

**CÁLCULO DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DE  
SATÉLITES LUNARES DEVIDO À DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME  
DE MASSA DA LUA**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Maria Lívia Galhego Thibes Xavier da Costa (ICT/UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: livia.thibes@gmail.com

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado (DMC/INPE, Orientador)  
E-mail: prado@dem.inpe.br

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (ICT/UNIFESP, Orientador)  
E-mail: rodolpho.vilhena@gmail.com

São José dos Campos  
Julho de 2015



# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela dávida da vida, salvação, infinita bondade, amor e misericórdia. Por ter me ajudado na realização deste trabalho.

Agradeço à minha família por continuamente guiar meus passos com muito amor, carinho e dedicação.

Agradeço aos meus estimados orientadores, Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, por permanentemente acreditarem em minha capacidade e competência.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.



*Não vos inquieteis, pois, pelo dia de amanhã, porque o dia de amanhã cuidará de si mesmo. Basta a cada dia o seu mal.*

(Mateus 6:34 - Bíblia Sagrada)

*“As leis da natureza nada mais são do que pensamentos matemáticos de Deus.”*

(Johannes Kepler)

*“A matemática é a rainha das ciências.”*

(Carl Friedrich Gauss)

*“Não existe verdadeira inteligência sem bondade.”*

(Ludwig Van Beethoven)



# Resumo

Se ignorarmos a existência de perturbações, um veículo espacial, sujeito exclusivamente à atração gravitacional de um corpo central, desenvolve uma trajetória cônica fixa em um plano fixo. Em outras palavras, sua órbita possui elementos keplerianos constantes. Em aplicações reais, quando forças perturbativas são consideradas - para este trabalho, forças que derivam de um potencial gravitacional devido à distribuição de massa não-homogênea do corpo central - os parâmetros os quais descrevem a órbita não são mais constantes. Através dos Polinômios de Legendre e das Equações Planetárias de Lagrange, podemos descrever o potencial gravitacional e obter as variações temporais de tais parâmetros. No presente trabalho, considerando as particulares distribuições de massa e o potencial, incluindo termos fatorados por  $J_2$  e  $C_{22}$ , é investigado o comportamento dos elementos orbitais de satélites artificiais ao redor de algumas luas de nosso sistema solar: Lua, Europa, Ganimedes, Calisto e Titã. Simulações são feitas para algumas condições iniciais a fim de analisar o comportamento da inclinação crítica e de órbitas heliosíncronas de satélites artificiais movendo-se ao redor destes corpos.

**Palavras-chaves:** Satélites Artificiais Lunares, Polinômios de Legendre, Equações Planetárias de Lagrange, Potencial Gravitacional, Elementos Orbitais.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Movimento relativo de dois corpos. . . . .	17
Figura 2 – Geometria para definição dos elementos orbitais. P1 é plano da órbita, P2 é plano do equador, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S. . . . .	19
Figura 3 – Classificação dos Harmônicos Esféricos (KUGA; RAO; CARRARA, 2011). . . . .	33
Figura 4 – Variação da inclinação crítica $i$ em relação à $\Omega$ de um satélite artificial ao redor da Lua. . . . .	47
Figura 5 – Variação da inclinação crítica $i$ em relação à $\Omega$ de um satélite artificial ao redor de Europa. . . . .	48
Figura 6 – Variação da inclinação crítica $i$ em relação à $\Omega$ de um satélite artificial ao redor de Ganimedes. . . . .	49
Figura 7 – Variação da inclinação crítica $i$ em relação à $\Omega$ de um satélite artificial ao redor de Calisto. . . . .	50
Figura 8 – Variação da inclinação crítica $i$ em relação à $\Omega$ de um satélite artificial ao redor de Titã. . . . .	51
Figura 9 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à longitude do nodo ascendente. As curvas vermelha e azul possuem excentricidade $e = 0$ , $e = 0.038$ , respectivamente, e $a = 1838 \text{ km}$ . . . . .	52
Figura 10 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à $\Omega$ (órbita verde: $a = 1660.8 \text{ km}$ , $e = 0.003$ ; órbita azul: $a = 1660.8 \text{ km}$ , $e = 0.006$ ). . . . .	53
Figura 11 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à $\Omega$ (órbita verde: $a = 1760.8 \text{ km}$ , $e = 0.001$ ; órbita azul: $a = 1760.8 \text{ km}$ , $e = 0.002$ ). . . . .	53
Figura 12 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à longitude do nodo ascendente ( $a = 2.731.2 \text{ km}$ , $e = 0.01$ ). . . . .	54
Figura 13 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à longitude do nodo ascendente ( $a = 2.510 \text{ km}$ , $e = 0.01$ ). . . . .	54
Figura 14 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à $\Omega$ (órbita azul escuro: $a = 2875 \text{ km}$ , $e = 0.001$ ; órbita azul claro: $a = 2875 \text{ km}$ , $e = 0.006$ ). . . . .	55



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores dos coeficientes harmônicos zonais pares utilizados nas aplicações.	38
Tabela 2 – Comparação entre os coeficientes harmônicos de $J_2$ e $C_{22}$ , utilizados nas aplicações (AIELLO, 2005).	38
Tabela 3 – Valores necessários para o cálculo de $\frac{d\Omega}{dt}$ das órbitas heliossíncronas dos demais satélites artificiais lunares.	42
Tabela 4 – Precissão da longitude do nodo ascendente de uma órbita heliossíncrona desenvolvida ao redor da Lua, Europa, Ganimedes, Calisto e Titã.	43
Tabela 5 – $h = 50$ km, $a = 1787.4$ km, $e = 0.01$ , $i = 30^\circ$ .	56
Tabela 6 – $h = 439.2$ km, $a = 2000$ km, $e = 0.001$ , $i = 30^\circ$ .	56
Tabela 7 – $h = 100$ km, $a = 2731.2$ km, $e = 0.0001$ , $i = 70^\circ$ .	56
Tabela 8 – $h = 300$ km, $a = 2875$ km, $e = 0.001$ , $i = 30^\circ$ .	57
Tabela 9 – $h = 50$ km, $a = 1787.4$ km, $e = 0.01$ , $i = 30^\circ$ .	57
Tabela 10 – $h = 439.2$ km, $a = 2000$ km, $e = 0.001$ , $i = 30^\circ$ .	57
Tabela 11 – $h = 100$ km, $a = 2731.2$ km, $e = 0.0001$ , $i = 70^\circ$ .	57
Tabela 12 – $h = 300$ km, $a = 2875$ km, $e = 0.001$ , $i = 30^\circ$ .	57



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Contextualização Histórica	13
1.2	Motivação	13
1.3	Objetivos	14
<b>I</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Problema de Dois Corpos</b>	<b>17</b>
2.1	As Equações do Movimento Relativo	17
2.2	Elementos Orbitais	19
2.3	Solução do Problema de Dois Corpos	20
<b>3</b>	<b>Equações Planetárias de Lagrange</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Forças de Origem Gravitacional</b>	<b>33</b>
4.1	Potencial Gravitacional	33
4.2	Classificação dos Harmônicos Esféricos	33
<b>II</b>	<b>Metodologia</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Modelagem do Problema</b>	<b>37</b>
5.1	Caráter Comparativo do Trabalho	37
5.2	Ferramentas e Softwares Utilizados	38
5.3	Variação Secular dos Elementos Angulares	39
5.3.1	Equações de Movimento: $J_2$ no Potencial Gravitacional	39
5.3.2	Equações de Movimento: $J_2, J_4$ no Potencial Gravitacional	40
5.4	Inclinação Crítica	41
5.5	Órbitas Heliossíncronas	42
<b>III</b>	<b>Resultados</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Aplicações ao Movimento Orbital de Satélites Artificiais Lunares</b>	<b>47</b>
6.1	Inclinação Crítica	47
6.1.1	Satélite Artificial ao Redor da Lua	47
6.1.2	Satélite Artificial ao Redor de Europa	48
6.1.3	Satélite Artificial ao Redor de Ganimedes	49
6.1.4	Satélite Artificial ao Redor de Calisto	50
6.1.5	Satélite Artificial ao Redor de Titã	51
6.2	Órbitas Heliossíncronas	52

6.2.1	Satélites Artificiais ao Redor da Lua . . . . .	52
6.2.2	Satélites Artificiais ao Redor de Europa . . . . .	53
6.2.3	Satélites Artificiais ao Redor de Ganimedes . . . . .	54
6.2.4	Satélites Artificiais ao Redor de Calisto . . . . .	54
6.2.5	Satélites Artificiais ao Redor de Titã . . . . .	55
6.3	Variação Secular dos Elementos Angulares: $\omega, \Omega$ . . . . .	56
6.3.1	Solução Analítica . . . . .	56
6.3.2	Solução Numérica . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>59</b>
7.1	Inclinação Crítica . . . . .	59
7.2	Órbitas Heliossíncronas . . . . .	59
7.3	Variação Secular dos Elementos Angulares . . . . .	59
7.4	Considerações Finais . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Informações Adicionais</b> . . . . .	<b>61</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>63</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização Histórica

Concebida como o ramo da Astronomia a qual estuda a dinâmica dos corpos sob interação gravitacional, a Mecânica Celeste teve seus fundamentos estabelecidos no século XVII. Sua origem, porém, é bem mais antiga e está ligada às observações e registros das posições dos astros em seus deslocamentos diários na esfera celeste.

Segundo [Volchan \(2007\)](#), o trabalho de Newton é a culminação de intensas investigações científicas e de especulações filosóficas nos duzentos anos precedentes, e somente pôde ir mais além em virtude dos trabalhos de Copérnico, Brahe, Kepler, Descartes e Galileu.

Os grandes e mais desafiadores problemas de mecânica celeste sempre atraíram o interesse de grandes matemáticos, físicos e astrônomos da história: Newton, Leibniz, Euler, Delaunay, Cauchy, Lagrange, Laplace, Liouville, Legendre, Gauss, Poincaré, entre muitos outros. Além disso, também deixou um vasto legado, pois inúmeros métodos e técnicas criadas para abordar seus problemas influenciaram decisivamente várias áreas da matemática, tais quais Cálculo, Análise, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Cálculo Variacional, Mecânica Analítica e Hamiltoniana, Sistemas Dinâmicos e até Topologia e Teoria dos Números.

## 1.2 Motivação

As primeiras missões espaciais ocorreram durante a segunda metade do século XX, período em que a antiga União Soviética (URSS) e os Estados Unidos disputavam pela supremacia espacial. Entre 1957 e 1975, a rivalidade entre as duas superpotências durante a Guerra Fria focou-se em atingir pioneirismos na exploração do espaço, os quais eram vistos como necessários para a segurança nacional e símbolos da superioridade tecnológica e ideológica de cada país. A corrida espacial envolveu esforços no lançamento de satélites artificiais, vôos humanos sub-orbitais em torno da Terra e viagens tripuladas à Lua. Desde então, satélites artificiais tem sido utilizados em diversas aplicações úteis à humanidade, tais como: comunicação, navegação, sensoriamento remoto, meteorologia, observação de corpos celestes, entre muitas outras. Para garantir o sucesso e, conseqüentemente, eficiência na recepção de dados coletados durante as missões, o movimento orbital de satélites necessita acompanhamento e monitoramento frequente.

### 1.3 Objetivos

Nos primeiros anos do presente trabalho, o principal objetivo consistiu-se em estudar o movimento de satélites artificiais ao redor, exclusivamente, da Lua. E, dado seu caráter comparativo, verificar a diferença entre o comportamento orbital de satélites artificiais terrestres e lunares, considerando a ação de forças perturbadoras, as quais derivam de um potencial gravitacional, devido à distribuição não uniforme de massa do corpo central.

