

**TÍTULO: ESTUDO COMPARATIVO DE ALGUNS MODELOS  
ATMOSFÉRICOS ANALÍTICOS UTILIZADOS EM DINÂMICA DE  
SATÉLITES ARTIFICIAIS**

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)

Wu Chun An (UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: panettonetw@gmail.com

Evandro Marconi Rocco (LAC/CTE/INPE, Orientador)  
E-mail: evandro\_mr@yahoo.com.br

**COLABORADORES**

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (UNIFESP, Orientador)  
E-mail: rodolpho.vilhena@gmail.com

Julho de 2013

## RESUMO

Um satélite em órbita em torno da Terra, é submetido a algumas forças entre os quais o arrasto atmosférico. Para o estudo das influências dos arrastos atmosféricos no movimento de satélites artificiais vários modelos analíticos têm sido propostos para descrever a densidade atmosférica. Neste trabalho alguns modelos foram elaborados, implementados e comparados: o modelo exponencial, o modelo com altura de escala linear o modelo com altura de escala quadrática e o modelo TD-88.

## ABSTRACT

A satellite in orbit around the earth, it is subjected to some forces including the atmospheric drag. To study the influence of atmospheric drags the motion of artificial satellites several analytical models have been proposed to describe the atmospheric density. In this work some models have been developed, implemented and compared: the exponential model, the linear scale height, the quadratic scale height and the TD-88 model.

# SUMÁRIO

1- Introdução	8
2- Arrasto atmosférico	10
3- Estudos dos modelos das densidades atmosféricos	12
3.1- Modelo T88	12
3.2- Modelo exponencial	24
3.3- Altura de escala linear	28
3.4- Altura de escala quadrática	28
3.5- Resultados	30
4- Conclusão	36
Apêndice A	39
Apêndice B	45
Referência	48

## LISTA DE SIGLAS

- Fb - fluxo solar obtido apos três rotações solares.
- d - dia corrente do ano
- phi - latitude
- t - tempo local
- Fx - fluxo solar medido em 10,7cm, por dia
- KP - indice geomagnético do local, obtido três horas antes

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Tabela das constantes numéricas  $k_{n,j}$ .

Tabela 2. Fases  $p_n$

Tabela 3. Tabela dos constantes  $a_i$

Tabela 4. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=80, F_x=F_b=150, k_p=4, t=3, \phi=0$

Tabela 5. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=80, F_x=F_b=150, k_p=4, t=15, \phi=0$

Tabela 6. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=172, F_x=F_b=150, k_p=4, t=3, \phi=0$

Tabela 7. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=172, F_x=F_b=150, k_p=4, t=15, \phi=0$

Tabela 8. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=264, F_x=F_b=150, k_p=4, t=3, \phi=0$

Tabela 9. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=264, F_x=F_b=150, k_p=4, t=15, \phi=0$

Tabela 10. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=356, F_x=F_b=150, k_p=4, t=3, \phi=0$

Tabela 11. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes(TD88)

$d=356, F_x=F_b=150, k_p=4, t=15, \phi=0$

Tabela 12. Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes

(Brouwer e Hori)

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Modelo TD88 com  $d=80$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=3$ ,  $\phi=0$

Figura 2. Modelo TD88 com  $d=80$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$

Figura 3. Modelo TD88 com  $d=172$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=3$ ,  $\phi=0$

Figura 4. Modelo TD88 com  $d=172$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$

Figura 5. Modelo TD88 com  $d=264$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=3$ ,  $\phi=0$

Figura 6. Modelo TD88 com  $d=264$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$

Figura 7. Modelo TD88 com  $d=356$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=3$ ,  $\phi=0$

Figura 8. Modelo TD88 com  $d=356$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$

Figura 9. Modelo exponencial Brouwer e Hori

## AGRADECIMENTO

Agradeço a todos que ajudaram, contribuíram e me toleraram neste trabalho, os docentes, doutores, discentes, amigos e famílias.



## 1. Introdução

Os satélites em movimento ao redor da Terra é influenciado por inúmeras forças fazendo com que saia da sua órbita inicial. Uma dessas forças é a força de arrasto; Arrasto é uma força de atrito que age no sentido contrário do seu movimento, conseqüência disto é a perda de força e energia e conseqüentemente alteração da órbita inicial.

Nos estudos do movimento de satélites com órbita abaixo de 700 km, o efeito do arrasto atmosférico é um dos predominantes na alteração de suas órbitas. A redução da velocidade do satélite no perigeu resulta numa redução da altura do apogeu subsequente. Entretanto, a altura do perigeu permanece praticamente inalterada. Este abaixamento contínuo faz com que a órbita elíptica do movimento do satélite se circularize, e depois espirale e cause a queda do satélite.

Apresentamos a seguir alguns modelos de cálculos da densidade atmosférica em cada ponto da órbita de um satélite artificial. No entanto, devido das incertezas da pressões de radiação solar e das perturbações na magnetosfera, a modelagem matemática ainda é um desafio devido a esses fatores citados anteriormente, dificultando a precisão numérica (levando ainda em consideração que desprezamos os erros de arredondamento e/ou truncamento da máquina.)

A densidade em relação à altitude deve ser tomado em consideração da temperatura exoférica, portanto, as teorias analíticas sobre o arrasto das órbitas de

satélites artificiais é/são desenvolvidas usando modelo atmosférico simplificado, pois ainda não são adequados para o cálculo analítico.

Este relatório encontra-se organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 foi feita uma breve introdução. No capítulo 2 está apresentado o equacionamento para o arrasto atmosférico com a sua dependência da densidade atmosférica. No capítulo 3 são descritos os modelos de considerados para a densidade atmosférica bem como o cálculo da variação da densidade atmosférica com a altura para alguns casos particulares. A comparação entre os modelos está dada no capítulo 4.

## 2. Arrasto atmosférico

Quando um objeto se move com velocidade  $V$  na atmosfera, este está submerso nas forças que podem ser decompostas em arrasto  $D$  (cuja as propriedades mencionado anteriormente) e força de sustentação que age no plano perpendicular à velocidade  $V$ . É comum denotar  $D$  da seguinte forma:

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_D$$

em que  $\rho$  é a densidade do ar local,  $v$  representa a magnitude da velocidade relativa do satélite em relação à própria atmosfera,  $S$  é a área da seção transversal do objeto perpendicular ao movimento e  $C_D$  é coeficiente adimensional do arrasto.

No caso de uma órbita elíptica, o satélite é afetado pelo arrasto numa pequena faixa da órbita, perto do perigeu. Dessa forma não vai ter a mesma energia para ir tão longe no apogeu quanto na passada anterior, conseqüentemente diminui a altitude do apogeu e mantém quase constante o valor do perigeu, daí a órbita contrai para uma órbita circular.

