



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13034-PRE/8311

**EXTENSÃO DA TEORIA DO REGULADOR LINEAR
QUADRÁTICO PARA O CONTROLE DE ATITUDE DE UM
SATÉLITE ARTIFICIAL**

Ximena Célia Mendez Cubillos*

*Bolsista UNESP

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza



**"EXTENSÃO DA TEORIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO PARA
O CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL"**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Ximena Celia Mendez Cubillos (UNESP/FEG, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: mendezcubillos@uol.com.br

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: gadelha@dem.inpe.br

Junho de 2005

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

- 1.1 – Introdução
- 1.2 – Motivações
- 1.3 - Organização

CAPÍTULO 2 – REVISÃO DA LEITURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- 2.1 - O Regulador Linear Quadrático
 - 2.1.1 - Introdução
 - 2.1.2 - Teoria
- 2.2 - Problema do Controle Ótimo Quadrático
 - 2.2.1- Exemplos

CAPÍTULO 3 – SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE

- 3.1 – Modos do Controle de Atitude
- 3.2 – Torques Ambientais
- 3.3 – Dinâmica do Movimento do Satélite

CAPÍTULO 4 – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

- 4.1 – Seleção das Matrizes Peso Q e R
- 4.2 – Métodos Numéricos Empregados
- 4.3 – Valores Iniciais e Parâmetros
- 4.4 – Simulações

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES

- 5.1 – Sumário e Conclusões

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

RESUMO

Neste trabalho, deriva-se a extensão da teoria do Regulador Linear Quadrático (LQR) para o caso de uma dinâmica que é descrita por um sistema de equação não-linear (equação de Euler), esta lei compreende duas partes, uma linear e outra não linear. A parte linear é empregada para o controle de atitude de um satélite artificial utilizando-se rodas de reação como atuador. Para efetuar esta investigação, derivam-se as equações de movimento de um satélite com dinâmica não-linear do satélite, em seguida estas equações são colocadas na forma matricial de variáveis de estado, evidenciando a presença dos termos não-lineares. A lei de controle projetada pela extensão da teoria do LQR compreende uma parte linear e outra não linear. A primeira é projetada baseando-se nas equações lineares da dinâmica do satélite e a segunda na parte das equações não-lineares. Este trabalho concentrou-se em projetar e avaliar o desempenho da primeira parte da lei de controle. Ao se empregar o método LQR utilizou-se como critérios de desempenho das leis de controle a sobrelevação (overshoot) e o tempo de estabilização. Das simulações observou-se que quando há uma grande penalidade em reduzir o ângulo e a velocidade do satélite, o nível de ação de controle fica muito alto devido a necessidade de um compromisso entre o tempo de redução e a energia do torque de controle. No domínio da frequência este compromisso pode ser traduzido em termos de nível de ganho e o tamanho da banda passante (bandwidth). A primeira parte projetada da lei de controle considerando a parte linear dinâmica mostrou um desempenho muito bom em deslocar os overshoots no sentido da origem. Esse comportamento é importante quando se deseja preceder manobras rápidas no satélite, associado com as exigências estritas de precisão de apontamento. Destes resultados preliminares, observa-se que a extensão da teoria do RLQ se torna mais promissora a medida que a lei de controle composta das duas partes (linear e não-linear) possa obter um desempenho ainda melhor do que a lei só composta pela parte linear, uma vez que esta não conseguiu controlar de forma eficiente o modelo com dinâmica não linear, o que significa dizer, melhores níveis de apontamentos do sistema podem ser obtidos. Um aspecto importante da extensão da teoria do RLQ para sistemas não-linear é a possibilidade de projetar leis de controle de forma semelhante a linear, isto é, ajustando os parâmetros das matrizes peso. O desenvolvimento da parte não linear da lei de controle e sua aplicação para controlar o modelo não linear do satélite é o próximo passo dessa investigação.

CAPÍTULO 1

1.1 – Introdução

Atualmente as missões espaciais são cada vez mais complexas e com as mais diferentes tarefas, as estruturas dos satélites possuem componentes rígidos e flexíveis devido ao grande número de painéis solares, antenas, câmeras e manipuladores mecânicos. Tal complexidade resulta em modelos matemáticos com dinâmica não linear. Portanto, os termos não lineares têm papel importante no entendimento da dinâmica e no desempenho do sistema de controle da atitude (SCA) do satélite. Outros aspectos importantes no estudo da dinâmica e do controle das estruturas no espaço são: o grau de interação entre o movimento rígido e flexível, a manutenção do desempenho de SCA na presença de incertezas do modelo, avaliação de estratégias de controle para reduzir as vibrações residuais com o objetivo de manter a precisão do apontamento e a identificação de parâmetros do sistema como frequência de vibração e coeficiente de amortecimento. De modo geral um SCA envolve sensores, estimadores, atuadores e controladores através de um computador de bordo, onde é implementado uma ou mais leis de controle para cumprir os requisitos da missão. Um ponto chave para o bom desempenho do SCA é a implementação de uma lei simples de preferência linear, mas que controle o comportamento dinâmico não-linear do satélite. Os atuadores usados no SCS, geralmente são as rodas de reação que geram os torques (linear) contínuos e os jatos de gás que geram torques não-contínuos (não-linear), o primeiro é o tipo de atuador empregado neste trabalho. Um modelo matemático que compreende a dinâmica do satélite e três rodas de reação resulta em equações de movimento não-lineares, onde o emprego da teoria do Regulador Linear Quadrático (LQR) não é apropriada. A idéia central deste trabalho é investigar a possibilidade da extensão da teoria LQR ao caso onde a dinâmica é descrita por equações não-lineares, aqui representada pelas equações de Euler. A extensão resultará em uma lei de controle para controle de atitude do satélite composta por duas partes, uma linear e a não-linear. Embora a investigação seja focalizada num modelo de operação normal em que o satélite tem velocidades angulares e ângulos pequenos, esta pode ser facilmente estendida a outros modos de operação aonde as não-linearidades vêm das velocidades angulares elevadas devido às manobras do satélite. Inicialmente, a teoria do RLQ é aplicada para projetar uma lei de controle para controlar a dinâmica linear do satélite em seguida investiga-se sua eficiência em controlar a dinâmica não linear. Os aspectos tais como o relacionamento entre a matriz peso do LQR e o desempenho da lei de controle são investigados tendo como critérios de desempenho a sobrelevação (overshoot) e o tempo de estabilização. Uma vantagem da extensão da teoria de RLQ é a possibilidade de usar uma sistemática para o projeto da lei de controle consagrada e permitir avaliar o emprego de parâmetros como combustível e energia que são diretamente relacionados com o custo e com o tempo de vida de uma missão espacial.

1.2 – Motivações

As principais motivações para o desenvolvimento deste estudo são:

- 1) Familiarização com o processo de modelagem de um satélite artificial tendo como atuador rodas de reação.
- 2) Extensão da teoria do Regulador Linear Quadrático, tal que permita o projeto de uma lei de controle para um sistema de equações não-lineares.
- 3) A possibilidade de otimizar grandezas físicas como combustível e/ou energia (os quais são fatores que têm influência direta no custo e no tempo de operação de missão espacial).

1.3 – Organização

No Capítulo 2 resume-se a teoria do Regulador Linear Quadrático e apresenta-se sua extensão, a qual foi iniciada por Albrecht (1962), Lukes (1982) e Willemstein (1975). Uma primeira tentativa de aplicá-la no controle de atitude de um satélite artificial foi feita por Dabbous & Ahmed (1982), visando apenas à redução da velocidade angular do satélite, sem se importar com o comportamento e a possível redução dos ângulos (relevantes para o controle de atitude). Mais recentemente a teoria do LQR foi implementada no controle de atitude não linear de satélite em três eixos Tewari (2002). No Capítulo 3, apresenta-se a dinâmica do sistema e faz-se o seu equacionamento. No Capítulo 4, faz-se a implementação numérica do problema e avalia-se a eficiência da lei de controle considerando o tempo de estabilização, como critério de bom desempenho. No Capítulo 5 apresentam-se as conclusões e algumas sugestões para a continuação deste trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LEITURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo resume-se a teoria do Regulador Linear Quadrático – RLQ e apresenta-se a sua extensão a sistemas não-lineares. Mostra-se como a lei de controle ótima é obtida e que esta é função linear e variante no tempo do estado do sistema. Esta lei, sob certas condições, torna-se invariante no tempo simplificando assim sua determinação. Isto é utilizado na ilustração do método feita no final do Capítulo, para o caso de um sistema controlável, invariante no tempo e com horizonte infinito.

2.1 – O REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

2.1.1 – Introdução

A teoria de controle ótimo e, em particular, a do regulador linear quadrático supõem a adoção de um índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas. A separação das condições de contorno e a sofisticação dos índices de desempenho (expresso, por exemplo, à minimização de tempo, combustível e energia) contribuem para o aparecimento das maiores dificuldades na determinação da solução do problema, principalmente na forma analítica. Entretanto, naquele caso particular, tal solução pode ser obtida e possui a vantagem de poder ser expressa em função do estado. A seguir apresenta-se um resumo da teoria do LQR.

2.1.2 – Teoria

A planta do regulador linear quadrático variante no tempo é dada pelo sistema de equações:

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{X} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \tag{2.1}$$

$$X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^N$$

onde $A(t)$ e $B(t)$ são funções matriciais variantes no tempo, de dimensão $n \times n$ e $n \times m$, contínua por partes em relação a t , respectivamente.

O índice de desempenho a ser minimizado é dado por:

$$J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f) = 1/2 \cdot X^T(t_f) \cdot H \cdot X(t_f) + \tag{2.2}$$
$$1/2 \cdot \int_{t_0}^{t_f} (X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t))dt$$

onde: t_0 é o instante inicial; t_f é o instante final; H é uma matriz, $Q(t)$ e $R(t)$ são funções matriciais, reais, simétricas, sendo as duas primeiras semidefinidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas por partes em relação a t .

Esta teoria foi iniciada por *Kalman (1960)* e pode ser encontrado com mais detalhe em livros como *Kirk (1970)*, *Kwakernaak e Sivan (1972)* e *Kailath (1980)*. Os valores selecionados para as matrizes H , $Q(t)$ e $R(t)$ representam as penalizações impostas ao estado final, ao estado obtido e ao controle empregado ao longo do tempo, respectivamente. Como não há um processo sistemático para a escolha destes pesos, ela se torna trabalhosa e difícil, sendo normalmente feita por tentativa e erro. No Capítulo 4 apresentam-se alguns critérios que facilitam esta seleção.

