ou, por equivalência

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O + \dot{\mathbf{R}}_O \times m \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.12)$$

Uma importante observação pode ser feita imediatamente da equação (2.12). Se o ponto  $O$  é fixo no espaço ou  $\mathbf{r}$  é constante, então

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{h}}_O. \quad (2.13)$$

De (2.13) conclui-se, para uma partícula de massa  $m$  com momento linear  $\mathbf{p}$  dado por (2.5), que, se a força sobre a partícula e o torque aplicado em relação ao ponto  $O$  arbitrário são nulos, então não existe variação do momento angular da partícula em relação ao ponto  $O$  ( $\mathbf{h}_O$  é constante). Em outras palavras, o momento angular da partícula é conservado sob a condição de um torque nulo.

### 2.3 SISTEMAS DE COORDENADAS E SUAS TRANSFORMAÇÕES

Para todo o descritivo de qualquer movimento de ponto material ou corpo rígido, deve-se necessariamente ter um ou mais sistemas de referência que possam orientar sobre a posição, velocidade, aceleração, rotação, quantidade de movimento; enfim, sistemas que possam dar a visão geral do movimento e como descrevê-lo. Nesta etapa do trabalho foi obtida a base teórica sobre o sistema inercial, sistema móvel e a transformação de coordenadas de um para o outro, para que deste modo seja possível expressar qualquer coordenada em ambos os sistemas.

#### 2.3.1 SISTEMA DE REFERÊNCIA INERCIAL

Pode-se dizer que o sistema de referência inercial é o mais adequado para se ter uma referência mais exata de qualquer movimento. De maneira mais geral, suas coordenadas são fixas com relação ao posicionamento das estrelas. Ao longo de um intervalo de tempo de interesse, situações práticas ditam que apenas o sistema de referência inercial pode garantir uma precisão mais adequada. Por exemplo, o movimento orbital em volta da Terra pode ser referenciado com o sistema de coordenadas tendo a origem no centro

da Terra com um eixo diretamente fixo e alinhado para Aries. Outro eixo seria normal ao plano equatorial, e o terceiro eixo sendo ortogonal para ambos.

### 2.3.2 TRANSFORMAÇÕES FUNDAMENTAIS

Para detalhar melhor o conceito de transformações de coordenadas, considere a posição absoluta da massa  $m$  na figura 2.1. Assuma os vetores unitários  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  para os sistemas de referencia com as coordenadas  $X, Y, Z$  e  $x, y, z$ , respectivamente. Assim a posição de  $m$  é representada por  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}$ , que pode ser escrita na forma de suas componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}, \\ \mathbf{R}_O &= X_O\mathbf{I} + Y_O\mathbf{J} + Z_O\mathbf{K}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Cada componente de  $\mathbf{R}$  pode ser expresso tanto em termos de  $X, Y, Z$  quanto em termos de  $x, y, z$  fazendo o produto escalar de  $\mathbf{R}$  para cada um dos vetores unitários  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , respectivamente. Assim:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = X = (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{I} = X_O + x\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{I} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{J} = Y = (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{J} = Y_O + x\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} = Z = (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{K} = Z_O + x\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{K} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{K} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.14c)$$

Rearranjando (2.14),

$$X - X_O = x\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{I} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.15a)$$

$$Y - Y_O = x\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.15b)$$

$$Z - Z_O = x\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{K} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{K} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.15c)$$

Se ambos os sistemas de referencia têm a mesma origem,  $X_O = Y_O = Z_O = 0$ ,

$$X = x\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{I} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.16a)$$

$$Y = x\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.16b)$$

$$Z = x\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{K} \cdot \mathbf{j} + z\mathbf{K} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.16c)$$

Da mesma forma pode ser feito para encontrar as componentes  $x, y, z$ ,

$$x = Xi \cdot I + Yi \cdot J + zi \cdot K, \quad (2.17a)$$

$$y = Xj \cdot I + Yj \cdot J + zj \cdot K, \quad (2.17b)$$

$$z = Xk \cdot I + Yk \cdot J + zk \cdot K. \quad (2.17c)$$

Os produtos escalares  $I \cdot i$ ,  $I \cdot j$ ,  $I \cdot k$ ,  $J \cdot i$ ,  $J \cdot j$ ,  $J \cdot k$ ,  $K \cdot i$ ,  $K \cdot j$  e  $K \cdot k$  são nove cossenos diretores que representam a orientação de cada eixo de um sistema em relação ao outro.

### 2.3.3 ÂNGULOS DE EULER

Assumindo que ambos os sistemas de referencia  $X, Y, Z$  e  $x, y, z$  tenham o mesmo ponto de origem, é possível representar a as coordenadas de um sistema para o outro puramente através de uma sequencia de rotações. Essa sequencia de rotações é chamada de Ângulos de Euler.

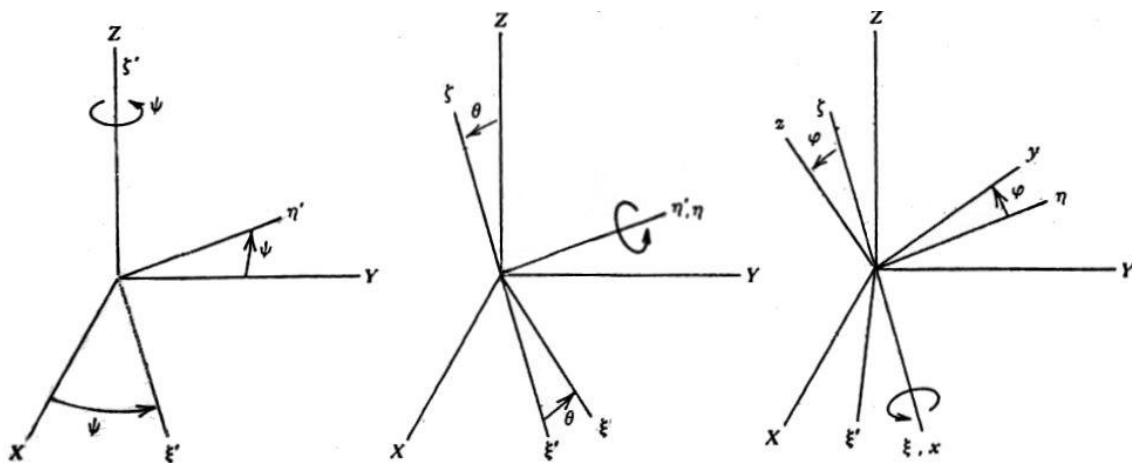


Figura 2.2 Construção dos Ângulos de Euler.

FONTE: Adaptação Kaplan (1976), p. 11.