A densidade  $\rho$  depende de vários fatores, entre eles as variações de temperatura nas camadas atmosféricas, as variações diúrnas, geomagnéticas, etc.

O coeficiente  $C_D$  é uma função que depende das propriedades do satélite, seja os materiais e os acabamentos, depende também do ângulo de incidência, das temperaturas das moléculas e da velocidade de agitações das moléculas.

A área da seção transversal do objeto perpendicular ao movimento  $\mathbf{S}$ , é determinada pela configuração e o tamanho de veículo juntamente com o ângulo do fluxo atmosférico.

A força de arrasto afeta principalmente o semi-eixo maior e a excentricidade orbital. Como a densidade atmosférica decai exponencialmente com a altitude, também a força de arrasto diminui exponencialmente.

### 3. Estudos dos modelos das densidades atmosféricas

Os modelos matemáticos da densidade atmosférica baseiam-se na integração da equação de difusão, que é uma equação diferencial que envolve a temperatura, o número de densidade e deve ser integrado numericamente na altitude. Em vista da necessidade da integração numérica para avaliar a densidade numa dada altitude, procurou-se desenvolver modelos analíticos aproximados com a intenção de melhorar o desempenho computacional.

#### 3.1. Modelo TD88

Nos estudos da influência do arrasto atmosférico no movimento dos satélites, vários modelos têm sido propostos para descrever a densidade atmosférica. Geralmente quando os modelos realísticos são utilizados para a densidade atmosférica, eles são bem sofisticadas e dificultam a solução analítica das equações do movimento. Porém, o modelo proposto por Sehnal (1986) não difere muito dos bons modelos atuais e é extremamente conveniente para desenvolvimentos analíticos.

O modelo de Sehnal (1988) para a densidade atmosférica, na versão de Pospíšilová (Sehnal e Pospíšilová, 1988), é caracterizado por fatores multiplicativos dependendo do fluxo solar médio e do índice geomagnético  $K_p$ , descrito pela fórmula:

$$\rho = f_x f_0 k_0 + \sum_{i=1}^7 h_n g_n$$

em que

$$f_x = 1 + a_1 (F_x - F_b)$$

$$f_0 = a_2 + F_n$$

$$k_0 = 1 + a_3 (k_p - 3)$$

$$f_n = \frac{(F_b - 60)}{160}$$

e  $h_n$  é denotado a seguinte expressão:

$$h_n = h_{n,0} + \sum_{i=1}^3 k_{n,j} e^{\left(\frac{120-h}{29^j}\right)}$$

as funções  $g_n$  é dada por

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = \frac{f_n}{2 + a_4}$$

$$g_3 = \text{sen}(d - p_3) \text{sen} \varphi$$

$$g_4 = (a_5 f_n + 1) \text{sen}(d - p_4)$$

$$g_5 = (a_6 f_n + 1) \text{sen} 2(d - p_5)$$

$$g_6 = (a_7 f_n + 1) \text{sen}(t - p_6) \cos \varphi$$

$$g_7 = (a_8 f_n + 1) \text{sen} 2(t - p_7) \cos^2 \varphi$$

A tabela das constantes numéricas  $k_{n,j}$  é a seguinte:

$n/j$	0	1	2	3
1	2.96815 E <sup>-15</sup>	7.66373 E <sup>-9</sup>	1.65738 E <sup>-10</sup>	3.87086 E <sup>-11</sup>
2	2.81456 E <sup>-14</sup>	-4.40149 E <sup>-9</sup>	3.34283 E <sup>-10</sup>	9.35229 E <sup>-11</sup>
3	-1.23300 E <sup>-14</sup>	1.18107 E <sup>-10</sup>	-1.47817 E <sup>-10</sup>	-1.51755 E <sup>-12</sup>
4	-1.14892 E <sup>-17</sup>	-1.59664 E <sup>-11</sup>	-6.46708 E <sup>-12</sup>	-2.04955 E <sup>-12</sup>
5	-3.90064 E <sup>-16</sup>	-2.40755 E <sup>-10</sup>	-1.398567 E <sup>-11</sup>	-3.059493 E <sup>-12</sup>
6	7.42439 E <sup>-15</sup>	6.43785 E <sup>-11</sup>	1.36185 E <sup>-10</sup>	3.517 E <sup>-11</sup>
7	-3.41594 E <sup>-16</sup>	7.44666 E <sup>-12</sup>	4.5416 E <sup>-12</sup>	2.07975 E <sup>-12</sup>

Tabela 1. Tabela das constantes numéricas  $k_{n,j}$ .

As fases  $p_n$  são representas por

$n$	3	4	5	6	7
$p_n$	263	-263	-29.41	8.0913	10.0813

Tabela 2. Fases  $p_n$

A tabela dos constantes  $a_i$  é fornecida por:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_i$	0.007	0.2875	0.04762	0.0471	7.0	7.0	0.3333	15.0

Tabela 3. Tabela dos constantes  $a_i$

Utiliza a linguagem de programação #C para fornecer os dados da variação e distribuição da densidade na superfície terrestre para um intervalo entre 200-600 km, com fluxo da radiação solar  $150 \cdot 10^{-22}$  w/m<sup>2</sup> hz com comprimento de onda 10,7 cm. Foram utilizados valores para diversas condições, que são representados nas tabelas que seguem-se nas páginas seguintes, e estas tabelas foram obtidas através da implementação do modelo matemático TD 88. As tabelas utilizadas para comparação foram obtidas através de (Nicoletti, 2001). O algoritmo encontra-se no apêndice A.

### Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes

Altitude(km)	Densidade(kg/m <sup>3</sup> )	Altitude(km)	Densidade(kg/m <sup>3</sup> )
200	4.52E-10	410	3.09E-12
210	3.29E-10	420	2.64E-12
220	2.41E-10	430	2.27E-12
230	1.77E-10	440	1.96E-12
240	1.31E-10	450	1.69E-12
250	9.82E-11	460	1.46E-12
260	7.39E-11	470	1.27E-12
270	5.61E-11	480	1.11E-12
280	4.29E-11	490	9.67E-13
290	3.32E-11	500	8.45E-13
300	2.59E-11	510	7.38E-13
310	2.05E-11	520	6.46E-13
320	1.63E-11	530	5.66E-13
330	1.31E-11	540	4.96E-13
340	1.06E-11	550	4.36E-13
350	8.76E-12	560	3.83E-13
360	7.25E-12	570	3.37E-13
370	6.03E-12	580	2.96E-13
380	5.06E-12	590	2.64E-13
390	4.27E-12	600	2.33E-13
400	3.62E-12		

Tabela 4. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=80, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0



Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	5.59E-10	410	7.56E-12
210	4.20E-10	420	6.53E-12
220	3.17E-10	430	5.66E-12
230	2.43E-10	440	4.91E-12
240	1.87E-10	450	4.27E-12
250	1.46E-10	460	3.71E-12
260	1.14E-10	470	3.24E-12
270	9.08E-11	480	2.82E-12
280	7.27E-11	490	2.47E-12
290	5.87E-11	500	2.16E-12
300	4.79E-11	510	1.89E-12
310	3.94E-11	520	1.65E-12
320	3.26E-11	530	1.45E-12
330	2.72E-11	540	1.27E-12
340	2.28E-11	550	1.12E-12
350	1.92E-11	560	9.85E-13
360	1.63E-11	570	8.66E-13
370	1.39E-11	580	7.62E-13
380	1.18E-11	590	6.90E-13
390	1.01E-11	600	6.10E-13
400	8.76E-12		

Tabela 5. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)  
 $d=80$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	3.27E-10	410	1.29E-12
210	2.35E-10	420	1.02E-12
220	1.69E-10	430	9.29E-13
230	1.22E-10	440	7.93E-13
240	8.91E-11	450	6.81E-13
250	6.49E-11	460	5.86E-13
260	4.76E-11	470	5.07E-13
270	3.51E-11	480	4.39E-13
280	2.61E-11	490	3.81E-13
290	1.95E-11	500	3.32E-13
300	1.47E-11	510	2.90E-13
310	1.13E-11	520	2.54E-13
320	8.68E-12	530	2.22E-13
330	6.75E-12	540	1.95E-13
340	5.31E-12	550	1.71E-13
350	4.21E-12	560	1.50E-13
360	3.38E-12	570	1.32E-13
370	2.74E-12	580	1.16E-13
380	2.24E-12	590	1.03E-13
390	1.85E-12	600	9.09E-14
400	1.54E-12		

Tabela 6. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=172, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	4.35E-10	410	5.76E-12
210	3.26E-10	420	4.98E-12
220	2.46E-10	430	4.32E-12
230	1.88E-10	440	3.74E-12
240	1.45E-10	450	3.26E-12
250	1.12E-10	460	2.84E-12
260	8.82E-11	470	2.47E-12
270	6.99E-11	480	2.16E-12
280	5.59E-11	490	1.89E-12
290	4.51E-11	500	1.65E-12
300	3.68E-11	510	1.44E-12
310	3.02E-11	520	1.27E-12
320	2.49E-11	530	1.11E-12
330	2.08E-11	540	9.74E-13
340	1.74E-11	550	8.56E-13
350	1.47E-11	560	7.52E-13
360	1.25E-11	570	6.62E-13
370	1.06E-11	580	5.82E-13
380	9.07E-12	590	5.29E-13
390	7.77E-12	600	4.68E-13
400	6.68E-12		

Tabela 7. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=172, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	4.44E-10	410	2.76E-12
210	3.23E-10	420	2.36E-12
220	2.36E-10	430	2.02E-12
230	1.73E-10	440	1.74E-12
240	1.27E-10	450	1.50E-12
250	9.49E-11	460	1.29E-12
260	7.11E-11	470	1.12E-12
270	5.37E-11	480	9.80E-13
280	4.09E-11	490	8.54E-13
290	3.14E-11	500	7.44E-13
300	2.44E-11	510	6.51E-13
310	1.92E-11	520	5.69E-13
320	1.52E-11	530	4.98E-13
330	1.21E-11	540	4.36E-13
340	9.81E-12	550	3.83E-13
350	8.01E-12	560	3.36E-13
360	6.58E-12	570	2.95E-13
370	5.46E-12	580	2.60E-13
380	4.56E-12	590	2.32E-13
390	3.84E-12	600	2.05E-13
400	3.24E-12		

Tabela 8. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=264, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	5.52E-10	410	7.23E-12
210	4.13E-10	420	6.24E-12
220	3.12E-10	430	5.41E-12
230	2.38E-10	440	4.69E-12
240	1.83E-10	450	4.07E-12
250	1.42E-10	460	3.55E-12
260	1.12E-10	470	3.09E-12
270	8.84E-11	480	2.69E-12
280	7.06E-11	490	2.36E-12
290	5.69E-11	500	2.06E-12
300	4.63E-11	510	1.80E-12
310	3.81E-11	520	1.58E-12
320	3.14E-11	530	1.39E-12
330	2.62E-11	540	1.21E-12
340	2.19E-11	550	1.07E-12
350	1.85E-11	560	9.38E-13
360	1.56E-11	570	8.25E-13
370	1.33E-11	580	7.26E-13
380	1.14E-11	590	6.58E-13
390	9.75E-12	600	5.82E-13
400	8.38E-12		

Tabela 9. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=264, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	3.52E-10	410	2.23E-12
210	2.56E-10	420	1.91E-12
220	1.86E-10	430	1.64E-12
230	1.36E-10	440	1.41E-12
240	1.01E-10	450	1.22E-12
250	7.50E-11	460	1.06E-12
260	5.61E-11	470	9.22E-13
270	4.24E-11	480	8.03E-13
280	3.23E-11	490	7.01E-13
290	2.48E-11	500	6.13E-13
300	1.93E-11	510	5.37E-13
310	1.51E-11	520	4.70E-13
320	1.20E-11	530	4.13E-13
330	9.64E-12	540	3.62E-13
340	7.80E-12	550	3.19E-13
350	6.37E-12	560	2.80E-13
360	5.25E-12	570	2.46E-13
370	4.36E-12	580	2.17E-13
380	3.65E-12	590	1.92E-13
390	3.08E-12	600	1.70E-13
400	2.61E-12		

Tabela 10. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=356, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
200	4.59E-10	410	6.69E-12
210	3.46E-10	420	5.79E-12
220	2.64E-10	430	5.03E-12
230	2.02E-10	440	4.37E-12
240	1.57E-10	450	3.79E-12
250	1.23E-10	460	3.31E-12
260	9.68E-11	470	2.89E-12
270	7.71E-11	480	2.52E-12
280	6.21E-11	490	2.20E-12
290	5.04E-11	500	1.93E-12
300	4.12E-11	510	1.69E-12
310	3.41E-11	520	1.48E-12
320	2.83E-11	530	1.30E-12
330	2.37E-11	540	1.14E-12
340	1.99E-11	550	1.00E-12
350	1.68E-11	560	8.82E-13
360	1.43E-11	570	7.76E-13
370	1.22E-11	580	6.83E-13
380	1.05E-11	590	6.18E-13
390	9.00E-12	600	5.47E-13
400	7.75E-12		

Tabela 11. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude(TD88)

d=356, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0





### 3.2. Modelo exponencial

Uma teoria de acoplamento dos efeitos de achatamento do campo gravitacional terrestre e do arrasto atmosférico que apresenta uma solução analítica foi elaborada por Brouwer e Hori (Brouwer and Hori, 1961). Neste trabalho foi apresentado o modelo exponencial

A teoria de Brouwer e Hori para o cálculo da influência do arrasto atmosférico em órbitas de satélites artificiais são usadas algumas das propriedades de transformações canônicas, e o desenvolvimento das equações do movimento orbital é feito em função das variáveis de Delaunay, em termos da solução do problema sem arrasto.