A lei de controle que satisfaz a Equação 2.1 e minimiza a Equação 2.2 é dada por:

$$U(t) = R^{-1}(t) B^T(t)P(t) \quad (2.3)$$

onde $P(t)$ é o vetor de variáveis adjuntas ou co-estado. Nela, a existência de $R^{-1}(t)$ é assegurada, pois $R(t)$ é uma matriz definida positiva. Essa lei de controle representa a solução do problema em malha aberta. Prova-se também que $P(t)$ pode ser dado por:

$$P(t) = K(t)X(t) \quad (2.4)$$

onde $K(t)$ é a solução da equação diferencial matricial de Riccati, dada na sua forma geral por:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (2.5)$$

com condição de contorno final $K(t_f) = H$.

Substituindo a Equação 2.4 na Equação 2.3 obtém-se:

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) \quad (2.6)$$

que exprime $U(t)$ como função linear, variante no tempo do estado do sistema, e representa a lei de controle ótimo em malha fechada.

A situação em que o processo é controlável para um intervalo de duração infinita merece uma atenção especial. *Kalman (1960)* mostrou que se em adição:

1) o sistema é completamente controlável,

2) $H = 0$ e

3) A , B , R e Q são matrizes constantes, então a solução $K(t)$ da Equação 2.5 tende para um valor constante K , para quando $t_f \rightarrow \infty$. As implicações práticas deste resultado são muito

importantes uma vez que $\dot{K}(t) = 0$ facilita a solução da Equação 2.5 que, neste caso, fica na forma:

$$0 = -KA - A^T.K - Q + KBR^{-1}.B^T.K \quad (2.7)$$

que é a equação algébrica matricial de Riccati. No Capítulo 4 apresentam-se alguns métodos de solução desta equação.

2.2 - A EXTENSÃO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

2.2.1 - Introdução

Sabemos que, por excelência, a Natureza não é linear. Portanto o seu estudo por meio de um modelo linear pode conduzir a uma solução que é apenas uma primeira aproximação da solução real do problema. Logo, à medida que se deseja representar um fenômeno ou um sistema de forma mais real, o modelo utilizado deve (sempre que necessário e possível) incluir os termos não-lineares envolvidos.

A solução de problemas de controle ótimo com sistemas lineares é bem conhecida e estudada. Entretanto, quando o sistema não é linear, esta solução torna-se bem mais complicada. Com o objetivo de contornar parcialmente isto, *Al'brekht (1962)* estudou o problema de controle ótimo de maneira geral considerando um sistema de equações não-lineares, mas analíticas e invariantes no tempo. *Lukes (1969)* utilizou tais conceitos e estendeu a teoria do regulador linear quadrático a sistemas não-lineares, mas analíticos em torno da origem, invariantes no tempo e com horizonte infinito. *Willemstein (1975)* mostrou que tal extensão também é válida para sistemas não-lineares, mas analíticos em torno da origem, variantes no tempo e com horizonte finito. Um resumo desta última é apresentado a seguir.

2.2.2 - Teoria

Considerando:

i) um sistema dado por:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_f], \dot{X}(t) &= F(X(t), U(t), t) \\ X(t_0) &= X_0 \in \mathfrak{R}^N \end{aligned} \quad (2.8)$$

com:

$$F(X(t), U(t), t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + f(X(t), U(t), t) \quad (2.9)$$

onde: $A(t)$ e $B(t)$ são funções matriciais, reais, contínuas em relação a t , de dimensão $n \times n$ e $n \times m$, respectivamente; e $f(X(t), U(t), t)$ é uma função contínua em relação a t que contém os termos não-lineares do sistema em relação a $X(t)$, $U(t)$ e t .

ii) um índice de desempenho dado por:

$$J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f) = \frac{1}{2} X^T(t_f) H X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} G(X(t), U(t), t) dt \quad (2.10)$$

com:

$$G(X(t), U(t), t) = X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t) + g(X(t), U(t), t) \quad (2.11)$$

onde: H é uma matriz, $Q(t)$ e $R(t)$ são funções matriciais, reais, sendo as duas primeiras semi-definidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas em relação a t . A função

$g(X(t), U(t), t)$ também é contínua em relação a t , e contém termos não-lineares do sistema em relação a $X(t)$, $U(t)$ e t .

iii) uma lei de controle dada por:

$$U(t) = D(t)X(t) + h(X(t), t) \quad (2.12)$$

onde: $D(t)$ é uma função matricial, real, contínua em relação a t , de dimensão $n \times n$ e $h(X(t), t)$ é também um função contínua em relação a t , a qual contém os termos não-lineares do controle em relação a $X(t)$ e t .

iv) funções $F(X(t), U(t), t)$, $G(X(t), U(t), t)$ e $U(t)$ sejam analíticas em torno de $X(t) = 0$ e $U(t) = 0$, possibilitando suas expansões em séries de potências (Al'brekht, 1962).

Prova-se, por meio do Teorema 2.8 apresentado por *Willemstein* (1977) e do Teorema 1.1 apresentado por *Lukes* (1969), que para um processo de controle em \mathfrak{R}^N , existe uma única lei de controle ótimo $U^*(t)$ (onde $*$ indica extremamente) solução da equação funcional:

$$F_U | (X(t), U^*(t), t) |^T \cdot J_X (X(t), U^*(t), t, t_f) + G_U | (X(t), U^*(t), t) | = 0 \quad (2.13)$$

para pequenos valores do modulo de $X(t)$.

Nestas condições a lei de controle ótimo e o índice de desempenho são dados respectivamente por:

$$U^*(t) = D^*(t)X(t) + h^*(X(t), t) \quad (2.14)$$

$$J(X_0, U^*(.), t_0, t_f) = X_0^T K(t_0) X_0 + j^*(X_0, t_0) \quad (2.15)$$

e vão depender da expansão em série feita no problema (onde $D^*(t)$ e $K^*(t_0)$ são > 0). Nelas $h^*(X(t), t)$ e $j^*(X_0, t_0)$ representam os termos não-lineares em relação a $X(t)$ e a X_0 , com termos iniciais de segunda e terceira ordens, respectivamente.

OBS: Visando uma notação menos carregada são adotadas as seguintes convenções:

$$\begin{aligned} X &= X(t) \\ U &= U^*(t) \\ J(X, U, t) &= J^*(X(t), U^*(t), t, t_f) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como as funções U e $J(X, U, t)$ são analíticas em torno de $X = 0$ e $U = 0$, pode-se então expandi-las em séries de potências, na forma:

$$U = U(1) + U(2) + U(3) + \dots \quad (2.17)$$

$$J(X, U, t) = J(2)(X, U, t) + J(3)(X, U, t) + J(4)(X, U, t) + \dots \quad (2.18)$$

onde:

$$U(1) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X \quad (2.19)$$

$$J(2)(X, U, t) = X^T K(t)X \quad (2.20)$$

O método usado por *Lukes* (1969) e *Willemstein* (1975) para o cálculo dos termos não-lineares de U e $J(X, U, t)$ baseia-se no fato de que U e J são soluções das duas seguintes equações funcionais:

$$F(X, U, t)^T \cdot J_X(X, U, t) + J_t(X, U, t) + G(X, U, t) = 0 \quad (2.21)$$

$$F_U(X, U, t)^T \cdot J_X(X, U, t) + G_U(X, U, t) = 0 \quad (2.22)$$

Substituindo as Equações 2.17 e 2.18 nas Equações 2.21 e 2.22, e igualando os coeficientes de mesma ordem, obtêm-se os termos $U(k)$ e $J(m)(X, U, t)$ através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} & |A'(t)X|^T \cdot |J(m)(X, U, t)|_X + |J(m)(X, U, t)|_t = \\ & - \sum_{k=3}^{m-1} |B(t)U(m-k+1)|^T \cdot |J(k)(X, U, t)| - \\ & - \sum_{k=2}^{m-1} |f(m-k+1)|^T \cdot |J(k)(X, U, t)|_X - \\ & - 2 \cdot \sum_{k=2}^{(m-1)/2} |U(k)|^T \cdot |R(t)U(m-k)| - \\ & - |U(m/2)|^T \cdot |R(t)U(m/2)| - g(m)(X, U, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned} U(k) = & - \frac{1}{2} \cdot R^{-1}(t) \cdot \{B^T(t)|J(k+1)|_X + \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} |f_U(j)(X, U, t)| \cdot |J(k+1)|_X + g_U(k)(X, U, t)\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde: $m = 3, 4, 5, \dots$; $k = 2, 3, 4, \dots$; $A'(t) = A(t) + B(t)D(t)$ e (k) representa a parte inteira de k . Os valores ímpares de m presentes em $U(m)$ são desprezados. Os somatórios \sum_l^k em que $k < l$ são iguais a zero. Provas e detalhes a respeito deste método podem ser encontrados nos trabalhos de *Lukes* (1969) e *Willemstein* (1975).

Como ilustração do método considera-se o caso de um sistema controlável, invariante no tempo ($t_0 = 0$), com horizonte infinito ($t_f \rightarrow \infty$) e com a lei de controle e o índice de desempenho expandidos somente até os respectivos segundos termos:

$$U = U(1) + U(2) \quad (2.25)$$

$$J = J(2) + K(3) \quad (2.26)$$

onde:

$$U(1) = -R^{-1}B^TKX \quad (2.27)$$

$$J(2) = X^TKX \quad (2.28)$$

K é a matriz solução da equação algébrica de Riccati.

Os segundos termos das duas séries não são lineares e são encontrados fazendo $m = 3$ e $k = 2$ nas equações 2.23 e 2.24 respectivamente, de onde se obtém:

$$A' \cdot X \cdot |J(3)|_X = -f(2)(X) \cdot |J(2)|_X \quad (2.29)$$

$$U(2) = \frac{1}{2} R^{-1}B^T |J(3)|_X \quad (2.30)$$

onde $A' = A^T - BR^{-1}B^TK$ e $f(2)(X)$ contem os termos do segundo grau em X presentes em $F(X, U, t)$.