Analisado isto, nosso objetivo torna-se, então, investigar se satélites artificiais ao redor de outras luas do Sistema Solar possuem o mesmo comportamento orbital de satélites artificiais orbitando a Lua.

Portanto, o objetivo geral do presente trabalho é estudar e analisar o movimento orbital de satélites artificiais lunares, ao redor de Europa, Ganimedes, Calisto e Titã, quando estes são perturbados por forças de origem gravitacional, as quais são geradas pela distribuição não uniforme de massa dos corpos centrais.

Em particular, investigar as variações seculares do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente, levando em conta os harmônicos zonais pares de  $J_2$  e  $J_4$  no potencial perturbador, para algumas condições iniciais. E, também, examinar a inclinação crítica e a variação da inclinação de órbitas heliosíncronas quando são considerados  $J_2$  e  $C_{22}$  na expressão do potencial gravitacional.

Parte I

Fundamentação Teórica



## 2 Problema de Dois Corpos

### 2.1 As Equações do Movimento Relativo

Considere um sistema de dois corpos de massas  $m$  e  $M$ , respectivamente. Seja  $X'Y'Z'$  um sistema inercial de coordenadas cartesianas. Seja  $XYZ$  um sistema de coordenadas irrotacionais paralelas à  $X'Y'Z'$  e que possui a origem coincidente ao corpo de massa  $M$ . Os vetores de posição dos corpos  $m$  e  $M$ , em relação ao sistema inercial, são  $\vec{r}_m = (x_{1m}, x_{2m}, x_{3m})$  e  $\vec{r}_M = (x_{1M}, x_{2M}, x_{3M})$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 1 (BATE; MUELLER; WHITE, 1971).

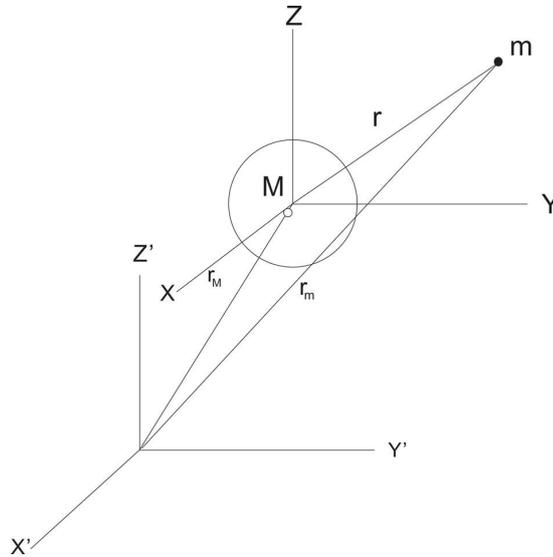


Figura 1 – Movimento relativo de dois corpos.

De acordo com a *Lei de Gravitação Universal de Newton*, a força que  $M$  exerce sobre  $m$  é dada por

$$\vec{F}_{mM} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}, \quad (2.1)$$

em que,  $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$  e  $r$  é a norma de  $\vec{r}$ . Pela *Segunda Lei de Newton*, obtemos:

$$m\ddot{\vec{r}}_m = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.2)$$

$$M\ddot{\vec{r}}_M = \frac{GmM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.3)$$

Reescrevendo as Equações (2.2) e (2.3), temos:

$$\ddot{r}_m = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{r}_M = \frac{Gm}{r^3}\vec{r}. \quad (2.5)$$

Subtraindo a Equação (2.5) da Equação (2.4), segue que

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r}. \quad (2.6)$$

A Equação (2.6) é um sistema de três equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem do movimento relativo para o Problema de Dois Corpos. É um caso particular do *Problema de N-Corpos Gravitacional Newtoniano*, quando  $N = 2$  (VOLCHAN, 2007). Portanto, pelo **Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy-Pichard**, para um **p.v.i.**, o Problema de Dois Corpos possui solução e é única.

Uma vez que o sistema de coordenadas  $XYZ$  é irrotacional em relação ao sistema  $X'Y'Z'$ , os módulos e direções de  $\vec{r}$  e  $\ddot{\vec{r}}$  medidos no sistema  $XYZ$  serão iguais a seus respectivos módulos e direções medidos no sistema  $X'Y'Z'$ . A partir de agora, portanto, podemos trabalhar - medir a posição relativa, velocidade e aceleração - somente em relação ao sistema  $XYZ$ , cuja origem é o centro do corpo de massa  $M$  (BATE; MUELLER; WHITE, 1971).

Como  $M \gg m$ , para o caso de satélites artificiais, temos que  $G(M+m) \approx GM = \mu$ , assim, segue que a equação do movimento de dois corpos é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0. \quad (2.7)$$

Em que  $G \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  é a Constante Gravitacional Universal,  $M$  é a massa do corpo central, e  $\mu$  a constante gravitacional do corpo  $M$ . Antes de introduzirmos a solução do Problema de Dois Corpos, vamos apresentar o conceito dos elementos orbitais, pois estes aparecerão na solução da Equação (2.7).

## 2.2 Elementos Orbitais

Os elementos orbitais, também denotados por elementos keplerianos, em homenagem a Johannes Kepler (1571-1630), são um conjunto de seis parâmetros, cinco geométricos e um cinemático, os quais possuem significado físico e geométrico bem definidos e permitem caracterizar a posição de um corpo celeste, natural ou artificial, em uma determinada órbita. São os seguintes: semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$ , inclinação da órbita  $i$ , argumento do pericentro  $\omega$ , longitude do nodo ascendente  $\Omega$ , instante de passagem pelo pericentro  $\tau$ . A geometria para a definição destes elementos pode ser vista na Figura 2.

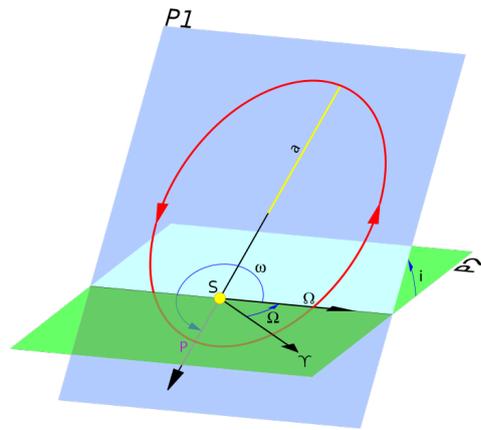


Figura 2 – Geometria para definição dos elementos orbitais. P1 é plano da órbita, P2 é plano do equador, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S.

$a$  e  $e$  dão forma à órbita,  $i$  e  $\Omega$  estabelecem o plano da órbita,  $\omega$  posiciona a órbita no plano central e  $\tau$  é um elemento cinemático. Por questões de nomenclatura e metodologia, são frequentemente subdivididos em dois grupos: métricos ou seculares ( $a$ ,  $e$ ,  $i$ ) e angulares ( $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$ ), sendo o ângulo  $M = n(t - \tau)$  chamado de anomalia média e  $n$ , o movimento médio.

A solução do Problema de Dois Corpos, introduzido na Seção 2.3, leva de maneira natural à definição dos elementos orbitais, os quais estão diretamente relacionados às condições iniciais do problema. De fato, em Kuga, Rao e Carrara (2011) e Brouwer e Clemence (1961) é demonstrado que, dada a posição e velocidade de um satélite em um determinado instante, em coordenadas cartesianas, os elementos podem ser determinados, sendo também a recíproca verdadeira (correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de parâmetros) - problema de posicionamento direto e inverso -  $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \Leftrightarrow (a, e, i, \omega, \Omega, M)$ . A solução do problema direto será dada a seguir.

## 2.3 Solução do Problema de Dois Corpos

Seja  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  uma base ortogonal geradora de  $XYZ$  e seja  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  o vetor de posição do corpo  $m$  em relação ao sistema  $XYZ$ , assim, temos:

$$\vec{r} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \quad (2.8)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{x}_2 \vec{j} + \dot{x}_3 \vec{k} = v_{x_1} \vec{i} + v_{x_2} \vec{j} + v_{x_3} \vec{k}, \quad (2.9)$$

em que,  $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}$  são as componentes de  $\vec{v}$  (velocidade). A norma da Equação (2.8) é dada por:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.10)$$

Da Equação (2.7), segue que:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.11)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \iff \dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.12)$$

A Equação (2.12) pode ser expressa na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em  $\mathbb{R}^6$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_{x_1}, \\ \dot{x}_2 = v_{x_2}, \\ \dot{x}_3 = v_{x_3}, \\ \dot{v}_{x_1} = -\frac{\mu}{r^3} x_1, \\ \dot{v}_{x_2} = -\frac{\mu}{r^3} x_2, \\ \dot{v}_{x_3} = -\frac{\mu}{r^3} x_3. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Tomando a seguinte mudança de variáveis,

$$\dot{x}_1 = Z_1, \dot{x}_2 = Z_2, \dot{x}_3 = Z_3, \dot{v}_{x_1} = Z_4, \dot{v}_{x_2} = Z_5, \dot{v}_{x_3} = Z_6 \quad (2.14)$$

e, comparando com a Equação (2.13), obtemos o seguinte sistema resultante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z}_1 = Z_4, \\ \dot{Z}_2 = Z_5, \\ \dot{Z}_3 = Z_6, \\ \dot{Z}_4 = -\frac{\mu}{r^3} Z_1, \\ \dot{Z}_5 = -\frac{\mu}{r^3} Z_2, \\ \dot{Z}_6 = -\frac{\mu}{r^3} Z_3, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

ou ainda, de maneira mais compacta

$$\dot{Z}_i = f_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_6, t), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.16)$$

sendo a norma de  $\vec{r}$ , por sua vez, definida agora como:

$$r = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}. \quad (2.17)$$

A solução da Equação (2.16) envolve seis constantes de integração as quais podem ser postas em correspondência com os elementos keplerianos ( $a, e, i, \omega, \Omega, M$ ) (BROUWER; CLEMENCE, 1961), como já dito anteriormente. Assim, a solução da Equação (2.13), em função dos elementos orbitais e em notação matricial, é dada em Kaula (2000) por

$$[x_1, x_2, x_3]^t = R\{\Omega, i, \omega\} q\{a, e, M\} \quad (\text{posição}), \quad (2.18)$$

tal que,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix};$$

e

$$[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^t = R\{\Omega, i, \omega\} \dot{q}\{a, e, M\}, \quad (\text{velocidade}), \quad (2.19)$$

tal que,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E} \\ \frac{na \sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-na \sin f}{\sqrt{1 - e^2}} \\ \frac{na (e + \cos f)}{\sqrt{1 - e^2}} \\ 0 \end{bmatrix};$$

sendo  $R\{\Omega, i, \omega\}$  uma matriz de rotação, cujos os ângulos  $\Omega, \omega, i$  correspondem aos *Ângulos de Euler*. Tal matriz é obtida por meio de três rotações sucessivas de  $-\Omega, -i, -\omega$ , em torno dos eixos instantâneos Z, X e Z,  $n$  é o movimento médio do corpo  $m$  dado por

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad \text{rad/s}, \quad (2.20)$$

$f$  é a anomalia verdadeira e  $E$  é a anomalia excêntrica. Temos que a velocidade orbital  $v$  é dada pela soma ao quadrado das componentes de  $\dot{q}\{a, e, M\}$  da Equação (2.19), assim

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 \\ &= \frac{n^2 a^2}{(1 - e^2)} (\sin^2 f + e^2 + 2e \cos f + \cos^2 f) \\ &= \frac{\mu}{a(1 - e^2)} [(2 + 2e \cos f) - (1 - e^2)] \\ &= \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

então, para a energia total por unidade de massa para órbitas elípticas, seguindo a convenção de sinal da física, temos

$$T + U = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad (2.22)$$

em que  $T$  é a energia cinética e  $U$  a energia potencial. Substituindo a Equação (2.21) na Equação (2.22), vem

$$T + U = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (2.23)$$



### 3 Equações Planetárias de Lagrange

Considere um satélite artificial orbitando um corpo primário. Seja  $\vec{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função perturbadora. Se adicionarmos  $\vec{P}$  a Equação (2.7), o novo sistema a ser resolvido, chamado de sistema perturbado, é dado por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{P}. \quad (3.1)$$

Aplicando o Método da Variação dos Parâmetros (FERRAZ-MELLO, 1972) na Equação (2.7), sob a forma da Equação (2.16), temos que a solução do sistema perturbado, Equação (3.1), é dado pelas Equações Planetárias de Lagrange. Mostraremos estes passos neste capítulo.