As rotações demonstradas da figura 2.2 são traduzidas da seguinte forma:

1. Rotação em torno do eixo  $Z$  através de um ângulo  $\psi$  produz os eixos  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ .
2. Rotação em torno do eixo  $\eta'$  através de um ângulo  $\theta$  produz os eixos  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .
3. Rotação em torno do eixo  $\xi$  através de um ângulo  $\varphi$  produz os eixos  $x, y, z$

Cada transformação é caracterizada por uma transformação ortogonal:

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\delta} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.18a)$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix}, \quad (2.18b)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.18c)$$

Agora é possível fazer a transformação direta de  $X, Y, Z$  para  $x, y, z$  apenas combinando esta sequência de rotações

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta\gamma} \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta\gamma\delta} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Observando que  $\boldsymbol{\beta\gamma\delta}$  devem permanecer nesta ordem, porque rotações finitas não podem ser representadas como vetores e, portanto, não são comutativas. Isso corresponde a uma sequência de rotação em  $\psi$ ,  $\theta$ , e  $\varphi$ , com o qual também devem ser feitas nesta sequência. Concluindo assim que a matriz de transformação de um sistema para o outro sob regime destas rotações é expresso da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta\gamma\delta}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Assim,  $\boldsymbol{\alpha}$  transforma as componentes de um vetor expresso no sistema  $X, Y, Z$  para componentes expresso no sistema  $x, y, z$  e vice-versa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$



Outra notação importante é que  $\alpha$  é uma matriz ortogonal. Sendo ela ortogonal, existe uma propriedade que é extremamente importante e muito utilizada:

$$\alpha^{-1} = \alpha^T$$

Reescrevendo a equação (2.21) utilizando a propriedade da matriz ortogonal

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

As taxas de variações dos Ângulos de Euler são dadas por  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$ . A velocidade angular total é representada pelo vetor  $\omega$ , expresso em suas componentes no sistema referencial  $x,y,z$ , fixo ao corpo em movimento

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

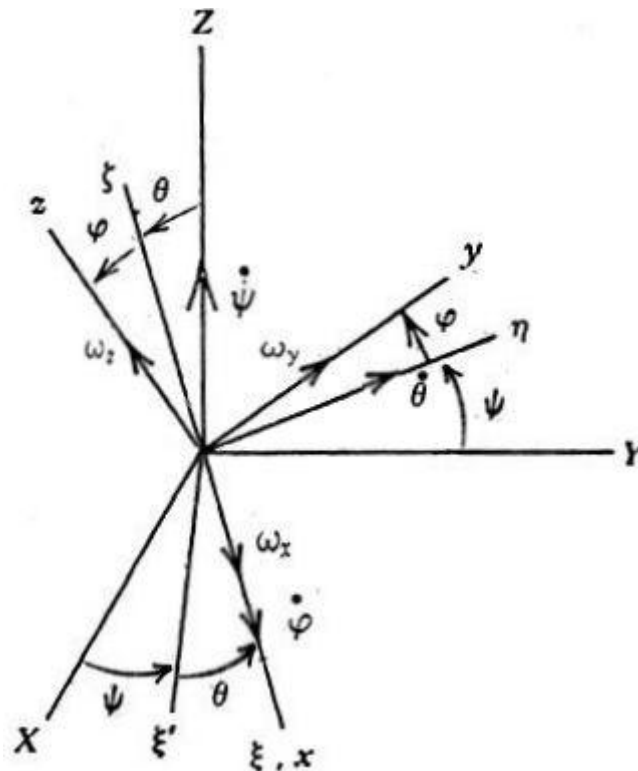


Figura 2.3 Taxa de Variação dos Ângulos de Euler.

FONTE: Adaptação Kaplan (1976), p. 13.

Evidentemente o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  depende linearmente das rotações  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$ , tal que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\psi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\phi, \quad (2.23)$$

em que  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\phi$  são vetores que representam a taxa de variação angular de  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  respectivamente. Dependendo da escolha do sistema de coordenadas, estes vetores ficam com apenas uma componente ao longo de um único eixo.

$\boldsymbol{\omega}_\psi$  - Rotação de  $\dot{\psi}$  exclusivamente no eixo  $Z = \zeta$ ,

$\boldsymbol{\omega}_\theta$  - Rotação de  $\dot{\theta}$  exclusivamente no eixo  $\eta' = \eta$

$\boldsymbol{\omega}_\phi$  - Rotação de  $\dot{\phi}$  exclusivamente no eixo  $\zeta = x$

Utilizando (2.18), (2.19) e (2.20) pode ser feita a transformação das componentes de cada vetor  $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ,  $\boldsymbol{\omega}_\theta$  e  $\boldsymbol{\omega}_\phi$  para o sistema de referência das coordenadas  $x, y, z$

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.24a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \boldsymbol{\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.24b)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24c)$$

Aplicando (2.24) em (2.23)

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_x = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \quad (2.25a)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (2.25b)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi. \quad (2.25c)$$

Ou na forma de matriz

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

## 2.4 EQUAÇÕES DE EULER E DINÂMICA DE ATITUDE

Um dos conceitos de maior importância para o projeto refere-se ao entendimento e a utilização das Equações de Euler na Dinâmica de Atitude de um veículo espacial. Esta teoria tem como principal finalidade a obtenção das equações que podem ser usadas para descrever o movimento em questão. Para o desenvolvimento destas equações serão revisados certos aspectos como a relação de torque com a taxa de variação do momento angular, e apresentar novos como a relação entre momento angular com inércia e rotação de um corpo rígido.

### 2.4.1 MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Uma atenção básica na tratativa de movimento de partículas no espaço é que ela deve ser equilibrada e também respeitar as equações de movimento de um corpo rígido. Este conceito terá início considerando primeiramente a obtenção de uma equação que represente o momento angular de uma forma geral para o corpo rígido. A figura 2.4 pode ser usada para tornar este assunto mais esclarecedor.

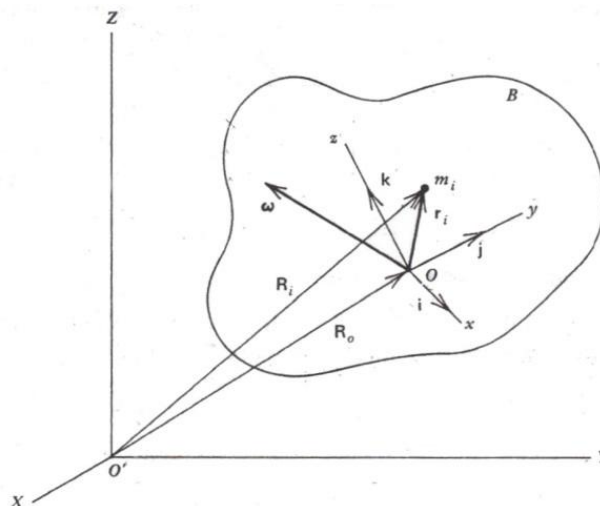


Figura 2.4 Momento Angular de um Corpo Rígido.

FONTE: Kaplan (1976), p. 38.