O termo $|J(3)|_{X=X(t)}$ representa a derivada parcial de $J(3)$ em relação a X , avaliada em $X(t)$ e é encontrado através de uma expansão em série, da forma:

$$J(3) = \sum_{l=0}^n \alpha_l \cdot X_i \cdot X_j \cdot X_k \quad (2.31)$$

onde n é o número de todas as combinações possíveis entre as variáveis de estados no termo $X_i \cdot X_j \cdot X_k$ e os α_l são constantes determinadas por meio de um sistema de equações lineares resultantes da Equação 2.29. Desta forma observa-se que a expressão dada pela Equação 2.25 representa uma lei de controle ótimo não-linear em malha fechada, e que, neste caso, a determinação da matriz K dos α 's, soluções das Equações 2.27 e 2.29 respectivamente, torna-se mais simples por se tratar de equações algébricas. Utilizam-se estas simplificações ao se fazer o equacionamento do problema, no capítulo seguinte.

2.3 – PROBLEMA DO CONTROLE ÓTIMO QUADRÁTICO

Será considerado agora o problema de controle ótimo que, dadas as equações do sistema representado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.32)$$

Onde

x = vetor de estado (n -dimensional)
 u = vetor de controle (r -dimensional)
 A = matriz constante ($n \times n$)
 B = matriz constante ($n \times r$)

Determinar a matriz K do vetor de controle ótimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.33)$$

de modo a minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (2.34)$$

onde Q é uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva (ou semidefinida positiva), R é uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva. Note-se que o segundo termo no segundo membro da Equação 2.34 exprime o consumo de energia dos sinais de controle. As matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e do consumo de energia.

Como mencionado anteriormente, a lei de controle linear dada pela Equação 2.33 é a lei de controle ótimo. Em consequência, se os elementos da matriz K forem determinados de modo a minimizar o índice de desempenho, então $u(t) = -Kx(t)$ é ótimo qualquer que seja o estado inicial $x(0)$. A Figura 2.1 mostra o diagrama de blocos da configuração ótima.

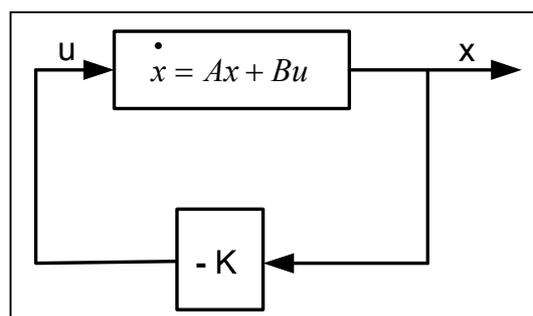


Figura 2.1 – Sistema de controle ótimo

Substituindo-se a Equação 2.33 na Equação 2.32, é possível observar o efeito da introdução da lei de controle no sistema:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (2.35)$$

onde admite-se que a matriz $A - BK$ é estável, isto é, os autovalores desta matriz possuem parte real negativa.

Substituindo-se a Equação 2.33 na Equação 2.34 o índice de desempenho é dado por

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

Considerando a seguinte relação para resolver o problema da otimização paramétrica

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = - \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (2.37)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz hermitiana ou real simétrica definida positiva. Obtém-se, então,

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = - \mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x} \quad (2.38)$$

Comparando-se ambos os membros desta última equação e observando-se que ela deve ser verdadeira para qualquer \mathbf{x} , deve-se ter

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (2.39)$$

Pelo segundo método de Liapunov (Ogata, 2002), se $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ é uma matriz estável, então existe uma matriz \mathbf{P} definida positiva que satisfaz a Equação 2.39. Por conseguinte, o procedimento a adotar é o da determinação dos elementos de \mathbf{P} a partir desta equação e verificar se ela é definida positiva. Note-se que mais de uma matriz \mathbf{P} pode satisfazer esta equação. Se o sistema é estável, existe sempre uma matriz \mathbf{P} definida positiva que satisfaz esta equação. Isto significa que se, ao resolver esta equação, encontramos uma matriz \mathbf{P} definida positiva, o sistema é estável. Outras matrizes \mathbf{P} que podem satisfazer esta equação não são definidas positivas e devem ser descartadas.

O índice de desempenho pode ser calculado como

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (2.40)$$

Como se admite que todos os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ têm parte real negativa, tem-se $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow 0$.

Obtém-se, portanto,

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (2.41)$$

Assim, o índice de desempenho J pode ser obtido em termos do estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e \mathbf{P} .

Para obter a solução do problema de controle ótimo quadrático, procede-se como a seguir: uma vez suposto que R é uma matriz hermitiana ou real simétrica definida positiva, pode-se escrever

$$R = T^T T \quad (2.42)$$

onde T é uma matriz não-singular. Então, a Equação 2.39 pode ser escrita como

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (2.43)$$

que pode ser reescrita sob a forma

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.44)$$

A minimização de J com relação a K requer a minimização de

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x \quad (2.45)$$

com respeito a K . Como esta última expressão é não-negativa, o mínimo ocorre quando ela vale zero, ou seja, quando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P \quad (2.46)$$

Assim,

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (2.47)$$

A Equação 2.47 fornece a matriz ótima K . Em consequência, a lei de controle ótimo para o problema de controle ótimo quadrático, quando o índice de desempenho é dado pela Equação 2.36, é linear e é dada por

$$u(t) = -Kx(t) = R^{-1} B^T P x(t) \quad (2.48)$$

A matriz P na equação 2.37 deve satisfazer a Equação 2.35 ou a seguinte equação reduzida:

$$A^T P + PQ - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.49)$$

A Equação 2.49 é chamada de equação matricial algébrica de Riccati. Observe-se, finalmente, que se o índice de desempenho for dado em termos do vetor de saída em vez do vetor de estados, isto é,

$$J = \int_0^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) dt \quad (2.50)$$

então o índice pode ser modificado utilizando-se a equação de saída

$$y = Cx \quad (2.51)$$

para

$$J = \int_0^{\infty} (x^T C^T Q C x + u^T R u) dt \quad (2.52)$$

e as etapas de projeto apresentadas nesta seção podem ser aplicadas para se obter a matriz K .

2.4 - EXEMPLOS

Exemplo 1 - Considere-se o sistema mostrado na Figura 2.2. Admitindo-se que o sinal de controle seja

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.53)$$

determinar a matriz de ganho de realimentação K ótima tal que o seguinte índice de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt \quad (2.54)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, (\mu \geq 0) \quad (2.55)$$

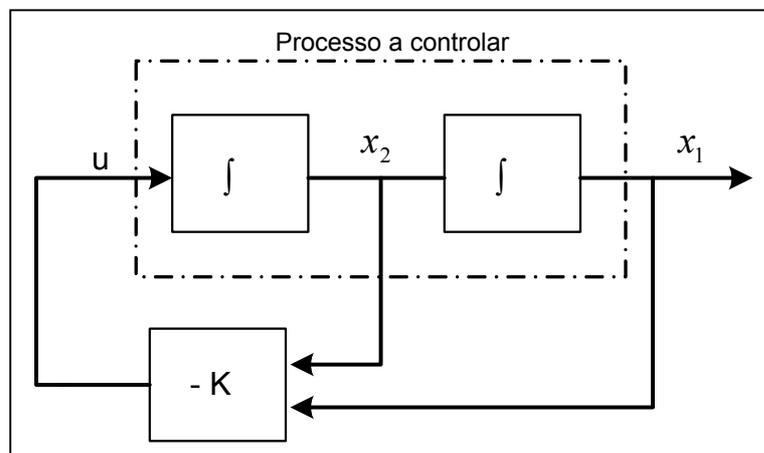


Figura 2.2 – Sistema de Controle

A partir da Figura 2.2, acha-se a equação de estado para o processo é

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.56)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Será demonstrado o uso da equação matricial de Riccati reduzida no projeto do sistema de controle ótimo. Seja resolver a Equação 2.49, reescrita como

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.58)$$

Observando-se que a matriz A é real e que a matriz Q é real e simétrica, a matriz P é uma matriz real simétrica. Portanto, esta última equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

a partir da qual se obtém as três equações seguintes

$$0 = 1 - p_{12}^2 \quad (2.61)$$

$$0 = p_{11} - p_{12}p_{22} \quad (2.62)$$

$$0 = \mu + 2p_{12} - p_{22}^2 \quad (2.63)$$

Resolvendo-se estas três equações simultâneas em p_{11} , p_{12} , p_{22} , com o requisito de que \mathbf{P} seja definida positiva, obtém-se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Com base na Equação 2.47, pode-se obter a matriz de ganho de realimentação \mathbf{K} ótima como sendo

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.65)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$= \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Assim, o sinal de controle ótimo é

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = x_1 - \sqrt{\mu+2}x_2 \quad (2.69)$$

Note-se que a lei de controle dada pela Equação 2.69 conduz a um resultado ótimo para qualquer estado inicial sob o índice de desempenho dado. Além disso, observa-se que a matriz \mathbf{Q} só afeta o segundo elemento da matriz de ganho de realimentação \mathbf{K} . A Figura 2.3 é o diagrama de blocos para este sistema.

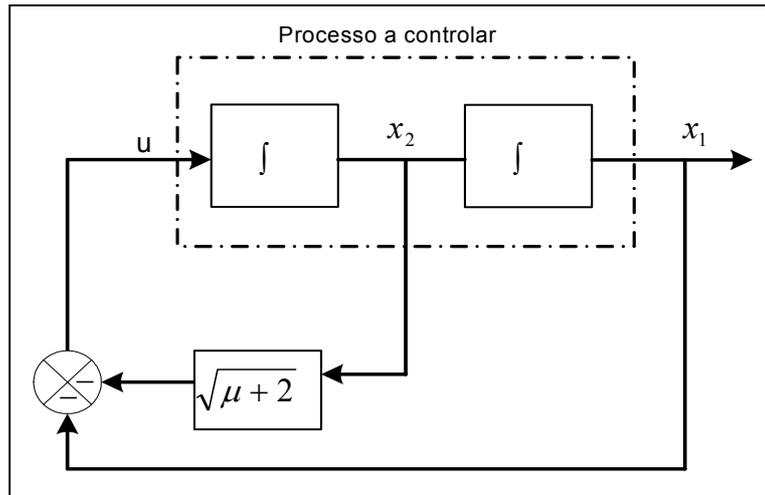


Figura 2.3 – Controle ótimo do processo da Fig.2.2

Exemplo 2 – Um segundo caso, mais complexo ($R = \alpha$), é dado seguindo o exemplo acima. Determinar a matriz de ganho de realimentação K ótima tal que o seguinte índice de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt \quad (2.70)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, (\mu \geq 0) ; R = [\alpha] \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Pelo uso da equação matricial de Riccati,

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\alpha] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha p_{12} p_{21} & \alpha p_{12} p_{22} \\ \alpha p_{22} p_{21} & \alpha p_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

a partir da qual se obtém as quatro equações seguintes

$$0 = 1 - \alpha p_{12} p_{21} \quad (2.75)$$

$$0 = p_{11} - \alpha p_{12} p_{22} \quad (2.76)$$

$$0 = p_{11} - \alpha p_{22} p_{21} \quad (2.77)$$

$$0 = (\mu + p_{12} + p_{21}) - \alpha p_{22}^2 \quad (2.78)$$

Então a matriz P será,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & \sqrt{\alpha}/\alpha \\ \sqrt{\alpha}/\alpha & \sqrt{\mu/\alpha+2} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

A matriz de ganho de retroação K ótima é,

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.80)$$

$$= [\alpha] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{\alpha(\mu+2)} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Assim, o sinal de controle ótimo é

$$u = -Kx = \sqrt{\alpha} x_1 - \sqrt{\alpha(\mu+2)} x_2 \quad (2.83)$$

Note-se que a lei de controle dada pela Equação (2.83) conduz a um resultado ótimo para qualquer estado inicial sob o índice de desempenho dado. A Figura 2.4 é o diagrama de blocos para este sistema. Além disso, observa-se que neste caso a matriz R afeta tanto o primeiro como o segundo elemento da matriz de ganho de realimentação K, enquanto que a matriz Q continua só afetando o segundo elemento. Esta informação é extremamente relevante no processo de definição das matrizes Q e R.