Seja  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função de força, não-central. Podemos substituir a Equação (2.7) pelo gradiente de  $V$ , que possui sinal contrário ao do potencial  $\phi$ ,  $V = -\phi$ :

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla V. \quad (3.2)$$

Em cada instante, a posição e velocidade de um satélite são dados em função de suas coordenadas cartesianas, ou seja,  $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ . Ao invés destas, podemos também utilizar os elementos keplerianos da órbita,  $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ . As relações entre os dois sistemas de posicionamento são dadas pelas Equações (2.18) e (2.19) - problema de posicionamento direto e inverso - como mostrado no Capítulo 2.

Dado que agora estamos trabalhando com campos não-centrais, a elipse da órbita varia continuamente. Entretanto, se o campo gravitacional diferir suavemente de um campo central, espera-se que seus parâmetros variem lentamente. Desta maneira, a elipse constitui uma representação conveniente para a posição e velocidade de um satélite.

Tome  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^t$  e  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^t$ , as componentes retangulares inerciais de posição e velocidade, respectivamente. Transformando a Equação (3.2), um sistema de segunda ordem em  $\mathbb{R}^3$ , em um de primeira ordem em  $\mathbb{R}^6$ , segue que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i &= \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{d}{dt}\dot{x}_i &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sejam  $S_k \in \{a, e, i, \omega, \Omega, M\}$  arbitrário,  $\frac{\partial x_i}{\partial S_k}$  e  $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k}$  as derivadas parciais das Equações (2.18) e (2.19) em relação à  $S_k$ , respectivamente. De fato, como  $x_i = f(a, e, i, \omega, \Omega, M)$

e  $\dot{x}_i = g(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ , sendo  $f$  e  $g$  contínuas, as derivadas temporais  $\frac{d}{dt}x_i = \dot{x}_i$  e  $\frac{d}{dt}\dot{x}_i = \ddot{x}_i$  em (3.3) são:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} = \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Seja  $S_l \in \{a, e, i, \omega, \Omega, M\}$  arbitrário. Multiplicando a Equação (3.4) por  $-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l}$ , contínua, temos

$$-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} = -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

e multiplicando a Equação (3.5) por  $\frac{\partial x_i}{\partial S_l}$ , também contínua, temos

$$\frac{\partial x_i}{\partial S_l} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Somando as Equações (3.6) e (3.7), obtemos

$$-\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} = -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i + \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^6 \left[ -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} \frac{dS_k}{dt} \right] = -\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i + \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.9)$$

e rearranjando os termos da Equação (3.9), segue que

$$\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \right] \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \right] \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Do segundo membro da Equação (3.11), temos que

$$\frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial S_l} \quad (\text{V é o negativo da energia potencial}), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \dot{x}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i \dot{x}_i}{\partial S_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial S_l} = \frac{\partial T}{\partial S_l} \quad (\text{T é a energia cinética}). \quad (3.13)$$

Substituindo as Equações (3.12) e (3.13) na Equação (3.11), segue

$$\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \right] \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial S_l} [V - T], \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Porém,  $F = V - T$ .  $F$  é conhecida como a função força e é o negativo da energia total, Equação (2.23), portanto

$$\sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \right] \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S_l}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Em (3.15) chegamos em alguns resultados importantes. Porém, antes de prosseguirmos, introduziremos a definição dos *Colchetes de Lagrange* e suas propriedades, pois estes são fundamentais para obtenção das equações de movimento em função dos elementos orbitais.

**Definição 3.1 (Colchetes de Lagrange).** *Seja  $(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$  um sistema de coordenadas canônicas em um espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$ . Se cada uma destas componentes é expressa como uma função de duas variáveis  $S_l$  e  $S_k$ , então, o **Colchete de Lagrange** de  $S_l$  e  $S_k$  é definido por:*

$$[S_l, S_k] \equiv \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial x_i}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial S_l} \frac{\partial x_i}{\partial S_k} \right]. \quad (3.16)$$

**Propriedades:**

1. **Anticomutatividade:**  $[S_l, S_k] = -[S_k, S_l]$  e, em particular,  $[S_l, S_l] = 0$ .
2. **Propriedade da invariância no tempo:**  $\frac{\partial}{\partial t} [S_l, S_k] = 0$  (válida somente para forças que derivam de um potencial).

A Equação (3.15) pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^6 [S_l, S_k] \frac{dS_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S_l}, \quad l = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.17)$$

em que  $[S_l, S_k]$ , pela Definição 3.1, são os Colchetes de Lagrange. Nossa missão agora é calcular os  $[S_l, S_k]$ . Como os  $S_l$  e  $S_k$ , representam os elementos keplerianos, note que, pela Equação (3.17), seria necessário calcular trinta e seis colchetes, pois para cada elemento fixado, calcularíamos seis colchetes. Devido as suas propriedades, apenas quinze são calculados. Neste trabalho, a abordagem utilizada para calcular os Colchetes de Lagrange é a mesma encontrada em Kaula (2000). Expandindo a Equação (3.16), temos

$$[S_l, S_k] = \frac{\partial x_1}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial S_l} \frac{\partial x_1}{\partial S_k} + \frac{\partial x_2}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial S_l} \frac{\partial x_2}{\partial S_k} + \frac{\partial x_3}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial S_k} - \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial S_l} \frac{\partial x_3}{\partial S_k}. \quad (3.18)$$

Sejam  $r_{i,j}$ ,  $q_j$ ,  $\dot{q}_j$ , os elementos da matriz de rotação  $R\{\Omega, i, \omega\}$ , dos vetores  $q\{a, e, M\}$  e  $\dot{q}\{a, e, M\}$ , respectivamente, com  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , definidos na Seção 2.3. Ao substituírmos os valores de  $x_1, \dots, x_3, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_3$ , dados pelas Equações (2.18) e (2.19), na Equação (3.18), obtemos as seguintes relações para os cálculos dos Colchetes de Lagrange:

a) Se  $S_l, S_k \in \{\Omega, i, \omega\}$ :

$$[S_l, S_k] = \left[ \frac{\partial r_{i1}}{\partial S_l} \frac{\partial r_{i2}}{\partial S_k} - \frac{\partial r_{i2}}{\partial S_l} \frac{\partial r_{i1}}{\partial S_k} \right] na^2 \sqrt{1 - e^2}; \quad (3.19)$$

b) Se  $S_l \in \{\Omega, i, \omega\}$  e se  $S_k \in \{a, e, M\}$ :

$$[S_l, S_k] = a(1 - e) \frac{\partial r_{i1}}{\partial S_l} \left[ r_{i1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial S_k} + r_{i2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial S_k} \right] - \frac{\sqrt{1 - e^2} na}{1 - e} \frac{\partial r_{i2}}{\partial S_l} \left[ r_{i1} \frac{\partial q_1}{\partial S_k} + r_{i2} \frac{\partial q_2}{\partial S_k} \right]; \quad (3.20)$$

c) Se  $S_l \in \{a, e, M\}$  e se  $S_k \in \{a, e, M\}$ :

$$[S_l, S_k] = r_{i1} r_{i1} \left[ \frac{\partial q_1}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial S_k} - \frac{\partial q_1}{\partial S_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial S_l} \right] + r_{i1} r_{i2} \left[ \frac{\partial q_1}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial S_k} - \frac{\partial q_1}{\partial S_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial S_l} \right] + \quad (3.21)$$

$$r_{i2} r_{i1} \left[ \frac{\partial q_2}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial S_k} - \frac{\partial q_2}{\partial S_k} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial S_l} \right] + r_{i2} r_{i2} \left[ \frac{\partial q_2}{\partial S_l} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial S_k} - \frac{\partial q_2}{\partial S_k} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial S_l} \right].$$

Através da propriedade da **invariância no tempo**, podemos obter os valores de  $[S_l, S_k]$  em qualquer instante. Porém, por uma questão de simplificação de cálculos, é conveniente escolhermos o pericentro, ou seja, o instante de tempo  $t = 0$ , quando  $E = 0$ , uma vez que muitos termos e derivadas se anularão. Segundo Kaula (2000), os colchetes que não se anulam são dados por:

$$[\Omega, i] = -[i, \Omega] = -na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i, \quad (3.22)$$

$$[\Omega, a] = -[a, \Omega] = (1 - e^2)^{1/2} \cos i \, na/2, \quad (3.23)$$

$$[\Omega, e] = -[e, \Omega] = -na^2 e \cos i / (1 - e^2)^{1/2}, \quad (3.24)$$

$$[\omega, a] = -[a, \omega] = (1 - e^2)^{1/2} \, na/2, \quad (3.25)$$

$$[\omega, e] = -[e, \omega] = -na^2 e / (1 - e^2)^{1/2}, \quad (3.26)$$

$$[a, M] = -[M, a] = -na/2. \quad (3.27)$$

Da Equação (3.17), monta-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} [a, a]\dot{a} + [a, e]\dot{e} + [a, i]\dot{i} + [a, \omega]\dot{\omega} + [a, \Omega]\dot{\Omega} + [a, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial a}, \\ [e, a]\dot{a} + [e, e]\dot{e} + [e, i]\dot{i} + [e, \omega]\dot{\omega} + [e, \Omega]\dot{\Omega} + [e, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial e}, \\ [i, a]\dot{a} + [i, e]\dot{e} + [i, i]\dot{i} + [i, \omega]\dot{\omega} + [i, \Omega]\dot{\Omega} + [i, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial i}, \\ [\omega, a]\dot{a} + [\omega, e]\dot{e} + [\omega, i]\dot{i} + [\omega, \omega]\dot{\omega} + [\omega, \Omega]\dot{\Omega} + [\omega, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial \omega}, \\ [\Omega, a]\dot{a} + [\Omega, e]\dot{e} + [\Omega, i]\dot{i} + [\Omega, \omega]\dot{\omega} + [\Omega, \Omega]\dot{\Omega} + [\Omega, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial \Omega}, \\ [M, a]\dot{a} + [M, e]\dot{e} + [M, i]\dot{i} + [M, \omega]\dot{\omega} + [M, \Omega]\dot{\Omega} + [M, M]\dot{M} &= \frac{\partial F}{\partial M}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituir os colchetes não-nulos dados pelas Equações (3.22) a (3.27) no sistema (3.28) e resolvê-lo em relação à  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $\dot{i}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{M}$ , resulta finalmente em:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial M}, \quad (3.29)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial \omega}, \quad (3.30)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \Omega}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial e}, \quad (3.32)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i}, \quad (3.33)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a}. \quad (3.34)$$

As Equações (3.29) a (3.34) são as chamadas Equações Planetárias de Lagrange. É habitual expressar a função força como

$$F = V - T + R. \quad (3.35)$$

Da Equação (2.23), segue que

$$F = V - T + R = \frac{\mu}{2a} + R. \quad (3.36)$$

A função  $R$ , que compreende todos os termos de  $V$ , exceto o termo central, é conhecida como a função perturbadora. Assim, nas Equações (3.29) a (3.33), podemos substituir  $F$  por  $R$ . Da Equação (2.20), a Equação (3.34) torna-se

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (3.37)$$

Destá maneira,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (3.38)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (3.39)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (3.40)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (3.41)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (3.42)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (3.43)$$

Portanto, as Equações Planetárias de Lagrange descrevem as variações dos elementos orbitais devido às perturbações derivadas de um potencial gravitacional, determinando a real posição e velocidade de um satélite artificial em sua órbita, em um dado instante  $t$  (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Possuem este nome em homenagem a Lagrange, pois foi o primeiro matemático a obter as equações do movimento em função dos seis elementos orbitais (VALLADO, 2013).