A figura 2.4 mostra o movimento de um corpo rígido  $B$  em relação a um ponto fixo  $O'$ . O corpo  $B$  possui um sistema de referência  $x,y,z$ , *fixo no corpo*, com origem no centro de massa  $O$ . A *velocidade absoluta* de um elemento de massa  $m_i$  que se encontra a uma distância  $\mathbf{r}_i$  de  $O$  é dada por

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + [\mathbf{v}_i]_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (2.27)$$

em que  $\mathbf{v}_i \triangleq \dot{\mathbf{R}}_i$ ;  $\mathbf{v}_O \triangleq \dot{\mathbf{R}}_O$  é a *velocidade absoluta* da origem  $O$  do sistema de referência móvel  $x,y,z$ ;  $[\mathbf{v}_i]_B \triangleq [\dot{\mathbf{r}}_i]_B$  é a *velocidade* de  $m_i$  *relativa* ao sistema de referencia móvel  $x,y,z$  e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$  é a velocidade de  $m_i$  devido à velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  do referencial móvel  $x,y,z$  em relação ao referencial fixo  $X,Y,Z$ .

Devido ao fato de  $B$  ser considerado um corpo rígido, obviamente a velocidade relativa de  $m_i$  é nula, pois as partículas estão fixas em relação ao referencial  $x,y,z$ , desta forma  $[\mathbf{v}_i]_B = 0$

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{R}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (2.28)$$

Aplicando a equação (2.28) na definição do momento angular da equação (2.6),

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{oi} &= \mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i \\ \mathbf{h}_{oi} &= \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se o corpo for pensado como um grande número de pequenas massas, então o momento angular total em relação ao ponto  $O$  de  $B$  é

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{h}_{oi} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

No qual é mais conveniente ser representado da seguinte forma

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)m_i - \mathbf{v}_O \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (2.30)$$

Pela definição, o centro de massa  $O$  é definido com o ponto sobre o qual

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Agora a expressão (2.30) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{h}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)m_i. \quad (2.32)$$

A expressão (2.32) também pode ser verdadeira se  $\mathbf{v}_o = 0$ , que seria fisicamente se  $O$  fosse fixo no espaço. Agora, se  $m_i$  for pensando com uma massa ainda menor, aumentando assim o numero de elementos de massas, então (2.32) pode ser expressa na forma de integral com relação a  $B$

$$\mathbf{h}_o = \int_B \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \quad (2.33)$$

Expandindo o termo do integrando em (2.33),  $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ , em que  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  e  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ , a expressão resultante é

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= [\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y(xy) - \omega_z(xz)]\mathbf{i} \\ &+ [-\omega_x(xy) + \omega_y(x^2 + z^2) - \omega_z(yz)]\mathbf{j} \\ &+ [-\omega_x(xz) - \omega_y(yz) - \omega_z(x^2 + y^2)]\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A forma integrada de (2.34) sobre as dimensões do corpo é rigorosamente uma função de distribuição de massas, notando que as componentes da velocidade angular são independentes da distribuição de massa. Assim, qualquer corpo rígido pode ser caracterizado por uma dada configuração constante a fim de estudar o momento angular e consecutivamente o movimento de atitude. Essas constantes são definidas como

$$I_x = \int_B (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_B (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_B (x^2 + y^2) dm, \quad (2.35)$$

$$I_{xy} = \int_B (xy) dm, \quad I_{xz} = \int_B (xz) dm, \quad I_{yz} = \int_B (yz) dm, \quad (2.36)$$

em que  $I_x, I_y, I_z$ , da expressão (2.35), são os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos  $x, y, z$ , respectivamente, e  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ , da expressão (2.36), são os produtos de inércia de  $B$ . Notando que  $I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}$  e  $I_{yz} = I_{zy}$ , e também que os produtos de inércia podem assumir valores positivos ou negativos enquanto os momentos de inércia só podem assumir valores positivos. Finalmente, o momento angular de  $B$  da equação (2.33) pode ser simplificado da seguinte forma

$$\mathbf{h}_o = h_x\mathbf{i} + h_y\mathbf{j} + h_z\mathbf{k}. \quad (2.37)$$

Substituindo as expressões (2.34) em (2.33) e aplicando as definições em (2.35) e (2.36), as componentes do vetor  $\mathbf{h}_o$  podem ser representando da seguinte forma

$$h_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \quad (2.38a)$$

$$h_y = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \quad (2.38b)$$

$$h_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y - I_z \omega_z. \quad (2.38c)$$

Que também pode ser expresso na forma de matriz

$$\mathbf{h}_o = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

A matriz que contem os momentos e os produtos de inércia é conhecida como *tensor de inércia* e é identificado aqui como  $\mathbf{I}$ . Desta maneira, (2.39) pode ser escrita de forma mais simplificada, como sendo

$$\mathbf{h} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.40)$$

em que o subscrito  $O$  é descartado e  $\mathbf{h}$  é considerado como sendo medido em relação ao centro de massa.

#### 2.4.2 EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

Quando considerado um corpo rígido, as equações que envolvem torque e momento angular normalmente são desenvolvidas através da equação geral de movimento de atitude. Através da equação (2.13) foi provado que um torque agindo sobre um ponto é equivalente à taxa de variação do momento angular deste mesmo ponto. Esta afirmação é válida para um corpo rígido quando o ponto em questão é fixo no espaço ou é o próprio centro de massa. No desenvolvimento a seguir, o torque pode ser pensando como sendo aplicado em relação ao centro de massa do corpo rígido, desta forma sem perder a generalidade,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}. \quad (2.41)$$

A taxa de variação absoluta é

$$\mathbf{M} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (2.42)$$

em que o primeiro termo do lado direito de (2.42) representa a taxa de variação aparente do momento angular no sistema de referência  $x,y,z$  em movimento, e  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}$  é o complemento da variação do momento angular devido à rotação do corpo.

Expandido a equação (2.42) em termo dos componentes vetoriais

$$\mathbf{M} = (\dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y)\mathbf{i} + (\dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z)\mathbf{j} + (\dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x)\mathbf{k}. \quad (2.43)$$

No qual representam três equações diferenciais que relacionam o torque aplicado com a taxa de variação do momento angular

$$M_x = \dot{h}_x + \omega_y h_z - \omega_z h_y, \quad (2.44a)$$

$$M_y = \dot{h}_y + \omega_z h_x - \omega_x h_z, \quad (2.44b)$$

$$M_z = \dot{h}_z + \omega_x h_y - \omega_y h_x. \quad (2.44c)$$

Estas são conhecidas como *Equações de Euler do Movimento*. Assim, de forma geral, o movimento de atitude de um corpo rígido pode ser modelado através dessas três simples equações. Nota-se que a expressão (2.44) é uma equação diferencial de primeira ordem em  $\mathbf{h}$ . No entanto ela pode ser convertida para uma equação diferencial de primeira ordem em  $\boldsymbol{\omega}$  através da aplicação da expressão (2.38), ou caso seja necessário representar o movimento no sistema de referencia inercial é necessária aplicação da transformação (2.25) através dos ângulos de Euler, tornando assim uma equação diferencial de segunda ordem.