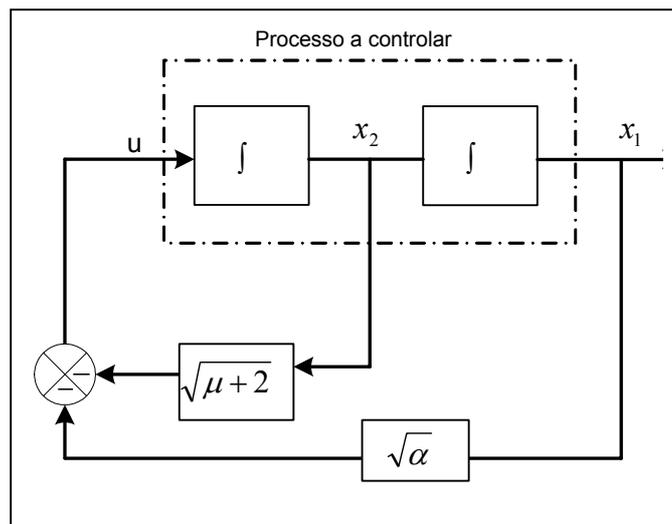


Fig. 2.4 – Controle ótimo

- **Posição dos Pólos em relação as matrizes pesos Q e R**

O objetivo desta análise é observar com se encontraram os pólos das matrizes Q e R, abaixo está o trabalho matemático a ser feito e também o gráfico obtido. Tendo a matriz K encontrada no exemplo 2 e com os valores das matrizes A e B,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = [\sqrt{\alpha} \quad \sqrt{\alpha(\mu+2)}] \quad (2.84)$$

Sendo a equação característica

$$[sI - A + BK] \quad (2.85)$$

substituindo os valores,

$$\left[s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\sqrt{\alpha} \quad \sqrt{\alpha(\mu+2)}] \right] \quad (2.86)$$

Simplificando esta equação

$$\begin{bmatrix} s & s \\ \sqrt{\alpha} & (s-1) + \sqrt{\alpha(\mu+2)} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

A equação característica é, portanto

$$s^2 + s(\sqrt{\alpha(\mu+2)} - \sqrt{\alpha} - 1) \quad (2.88)$$

as raízes S_1 e S_2 encontradas da equação 2.88 serão,

$$S_1 = 0 \quad (2.89)$$

$$S_2 = -\sqrt{\alpha(\mu+2)} + \sqrt{\alpha} + 1 \quad (2.90)$$

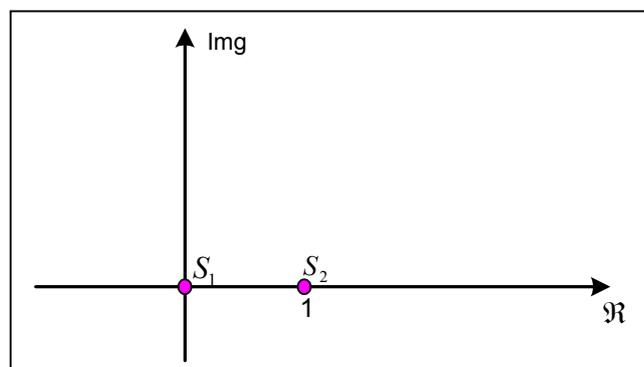


Figura 2.5 – Posição dos Pólos

CAPÍTULO 3

SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE

Neste capítulo descrevem-se alguns aspectos dos modos de operação do controle de atitude de um satélite artificial, citando o tipo de atuador empregado em cada um destes. Em seguida apresentam-se alguns aspectos relativos aos troques ambientais que o satélite está sujeito e os sistemas de referências que descrevem a dinâmica do movimento de atitude do satélite. Finalmente apresenta-se o equacionamento da dinâmica do satélite, a qual é colocada na forma de variável de estado, considerando os torques ambientais e giroscópios, onde estes últimos são inicialmente devidos apenas à velocidade angular do satélite.

3.1 – MODOS DO CONTROLE DE ATITUDE

A finalidade com que um satélite é lançado e usado determina o tipo de sistemas de controle de atitude que deve ser empregado. Este, por sua vez, pode ser classificado como passivo (por exemplo: estabilização por “spin”, gradiente de gravidade) ou ativo (por exemplo: jatos a gás, rodas a reação e bobinas magnéticas).

A colocação e a manutenção de um satélite na sua atitude de operação e as eventuais correções nesta implicam um conjunto de modos nos quais se aplicam várias leis de controle. Exemplos de alguns destes modos são: redução da velocidade angular do satélite, aquisição de uma determinada atitude (através do apontamento – grosso ou fino – de um ou mais eixos do satélite) e operação normal (na qual procura-se manter o satélite na sua atitude de operação).

A redução da velocidade angular do satélite pode ser conseguida por meio de atuadores que gerem torques opostos a essas velocidades. Neste modo e no de aquisição é comum o emprego de atuador do tipo liga-desliga (por exemplo: jatos a gás). No modo de operação normal deve ser empregado um atuador linear (por exemplo: rodas a reação), uma vez que a velocidade envolvida é pequena, o que permite a utilização de uma lei de controle aproximadamente linear em relação ao estado. Além disso, o atuador empregado na fase de operação normal deve ser capaz de absorver os torques externos que atuam sobre o satélite e ser alimentado por uma fonte de energia renovável. Esta absorção de torques externos pode elevar a velocidade angular de uma roda ao seu máximo valor, exigindo que esta seja “dessaturada”. Isto pode ser feito utilizando-se jatos a gás ou bobinas magnéticas.

Como o atuador aqui empregado é linear, este trabalho compreende o estudo do modo de operação normal, onde as velocidades do satélite são pequenas. O funcionamento daquele é detalhado por *Souza (1981)* e sua configuração é mostrada na Figura 3.1. Basicamente seu funcionamento consiste na geração de torques graças à aceleração de uma roda a reação, ligada ao rotor de um motor elétrico, em relação ao seu estator que é fixo à estrutura do satélite. O princípio de funcionamento é o da conservação do momento angular do conjunto satélite/roda, pois o torque do motor apenas incrementa as respectivas parcelas com quantidades simétricas, fazendo com que o satélite gire de modo a reduzir o ângulo de erro. Espera-se que a roda opere em torno de velocidade (relativa) nula ou que, ao menos, a média desta ao longo do período orbital o seja. Se isto não acontecer, tal média aumentará ao longo de vários períodos acabando por demandar a dessaturação da roda anteriormente citada.

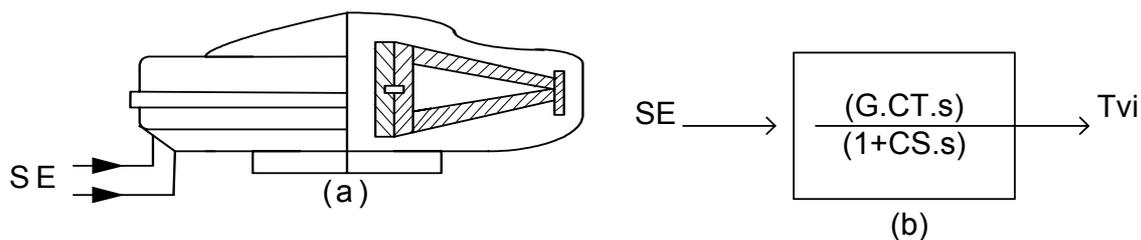


FIG. 3.1: – Atuador a roda a reação (a) e sua função de transferência aproximada (b).

O atuador a roda a reação apresenta as seguintes vantagens:

- 1) produz torques de baixíssimo valor e proporcionais aos ângulos de erro;
- 2) consome energia elétrica (renovável) e não massa (não renovável) como é o caso do atuador a jatos a gás;
- 3) na presença de torques externos cíclicos, opera com velocidade média de rotação aproximadamente constante constituindo-se por isto no sistema adequado para aí operar.

E as seguintes desvantagens:

- 1) necessidade de redução da velocidade angular da roda (dessaturação) para que esta não atinja o seu limite máximo pré- estabelecido;
- 2) o aparecimento de torques giroscópicos devidos ao acoplamento entre os eixos, fazendo com que a correção da atitude em torno de um eixo gere torques em torno dos outros dois eixos (desalinhando-os).

3.2 – TORQUES AMBIENTAIS

A simulação da atitude requer uma modelagem dos torques ambientais que atuam sobre o satélite. Para a integração numérica das Equações de Euler, os torques ambientais devem ser modelados como função do tempo, da posição e da atitude do satélite. Como ilustração desta relação à Figura 3.2 mostra uma estimativa dos principais torques terrestres em função da posição de um satélite (*Belestskii, 1966*).