## 4 Forças de Origem Gravitacional

### 4.1 Potencial Gravitacional

Sejam  $\mu$ ,  $r$ ,  $a_e$ , a constante gravitacional do corpo central, o raio vetor, o raio equatorial do corpo central, nesta ordem.  $n$  e  $k$ , respectivamente, o grau e a ordem dos Polinômios e Polinômios Associados de Legendre.  $P_n$  e  $P_{n,k}$ , os Polinômios e Polinômios Associados de Legendre.  $\phi$  e  $\lambda$ , a latitude e a longitude do satélite.  $J_n$ ,  $J_{n,k}$  e  $\lambda_{n,k}$ , as características do corpo central o qual o satélite orbita. Desta maneira, o potencial gravitacional, expresso em termos dos harmônicos esféricos, é dado, em [Morando \(1974\)](#), por

$$V = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin(\phi)) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_{n,k} a_e^n}{r^n} P_{n,k}(\sin(\phi)) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) \right]. \quad (4.1)$$

A Equação (4.1) é fundamental para este trabalho pois, através dela, determinamos as forças as quais atuam em um satélite artificial, devido à distribuição não uniforme de massa do corpo central.

### 4.2 Classificação dos Harmônicos Esféricos

Da Equação (4.1), temos a seguinte classificação:

a) Os termos independentes de  $\lambda$ ,  $P_{n,0}(\sin(\phi)) = P_n(\sin(\phi))$ , são chamados de *Harmônicos Esféricos Zonais*, pois dividem um corpo em seções horizontais, (Figura 3).

b) Os termos dependentes de  $\lambda$ ,  $P_{n,k}(\sin(\phi)) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k})$ , são chamados de:

1. *Harmônicos Esféricos Setoriais*, se  $n = k$  (Figura 3),
2. *Harmônicos Esféricos Tesserais*, se  $n \neq k$  (Figura 3).

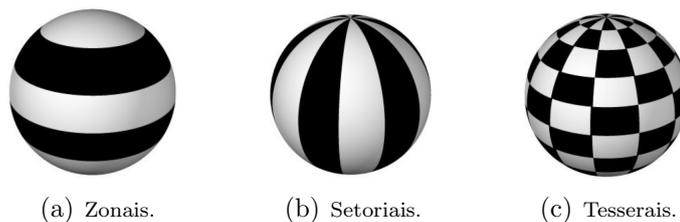


Figura 3 – Classificação dos Harmônicos Esféricos ([KUGA; RAO; CARRARA, 2011](#)).



Parte II

Metodologia



## 5 Modelagem do Problema

### 5.1 Caráter Comparativo do Trabalho

Devido aos inúmeros estudos já realizados sobre a Terra e a Lua e graças às grandes missões, as distribuições de massa destes corpos são, por sua vez, conhecidas e bem caracterizadas. Consequentemente, seus campos gravitacionais também os são. Posto isto, temos ciência das características do corpo central. Na literatura, é possível encontrar tabelados os valores dos coeficientes de  $J_n$  e  $J_{n,k}$  ( $C_{n,k}$ ) para altíssimos grau e ordem.

Do trabalho anterior (COSTA; PRADO; VILHENA DE MORAES, 2014), sabemos que a Terra possui maior concentração de massa na região equatorial. Desta maneira, o coeficiente mais influente e perturbador no movimento orbital de satélites artificiais terrestres é  $J_2$ . Portanto, considerar a Equação (4.1) até a ordem de  $J_2$  para determinar a variação dos elementos orbitais de um satélite artificial terrestre já é suficiente para caracterizar um modelo razoável.

Por outro lado, sabemos também que isto não acontece com a distribuição de massa da Lua. Nos obrigando, por consequência, a considerar mais harmônicos na expressão do potencial gravitacional, com a finalidade de obtermos variações mais refinadas dos elementos orbitais.

Nossa missão agora é, portanto, verificar se os satélites artificiais ao redor das outras luas possuem comportamento orbital semelhante aos satélites artificiais ao redor da Lua. Segundo Aiello (2005), **os campos gravitacionais de Europa, Ganimedes e Titã são problemáticos**. Em outras palavras, estes corpos não possuem distribuição de massa muito bem definida. Diferentemente do caso terrestre e da Lua, na literatura não existem tabelados os valores dos coeficientes harmônicos de  $J_n$  destes corpos para alto grau. Assim, devido ao desconhecimento do harmônico de  $J_4$  para estes corpos, adotou-se o seguinte fator de proporcionalidade:  $J_4 = J_2 \cdot 10^{-1}$ . A partir disto, verificamos a influência deste harmônico no movimento orbital de satélites artificiais orbitando Europa, Ganimedes e Titã.

## 5.2 Ferramentas e Softwares Utilizados

Os coeficientes harmônicos devido ao achatamento, utilizados para a obtenção das variações angulares das órbitas de satélites artificiais ao redor de Europa, Ganimedes e Titã, são retirados de [Carvalho, Vilhena de Moraes e Prado \(2013\)](#), [Aiello \(2005\)](#) e [Noyelles \(2008\)](#), respectivamente.

<b>Harmônicos Esféricos Zonais</b>					
	<b>Terra</b>	<b>Lua</b>	<b>Europa</b>	<b>Ganimedes</b>	<b>Titã</b>
<b><math>J_2</math></b>	$1.082516 \cdot 10^{-3}$	$2.032337 \cdot 10^{-4}$	$4.355 \cdot 10^{-4}$	$6.1436994 \cdot 10^{-5}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$
<b><math>J_4</math></b>	$-1.655470 \cdot 10^{-6}$	$-9.5919310 \cdot 10^{-6}$	$4.355 \cdot 10^{-5}$	$6.1436994 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-6}$

Tabela 1 – Valores dos coeficientes harmônicos zonais pares utilizados nas aplicações.

Para a realização dos cálculos, verificação de contas e computação algébrica, ou seja, no processo analítico do trabalho, o software utilizado é o Maple. Já na etapa numérica e de simulações, o software utilizado é o Scilab, versão livre e aberta do software proprietário Matlab.

<b>Comparação Entre <math>J_2</math> e <math>C_{22}</math></b>		
	<b><math>J_2</math></b>	<b><math>C_{22}</math></b>
<b>Lua</b>	$2.032337 \cdot 10^{-4}$	$2.2357 \cdot 10^{-5}$
<b>Europa</b>	$1.904852 \cdot 10^{-4}$	$1.993307 \cdot 10^{-4}$
<b>Ganimedes</b>	$6.1436994 \cdot 10^{-5}$	$6.3943452 \cdot 10^{-5}$
<b>Calisto</b>	$1.5456884 \cdot 10^{-5}$	$1.6808453 \cdot 10^{-5}$
<b>Titã</b>	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$1.1235 \cdot 10^{-5}$

Tabela 2 – Comparação entre os coeficientes harmônicos de  $J_2$  e  $C_{22}$ , utilizados nas aplicações ([AIELLO, 2005](#)).

## 5.3 Variação Secular dos Elementos Angulares

Afim de obtermos uma análise mais simplificada, para esta parte do trabalho, vamos considerar apenas os efeitos dos termos independentes da longitude  $\lambda$  na Equação (4.1), investigando somente a ação dos harmônicos zonais pares (tais que  $n = 2, 4, \dots$ ), no movimento orbital de satélites artificiais lunares.

Além disto, esta parte do estudo também concentra-se em considerar apenas os termos seculares ( $a$ ,  $e$ ,  $i$ ) na expressão do potencial, eliminando os termos de curto e longo período da Equação (4.1).

### 5.3.1 Equações de Movimento: $J_2$ no Potencial Gravitacional

Expandindo a Equação (4.1) até segunda ordem e a substituindo nas Equações Planetárias de Lagrange, Equações (3.38)-(3.43), obtemos as seguintes variações temporais de  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $M$ , em função dos elementos seculares, respectivamente:

$$\frac{d\omega}{dt} = nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{4} (4 - 5\sin(i)^2), \quad (5.1)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{2} \cos(i), \quad (5.2)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + nJ_2 \left( \frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{3}{4} (2 - 3\sin(i)^2). \quad (5.3)$$

Consequentemente, as Equações (3.38)-(3.40) tomam a seguinte forma:

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0. \quad (5.4)$$

Assim, obviamente,  $a$ ,  $e$  e  $i$  são constantes ao considerarmos somente os termos seculares no potencial, Equação (4.1). Isto se deve ao fato da função perturbadora ser do tipo  $R(a, e, i)$ . Assim, as derivadas parciais

$$\frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial M},$$

existentes nas Equações (3.38)-(3.40) são nulas e, por conseguinte, as Equações (3.38), (3.39) e (3.40) também as são, Equação (5.4). Este mesmo fato ocorre nas expressões apresentadas na Seção 5.3.2, porém, é ocultado, visto que o raciocínio é análogo ao demonstrado acima.

### 5.3.2 Equações de Movimento: $J_2$ , $J_4$ no Potencial Gravitacional

Segundo Merson (1961 apud BLITZER, 1970), considerando os termos seculares da ordem de  $J_2$  e  $J_4$  na Equação (4.1) e a substituindo nas Equações (3.38)-(3.43), respectivamente, temos que as variações temporais de  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $M$ , em função dos elementos métricos, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{4} (4 - 5\text{sen}(i)^2) + \\ nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^4} \frac{9}{384} [10\text{sen}(i)^2(76 - 89\text{sen}(i)^2) + (56 - 36\text{sen}(i)^2 - 45\text{sen}(i)^4)e^2] + \\ nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^4} \frac{15}{32} [(16 - 62\text{sen}(i)^2 + 49\text{sen}(i)^4) + (18 - 63\text{sen}(i)^2 + \frac{189}{4}\text{sen}(i)^4)e^2], \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= -nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \frac{3}{2} \cos(i) + \\ nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^4} \frac{3}{32} \cos(i) [(12 - 80\text{sen}(i)^2) - (4 + 15\text{sen}(i)^2)e^2] + \\ nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^4} \frac{15}{32} \cos(i) [(4 - 7\text{sen}(i)^2)(2 + 3e^2)], \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= n + nJ_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{3}{4} (2 - 3\text{sen}(i)^2) + \\ nJ_2^2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}} \frac{9}{96} [(100\text{sen}(i)^2 - 131\text{sen}(i)^4) + (20 - 98\text{sen}(i)^2 + 67\text{sen}(i)^4)e^2 - \\ \frac{1}{16} &(280 - 328\text{sen}(i)^2 - 79\text{sen}(i)^4)e^4] - \\ nJ_4 \left(\frac{a_e}{a}\right)^4 &\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \frac{45}{128} [(8 - 40\text{sen}(i)^2 + 35\text{sen}(i)^4)e^2]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Utilizamos as equações apresentadas nesta seção para a obtenção das variações dos elementos angulares, as quais são mostradas no Capítulo 6.