As variáveis de Delaunay em termos dos elementos orbitais são dadas por (Brouwer and Clemence, 1961):

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & , l &= \text{anomalia média} \\ G &= L\sqrt{1 - e^2} & , g &= \text{argumento do pericentro} \\ H &= G \cos I & , h &= \text{longitude do nó ascendente} \end{aligned}$$

com  $a$ ,  $e$  e  $I$  sendo o semieixo osculador maior, a excentricidade e o ângulo de inclinação, e  $\mu = k^2 m$  em que  $k$  é o constante gaussiana e  $m$  a massa do satélite.

O modelo exponencial supõe que a densidade atmosférica diminui exponencialmente à medida que a altitude do satélite aumenta. Um modelo exponencial esférico da atmosfera é tomado junto com a lei do quadrado da velocidade na aceleração de arrasto.

A escala de densidade de altura,  $H$ , é definida pela fórmula

$$\frac{1}{H} = -\frac{d}{dr}(\ln\rho)$$

Para

$$H = \sum_{i=0}^n a_i r^i$$

É possível integrar a densidade através da introduzindo uma constante na integração na densidade  $\rho_0$  na distância geocêntrica  $q_0$ . Para a altura da escala constante utilizada por Brouwer e Hori, a integração nos oferece

$$\rho_c(r) = \rho_0 \exp[\gamma(q_0 - r)]$$

em que  $\gamma \equiv a_0^{-1}$ , e  $a_0 = 2.746E-5$

Utiliza a linguagem de programação #C para fornecer os dados da variação e distribuição da densidade para um intervalo entre 120-600 km, com fluxo da radiação solar  $150 \cdot 10^{-22}$  w/m<sup>2</sup> hz com comprimento de onda 10,7 cm. O algoritmo encontra-se no apêndice B.

### Tabelas das Variações de Densidades em relação aos Altitudes

Altitude(km)	Densidade(log10)	Altitude(km)	Densidade(log10)
200	-11.40555	410	-13.90995
210	-11.5248	420	-14.02921
220	-11.64406	430	-14.14846
230	-11.76332	440	-14.26772
240	-11.88257	450	-14.38698
250	-12.00183	460	-14.50623
260	-12.12109	470	-14.62549
270	-12.24035	480	-14.74475
280	-12.3596	490	-14.86401
290	-12.47886	500	-14.98326
300	-12.59812	510	-15.10252
310	-12.71738	520	-15.22178
320	-12.83663	530	-15.34104
330	-12.95589	540	-15.46029
340	-13.07515	550	-15.57955
350	-13.1944	560	-15.69881
360	-13.31366	570	-15.81806
370	-13.43292	580	-15.93732
380	-13.55218	590	-16.05658
390	-13.67143	600	-16.17584
400	-13.79069		

Tabela 12. Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude  
(Brouwer e Hori )



### 3.3. Altura de escala linear

Este modelo foi proposto por Lane em 1964, descrito da seguinte forma:

$$\rho_l(r) = \rho_0 \left[ \frac{q_0 - s}{r - s} \right]^\delta$$

em que  $s \equiv -a_0 a_1^{-1}$  e  $\delta \equiv a_1^{-1}$ .

Tal modelo implementado, mas não conseguiu mostrar as soluções pois os parâmetros dos modelos atmosféricos desta função  $a_0$  e  $a_1$  estavam incoerente. Fazendo ajustes apenas conseguimos chegar de que  $a_1 = 0.006$  não consegui acertar o  $a_0$ .

### 3.4. Altura de escala quadrática

Este modelo foi proposto pelo Willey e Pisacane em 1975, expressa da seguinte forma:

$$\rho_q(r) = \rho_0 \left[ \frac{r + \alpha q_0 + \beta}{r + \beta q_0 + \alpha} \right]^\tau$$

em que

$$\alpha \equiv \frac{1}{2a_2} \left[ a_1 + (a_1^2 - 4a_2 a_0)^{1/2} \right]$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2a_2} \left[ a_1 - (a_1^2 - 4a_2 a_0)^{1/2} \right]$$

$$\tau \equiv (a_1^2 - 4a_2 a_0)^{-1/2}$$

Tal modelo foi implementado, mas não conseguiu mostrar a soluções pois os parâmetros dos modelos atmosféricos desta função  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  estavam incoerente.



### 3.5.Resultados

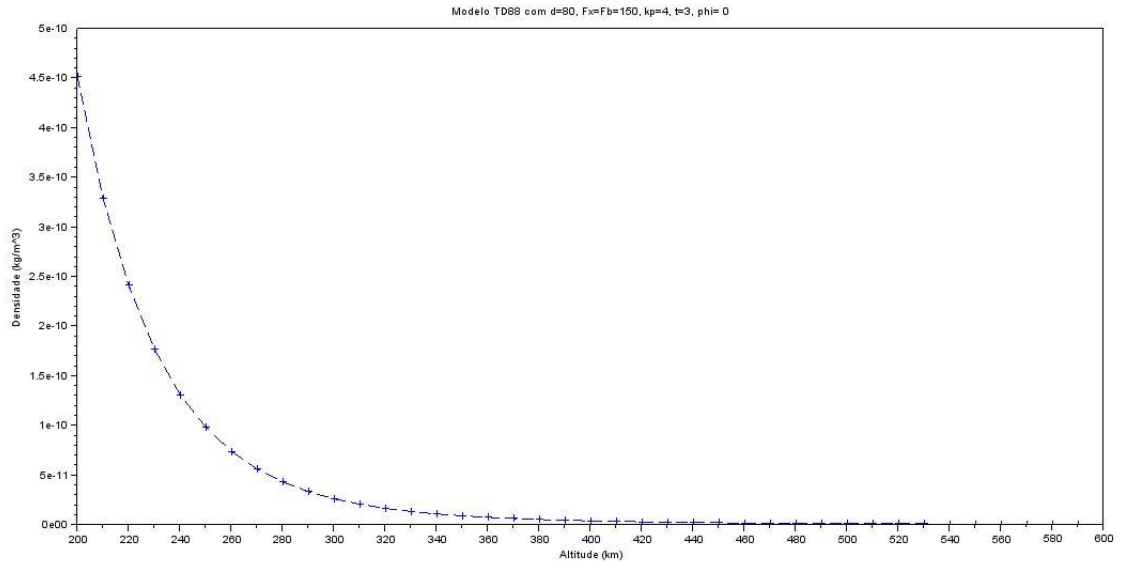


Figura 1. Modelo TD88 com d=80, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