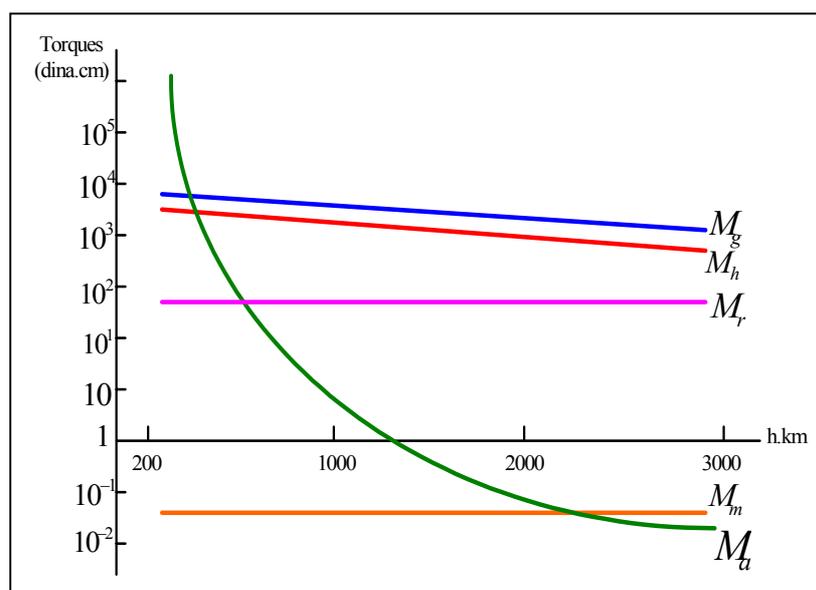


Figura 3.2 – Torques ambientais em função da altura

onde: M_g é o Torque gravitacional, M_a é o Torque aerodinâmico, M_h é o Torque magnético, M_r é o Torque de radiação e M_n é o Torque de impacto de micro meteoritos.

Na integração das equações de Euler realizada neste trabalho os torques externos são desprezados, embora no equacionamento os termos devido aos torques ambientais como: o aerodinâmico, o magnético e o gradiente de gravidade encontram-se incorporada à dinâmica do movimento do satélite através dos termos Tdm 1,2 e 3.

3.3 – DINÂMICA DO MOVIMENTO DO SATÉLITE

Três sistemas de referencia são relevantes no controle de atitude de um satélite artificial. O primeiro, chamado “referencial (quase) inercial” é um sistema com origem no centro de massa da Terra e cujo eixo: X aponta para o Equinócio Vernal (na intersecção do plano do equador terrestre com o plano da eclíptica); Z aponta na direção e sentido do vetor velocidade angular terrestre; Y forma o triedro direto XYZ, (ver Figura 3.3).

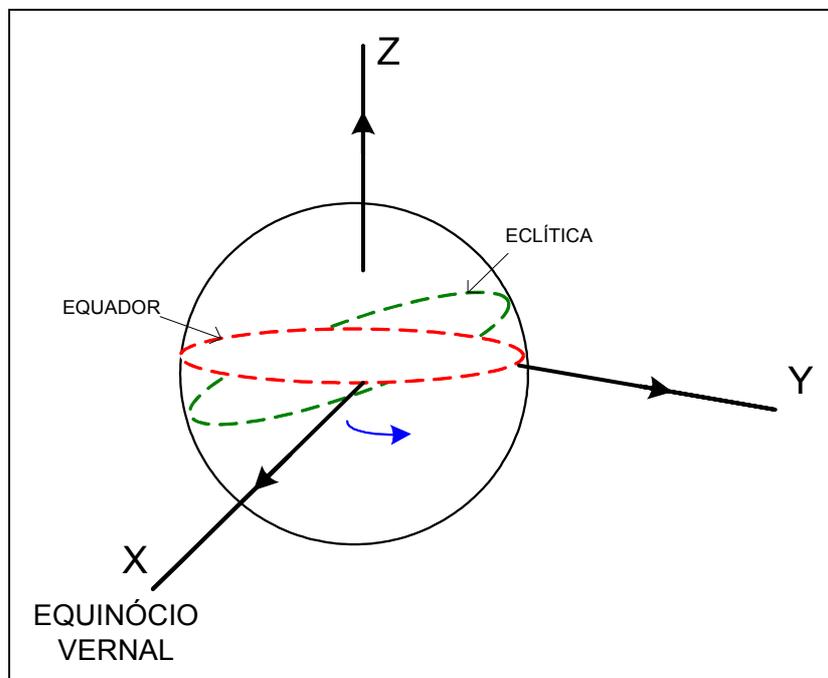


Figura 3.3 – Referencial inercial

O segundo, chamado “referencial orbital” é um sistema com origem no centro de massa da Terra, coincidente com um dos focos da elipse formada e cujos eixos X_0 e Y_0 estão contidos no plano da órbita do satélite sendo: X_0 na direção e sentido daquele foco para o triângulo direto $X_0Y_0Z_0$, (ver Figura 3.4).

O terceiro, chamado “referencial móvel” é um sistema com origem no centro de massa do satélite, com os eixos x , y e z mutuamente perpendiculares, fixos no corpo do satélite e dirigidos segundo os seus três eixos principais de inércia (ver Figura 3.5).

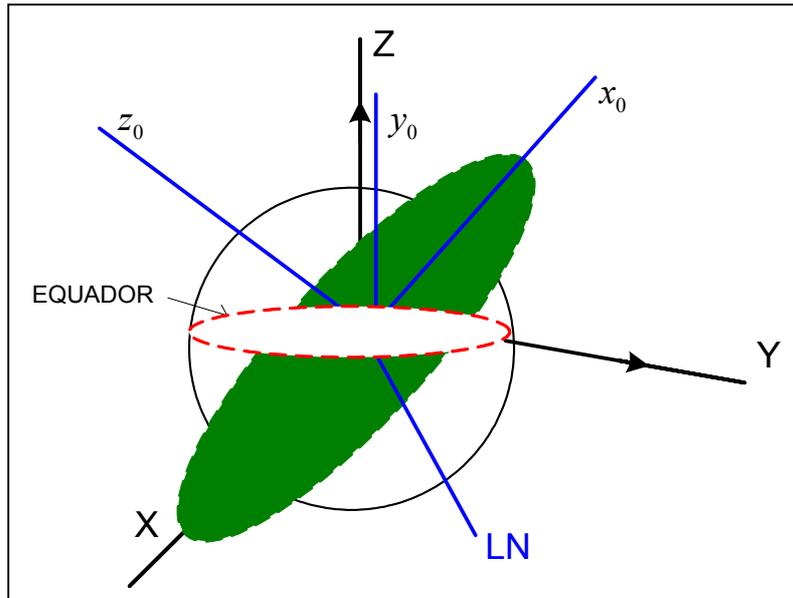


Figura 3.4 – Referencial orbital

As equações que descrevem a dinâmica do movimento do satélite em relação ao referencial inercial (X,Y, Z), são obtidas considerando que o torque total (T) que atua sobre o satélite, soma dos torques externos (devidos ao meio) (T_e) e o torque de controle (T_c), é igual à taxa de variação do seu momento angular (L), ou seja:

$$\frac{dL}{dt} = T; \quad (3.1)$$

que, reescritas em coordenadas do referencial móvel (x,y,z), são dadas por :

$$\frac{dL}{dt} + W \times L = T \quad (3.2)$$

onde W é a velocidade angular do satélite em relação ao referencial inercial.

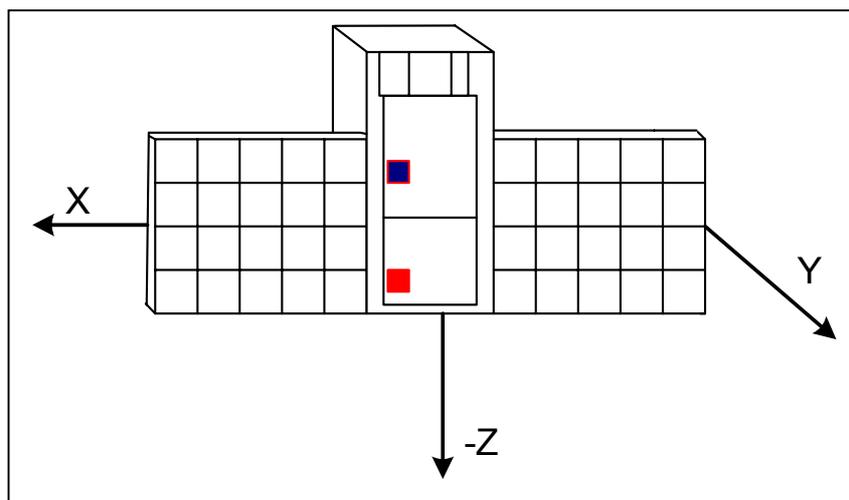


Figura 3.5 – Referencial móvel.

Admitindo o satélite como um corpo rígido e com os eixos principais de inércias coincidentes com o sistema móvel, tem-se:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [I_1 W_1 \hat{i} + I_2 W_2 \hat{j} + I_3 W_3 \hat{k}] \quad (3.3)$$

$$W = W_1 \hat{i} + W_2 \hat{j} + W_3 \hat{k} \quad (3.4)$$

$$L = I \cdot W = I_1 W_1 \hat{i} + I_2 W_2 \hat{j} + I_3 W_3 \hat{k} \quad (3.5)$$

onde I é a matriz de inércia do satélite.

Desenvolvendo passo a passo cada item da equação 3.2,

$$\frac{dL}{dt} = I_1 \dot{W}_1 \hat{i} + I_2 \dot{W}_2 \hat{j} + I_3 \dot{W}_3 \hat{k} \quad (3.6)$$

$$\vec{W} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ I_1 W_1 & I_2 W_2 & I_3 W_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

$$= I_3 W_3 W_2 \hat{i} + I_1 W_1 W_3 \hat{j} + I_2 W_2 W_1 \hat{k} - I_1 W_1 W_2 \hat{k} - I_3 W_3 W_1 \hat{j} - I_2 W_2 W_3 \hat{i} \quad (3.6)$$

$$= (I_3 W_3 W_2 - I_2 W_2 W_3) \hat{i} + (I_1 W_1 W_3 - I_3 W_3 W_1) \hat{j} + (I_2 W_2 W_1 \hat{j} - I_1 W_1 W_2) \hat{k} \quad (3.7)$$

Substituindo as equações 3.6 e 3.7 em 3.2, obtêm-se então, as equações que descrevem a dinâmica do satélite em relação ao referencial inercial (Equações de Euler):

$$I_1 \dot{W}_1 + I_3 W_3 W_2 - I_2 W_2 W_3 = T_1 \quad (3.8)$$

$$I_2 \dot{W}_2 + I_1 W_1 W_3 - I_3 W_3 W_1 = T_2 \quad (3.9)$$

$$I_3 \dot{W}_3 + I_2 W_2 W_1 - I_1 W_1 W_2 = T_3 \quad (3.10)$$

$$I_1 \dot{W}_1 + W_2 W_3 (I_3 - I_2) = T_1 \quad (3.11)$$

$$I_2 \dot{W}_2 + W_1 W_3 (I_1 - I_3) = T_2 \quad (3.12)$$

$$I_3 \dot{W}_3 + W_1 W_2 (I_2 - I_1) = T_3 \quad (3.13)$$

onde: W_1 , W_2 e W_3 representam as velocidades angulares em relação ao referencial inercial; I_1 , I_2 e I_3 são os momentos principais de inércia do satélite e T_1 , T_2 e T_3 são as componentes dos torques total, soma dos torques externos e os torques de controle .