## 5.4 Inclinação Crítica

Em síntese, a inclinação crítica é calculada para analisar órbitas congeladas, as quais são caracterizadas por manterem (ou tentarem manter) o argumento do pericentro  $\omega$  e a excentricidade  $e$ , de uma determinada órbita, constantes. Assim sendo, para uma dada latitude, um satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando alguns tipos de missões espaciais. As condições para uma órbita ser congelada são:

$$\begin{aligned} d\omega/dt &= 0, \\ de/dt &= 0, \\ di/dt &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Considere agora o problema de um satélite artificial lunar de altitude baixa, levando em conta o achatamento  $J_2$  e a elipticidade equatorial (harmônico setorial de  $C_{22}$ ). Eliminando os termos de curto período, temos que o potencial perturbador, Equação (4.1), de primeira ordem, contendo os elementos de longo período, é dado por (CARVALHO; VILHENA DE MORAES; PRADO, 2009):

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{8}n^2(6J_2a_e^2\cos(i)^2 - 3J_2a_e^2e^2 - 2J_2a_e^2 \\ &- 18C_{22}a_e^2\cos(2\Omega)e^2 + 18C_{22}a_e^2\cos(2\Omega)e^2\cos(i)^2 \\ &- 12C_{22}a_e^2\cos(2\Omega) + 12C_{22}a_e^2\cos(2\Omega)\cos(i)^2 + 9J_2a_e^2\cos(i)^2e^2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Tomando a Equação (5.9) e a substituindo na Equação (3.41) e resolvendo  $d\omega/dt = 0$ , satisfazendo (5.8), obtemos

$$\cos(i)^2 = \frac{J_2a_e^2 + 6C_{22}a_e^2\cos(2\Omega)}{5(J_2a_e^2 + 2C_{22}a_e^2\cos(2\Omega))}, \tag{5.10}$$

se, e somente se,

$$i = \arccos \left[ \sqrt{\frac{J_2a_e^2 + 6C_{22}a_e^2\cos(2\Omega)}{5(J_2a_e^2 + 2C_{22}a_e^2\cos(2\Omega))}} \right]. \tag{5.11}$$

Note que a inclinação crítica, levando em conta  $J_2$  e  $C_{22}$ , não depende do movimento médio  $n$ , do semi-eixo maior  $a$  e da excentricidade  $e$ .

## 5.5 Órbitas Heliosíncronas

De acordo com [Park e Junkins \(1995\)](#), ao considerarmos somente o efeito de  $J_2$  na expressão do potencial, Equação (4.1), a variação temporal da longitude do nodo ascendente  $\Omega$  é dada por:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 a_e^2 n \cos(i)}{a^2 (1 - e^2)^2}. \quad (5.12)$$

Nosso interesse, entretanto, é analisar o efeito causado por  $J_2$  e  $C_{22}$  na inclinação de órbitas heliosíncronas de satélites artificiais lunares baixos. Para isto, tomando a Equação (5.9) e a substituindo na Equação (3.42), temos:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 a_e^2 n}{a^2 (1 - e^2)^2} \cos(i) + \frac{3}{2} \frac{C_{22} a_e^2 n}{a^2 (\sqrt{1 - e^2})} \cos(i) [(2 + 3e^2) \cos(2\Omega)]. \quad (5.13)$$

Note que, quando  $\Omega = 0$  obtemos a solução clássica dado pela Equação (5.12). Para avaliarmos a inclinação  $i$  em função da variação de  $\Omega$ , resta somente calcularmos  $\frac{d\Omega}{dt}$ , pois os demais parâmetros na Equação (5.13) são constantes. Vamos mostrar estes passos apenas para satélites artificiais ao redor da Lua (para os satélites ao redor das outras luas, o processo é análogo, *vide* Tabelas 3 e 4).

Órbitas Heliosíncronas		
	Período Orbital	Dia Sideral
<b>Lua</b>	27.32 dias	27.32 dias
<b>Terra</b>	365.26 dias	1 dia
<b>Europa</b>	3.55 dias	3.55 dias
<b>Ganimesdes</b>	7.155 dias	7.155 dias
<b>Júpiter</b>	4331.572	9.925 horas
<b>Titã</b>	15.9455 dias	15.9455 dias
<b>Saturno</b>	10759.22 dias	10.5 horas

Tabela 3 – Valores necessários para o cálculo de  $\frac{d\Omega}{dt}$  das órbitas heliosíncronas dos demais satélites artificiais lunares.

Segundo [Carvalho, Vilhena de Moraes e Prado \(2009\)](#), a Lua gira a uma taxa angular de cerca de  $360^\circ$  por 27.32 dias, enquanto a Terra gira a uma velocidade angular de cerca de  $360^\circ$  por dia. O período orbital da Lua é aproximadamente 27.32 (tempo que a Lua leva para dar uma revolução completa em torno da Terra) e o período orbital da Terra (tempo

que a Terra leva para dar uma revolução completa em torno do Sol) é aproximadamente 365.26 dias. Então, para uma órbita heliossíncrona, temos, em dias lunares,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left( \frac{27.35}{365.26} \right) 360^\circ / \text{dia lunar}, \quad (5.14)$$

ou seja,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 26.92657^\circ / \text{dia lunar} \approx 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}. \quad (5.15)$$

<b>Precessão de <math>\Omega</math></b>	
	<b><math>d\Omega/dt</math> (radianos/s)</b>
<b>Lua</b>	0.00000019909667679579
<b>Europa</b>	0.00000001678883605454
<b>Ganimesdes</b>	0.00000001678883605454
<b>Calisto</b>	0.00000000675904500200
<b>Titã</b>	0.00000000675904500200

Tabela 4 – Precessão da longitude do nodo ascendente de uma órbita heliossíncrona desenvolvida ao redor da Lua, Europa, Ganimesdes, Calisto e Titã.

Substituído os valores de precessão na Equação (5.13), para cada satélite artificial, respectivamente, e com as devidas condições iniciais, obtemos uma forma fechada a qual relacionada a inclinação  $i$  com  $\Omega$ . Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$ , encontramos as inclinações desejadas.



Parte III

Resultados



# 6 Aplicações ao Movimento Orbital de Satélites Artificiais Lunares

## 6.1 Inclinação Crítica

Através da Equação (5.11), apresentamos as análises da variação da inclinação crítica para algumas órbitas, com determinadas condições iniciais, de satélites artificiais orbitando as seguintes luas do Sistema Solar: Lua, Europa, Ganimedes, Calisto, Titã.

### 6.1.1 Satélite Artificial ao Redor da Lua

De acordo com [Carvalho, Vilhena de Moraes e Prado \(2009\)](#), considerando apenas a influência de  $J_2$ , para um satélite artificial ao redor da Lua em uma órbita congelada, a inclinação crítica seria  $63.43^\circ$ . Entretanto, considerando-se a influência do harmônico de  $C_{22}$ , Equação (5.9), este valor de inclinação não é mais o mesmo. Vemos, pela Equação (5.11), que a inclinação  $i$  depende de  $\Omega$ . Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$  na Equação (5.10), obtemos a variação de  $i$ , como mostrado na Figura 4. Observa-se, neste caso, que a inclinação crítica pode variar entre  $58.77^\circ$  e  $72.62^\circ$ , aproximadamente.

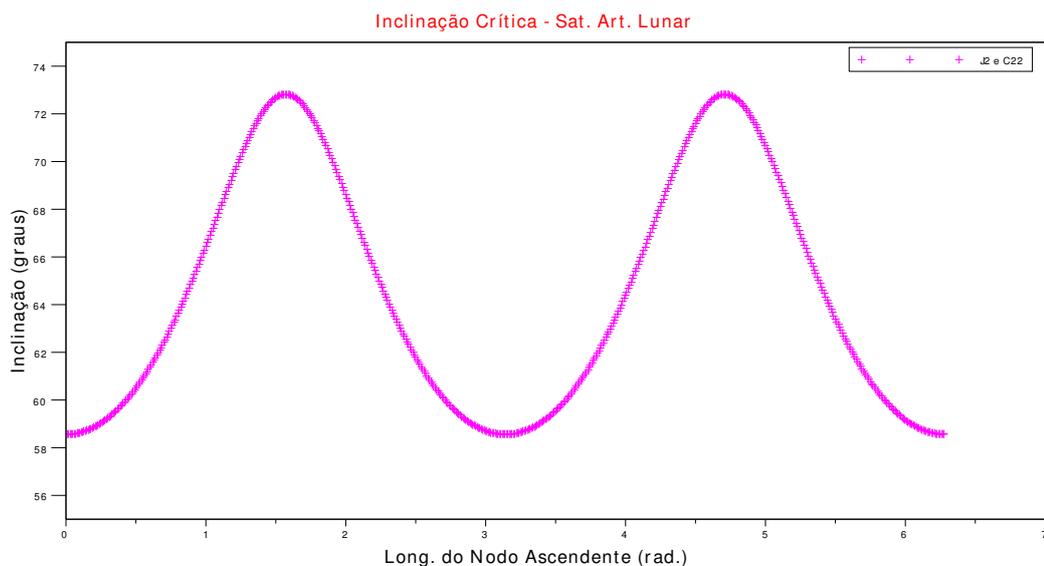


Figura 4 – Variação da inclinação crítica  $i$  em relação à  $\Omega$  de um satélite artificial ao redor da Lua.

### 6.1.2 Satélite Artificial ao Redor de Europa

Considerando-se a influência do harmônico de  $C_{22}$ , Equação (5.9), o valor da inclinação não é mais o mesmo. Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$  na Equação (5.10), obtemos a variação de  $i$ , como mostrado na Figura 5. Observa-se, neste caso, que a inclinação crítica pode variar entre  $56.0^\circ \sim 90.0^\circ$  e  $0^\circ \sim 10.0^\circ$ , aproximadamente, dependendo do  $\Omega$  tomado.

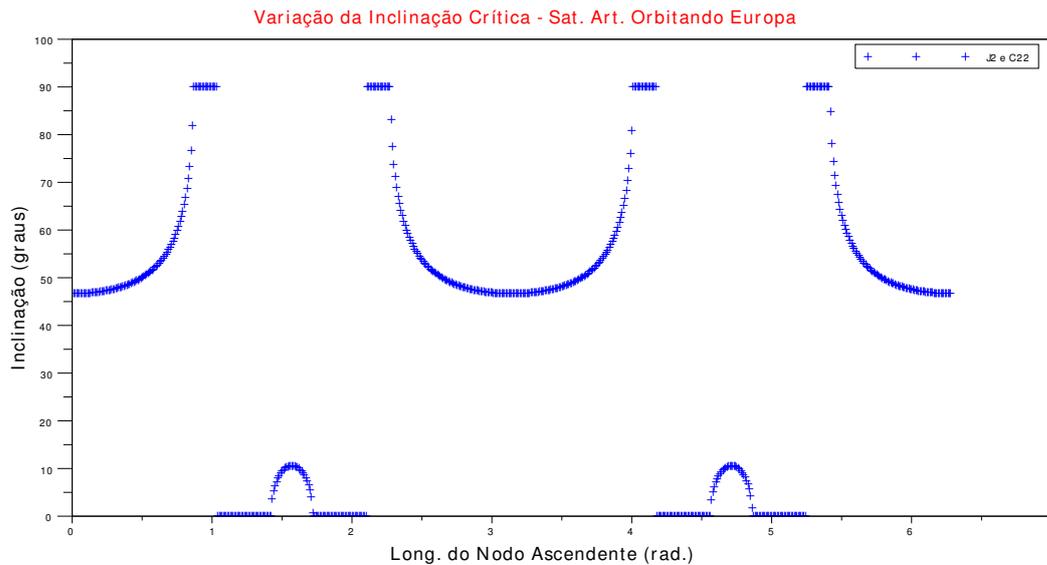


Figura 5 – Variação da inclinação crítica  $i$  em relação à  $\Omega$  de um satélite artificial ao redor de Europa.

