



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

CONTROLE E SINCRONIZAÇÃO DE CAOS E DINÂMICA NÃO LINEAR

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: guirns@gmail.com

Elbert E. N. Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)
E-mail: elbert@lac.inpe.br

Julho de 2010

CONTROLE E SINCRONIZAÇÃO DE CAOS E DINÂMICA NÃO LINEAR

Guilherme Rodrigues Nogueira de Souza¹ (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
Elbert E. N. Macau² (LAC/INPE, Orientador)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo principal o estudo de sistemas dinâmicos caóticos acoplados em redes de conexões, e as condições necessárias para que ocorra a sincronização dos sistemas. Para isso foram explorados os conceitos de Expoente de Lyapunov para os sistemas e propriedades das redes de conexão do tipo “smallworld”, analisados principalmente sobre os sistemas de Lorenz e de Rossler. Através de simulações computacionais foram encontradas condições para os fatores de acoplamento que levam a sincronização

¹ Aluno do Curso de Engenharia de Computação, ITA. E-mail: guirns@gmail.com

² Pesquisador do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada. E-mail: elbert@lac.inpe.br

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Expoente de Lyapunov

2.2 Sistema de Lorenz e acoplamento Mestre-Escravo

2.3 Sistema de Rössler e Acoplamento Difuso

CAPÍTULO 3 – DESENVOLVIMENTO

3.1 Redes de conexão

3.2 Acoplamento Linear

3.3 Acoplamento não linear

3.4 Grafos e redes de Conexão

3.5 Resultados

3.6 Autovalores para conexões em círculos

CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

CAPÍTULO 6 – BIBLIOGRAFIA

1. INTRODUÇÃO

Um *sistema dinâmico* consiste na descrição da evolução no tempo do comportamento de algum sistema (que pode ou não ter uma interpretação física), como por exemplo, a população de uma determinada espécie ao longo do tempo. Quando as equações que regem o sistema são não-lineares, é possível que o sistema apresente um comportamento caótico, que dentre outros aspectos, apresenta uma grande sensibilidade a variações das condições iniciais.

O intuito deste trabalho foi o estudo dos conceitos de estabilidade de osciladores dinâmicos e sincronização de sistemas acoplados, com ênfase em redes de conexão. Um sistema acoplado pode ser definido pelo fato de que o estado de um dos osciladores sofre influência do estado dos osciladores acoplados.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, descrevemos a teoria estudada durante o trabalho.

2.1 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov é uma medida de um sistema que indica o comportamento assintótico de um sistema, sendo então um bom indicador para verificar a estabilidade do sistema. O expoente indica a tendência do sistema de se afastar com uma pequena perturbação, e pode ser descrito matematicamente por:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{E(t)}{E(t_0)} \right)$$

Onde $E(t)$ indica a diferença entre os estados de dois sistemas, partindo de condições iniciais próximas. Dessa forma, um valor positivo indica que os sistemas se afastam de maneira exponencial, indicando um comportamento caótico.

2.2 Sistema de Lorenz e acoplamento Mestre-Escravo

O sistema de Lorenz é um sistema dinâmico de três dimensões definido pelas equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

Ao longo do projeto, foi estudado o sistema com os valores:

$$\begin{aligned} \sigma &= 10 \\ \rho &= 2/3 \\ \beta &= 28 \end{aligned}$$

Para a análise do sistema, foi programado um simulador utilizando o integrador do Runge-Kutta, sendo possível verificar a estabilidade do sistema. Simulando para condições iniciais próximas, verifica-se que o sistema é caótico.

Isso também pode ser verificado pelo cálculo dos expoentes para cada uma das coordenadas do sistema. Os valores obtidos foram:

Tabela 1- Expoentes de Lyapunov para o Sistema de Lorenz

Coordenada	Expoente
x	-14.554
y	0.002
z	0.889

A presença do expoente positivo confirma que o sistema é caótico.