$$\dot{W}_1 = W_2 W_3 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} + \frac{T_{e1}}{I_1} + \frac{T_{c1}}{I_1} \quad (3.14)$$

$$\dot{W}_2 = W_1 W_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} + \frac{T_{e2}}{I_2} + \frac{T_{c2}}{I_2} \quad (3.15)$$

$$\dot{W}_3 = W_1 W_2 \frac{(I_2 - I_1)}{I_3} + \frac{T_{e3}}{I_3} + \frac{T_{c3}}{I_3} \quad (3.16)$$

Os desvios angulares do satélite β , ψ e Φ (Figura 3.6), os quais representam a sua atitude em relação ao referencial móvel, são dados pelas Equações 3.11, 3.12 e 3.13 (Wertz, 1978).

$$\dot{\beta} = W_1 \cos \psi + W_3 \sin \psi \quad (3.17)$$

$$\dot{\psi} = W_2 - (W_3 \cos \psi - W_1 \sin \psi) \tan \beta \quad (3.18)$$

$$\dot{\phi} = (W_3 \cos \psi - W_1 \sin \psi) \cot \beta \quad (3.19)$$

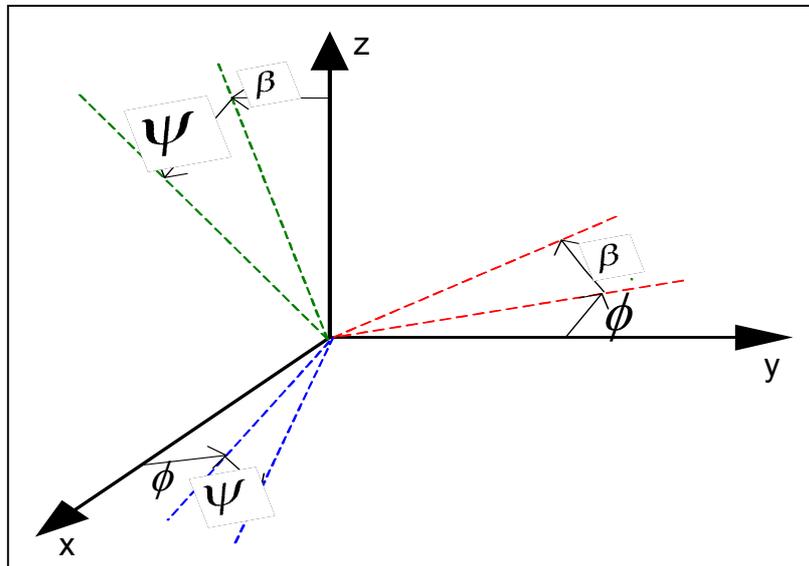


Figura 3.6 – Desvios angulares do satélite

Como os desvios angulares são pequenos, tem-se:

$$\dot{\beta} = W_1 \quad (3.20)$$

$$\dot{\psi} = W_2 \quad (3.21)$$

$$\dot{\phi} = W_3 \quad (3.22)$$

e considerando que $\theta_1 \approx \Delta\beta$, $\theta_2 \approx \Delta\psi$ e $\theta_3 \approx \Delta\Phi$:

$$\dot{\theta}_1 = W_1 \quad (3.23)$$

$$\dot{\theta}_2 = W_2 \quad (3.24)$$

$$\dot{\theta}_3 = W_3 \quad (3.25)$$

As equações 3.14, 3.15 e 3.16 podem ser reescritas na forma:

$$\dot{W}_1 = U_1 + b_1 \cdot f_1 + a_1 \quad (3.26)$$

$$\dot{W}_2 = U_2 + b_2 \cdot f_2 + a_2 \quad (3.27)$$

$$\dot{W}_3 = U_3 + b_3 \cdot f_3 + a_3 \quad (3.28)$$

onde: $a_1 = Te_1/I_1$, $a_2 = Te_2/I_2$ e $a_3 = Te_3/I_3$ são termos relacionados com os torques externos; $f_1 = W_2 \cdot W_3$, $f_2 = W_1 \cdot W_3$ e $f_3 = W_1 \cdot W_2$ são termos não lineares; $b_1 = (I_3 - I_2)/I_2$, $b_2 = (I_1 - I_3)/I_3$ são coeficientes constantes; e finalmente $U_1 = T_{C1}/I_1$, $U_2 = T_{C2}/I_2$ e $U_3 = T_{C3}/I_3$ são termos relacionados com os controles, os quais serão identificados ao se inserir os efeitos das rodas a reação na dinâmica do satélite.

Definindo as seguintes variáveis de estado:

$$X_1 = W_1 \quad X_4 = \theta_1 \quad (3.29)$$

$$X_2 = W_2 \quad X_5 = \theta_2 \quad (3.30)$$

$$X_3 = W_3 \quad e \quad X_6 = \theta_3 \quad (3.31)$$

reescrevem-se as Equações 3.11, 3.12, 3.13, 3.23, 3.24 e 3.25 na forma:

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U + f(X) + a \quad (3.32)$$

$$X(t_0) = X_0 \quad (3.33)$$

Onde:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad f(X) = \begin{vmatrix} b_1 \cdot f_1 \\ b_2 \cdot f_2 \\ b_3 \cdot f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

Nesta notação $f(X)$ representa os termos não-lineares, “a” os torques externos, X as variáveis de estado e U as variáveis de controle.

Escrevendo o índice de desempenho na forma:

$$J(X_0, U(.)) = \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (3.35)$$

Tem-se:

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{vmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

que representam os pesos relacionados com o estado e com o controle, respectivamente.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste Capítulo apresentam-se alguns critérios para a seleção das matrizes peso Q e R. Discutem-se as soluções numéricas: da equação algébrica matricial de *Riccati* 2.7; do sistema algébrico formado a partir da Equação 2.50; e da integração da Equação 3.12. Em seguida apresentam-se: um fluxograma do programa implementado, os valores iniciais e as constantes utilizadas nesta implementação. Finalmente, algumas simulações com o objetivo de determinar os valores das matrizes Q e R, que produza um controle de melhor desempenho possível.

4.1 – SELEÇÃO DAS MATRIZES PESO Q e R

Com o objetivo de melhor compreender a minimização realizada na Equação 3.18, coloca-se a seguinte questão: Por que razão, as matrizes Q e R estão inseridas no integrando de $J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f)$? A resposta a esta questão fica clara quando se observa que uma redução arbitrariamente rápida do estado pode ser conseguida às custas de um aumento correspondentemente grande do controle empregado, implicando, contudo uma impossibilidade prática na implementação de tal solução. Por outro lado, uma redução arbitrariamente grande no controle pode provocar uma grande elevação do estado, situação indesejável num processo de controle de atitude. Logo, o que se deseja ao se incluir Q e R no integrando é um compromisso dos valores destas matrizes com a realidade prática do problema.

Quando se utiliza o critério quadrático, a seleção das matrizes peso torna-se um processo extremamente trabalhoso. Usualmente esta seleção consiste em verificar, após várias simulações do problema, quais os valores destas matrizes que melhor satisfazem a certos critérios (como por exemplo, porcentagem de sobrelevação, máximo controle e tempo de estabilização), que quando alcançados, refletem um melhor desempenho do sistema. Isto se deve ao fato de não existir um método sistemático para tal seleção. É usual adotar-se a forma diagonal para Q, R, pois esta possibilita que as componentes do estado e do controle sejam penalizadas individualmente, facilitando o ajuste e a interpretação física destas. A sistemática empregada neste trabalho para a seleção das matrizes pesos constitui inicialmente de varias simulações. Nestas, por meio de tentativas e erros, foram selecionados os valores das matrizes peso que melhor satisfizeram os critérios relacionados com o tempo de estabilização. Uma segunda etapa correspondeu ao aperfeiçoamento dos valores obtidos na primeira, de forma a melhorar principalmente o tempo de estabilização. É interessante ressaltar que esta seleção esta diretamente relacionada com:

- i) a equação (diferencial ou algébrica) matricial de Riccati e
- ii) a lei de controle $U = -R^{-1}B^T K$

Maiores detalhes quanto a esta seleção podem ser encontrados nos livros de *Bryson e Ho (1969)*, *Kwakernaak e Sivan (1972)* e *D’Azzo e Houpis (1975)*.

4.2 – MÉTODOS NUMÉRICOS EMPREGADOS

A solução numérica implementada pode ser dividida basicamente em duas etapas. A primeira corresponde à solução da equação algébrica matricial de *Riccati* 2.7. Uma vez determinados os valores de K nesta etapa, passa-se a segunda que consiste na integração numérica da Equação 3.12. Na figura 4.1 apresenta-se um fluxograma destas duas etapas. Existem vários métodos numéricos para a solução da equação algébrica matricial de Riccati. Entre eles pode-se citar: integração direta, *Kalman-Englar*, diagonalização e *Newton-Raphson* (*Kwakernaak e Sivan, 1972*).

4.3 – VALORES INICIAIS E PARÂMETROS

Neste trabalho realizam-se várias implementações numéricas. Inicialmente, com objetivo de determinar os melhores valores dos pesos λ . São feitas duas primeiras simulações, na qual a partir do resultado apresentado, inicia-se um processo de aperfeiçoamento do desempenho da lei de controle utilizada, fazendo simulações mais específicas com os pesos λ_1 à λ_3 e λ_4 à λ_6 associados a W e ao θ , respectivamente.

Foi utilizado o software Matlab, para estas implementações. Com o objetivo de manter os resultados obtidos comprometidos com a realidade, os valores iniciais para os ângulos e para as velocidades angulares foram retirados da missão TD-1A, particularmente de modo 5 (fase final de apontamento, e operação normal) da simulação feita por *Souza (1981)* para o mesmo satélite. As Figuras 4.2 à 4.12 apresentam os gráficos das componentes da velocidade angular W e do ângulo θ do satélite em função do tempo, ao se empregar a lei de controle ótimo, para as condições iniciais, momentos de inércia e erros apresentados na Tabela 4.1.