### 6.1.3 Satélite Artificial ao Redor de Ganimedes

Considerando-se a influência do harmônico de  $C_{22}$ , Equação (5.9), o valor da inclinação não é mais o mesmo. Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$  na Equação (5.10), obtemos a variação de  $i$ , como mostrado na Figura 6. Observa-se, também, que a inclinação crítica pode variar entre  $56.0^\circ \sim 90.0^\circ$  e  $0^\circ \sim 10.0^\circ$ , aproximadamente, dependendo do  $\Omega$  tomado.

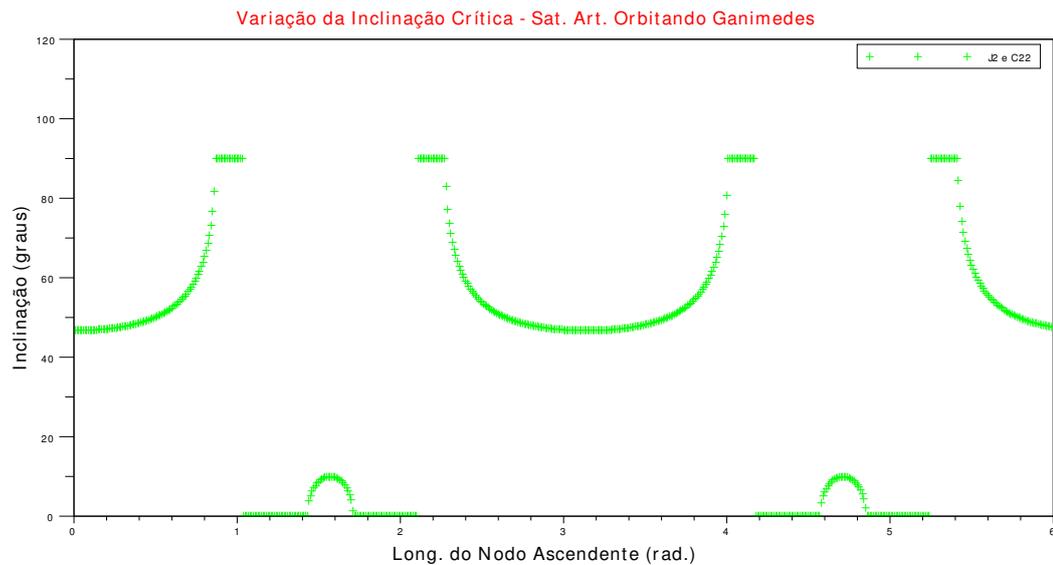


Figura 6 – Variação da inclinação crítica  $i$  em relação à  $\Omega$  de um satélite artificial ao redor de Ganimedes.

### 6.1.4 Satélite Artificial ao Redor de Calisto

Considerando-se a influência do harmônico de  $C_{22}$ , Equação (5.9), o valor da inclinação não é mais o mesmo. Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$  na Equação (5.10), obtemos a variação de  $i$ , como mostrado na Figura 7. Observa-se também, como em Europa e Ganimedes, que a inclinação crítica pode variar entre  $56.0^\circ \sim 90.0^\circ$  e  $0^\circ \sim 10.0^\circ$ , aproximadamente, dependendo do  $\Omega$  tomado.

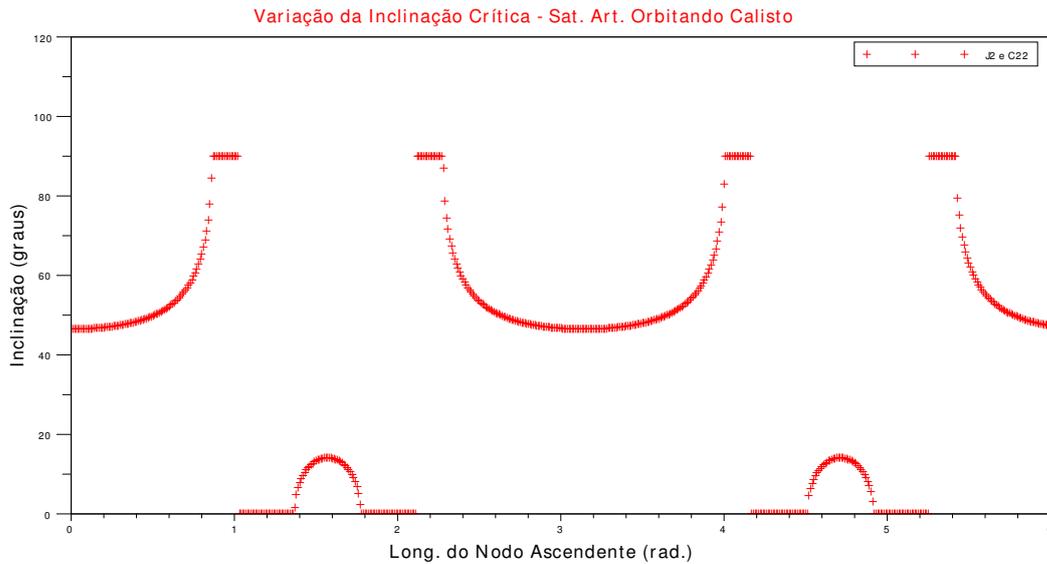


Figura 7 – Variação da inclinação crítica  $i$  em relação à  $\Omega$  de um satélite artificial ao redor de Calisto.

Nota-se um comportamento muito interessante da inclinação crítica de satélites artificiais ao redor das luas de Galileu, quando consideramos a influência de  $C_{22}$  no potencial gravitacional. Por hora, isto se deve ao fato de que os valores de  $J_2$  e  $C_{22}$  apresentarem a mesma ordem de grandeza (ver Tabela 2) e são muito próximos em termos de dígitos significativos, gerando as descontinuidades mostradas nas Figuras 5, 6, 7 para alguns subintervalos de  $\Omega \in [0, 2\pi]$ .

### 6.1.5 Satélite Artificial ao Redor de Titã

Considerando-se a influência do harmônico de  $C_{22}$ , Equação (5.9), o valor da inclinação não é mais o mesmo. Variando  $\Omega \in [0, 2\pi]$  na Equação (5.10), obtemos a variação de  $i$ , como mostrado na Figura 8. Observa-se, neste caso, que a inclinação crítica pode variar entre  $53.0^\circ \sim 90.0^\circ$ , aproximadamente.

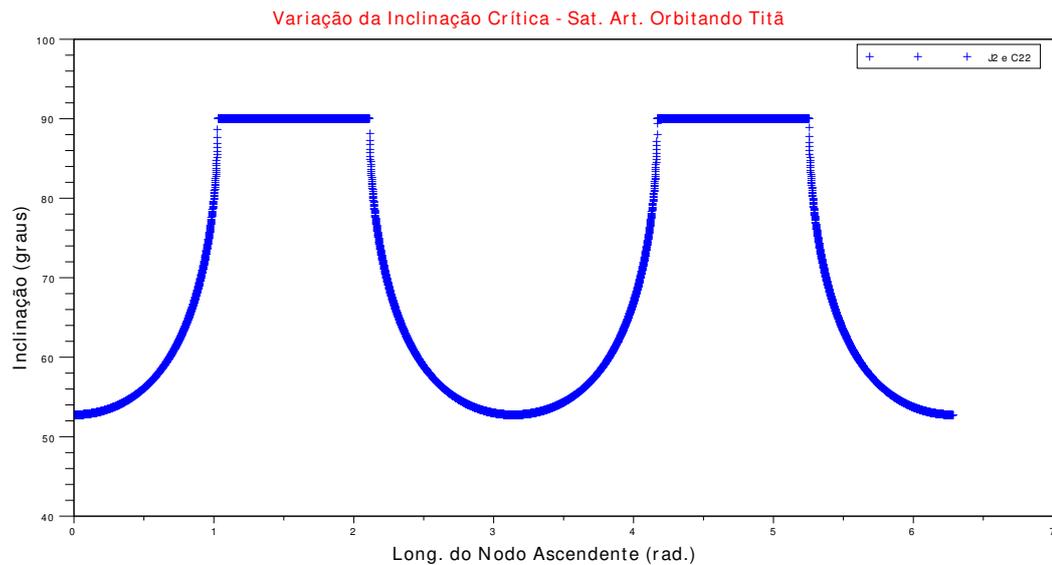


Figura 8 – Variação da inclinação crítica  $i$  em relação à  $\Omega$  de um satélite artificial ao redor de Titã.

Note, também, que a variação da inclinação crítica de satélites artificiais de Titã também é bem comportada, como o caso da Lua, não apresentando descontinuidades, como no caso de satélites artificiais orbitando as luas de Galileu.

## 6.2 Órbitas Heliossíncronas

Para satélites artificiais ao redor da Lua, Europa, Ganimedes, Calisto e Titã, as órbitas heliossíncronas também são marcadamente influenciadas pelo harmônico  $C_{22}$ . Podemos examinar este comportamento através da Equação (5.13), como já dito anteriormente.

### 6.2.1 Satélites Artificiais ao Redor da Lua

A Figura 9 ilustra a variação da inclinação  $i_s$  de duas órbitas heliossíncronas para satélites lunares baixos ( $a = 1838 \text{ km}$ ), um em órbita circular ( $e = 0$ ) e outro com  $e = 0.038$ . De trabalhos presentes na literatura, sabemos que a influência de  $C_{22}$  na variação da inclinação não é considerável para órbitas heliossíncronas de satélites artificiais terrestres, devido à sua ordem de grandeza, a qual é inferior a de  $J_2$ .

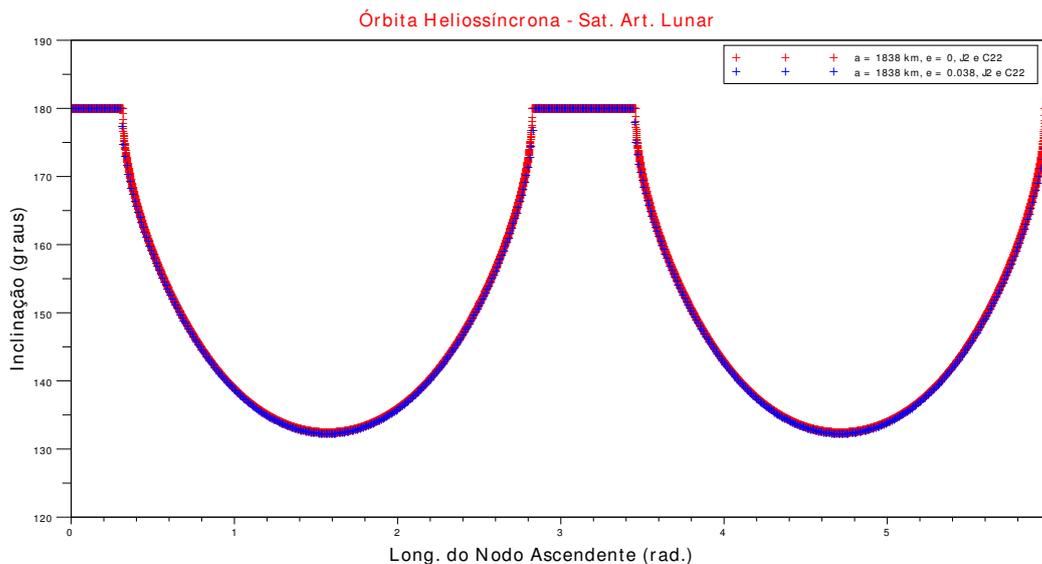


Figura 9 – Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à longitude do nodo ascendente. As curvas vermelha e azul possuem excentricidade  $e = 0$ ,  $e = 0.038$ , respectivamente, e  $a = 1838 \text{ km}$ .