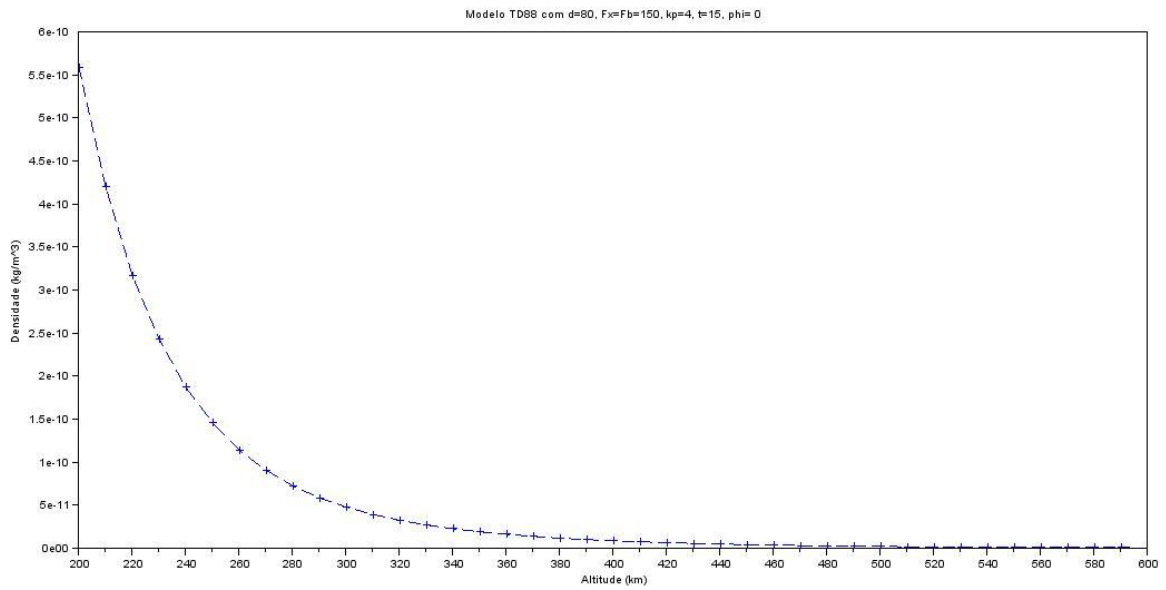


Figura 2. Modelo TD88 com d=80, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0

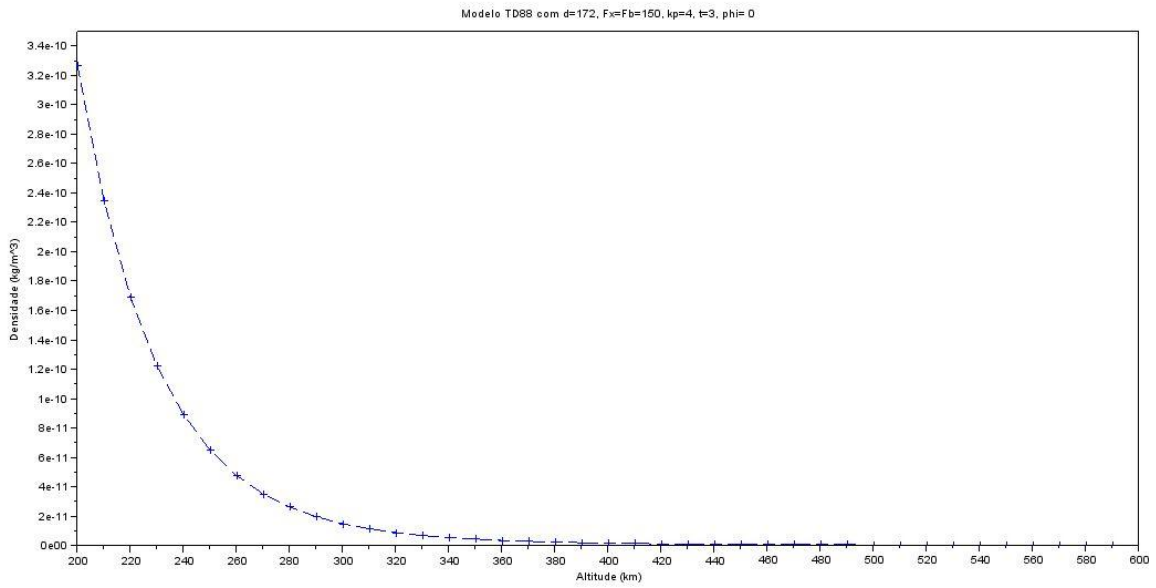


Figura 3. Modelo TD88 com  $d=172$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=3$ ,  $\phi=0$

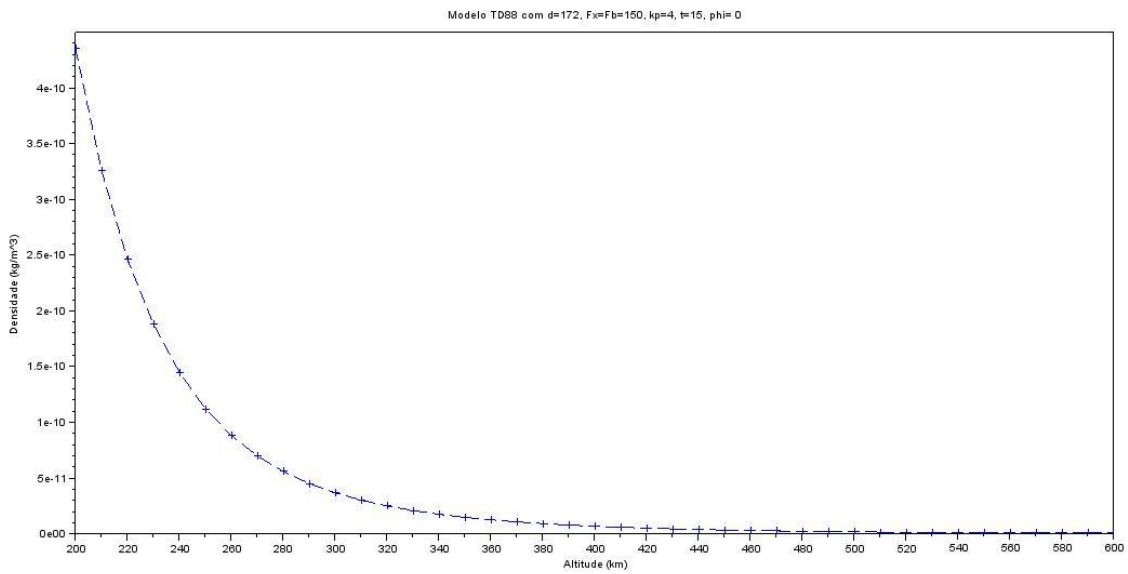


Figura 4. Modelo TD88 com  $d=172$ ,  $F_x=F_b=150$ ,  $k_p=4$ ,  $t=15$ ,  $\phi=0$