## 2.5 TORQUE DEVIDO AO GRADIENTE DE GRAVIDADE

O princípio do torque devido ao gradiente de gravidade pode ser mais facilmente explicado considerando um satélite que possui, em suas dimensões, o comprimento de um dos eixos muito maior do que os outros dois, usando uma referência de três eixos  $x, y, z$ . Pela figura 2.5 nota-se que o centro de massa acompanha uma orbita circular. Uma deflexão causada a partir do eixo vertical entre o ponto 1 e 2 causa um torque de restauração gerado pelo desequilíbrio das forças agindo sobre as massas  $m_1$  e  $m_2$ . A força centrífuga agindo sobre  $m_1$  é maior que a força gravitacional, isso porque essas duas forças são iguais apenas no centro de massa. Por outro lado na massa 2 ocorre o contrário, a força de gravidade é maior que a força centrifuga. Sob essas circunstancias um conjugado de torques são criados, tendo as forças aplicadas na direção do eixo vertical (Nadir e Zênite).

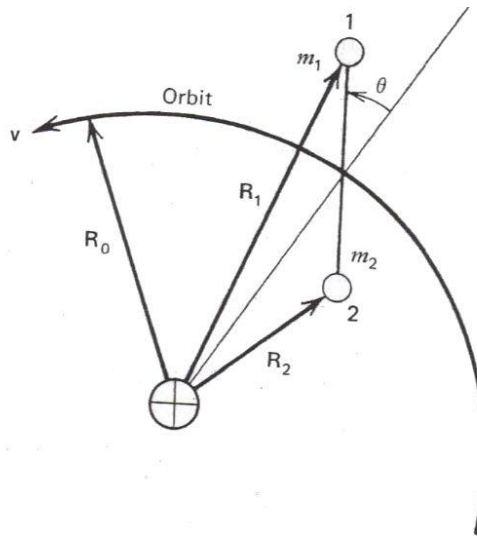


Figura 2.5 Princípio do conceito de torque devido ao Gradiente de Gravidade.

FONTE: Kaplan (1976), p. 199.

A fim de modelar a equação do torque devido ao gradiente de gravidade utilizando notação de partículas, a figura 2.6 demonstra o caso mais geral

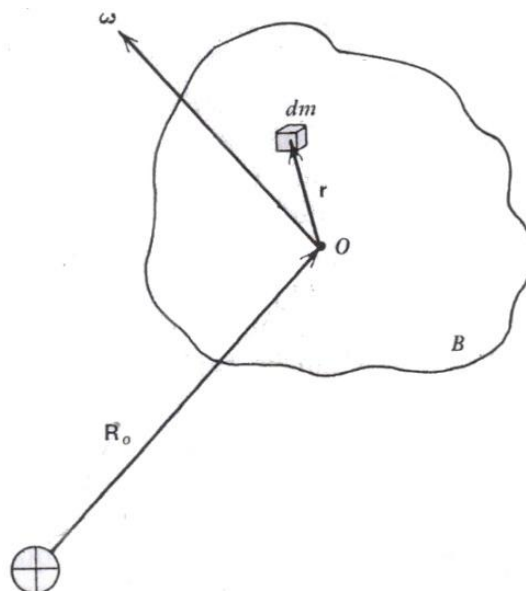


Figura 2.6 Modelo de Gradiente de Gravidade.

FONTE: Kaplan (1976), p. 200.



Se  $\mathbf{G}$  é o torque produzido pela gravidade, então a equação do movimento é simplificada para

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}, \quad (2.45)$$

em que  $\mathbf{h}$  é o momento angular do corpo  $B$  com relação ao seu centro de massa  $O$  dado pela equação (2.33),

$$\mathbf{h} = \int_B \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm.$$

Para resolução do termo que esta sendo integrado, aplica-se a identidade do produto triplo vetorial

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}.$$

Assim o momento angular pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{h} = \int_B [r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] dm. \quad (2.46)$$

E sua taxa de variação absoluta com relação ao tempo é expressa da seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}.$$

Substituindo o termo  $\mathbf{h}$  já fornecido pela expressão (2.46), notando também que  $\dot{\mathbf{r}} = 0$ , pois o corpo é considerado rígido, então a derivada absoluta do momento angular é

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \int_B [r^2\dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{r}] dm + \int_B (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dm. \quad (2.47)$$

Por outro lado  $\mathbf{G}$  também pode ser decomposto em sua uma forma mais completa. Começando por analisar a definição da equação (2.9)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Para o torque devido ao Gradiente de Gravidade existe um conjugado de vários torques sendo aplicados sobre o corpo, ou seja, o torque total  $\mathbf{G}$  é a somatória de todos os torques sendo aplicados em cada partícula de massa

$$\mathbf{G} = \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{F} dm. \quad (2.48)$$

Pela lei da Gravitação Universal expressa na equação (2.4),  $\mathbf{F}$  pode ser representado da seguinte forma

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2(-\mathbf{R}_o-\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{r}|^3}. \quad (2.49)$$

Pela figura 2.6 o termo  $(-\mathbf{R}_o - \mathbf{r})$  representa o vetor que aponta da partícula  $dm$  para o centro da Terra cujo modulo é  $|\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|$ . O termo  $Gm_1m_2$  pode ser expresso pela constante  $\mu_{\oplus}$ . Com essas informações, a força gravitacional agindo na partícula  $dm$  é

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_{\oplus}(\mathbf{R}_o+\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{r}|^3}. \quad (2.50)$$

Substituindo a expressão (2.50) na expressão (2.48) a expressão encontrada é

$$\mathbf{G} = \int_B \mathbf{r} \times \left[ -\frac{\mu_{\oplus}(\mathbf{R}_o+\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_o+\mathbf{r}|^3} \right] dm. \quad (2.51)$$

O termo  $|\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|^3$  pode ser simplificado, notando que

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|^2 &= (\mathbf{R}_o + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R}_o + \mathbf{r}) \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}| &= \sqrt{R_o^2 + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o) + r^2} \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}| &= \sqrt{R_o^2 \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right)} \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}| &= R_o \sqrt{\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right)} \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|^3 &= R_o^3 \sqrt{\left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right)^3} \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|^3 &= R_o^3 \left[ \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right) \right]^{3/2} \\ |\mathbf{R}_o + \mathbf{r}|^{-3} &= \frac{1}{R_o^3} \left[ \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right) \right]^{-3/2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aplicando a expansão em Serie de Taylor no termo  $\left[ \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o)}{R_o^2} + \frac{r^2}{R_o^2} \right) \right]^{-3/2}$  da equação (2.52), e notando que  $R_o \gg r$ ,

$$\left[ \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right) \right]^{-3/2} = 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + H.O.T, \quad (2.53)$$

em que  $H.O.T$  é definido como *Higher Order Terms*. Pela expansão utilizando a serie de Taylor  $H.O.T$  é um valor que tende para zero, portanto

$$\left[ \left( 1 + \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} + \frac{r^2}{R_O^2} \right) \right]^{-3/2} \cong 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2}. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.54) em (2.52),

$$|\mathbf{R}_O + \mathbf{r}|^{-3} \cong \frac{1}{R_O^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} \right). \quad (2.55)$$