## 6.2.2 Satélites Artificiais ao Redor de Europa

As Figuras 10 e 11 ilustram a variação da inclinação  $i_s$  de algumas órbitas heliossíncronas para satélites artificiais baixos ao redor de Europa.

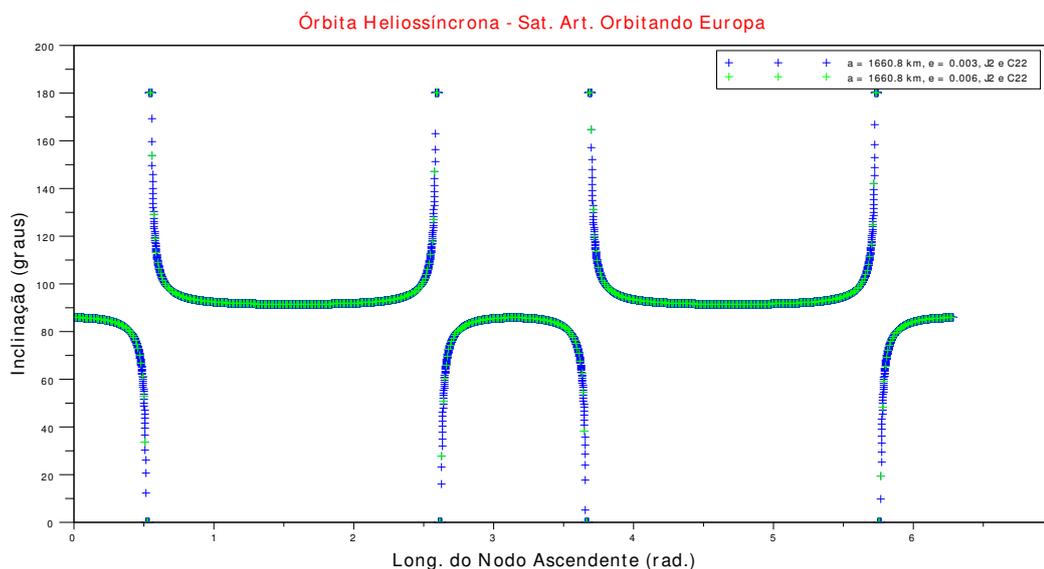


Figura 10 – Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à  $\Omega$  (órbita verde:  $a = 1660.8 \text{ km}, e = 0.003$ ; órbita azul:  $a = 1660.8 \text{ km}, e = 0.006$ ).

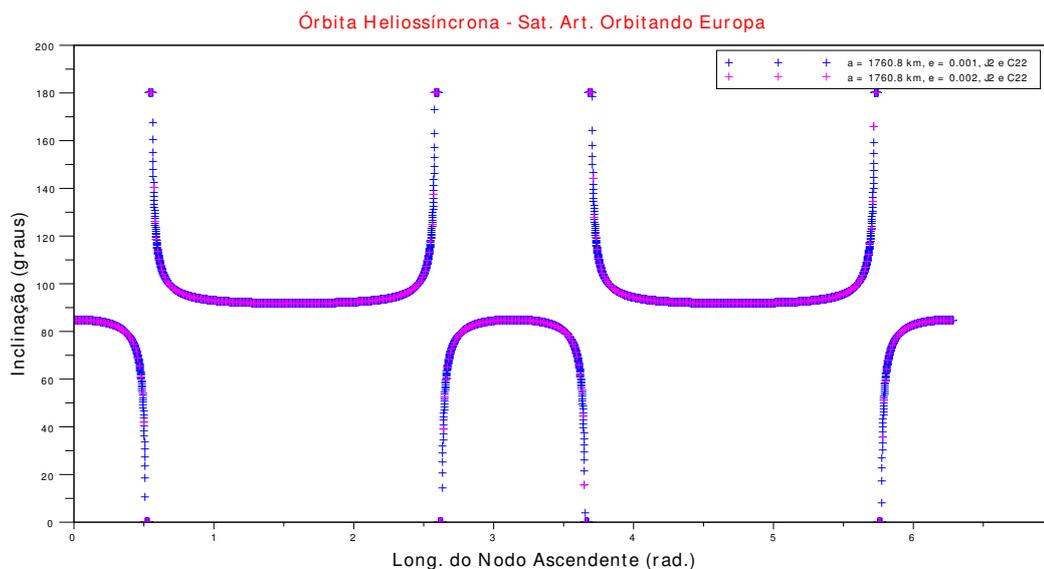


Figura 11 – Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à  $\Omega$  (órbita verde:  $a = 1760.8 \text{ km}, e = 0.001$ ; órbita azul:  $a = 1760.8 \text{ km}, e = 0.002$ ).

### 6.2.3 Satélites Artificiais ao Redor de Ganimedes

A Figura 12 ilustra a variação da inclinação  $i_s$  para uma órbita heliosíncrona de um satélite artificial baixo ao redor de Ganimedes.

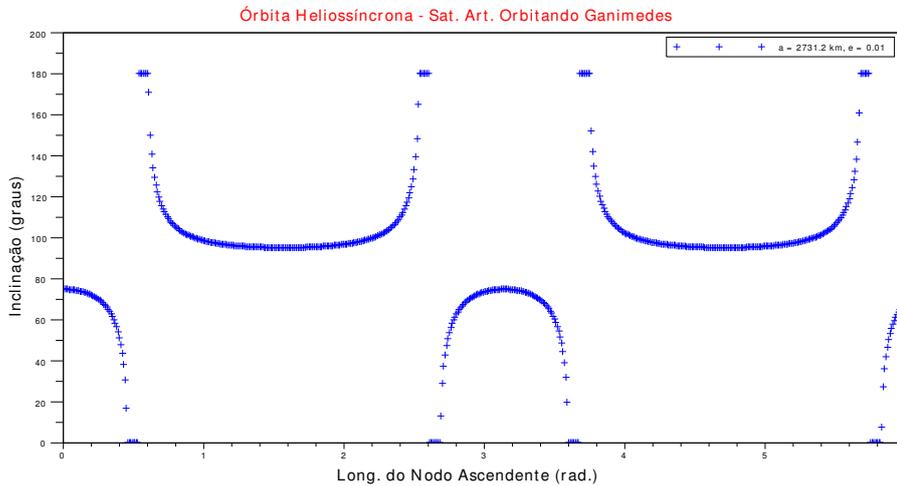


Figura 12 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à longitude do nodo ascendente ( $a = 2.731.2 \text{ km}$ ,  $e = 0.01$ ).

### 6.2.4 Satélites Artificiais ao Redor de Calisto

A Figura 13 ilustra a variação da inclinação  $i_s$  para uma órbita heliosíncrona de um satélite artificial baixo ao redor de Calisto.

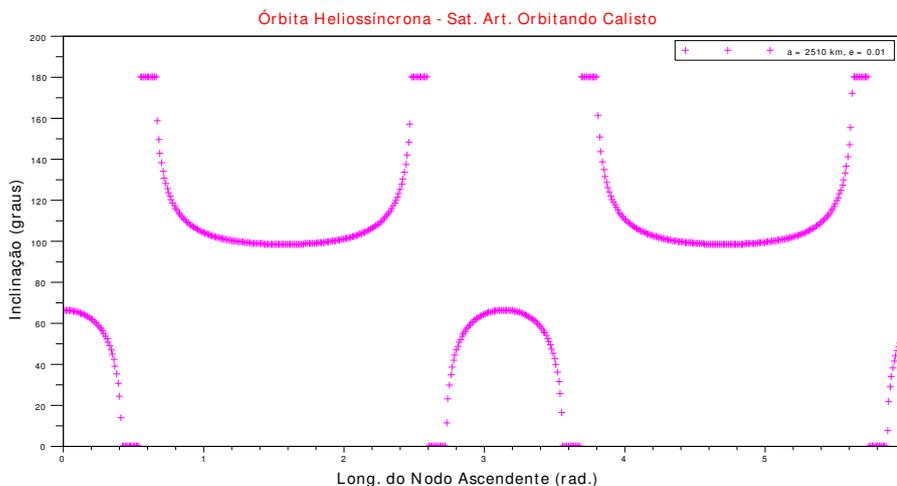


Figura 13 – Variação da inclinação de duas órbitas heliosíncronas em relação à longitude do nodo ascendente ( $a = 2.510 \text{ km}$ ,  $e = 0.01$ ).

### 6.2.5 Satélites Artificiais ao Redor de Titã

A Figura 14 ilustra a variação da inclinação  $i_s$  de duas órbitas heliossíncronas de satélites artificiais baixos ao redor de Titã.

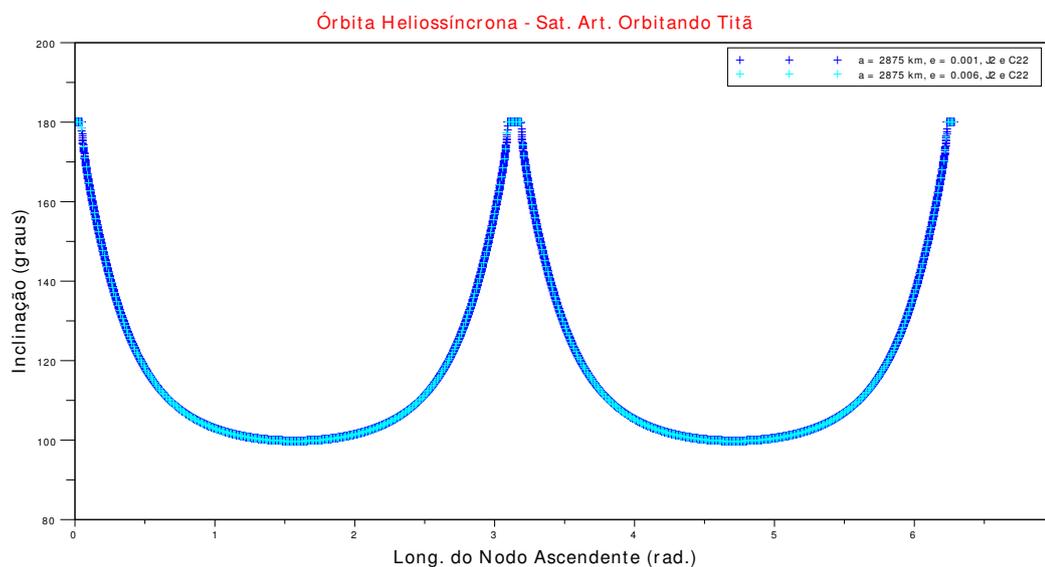


Figura 14 – Variação da inclinação de duas órbitas heliossíncronas em relação à  $\Omega$  (órbita azul escuro:  $a = 2875 \text{ km}$ ,  $e = 0.001$ ; órbita azul claro:  $a = 2875 \text{ km}$ ,  $e = 0.006$ ).

Note novamente que, mesmo no caso das órbitas heliossíncronas, as inclinações da Lua e de Titã são “bem comportadas”, ao passo que as dos satélites galileanos apresentam um comportamento peculiar.