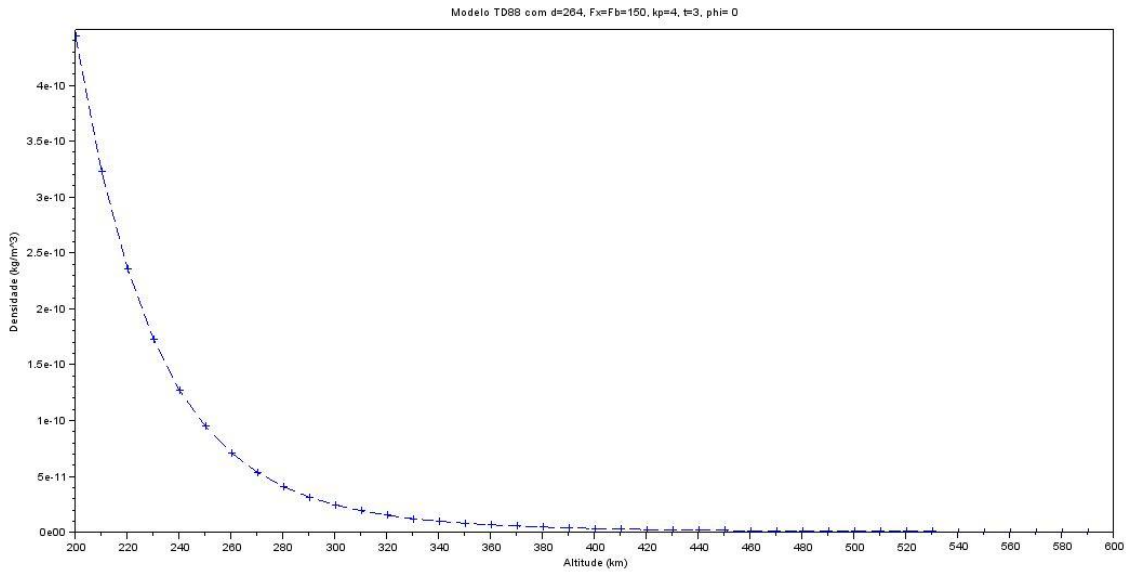


Figura 5. Modelo TD88 com d=264, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

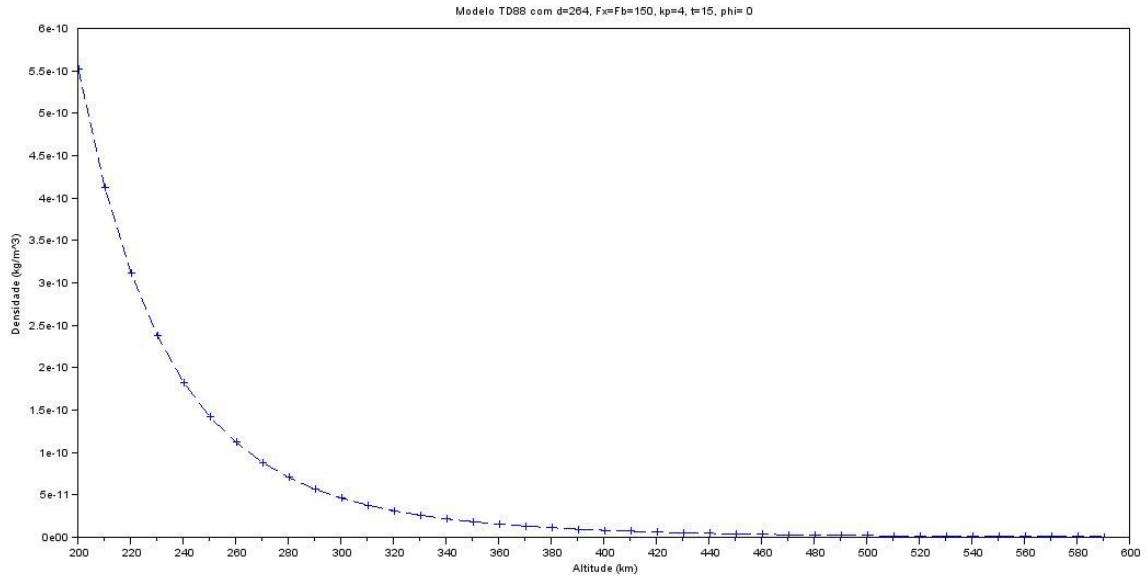


Figura 6. Modelo TD88 com d=264, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0