Substituindo (2.55) em (2.51),

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_B \mathbf{r} \times \left[ -\mu_{\oplus}(\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \frac{1}{R_O^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)}{R_O^2} \right) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \mathbf{r} \times \left[ \left( \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} (\mathbf{R}_O + \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) \right) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \left[ \left( \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \mathbf{r} \times (\mathbf{R}_O + \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O) \right) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{R}_O + \mathbf{r}) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \int_B \left[ \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) - \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) \right] dm \\ \mathbf{G} &= \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) dm + \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \int_B (\mathbf{R}_O \times \mathbf{r}) dm. \end{aligned}$$

Notando que  $\mathbf{R}_O$  do segundo termo do lado direito é independente da distribuição de massa sobre o corpo  $B$  e pode ser colocado para fora da integral,

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_O^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_O)(\mathbf{r} \times \mathbf{R}_O) dm + \frac{\mu_{\oplus}}{R_O^3} \mathbf{R}_O \times \int_B \mathbf{r} dm. \quad (2.56)$$

Além disso,  $\mathbf{r}$  está referenciado no centro de massa, ou seja

$$\int_B \mathbf{r} dm = 0.$$

Permitindo assim que (2.56) seja escrita da seguinte forma

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_o) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}_o) dm. \quad (2.57)$$

A questão da estabilidade sobre o eixo vertical local é evidente. Para provar esta teoria basta analisar o equilíbrio entre o torque gerado pelo gradiente de gravidade e a taxa de variação do momento angular ambos com relação ao ponto  $O$ . Primeiramente assume-se que  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  são os vetores unitários ao longo da direção Zênite, na direção orbital, e na direção normal a orbita, respectivamente. Se a única variação angular do corpo é decorrente da taxa de variação angular orbital constante, sendo as componentes de  $\mathbf{r}$  instantaneamente paralelos a direção  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  respectivamente, então a equação (2.47) fornece

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \int_B (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dm \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \int_B [(x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) \cdot \dot{\theta}\mathbf{K}] [(x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) \times \dot{\theta}\mathbf{K}] dm \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \int_B \dot{\theta} z [(\dot{\theta}y\mathbf{I} - \dot{\theta}x\mathbf{J})] dm \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \dot{\theta}^2 \int_B [(yz\mathbf{I} - xz\mathbf{J})] dm \end{aligned}$$

Usando a definição do produto de inércia fornecida pela equação (2.36)

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\theta}^2 (I_{yz}\mathbf{I} - I_{xz}\mathbf{J}), \quad (2.58)$$

em que  $I_{yz}, I_{xz}$  são os produtos de inércia com relação aos eixos  $x, y, z$  com o qual estão instantaneamente paralelos para  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ , respectivamente. Por definição  $\dot{\theta}^2 = \mu_{\oplus}/R_o^3$

Fazendo a mesma analogia sobre as referencias adotadas e notando que  $\mathbf{R}_o = R_o\mathbf{I}$ , a equação do torque devido ao gradiente de gravidade fornecido pela expressão (2.57) pode ser representada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B (x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) \cdot (R_o\mathbf{I}) [(x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) \times (R_o\mathbf{I})] dm \\ \mathbf{G} &= \frac{3\mu_{\oplus}}{R_o^5} \int_B (xR_o) [(zR_o\mathbf{J} - yR_o\mathbf{K})] dm \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_0^3} \int_B (xz\mathbf{J} - xy\mathbf{K}) dm$$

Usando a definição do produto de inércia fornecida pela equação (2.36)

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R_0^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}). \quad (2.59)$$

Comparando as expressões (2.58) e (2.59)

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}$$

$$\frac{3\mu_{\oplus}}{R_0^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}) = \dot{\theta}^2 (I_{yz}\mathbf{I} - I_{xz}\mathbf{J}).$$

A equação de equilíbrio fica

$$\frac{3\mu_{\oplus}}{R_0^3} (I_{xz}\mathbf{J} - I_{xy}\mathbf{K}) + \dot{\theta}^2 (I_{xz}\mathbf{J} - I_{yz}\mathbf{I}) = 0. \quad (2.60)$$

Pela expressão (2.60) nota-se que para haver equilíbrio é necessário que  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , ou seja, o corpo deve ter seus eixos principais de inércia alinhados com o sistema de referencia  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ .

O movimento estável utilizando como referência as coordenadas  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  no sistema inercial já pode ser investigado. No entanto, de forma mais geral, as componentes vetoriais são expressas com relação ao sistema de referencia dos eixos principais de inércia, ou seja, o sistema não inercial. Desta forma a equação (2.57) é reescrita agora ao longo dos eixos  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} \int_B [(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})][(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k})] dm$$

Notando que o subscrito  $O$  foi descartado apenas por não haver mais necessidade de especificação

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} \int_B [(xR_x + yR_y + zR_z)][(yR_z - zR_y)\mathbf{i} + (zR_x - xR_z)\mathbf{j} + (xR_y - yR_x)\mathbf{k}] dm$$

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} \int_B [(xyR_xR_z + y^2R_yR_z + yzR_z^2 - xzR_xR_y - yzR_y^2 - z^2R_yR_z)\mathbf{i} + (xzR_x^2 + yzR_xR_y + z^2R_xR_z - x^2R_xR_z - xyR_yR_z - xzR_z^2)\mathbf{j} + (x^2R_xR_y + xyR_y^2 + xzR_yR_z - xyR_x^2 - y^2R_xR_y - yzR_xR_z)\mathbf{k}] dm.$$

Usando a definição da equação (2.36) sobre produtos de inércia.