### 6.3 Variação Secular dos Elementos Angulares: $\omega$ , $\Omega$

Introduzimos agora as variações seculares dos elementos angulares de  $\omega$  e  $\Omega$  de satélites artificiais ao redor das seguintes luas: Europa, Ganimedes e Titã. A solução obtida analiticamente é comparada com a solução numérica para determinadas órbitas, as quais aparecem com mais frequência na literatura.

#### 6.3.1 Solução Analítica

As Tabelas 5, 6, 7 e 8 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares ( $n_\omega$ ,  $n_\Omega$ ) obtida analiticamente para órbitas de satélites artificiais orbitando a **Lua**, **Europa**, **Ganimedes** e **Titã**. Note que  $h$  é a altitude a qual está o satélite artificial ( $h = a - a_e$ , semi-eixo maior menos o raio equatorial). As condições iniciais utilizadas nas simulações foram retiradas da literatura: [Carvalho, Vilhena de Moraes e Prado \(2013\)](#), [Aiello \(2005\)](#) e [Noyelles \(2008\)](#).

Lua - Solução Analítica		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	1.8173494125	-1.1446332791
$J_2, J_2^2, J_4$	1.7522441058	-1.2165469973

Tabela 5 –  $h = 50$  km,  $a = 1787.4$  km,  $e = 0.01$ ,  $i = 30^\circ$ .

Europa - Solução Analítica		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	1.7134528501	-1.0791954156
$J_2, J_2^2, J_4$	1.7986377918	-0.9869115736

Tabela 6 –  $h = 439.2$  km,  $a = 2000$  km,  $e = 0.001$ ,  $i = 30^\circ$ .

Ganimedes - Solução Analítica		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	-0.0612293659	-0.1008967292
$J_2, J_2^2, J_4$	-0.0658616079	-0.1136835104

Tabela 7 –  $h = 100$  km,  $a = 2731.2$  km,  $e = 0.0001$ ,  $i = 70^\circ$ .

#### 6.3.2 Solução Numérica

As Equações (5.1)-(5.2) e (5.5)-(5.6) foram integradas numericamente pelo Método de Runge-Kutta de quarta ordem e os resultados obtidos confirmam a veracidade da

<b>Titã - Solução Analítica</b>		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	0.1585669918	-0.0998713041
$J_2, J_2^2, J_4$	0.1688721149	-0.0886062079

Tabela 8 –  $h = 300$  km,  $a = 2875$  km,  $e = 0.001$ ,  $i = 30^\circ$ .

solução analítica. As Tabelas 9, 10, 11 e 12 mostram a variação secular dos elementos keplerianos angulares ( $n_\omega, n_\Omega$ ) para órbitas de satélites artificiais orbitando a **Lua**, **Europa**, **Ganimesdes** e **Titã**.

<b>Lua - Solução Numérica</b>		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	1.817349413	-1.144633279
$J_2, J_2^2, J_4$	1.752244106	-1.216546997

Tabela 9 –  $h = 50$  km,  $a = 1787.4$  km,  $e = 0.01$ ,  $i = 30^\circ$ 

<b>Europa - Solução Numérica</b>		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	1.71345285	-1.079195416
$J_2, J_2^2, J_4$	1.798637792	-0.986911574

Tabela 10 –  $h = 439.2$  km,  $a = 2000$  km,  $e = 0.001$ ,  $i = 30^\circ$ .

<b>Ganimesdes - Solução Numérica</b>		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	-0.061229366	-0.100896729
$J_2, J_2^2, J_4$	-0.065861608	-0.159319835

Tabela 11 –  $h = 100$  km,  $a = 2731.2$  km,  $e = 0.0001$ ,  $i = 70^\circ$ .

<b>Titã - Solução Numérica</b>		
Termos	$n_\omega$ - (Graus/dia)	$n_\Omega$ - (Graus/dia)
$J_2$	0.158566992	-0.099871304
$J_2, J_2^2, J_4$	0.168872115	-0.088606208

Tabela 12 –  $h = 300$  km,  $a = 2875$  km,  $e = 0.001$ ,  $i = 30^\circ$ .

Note que  $a_{e\_Europa} \approx 1560.8$  km,  $a_{e\_Ganimesdes} \approx 2631.2$  km e  $a_{e\_Titan} \approx 2575$  km.



## 7 Conclusão

### 7.1 Inclinação Crítica

Verificamos a marcante influência do harmônico de  $C_{22}$  no movimento orbital de satélites artificiais lunares, causando variações extremamente significativas na inclinação crítica (aproximadamente  $13.85^\circ$ ). Assim,  $C_{22}$  deve, forçosamente, ser considerado em missões com órbitas polares de baixa altitude, nas quais é preciso efetuar manobras de correção orbital com economia de combustível.

Já no caso dos satélites artificiais galileanos, como já dito anteriormente, notou-se um aspecto muito interessante quando consideramos a influência de  $C_{22}$ . Este fato ainda está sob profunda investigação. Por hora, para a inclinação crítica de órbitas de satélites artificiais ao redor de Europa, Ganimedes e Calisto, portanto, é necessário escolher  $\Omega$  tais quais  $i \in \mathbb{R}$  e, por consequência, a órbita exista.

No caso de Titã, percebemos variações na inclinação crítica de até  $37^\circ$ , aproximadamente. Mostrando, como no caso lunar, a forte influência do harmônico de  $C_{22}$  no movimento orbital de satélites artificiais ao redor de Titã.

### 7.2 Órbitas Heliosíncronas

No caso das órbitas heliosíncronas, a influência do harmônico de  $C_{22}$  é também marcante no movimento orbital de satélites artificiais ao redor da Lua. A presença deste harmônico na expressão do potencial gravitacional gera variações de até  $48^\circ$ , aproximadamente, na inclinação heliosíncrona de algumas órbitas aqui mostradas. Para Titã, notamos variações de  $80.1^\circ$  nas órbitas apresentadas, o que é extremamente significativo. Para as órbitas heliosíncronas de satélites artificiais ao redor de Europa, Ganimedes e Calisto, também notamos o mesmo comportamento peculiar mostrado na inclinação crítica, devido a ordem de grandeza dos coeficientes harmônicos.

### 7.3 Variação Secular dos Elementos Angulares

Verificamos, portanto, para o caso de satélites artificiais lunares<sup>1</sup> a importância de considerarmos mais harmônicos no cálculo da variação dos elementos keplerianos angulares, quando se considera a perturbação pela distribuição heterogênea de massa das luas

<sup>1</sup> Neste caso, lunares refere-se aos satélites naturais consideramos neste trabalho.

consideradas. No caso especial da Lua, em que os coeficientes harmônicos de alto grau são bem determinados, isto é notório.

Para as outras luas (Ganimedes, Europa, Titã), o trabalho sugere que uma investigação detalhada da variação da magnitude dos harmônicos de alto grau é extremamente importante para o planejamento de missões a serem enviadas para satélites planetários, para os quais a distribuição de massa ainda não é bem conhecida.

## 7.4 Considerações Finais

O sistema dinâmico que descreve o movimento de satélites artificiais orbitando corpos centrais com distribuição de massa heterogênea é representado por um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias. No caso geral, não sendo possível encontrar solução exata para tal, recorre-se a soluções analíticas ou numéricas aproximadas.

A Teoria de Perturbações oferece vários processos analíticos para solucionar estes tipos de problemas e aqui trabalhamos com o Método da Variação dos Parâmetros, o qual permite transformar o sistema, expressando-o em termos de um conjunto de variáveis de conveniente interpretação geométrica e física. Este sistema de equações diferenciais é conhecido como Equações Planetárias de Lagrange.

Considerando casos particulares para a expressão do potencial perturbador - truncamentos e a eliminação de termos periódicos de curto período - aplicações foram feitas para satélites artificiais orbitando a Lua, Europa, Ganimedes, Calisto e Titã.

Por fim, este tipo de análise, mostrada neste trabalho, é extremamente importante para o sucesso de missões espaciais lunares em geral. Mensurar os desvios da órbita nominal de um satélite artificial, causados pela ação de forças perturbadoras, é necessário para que sua trajetória seja corrigida. Portanto, a manutenção orbital é fundamental para a vida útil de veículos espaciais, inclusive no cumprimento de sua finalidade no espaço, seja ela científica, observacional, meteorológica, entre outras tantas.

## 8 Informações Adicionais

Os resultados deste trabalho foram preliminarmente apresentados no Seminário de Iniciação Científica e Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação - SICINPE/2014. Tal trabalho foi merecedor de Menção Honrosa pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE pela segunda vez consecutiva. Link para o resumo publicado nos anais do SICINPE/2014:

[http : //www.inpe.br/bolsas/sicinpe/arquivos/LIVRO%20DE%20RESUMOS\\_2014.pdf](http://www.inpe.br/bolsas/sicinpe/arquivos/LIVRO%20DE%20RESUMOS_2014.pdf)

Também foram publicados na revista Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, ISSN 2359-0793. Link para acesso:

[http : //proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/193](http://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/193),

doi: 10.5540/03.2013.001.01.0192.

E, por fim, foram apresentados no XXXV Congresso de Matemática Aplicada e Computacional e no XVII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, ambos realizados pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional em 2014. Links de acesso:

[http : //www.inpe.br/cbdo/arquivos/Livro\\_2014\\_final.pdf](http://www.inpe.br/cbdo/arquivos/Livro_2014_final.pdf)

[http : //proceedings.galoa.com.br/cnmac – 2014/trabalhos/variacao\\_dos\\_elementos\\_keplerianos\\_angulares\\_de\\_satelites\\_artificiais\\_lunares\\_devido\\_a\\_acao\\_de#](http://proceedings.galoa.com.br/cnmac-2014/trabalhos/variacao_dos_elementos_keplerianos_angulares_de_satelites_artificiais_lunares_devido_a_acao_de#)



# Referências

- AIELLO, J. Numerical Investigation of Mapping Orbits about Jupiter's Icy Moons. *Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration*, 2005.
- BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971.
- BLITZER, L. Handbook of Orbital Perturbations. *University of Arizona*, 1970.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- CARVALHO, J. P. S.; VILHENA DE MORAES, R.; PRADO, A. F. B. A. Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, p. 24, 2009.
- CARVALHO, J. P. S.; VILHENA DE MORAES, R.; PRADO, A. F. B. A. Dynamics of Artificial Satellites around Europa. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, 2013.
- COSTA, M. L. G. T. X.; PRADO, A. F. B. A.; VILHENA DE MORAES. Cálculo da Variação dos Elementos Orbitais de Satélites Lunares Devido à Distribuição Não Uniforme de Massa da Lua. *Relatório Final de Iniciação Científica*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2014.
- FERRAZ-MELLO, S. *Teoria de Perturbações*. São José dos Campos: Departamento de Astronomia, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1972.
- KAULA, W. M. *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. New York: Dover Publications, 2000.
- KUGA, H. K.; RAO, K. R.; CARRARA, V. Satélites Artificiais - Movimento Orbital. *2ª Edição*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2011.
- MERSON, R. The Motion of a Satellite in an Axi-Symmetric Gravitational Field. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, v. 4, n. Supplement 1, p. 17–52, 1961.
- MORANDO, B. *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre*. Paris: Gordon & Breach, 1974.
- NOYELLES, B. Titan's Rotational State: The Effects of a Forced "Free" Resonant Wobble. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 101, n. 1-2, p. 13–30, 2008.
- PARK, S.-Y.; JUNKINS, J. L. Orbital Mission Analysis For a Lunar Mapping Satellite. *Journal of the Astronautical Sciences*, v. 43, n. 2, p. 207–217, 1995.
- VALLADO, D. A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. 4th. ed. Hawthorne: Microcosm Press/Springer, 2013. (Space Technology Library).

VOLCHAN, S. B. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.