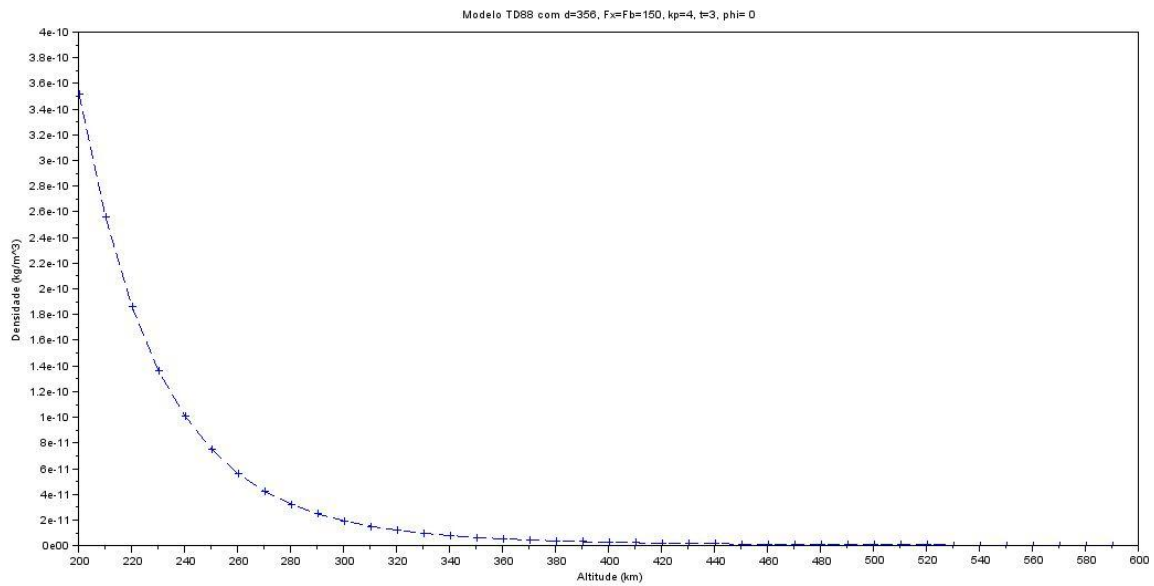


Figura 7. Modelo TD88 com d=356, Fx=Fb=150, kp=4, t=3, phi= 0

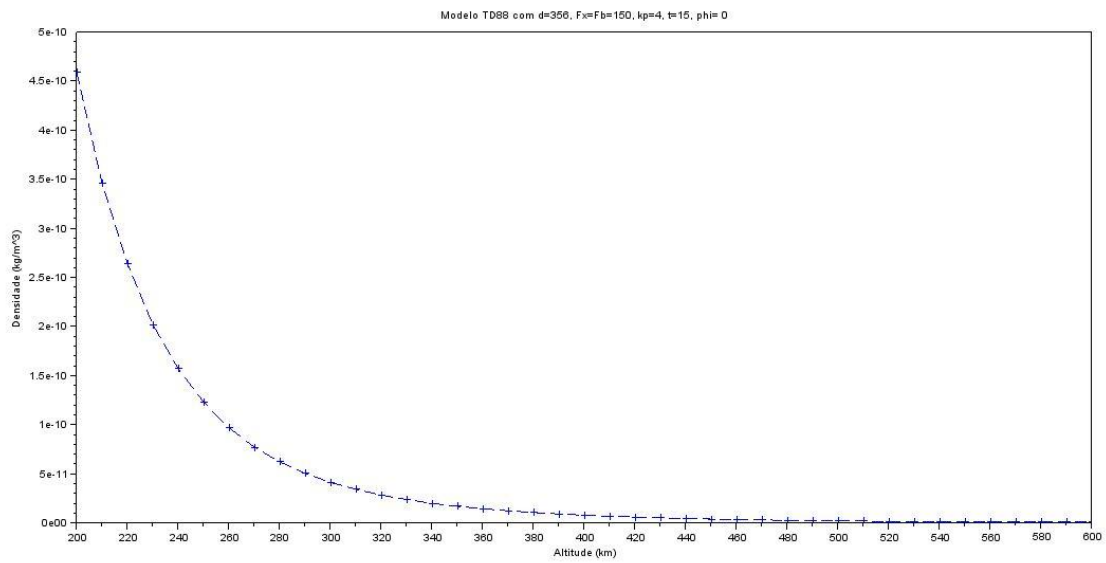


Figura 8. Modelo TD88 com d=356, Fx=Fb=150, kp=4, t=15, phi= 0

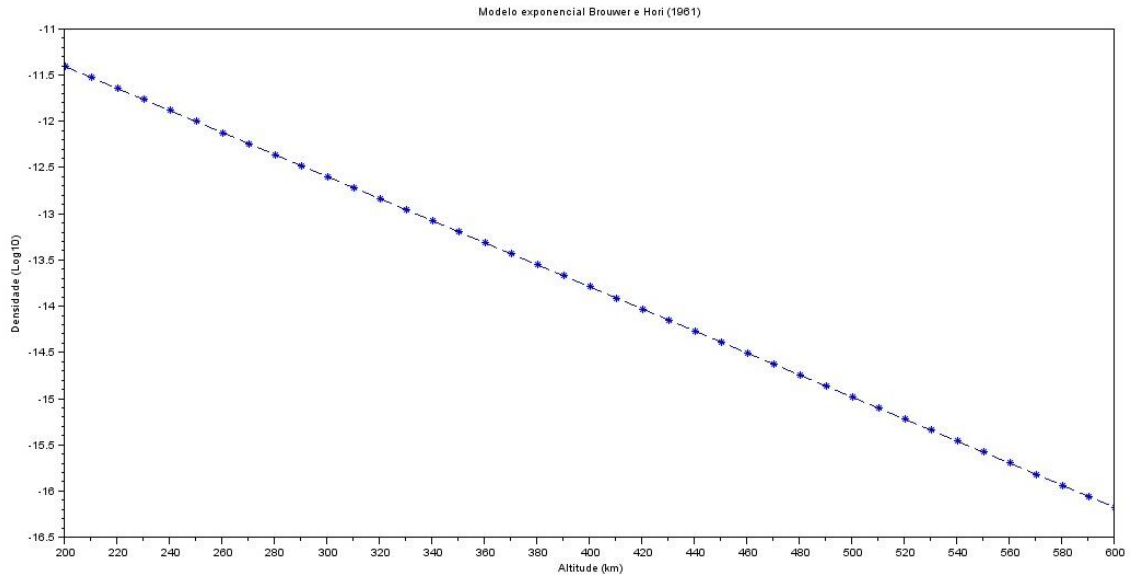


Figura 9. Modelo exponencial Brouwer e Hori



## 4. Conclusão

Os modelos atmosféricos com base na utilização da altura de uma escala quadrático foi incorporado dentro do âmbito das equações de movimento, como as desenvolvidas pela Brouwer e Hori e mais tarde modificado por Lane.

Os resultados obtidos através da implementação do modelo TD 88 é mais próximos a realidade, um decaimento suave, enquanto no modelo exponencial proposto pelo Brouwer e Hori segue que o decaimento seja linear como uma reta, o que contradiz muito com a realidade.

Os tópicos estudados foram muito utilizados para a realização da pesquisa e sem a utilização de tais conceitos não haveria a possibilidade de concretizar-se a implementação do modelo matemático estudado.