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} \left[ \left( \int_B (y^2 - z^2)R_yR_z dm + I_{xy}R_xR_z + I_{yz}R_z^2 - I_{xz}R_xR_y - I_{yz}R_y^2 \right) \mathbf{i} + \left( \int_B (z^2 - x^2)R_xR_z dm + I_{xz}R_x^2 + I_{yz}R_xR_y - I_{xy}R_yR_z - I_{xz}R_z^2 \right) \mathbf{j} + \left( \int_B (x^2 - y^2)R_xR_y dm + I_{xy}R_y^2 + I_{xz}R_yR_z - I_{xy}R_x^2 - I_{yz}R_xR_z \right) \mathbf{k} \right]$$

Pelo requerimento de equilíbrio visto na equação (2.60), os produtos de inércia devem ser  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ . Em outras palavras, considera-se neste caso que o sistema de referencia  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  esteja alinhado com os eixos principais de inércia, fazendo assim que os produtos de inércia sejam nulos

$$\mathbf{G} = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} [(R_yR_z \int_B (y^2 - z^2) dm)\mathbf{i} + (R_xR_z \int_B (z^2 - x^2) dm)\mathbf{j} + (R_xR_y \int_B (x^2 - y^2) dm)\mathbf{k}]. \quad (2.61)$$

Comparando (2.61) com as expressões encontradas em (2.35) para os momentos principais de inércia

$$\int_B (y^2 - z^2) dm = \int_B (x^2 + y^2) dm - \int_B (x^2 + z^2) dm = I_z - I_y, \quad (2.62a)$$

$$\int_B (z^2 - x^2) dm = \int_B (y^2 + z^2) dm - \int_B (x^2 + y^2) dm = I_x - I_z, \quad (2.62b)$$

$$\int_B (x^2 - y^2) dm = \int_B (x^2 + z^2) dm - \int_B (y^2 + z^2) dm = I_x - I_z. \quad (2.62c)$$

Substituindo (2.62) em (2.61) e colocando na forma das componentes de  $\mathbf{G} = G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}$

$$G_x = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} (I_z - I_y)R_yR_z, \quad (2.63a)$$

$$G_y = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} (I_x - I_z)R_zR_x, \quad (2.63b)$$

$$G_z = \frac{3\mu_{\oplus}}{R^5} (I_x - I_z) R_x R_y. \quad (2.63c)$$

## 2.6 PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE QUE UTILIZA UM VOLANTE DE INÉRCIA SUSPENSO POR DOIS EIXOS CARDAN

O satélite da figura 2.7 é está na posição nominal com os eixos fixos no corpo  $x,y,z$  – eixos principais de inércia – alinhados com o referencial orbital. A orientação nominal do volante também é mostrada na Fig. 2.8, com eixo de giro coincidindo com o eixo de arfagem. Os parâmetros do satélite assim como os requisitos para o torque de perturbação e de precisão de apontamento são dados na Tabela 2.1. Também são inclusos torques de perturbações a fim de analisar com mais precisão. O modelo utilizado é o de um corpo rígido mais um volante de inércia com dois eixos cardam.

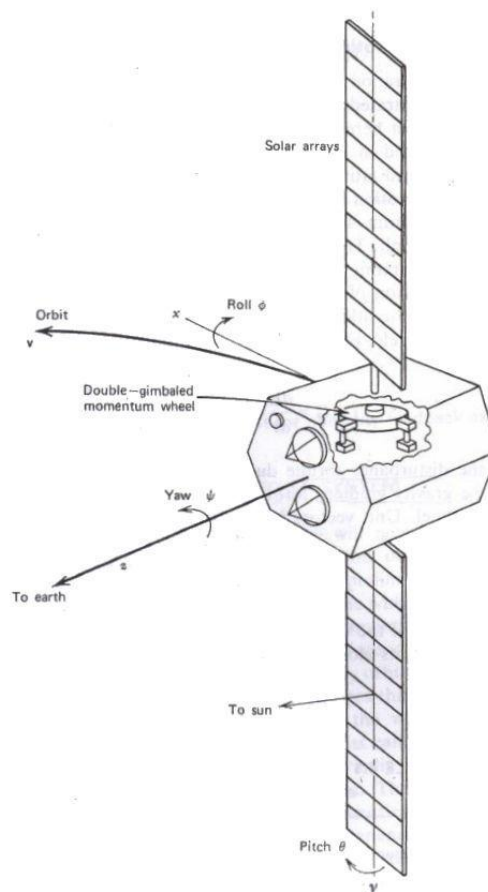


Figura 2.7 Concepção artística do satélite estabilizado em três eixos.

FONTE: Kaplan (1976), p. 242.

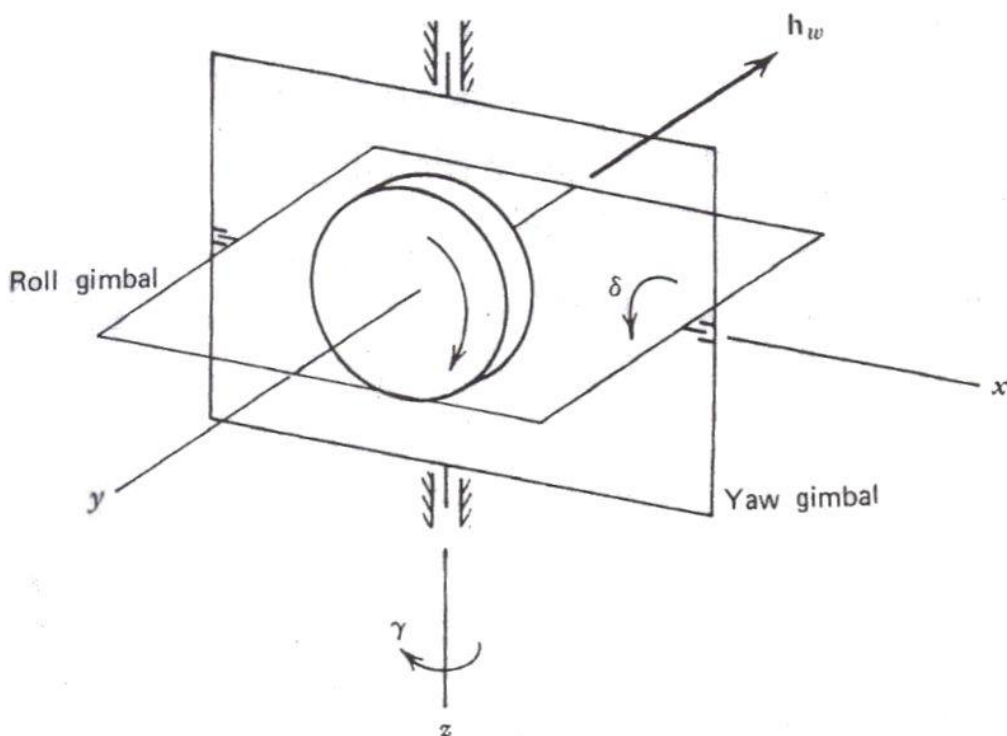


Figura 2.8 Nomenclatura para as duas rodas de momento – Orientação nominal.

FONTE: Kaplan (1976), p. 243.

Tabela 2.1 Parâmetros e Requisitos de Projeto

Massa do satélite	716 Kg
Momentos de inércia	$I_x = I_z = 2000 \text{ N.m.s}^2$ $I_y = 400 \text{ N.m.s}^2$
Requisitos de precisão de atitude	arfagem e rolamento = $0.05^\circ$ guinada = $0.40^\circ$
Torques da pressão solar (posição orbital $t=0$ a $t=6$ A.M. ou 6 P.M.)	$T_x = 2 \times 10^{-5} (1 - 2 \sin \omega_0 t) \text{ N.m}$ $T_y = 10^{-4} (\cos \omega_0 t) \text{ N.m}$ $T_z = -5 \times 10^{-5} (\cos \omega_0 t) \text{ N.m}$
Torque de desalinhamento do propulsor	$T_F = 8.5 \times 10^{-5} \text{ N.m}$

FONTE: Kaplan (1976), p. 241.