TABELA 4.1

CONDIÇÕES INICIAIS, MOMENTOS DE INÉRCIA E ERROS NAS ESTIMATIVAS EMPREGADAS NA SIMULAÇÃO

$\theta_0(\text{rad})$	$w_0(\text{rad/s})$
$\theta_1 = 0,1$	$w_1 = 0$
$\theta_2 = -0,5$	$w_2 = -0,1$
$\theta_3 = 0,1$	$w_3 = 0,5$

MOMENTOS DE INÉRCIA (Kg.m²)
$I_1 = 225$
$I_2 = 207$
$I_3 = 121$

Precisão de Apontamento (graus)	Taxa de Variação de Atitude (graus/s)
$< 0,7$	$< 0,02$

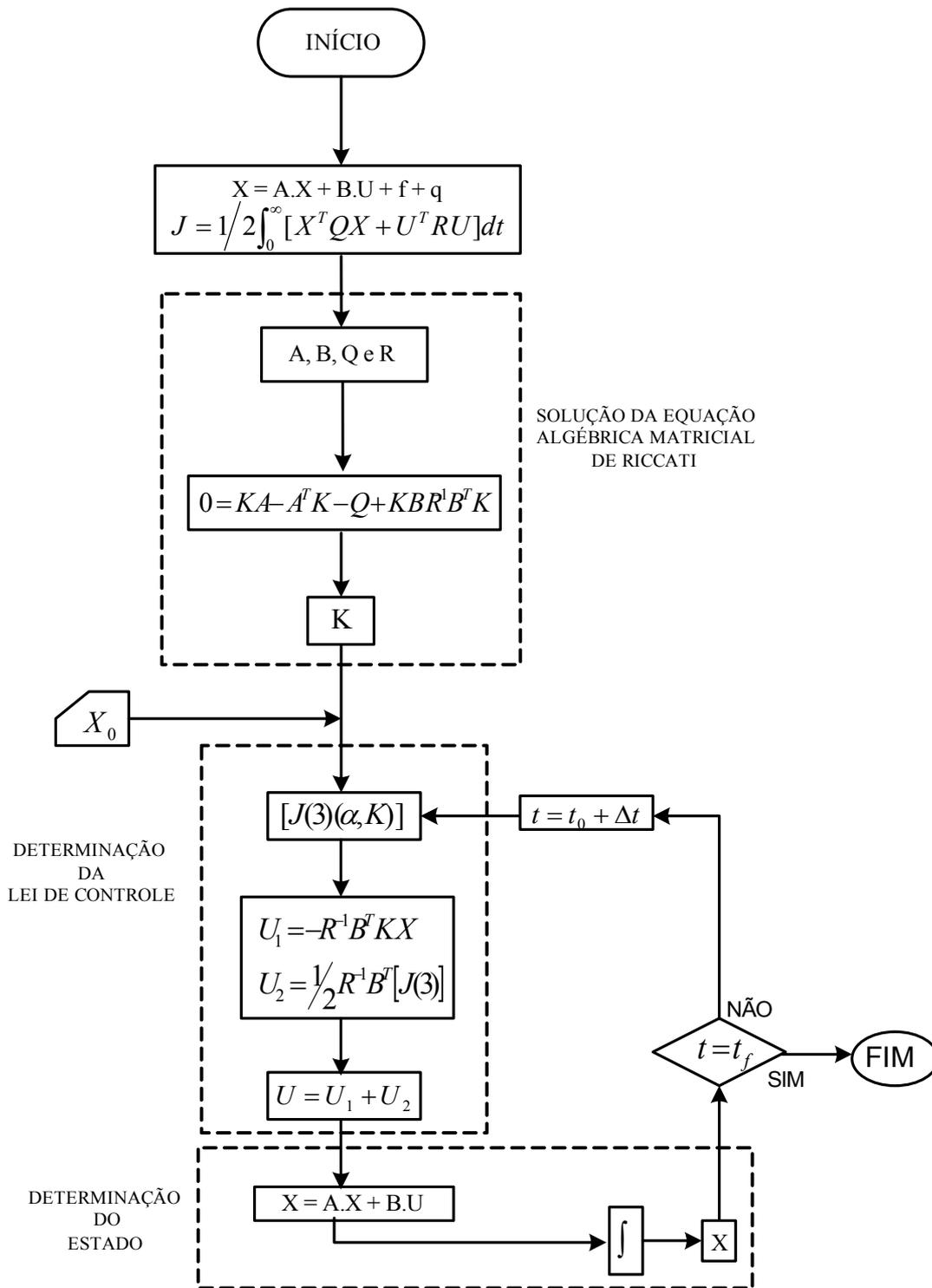


Figura 4.1 – Fluxograma do programa implementado

4.4 – SIMULAÇÕES

Figura 4.1		
$\lambda_1 = 100$	$\lambda_4 = 100$	$\lambda_7 = 0,001$
$\lambda_2 = 100$	$\lambda_5 = 100$	$\lambda_8 = 0,001$
$\lambda_3 = 100$	$\lambda_6 = 100$	$\lambda_9 = 0,001$

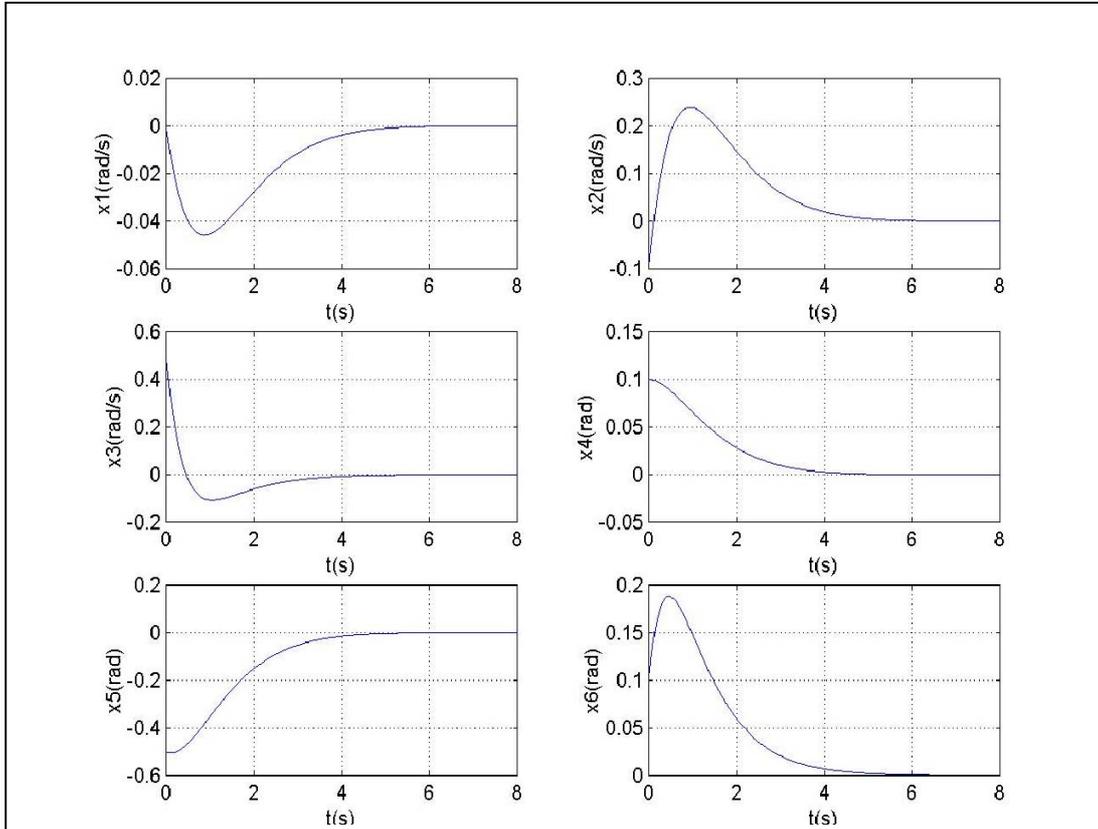


Figura 4.1

Figure 4.1, mostra uma simulação onde a lei de controle consegue controlar o sistema em menos de 4 segundos com os pesos de λ_1 a λ_6 tem os mesmos valores de 100 e os λ_7 a λ_9 ter os mesmos valores de 0.001.

De agora em diante a idéia é avaliar o matriz peso individualmente para obter um desempenho melhor da parte linear da lei de controle. A melhoria será avaliada principalmente em termos do tempo de estabilização e o overshoot.

Figura 4.2		
$\lambda_1 = 100$	$\lambda_4 = 1000$	$\lambda_7 = 0,001$
$\lambda_2 = 100$	$\lambda_5 = 1000$	$\lambda_8 = 0,001$
$\lambda_3 = 100$	$\lambda_6 = 1000$	$\lambda_9 = 0,001$

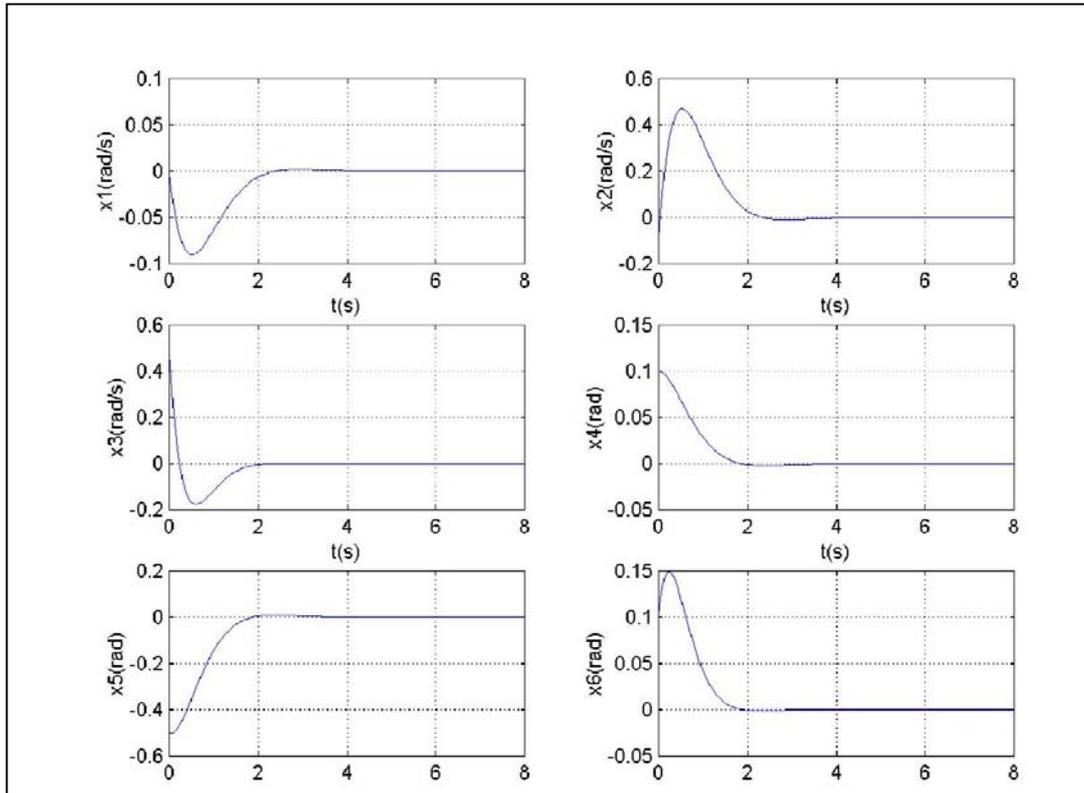


Figura 4.2 –Melhoria em ação de controle devido a decremento de valores pesos λ_1 a λ_3

Figure 4.2, mostra uma simulação onde a ação de lei de controle foi melhorada para estabilização perto de 2 segundos, diminuindo os pesos de λ_1 a λ_3 para 100 enquanto mantendo os mesmos valores de 1000 por λ_4 a λ_6 e λ_7 a λ_9 de 0.001. O overshoot se aproxima mais da origem.