## APÊNDICE A

O seguinte programa foi elaborado em linguagem C para o modelo TD-88

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define PI 3.1415926535897932384626433832795
#define altitude 200

int main(){

    double fk, f0, fn, k0, kp, hn, rho = 0.0, srho = 0.0;
    double d=0.0, phi=0.0, t=0.0;
    double a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8;
    double p3, p4, p5, p6, p7;
    double Fx, Fb;
    double g[6];
    int i=0, j=0, n=0;
    double k[7][4];
    double h[7];

    a1 = 0.007;
    a2 = 0.2875;
    a3 = 0.04762;
    a4 = 0.0471;
    a5 = 7.0;
    a6 = 7.0;
```

```

a7 = 0.3333;
a8 = 15.0;

p3 = 263.0;
p4 = -263.0;
p5 = -29.41;
p6 = 8.0913;
p7 = 10.0813;

Fb = 150.0; // Fb = fluxo solar obtido apos três rotações solares.
d = 80.0; //d = dia corrente do ano
phi = 0.0; //phi = latitude
t = 3.0; //t = tempo local
Fx = 150.0; // Fx = fluxo solar medido em 10,7cm, por dia
kp = 4.0; // KP = indice geomagnético do local, obtido três horas antes

fk = 1.0 + a1*(Fx - Fb);
k0 = 1.0 + a3*(kp - 3.0);
fn = (Fb-60.0)/160.0;
f0 = a2 + fn;

double x = 2*PI/365;
double z = 2*PI/24;
double r = PI/180;

g[0] = 1.0;
g[1] = fn/2.0 + a4;
g[2] = sin((d-p3)*x)*sin(phi*r);
g[3] = (a5*fn + 1.0)*sin((d-p4)*x);

```



$g[4] = (a6*fn + 1.0)*\sin(2.0*((d-p5)*x));$   
 $g[5] = (a7*fn + 1.0)*\sin((t-p6)*z)*\cos(\phi*r);$   
 $g[6] = (a8*fn + 1.0)*\sin(2.0*(t-p7)*z)*\cos(\phi*r)*\cos(\phi*r);$

$k[0][0] = 2.968150*\text{pow}(10.0,-15.0);$   
 $k[0][1] = 7.663730*\text{pow}(10.0,-9.0);$   
 $k[0][2] = 1.657380*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[0][3] = 3.870860*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[1][0] = 2.814560*\text{pow}(10.0,-14.0);$   
 $k[1][1] = -4.401490*\text{pow}(10.0,-9.0);$   
 $k[1][2] = 3.342830*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[1][3] = 9.352290*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[2][0] = -1.233000*\text{pow}(10.0,-14.0);$   
 $k[2][1] = 1.181070*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[2][2] = -1.478170*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[2][3] = -1.517550*\text{pow}(10.0,-12.0);$   
 $k[3][0] = -1.148920*\text{pow}(10.0,-17.0);$   
 $k[3][1] = -1.596640*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[3][2] = -6.467080*\text{pow}(10.0,-12.0);$   
 $k[3][3] = -2.049550*\text{pow}(10.0,-12.0);$   
 $k[4][0] = -3.900640*\text{pow}(10.0,-16.0);$   
 $k[4][1] = -2.407550*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[4][2] = -1.398567*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[4][3] = -3.059493*\text{pow}(10.0,-12.0);$   
 $k[5][0] = 7.424390*\text{pow}(10.0,-15.0);$   
 $k[5][1] = 6.437850*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[5][2] = 1.361850*\text{pow}(10.0,-10.0);$   
 $k[5][3] = 3.517000*\text{pow}(10.0,-11.0);$   
 $k[6][0] = -3.415940*\text{pow}(10.0,-16.0);$

```

k[6][1] = 7.446660*pow(10.0,-12.0);
k[6][2] = 4.541600*pow(10.0,-12.0);
k[6][3] = 2.079750*pow(10.0,-12.0);

for(i=0;i<7;i++){
    h[i]=0.0;
}

//Calculo de h

double sum[7];

for(i=0; i<7;i++){
    sum[i] = 0.0;
}

for(i=0; i<7;i++){
    for(j=1;j<4;j++){
        sum[i] = sum[i] + k[i][j]*exp((120.0-altitude)/(29*j));
    }
}

for(i=0; i<7;i++){
    h[i]=k[i][0]+sum[i];
}

for(i=0; i<7;i++){
    srho += g[i]*h[i];
}

```

```
fk = 1.0 + a1*(Fx - Fb);
k0 = 1.0 + a3*(kp - 3.0);
fn = (Fb-60.0)/160.0;
f0 = a2 + fn;

rho = fk*f0*k0*srho;
printf("%d = %e\n",altitude, rho);

srho = 0.0;
rho = 0.0;
return 0;
}
```



## APÊNDICE B

O seguinte programa foi elaborado em linguagem C para o modelo exponencial

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

void inicializa_h(int n, double *vet) {
    int i;
    vet[0] = 0.0;
    for(i=1; i<n; i++) {
        vet[i] = vet[i-1]+10000;
    }
}

void inicializa_vet(int n, double *vet) {
    int i;
    for(i=0; i<n; i++) {
        vet[i] = 0.0;
    }
}

void imprime(int n, double *vet) {
    int i;
    for(i=0; i<n; i++) {
        printf("%20.15lf \n", vet[i]);
    }
}
```

```

    }
    printf("\n");
}

int main() {
    int i, n = 49;
    double rho_0, *rho_c, gama, q_0, *h, a_0;

    h = (double*)malloc(n*sizeof(double));
    rho_c = (double*)malloc(n*sizeof(double));

    rho_0 = 3.536E-11;
    q_0 = 6498000.0;
    a_0 = 2.746E-5;
    gama = 1/a_0;

    inicializa_h(n,h);

    inicializa_vet(n,rho_c);

    for(i=0; i<n; i++) {
        rho_c[i] = log10(rho_0*exp((-h[i]/gama)));
    }

    for(i=0; i<n; i++) {
        printf("%10.2lf ; %20.15lf\n", h[i], rho_c[i]);
    }

    free(h);

```

```
    free(rho_c);  
  
    return 0;  
}
```

## REFERÊNCIA

Bate, R. R., Mueller, D. D. and White, J. E., "Fundamentals of Astrodynamics", Dover, New York, 1971.

Brouwer, D. and Hori, G.I. : Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite, Astron. J., 66, 193, 1961.

Carrara, V., "Implementação de modelos atmosféricos para o uso em propagadores de órbita e atitude", (INPE-5094-RPI/231), São José dos Campos, INPE, 1990.

Kinoshita, D., "Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere", Butterworths, London, 1964.

Lane, M. , The Development of an Artificial Satellite Theory Using a Power Law Atmospheric Density Representation, AIAA paper, 65-35, 1965.

Nicoletti, G. W., Comparação de modelos para a densidade atmosférica, Relatório de bolsa CNPq-PIBIC, 2001.

Sehnal, L., "Thermospheric Model TD 88", Bull. Astronon-Inst. Czechosl., 39, 120-127, 1988.

Sehnal, L. and Pospíšilová, "Thermospheric Model TD 88", Preprint. No. 67, . Astronon-Inst. Czechosl. Acad. Sci., Ondrojev, 1988.

Vilhena de Moraes, R. "Non Gravitational Disturbing Forces", Adv. Space. Res., Vol. 14, No. 5, (5)45-(5)68, 1994.

Willey, R. E. and Pisacane, V. L., The Motion of an Artificial Satellite in Nonspherical Gravitational Field and an Atmosphere with a Quadratic Scale Height, Journal of Astron Sci., XXI, \#526, 230-243, 1974.