Devido à órbita ser geo-estacionária considera-se que os torques ambientais agindo sobre o satélite são apenas decorrentes da pressão de radiação solar, ao gradiente de gravidade e aos desalinhamentos de propulsores. Separando os torques ambientais em duas parcelas as Equações de Euler do movimento para o sistema são dadas por,

$$\mathbf{T} + \mathbf{G} = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}, \quad (2.64)$$

em que  $\mathbf{T}$  são os torques devidos à pressão de radiação solar e aos desalinhamentos dos propulsores;  $\mathbf{G}$  é o torque de gradiente de gravidade;  $\mathbf{h}$  é o momento angular total do sistema (incluindo a roda) e  $\boldsymbol{\omega}$  é o vetor velocidade angular do referencial  $x,y,z$ , fixo no corpo do satélite. O termo entre colchetes na Equação (2.64) representa a derivada de  $\mathbf{h}$  com relação ao referencial fixo no corpo e o último termo é a parcela da derivada de  $\mathbf{h}$  devido à rotação. O vetor  $\mathbf{h}$  representa o momento angular total incluindo a roda de reação

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_v + \mathbf{h}_w. \quad (2.65)$$

O momento angular do veículo  $\mathbf{h}_v$  (excluindo o momento da roda) pode ser expresso em termos dos componentes  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  correspondente aos eixos principais do corpo  $x,y,z$ , respectivamente, como sendo

$$\mathbf{h}_v = I_x \omega_x \mathbf{i} + I_y \omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}. \quad (2.66)$$

As componentes do momento angular da roda podem ser obtidas da Figura 2.9

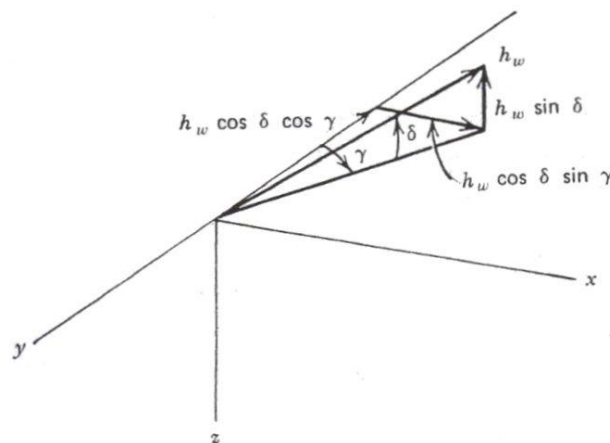


Figura 2.9 Componentes do momento angular

FONTE: Kaplan (1976), p. 243.

$$\mathbf{h}_w = (\cos \delta \sin \gamma)h_w \mathbf{i} - (\cos \delta \cos \gamma)h_w \mathbf{j} - (\sin \delta)h_w \mathbf{k}, \quad (2.67)$$

em que  $\delta$  e  $\gamma$  são os ângulos de rolamento e guinada do cardam, respectivamente.

Combinando o primeiro termo do lado direito da equação (2.64) com as equações (2.65), (2.66) e (2.67), tem-se

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b &= \left[ \frac{d(I_x \omega_x)}{dt} + \frac{d(h_w \cos \delta \sin \gamma)}{dt} \right] \mathbf{i} \\ &+ \left[ \frac{d(I_y \omega_y)}{dt} - \frac{d(h_w \cos \delta \cos \gamma)}{dt} \right] \mathbf{j} \\ &+ \left[ \frac{d(I_z \omega_z)}{dt} - \frac{d(h_w \sin \delta)}{dt} \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Expandindo essa equação resolvendo as derivadas em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]_b &= [I_x \dot{\omega}_x - \dot{\delta}(\sin \delta \sin \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \cos \gamma)h_w + (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w] \mathbf{i} + \\ &[I_y \dot{\omega}_y + \dot{\delta}(\sin \delta \cos \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \sin \gamma)h_w - (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w] \mathbf{j} + [I_z \dot{\omega}_z - \\ &\dot{\delta}(\cos \delta)h_w - (\sin \delta)\dot{h}_w] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Combinando o segundo termo do lado direito da equação (2.64) com as equações (2.65), (2.66) e (2.67),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} &= \\ &(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \times \{ [I_x \omega_x + (\cos \delta \sin \gamma)h_w] \mathbf{i} + [I_y \omega_y - (\cos \delta \cos \gamma)h_w] \mathbf{j} + \\ &[I_z \omega_z - (\sin \delta)h_w] \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

Expandindo essa equação resolvendo o produto vetorial, então:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} &= [\omega_y(I_z \omega_z - h_w \sin \delta) - \omega_z(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma)] \mathbf{i} + [\omega_z(I_x \omega_x + \\ &h_w \cos \delta \sin \gamma) - \omega_x(I_z \omega_z - h_w \sin \delta)] \mathbf{j} + [\omega_x(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma) - \omega_y(I_x \omega_x + \\ &h_w \cos \delta \sin \gamma)] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo as expressões encontradas em (2.68) e (2.69) na equação (2.64), então:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \mathbf{G} &= [I_x \dot{\omega}_x - \dot{\delta}(\sin \delta \sin \gamma)h_w + \dot{\gamma}(\cos \delta \cos \gamma)h_w + (\cos \delta \sin \gamma)\dot{h}_w + \\ &\omega_y(\omega_z I_z - h_w \sin \delta) - \omega_z(\omega_y I_y - h_w \cos \delta \cos \gamma)] \mathbf{i} + [I_y \dot{\omega}_y + \dot{\delta}(\sin \delta \cos \gamma)h_w + \\ &\dot{\gamma}(\cos \delta \sin \gamma)h_w - (\cos \delta \cos \gamma)\dot{h}_w + \omega_z(I_x \omega_x + h_w \cos \delta \sin \gamma) - \omega_x(I_z \omega_z - \end{aligned}$$

$$h_w \sin \delta)]\mathbf{j} + [I_z \dot{\omega}_z - \dot{\delta}(\cos \delta)h_w - (\sin \delta)\dot{h}_w + \omega_x(I_y \omega_y - h_w \cos \delta \cos \gamma) - \omega_y(I_x \omega_x + h_w \cos \delta \sin \gamma)]\mathbf{k}. \quad (2.70)$$

A equação do movimento pode ser linearizada considerando as deflexões muito pequenas que ocorrem no eixo cardam. Esta aproximação permite fazer as seguintes substituições