Figura 4.3		
$\lambda_1 = 100$	$\lambda_4 = 10000$	$\lambda_7 = 0,001$
$\lambda_2 = 100$	$\lambda_5 = 10000$	$\lambda_8 = 0,001$
$\lambda_3 = 100$	$\lambda_6 = 10000$	$\lambda_9 = 0,001$

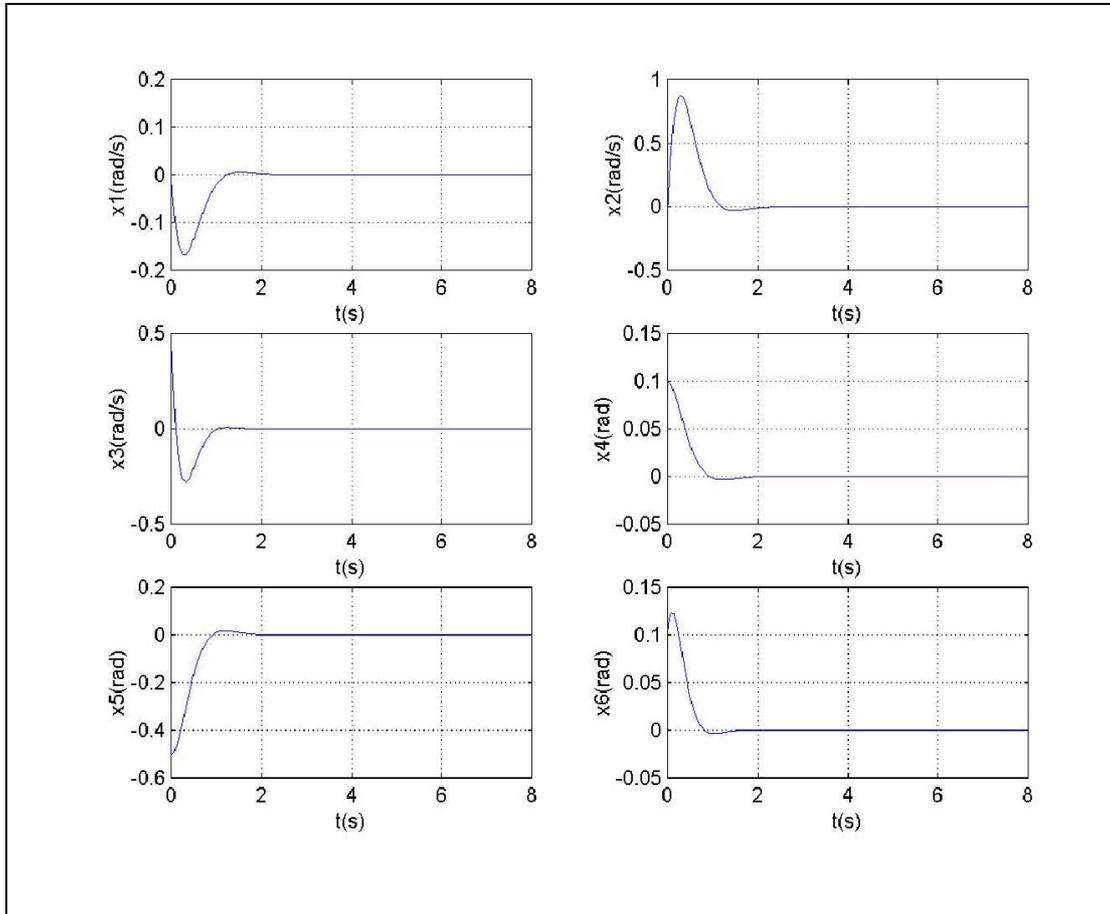


Figura 4.3 –Lei de Controle com ótimo desempenho em termos de tempo de estabilização e overshoot.

Figure 4.3, mostra uma simulação onde a lei de controle foi melhorada um pouco mais com incremento dos pesos de λ_4 a λ_6 a 1000 e mantendo os mesmos valores de λ_1 a λ_3 e λ_7 a λ_9 . Esta é a simulação onde o desempenho da lei de controle é considerado ótimo com e nível de sobre elevação “overshot” e o tempo de estabilização é mínimo, aproximadamente 1 segundo

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho, deriva-se a extensão da teoria do Regulador Linear Quadrático (LQR) para o caso de uma dinâmica que é descrita por um sistema de equação não-linear (equação de Euler), esta lei compreende duas partes, uma linear e outra não linear. A parte linear é empregada para o controle de atitude de um satélite artificial utilizando-se rodas de reação como atuador. Para efetuar esta investigação, derivam-se as equações de movimento de um satélite com dinâmica não-linear do satélite, em seguida estas equações são colocadas na forma matricial de variáveis de estado, evidenciando a presença dos termos não-lineares. A lei de controle projetada pela extensão da teoria do LQR compreende uma parte linear e outra não linear. A primeira é projetada baseando-se nas equações lineares da dinâmica do satélite e a segunda na parte das equações não-lineares. Este trabalho concentrou-se em projetar e avaliar o desempenho da primeira parte da lei de controle. Ao se empregar o método LQR utilizou-se como critérios de desempenho das leis de controle a sobrelevação (overshoot) e o tempo de estabilização. Das simulações observou-se que quando há uma grande penalidade em reduzir o ângulo e a velocidade do satélite, o nível de ação de controle fica muito alto devido a necessidade de um compromisso entre o tempo de redução e a energia do torque de controle. No domínio da frequência este compromisso pode ser traduzido em termos de nível de ganho e o tamanho da banda passante (bandwidth). A primeira parte projetada da lei de controle considerando a parte linear dinâmica mostrou um desempenho muito bom em deslocar os overshoots no sentido da origem. Esse comportamento é importante quando se deseja preceder manobras rápidas no satélite, associado com as exigências estritas de precisão de apontamento. Destes resultados preliminares, observa-se que a extensão da teoria do RLQ se torna mais promissora a medida que a lei de controle composta das duas partes (linear e não-linear) possa obter um desempenho ainda melhor do que a lei só composta pela parte linear, uma vez que esta não conseguiu controlar de forma eficiente o modelo com dinâmica não linear, o que significa dizer, melhores níveis de apontamentos do sistema podem ser obtidos. Um aspecto importante da extensão da teoria do RLQ para sistemas não-linear é a possibilidade de projetar leis de controle de forma semelhante a linear, isto é, ajustando os parâmetros das matrizes peso. O desenvolvimento da parte não linear da lei de controle e sua aplicação para controlar o modelo não linear do satélite é o próximo passo dessa investigação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

André Fenili, Luiz C. G. de Souza. Control of a Nonlinear Slewing Flexible Beam. Proc. of 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 15-21, Warsaw – Poland, 2004. Organized by International Union of Theoretical and Applied Mechanics – IUTAM – ISBN- 83-89697-01-1

Silva, A.R.; Souza, L.C.G. Control System Flexible Satellite Interaction During Orbit Transfer Maneuver. Pub. American Astronautical Society (AAS) in Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 100 Part I, pp. 541-550, paper AAS 98-343, Ed. Thomas H. Stengle, USA, 1998. ISBN 0-87703-453-2

Silva, A. R.; Schäfer, B.; Souza, L. C. G.; Fonseca, R. A., Integrated Linear and Non-linear Parameters Identification for Space Robot Dynamics". Proc. of IAF - 51st International Astronautical Congress. 2000 - Rio de Janeiro, Brazil.

Ralf Vargas, Luiz C. G. de Souza, H. K. Kuga. Application of the Kalman Filter to Estimate Elastic Parameters in Order to Improve Controller Performance. Ed. A. Tadeu & S.N. Atluri. , Proc. of the 2004 International Conference on Computational & Experimental Engineering & Sciences 26-29 July, Madeira, Portugal 2004. ISBN 0-9657001-6-X.

Souza, L C G. Controle de Atitude de um Satélite Artificial Através da Extensão da Teoria do Regulador Linear Quadrático. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos-SP. 1987. Publicação INPE-4407-TDL/304.

Cubillos, X C M. Controle de Atitude de um Satélite Artificial Usando o Regulador Linear Quadrático – Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE). Seminário de Iniciação Científica do INPE – SICINPE. São José dos Campos - SP, 2003.

Al'Brekht, E.G. On the Optimal Stabilization of Non-linear Systems. Journal of Applied Mathematics Mechanics, 1962, 25(5): 1254-1266.

Lukes, D.L. Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems. SIAM JOURNAL, 1969, 7(1): 75-100.

Willemstein, A.P. Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems on a finite interval. 1977, SIAM JOURNAL, 15(6): 1050-1069.

Dabbous, T.E. and Ahmed, N.V. Nonlinear Feedback Regulation of Satellite Angular Moments, 1981. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems. 8(1): 2-10.

Kalman, R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control, 1960. Mexican Mathematics Society Bulletin, 2(5): 102-119.

Kwakernaak, H. and Sivan, R. Linear optimal control systems. NY, John Wiley, 1972.

Kailath, T. Linear systems. New York, Prentices-Hall, 1980.