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \delta, \\ \sin \gamma &= \gamma, \\ \cos \delta &= \cos \gamma = 1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Desvios do momento nominal da roda  $h_n$  também são considerados pequenos, permitido assim que  $h_w = h_n$ . Os componentes de controle da roda de momento podem ser agora definidos usando a equação 2.67

$$\begin{aligned} h_{xc} &= \gamma h_n, \\ h_{zc} &= -\delta h_n, \\ \dot{h}_{yc} &= -\dot{h}_r. \end{aligned} \quad (2.72)$$

O vetor  $\mathbf{R}$  é definido como tendo sua origem no centro de massa do satélite e apontando para o centro da Terra. Se for utilizado o sistema de referência que tem suas componentes alinhadas com a *trajetória da órbita*, *órbita normal* e *zênite*, então  $\mathbf{R}$  terá apenas uma componente na direção oposta do *zênite*, ou seja, na direção de *nadir*. Para transformar as componentes de  $\mathbf{R}$  para as coordenadas que tem como referência os eixos principais de inércia, basta aplicar a matriz de transformação dada em (2.19)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin \theta \\ -R \sin \varphi \cos \theta \\ -R \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Para pequenas deflexões angulares pode-se obter um resultado aproximado de (2.73),

$$R_x = \theta R, \quad (2.74a)$$

$$R_y = -\varphi R, \quad (2.74b)$$

$$R_z = -R. \quad (2.74c)$$

Substituindo (2.74) em (2.63) para encontrar o torque devido ao gradiente de gravidade,

$$G_x = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3} (I_y - I_z) \varphi, \quad (2.75a)$$

$$G_y = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3}(I_x - I_z)\theta, \quad (2.75b)$$

$$G_z = -\frac{3\mu_{\oplus}}{R^3}(I_x - I_z)\theta\varphi \cong 0. \quad (2.75c)$$

Notando que  $G_z \cong 0$  porque o produto resultante de  $\theta\varphi$  é aproximadamente nulo devido as pequenas deflexões consideradas para a linearização.

Para uma órbita geostacionária pode-se relacionar a velocidade angular com a seguinte definição

$$\sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R^3}} = \omega_o = 7,28 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s}$$

Usando esta definição, a equação (2.75) fica

$$G_x = -3\omega_o^2(I_y - I_z)\varphi, \quad (2.76a)$$

$$G_y = -3\omega_o^2(I_x - I_z)\theta, \quad (2.76b)$$

$$G_z = 0. \quad (2.76c)$$

Evidentemente o vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  depende linearmente das rotações  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ , e  $\omega_o$  tal que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\psi} + \boldsymbol{\omega}_{\theta} + \boldsymbol{\omega}_{\varphi} + \boldsymbol{\omega}_o, \quad (2.77)$$

em que  $\boldsymbol{\omega}_{\psi}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\theta}$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\varphi}$  foram obtidos nas expressões (2.24a), (2.24b), (2.24c) respectivamente e  $\boldsymbol{\omega}_o$  é o vetor que representa a parcela da velocidade angular decorrente da órbita geostacionária convertido para as coordenadas dos eixos principais de inércia x,y,z

Para esta conversão, basta aplicar a matriz de transformação expressa em (2.19)

$$\boldsymbol{\omega}_o = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_o \cos \theta \sin \psi \\ -\omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) \\ -\omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

notando que a componente  $\omega_o$  da velocidade angular orbital é negativa porque é oposta ao sentido da rotação de arfagem já adotado, conforme mostra a figura 2.7.

Substituindo (2.24a), (2.24b), (2.24c) e (2.78) em (2.77),

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_o \cos \theta \sin \psi \\ -\omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) \\ -\omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \omega_o \cos \theta \sin \psi - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi - \omega_o (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi) + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \omega_o (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) - \dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Considerando pequenas deflexões angulares, o resultado de (2.79) pode ser aproximado para

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \psi \omega_o \\ \dot{\theta} - \omega_o \\ \dot{\psi} + \varphi \omega_o \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

A taxa de variação do momento angular pode ser expressa da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} - \dot{\psi} \omega_o \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} + \dot{\varphi} \omega_o \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

A equação (2.70) pode ser linearizada considerando pequenas deflexões angulares aplicando as aproximações fornecidas pelas equações (2.71) e (2.72),

$$\mathbf{T} + \mathbf{G} = [I_x \dot{\omega}_x + \dot{h}_{xc} + \omega_y (\omega_z I_z + h_{zc}) - \omega_z (\omega_y I_y - h_n)] \mathbf{i} + [I_y \dot{\omega}_y - \dot{h}_{yc} + \omega_z (I_x \omega_x + h_{xc}) - \omega_x (I_z \omega_z - h_{zc})] \mathbf{j} + [I_z \dot{\omega}_z + \dot{h}_{zc} + \omega_x (I_y \omega_y - h_n) - \omega_y (I_x \omega_x + h_{xc})] \mathbf{k}. \quad (2.82)$$

Substituindo  $\mathbf{G}$  pela equação (2.75),  $\boldsymbol{\omega}$  pela equação (2.80),  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  pela equação (2.81) e isolando  $\mathbf{T}$  em (2.82), a equação linearizada do movimento é obtida

$$T_x = I_x \ddot{\varphi} + [4\omega_o^2 (I_y - I_z) + \omega_o h_n] \varphi + [-\omega_o (I_x - I_y + I_z) + h_n] \dot{\psi} + \dot{h}_{xc} - \omega_o h_{zc}, \quad (2.83a)$$

$$T_y = I_y \ddot{\theta} + [3\omega_o^2 (I_x - I_z)] \theta + \dot{h}_{yc}, \quad (2.83b)$$

$$T_z = I_z \ddot{\psi} + [\omega_o^2 (I_y - I_x) + \omega_o h_n] \psi - [-\omega_o (I_x - I_y + I_z) + h_n] \dot{\varphi} + \dot{h}_{zc} + \omega_o h_{xc}. \quad (2.83c)$$

### **3 CONCLUSÃO**

Este trabalho teve como principal resultado, além do conhecimento metodológico da pesquisa científica e grande avanço na base teórica, a obtenção da equação do movimento completo e linearizado para rolamento, arfagem e guinada, respectivamente contendo um volante de inércia suspenso por dois eixos cardan (gimbals) para um satélite estabilizado em três eixos numa órbita geoestacionária. Foi visto que devido à consideração de pequenas deflexões angulares, o movimento de arfagem tornou-se desacoplado dos movimentos de rolamento e guinada. Com a linearização aplicada na equação do movimento, o problema reduz-se a controle de arfagem e controle de rolamento/guinada. Desta forma os controles agora podem ser mais facilmente tratados separadamente.

#### 4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KAPLAN, M. H., **Modern Spacecraft Dynamics & Control**, New York: John Wiley, 1976.

LEMOS, N. A., **Mecânica Analítica**, Livraria da Física, 2<sup>a</sup> ed, 2007.

WERTZ, J. R., **Spacecraft Attitude Determination and Control**, Kluwer Academic Publishers, 1978.