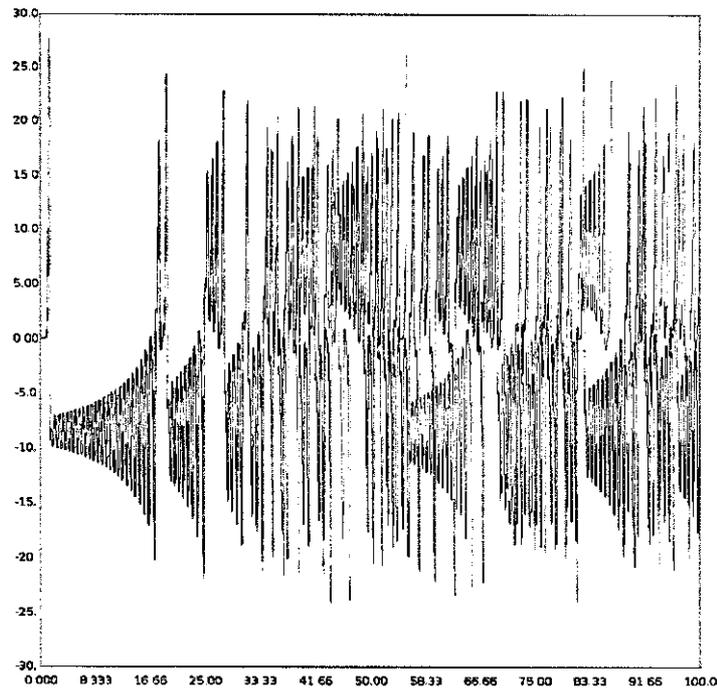


Figura 1 - Sistema de Lorenz para condições iniciais próximas

Como base dos estudos dos sistemas em redes, foi estudado inicialmente o caso de dois sistemas acoplados, no esquema mestre-escravo. Nesse modo de acoplamento, uma das coordenadas do sistema escravo é sempre igual a do mestre. O sistema resultante pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma(y_1 - x_1) & x_2 &= x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1(\rho - z_1) - y_1 & \frac{dy_2}{dt} &= x_2(\rho - z) - y_2 \\ \frac{dz_1}{dt} &= x_1y_1 - \beta z_1 & \frac{dz_2}{dt} &= x_2y_2 - \beta z_2 \end{aligned}$$

Para o caso de acoplamento da coordenada x.

Porém isso não resulta necessariamente que os sistemas irão evoluir da mesma forma. Isso ocorre para o caso da componente x e y, mas não para a componente z. Isso pode ser visto no cálculo dos expoentes para cada um dos casos. Os expoentes negativos indicam que ocorre a sincronização, enquanto os positivos indicam a não sincronização.

Tabela 2 - Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz acoplado

Sinal de Guiagem	Escravo	Expoentes
x	(y,z)	(-1.81, -1.86)
y	(x,z)	(-2.66, -10.01)
z	(x,y)	(0.001, -11.00)

2.3 Sistema de Rossler e Acoplamento Difuso

O sistema de Rossler é outro sistema dinâmico bastante estudado. É definido pelas equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + x) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

Foram usados os valores:

No acoplamento de tipo difuso, diferentemente do modo mestre-escravo, existe um parâmetro adicional α chamado de *fator de acoplamento* que determina o grau de influência de um sistema no outro. O sistema seria descrito então na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= F(v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} &= F(v_2) + \alpha E(v_1 - v_2)\end{aligned}$$

Onde E é uma matriz que determina quais coordenadas estão acopladas. Com esse fator adicional podemos controlar ele para que o expoente de Lyapunov máximo seja negativo, de modo que os sistemas se estabilizem com o tempo.

Com $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtemos o sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(y_1 + x_1) & \frac{dx_2}{dt} &= -(y_2 + x_2) + \alpha(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + ay_1 & \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + ay_2 \\ \frac{dz_1}{dt} &= b + z_1(x_1 - c) & \frac{dz_2}{dt} &= b + z_2(x_2 - c)\end{aligned}$$

Então podemos calcular o valor do expoente em função de alfa, obtendo o resultado da figura.

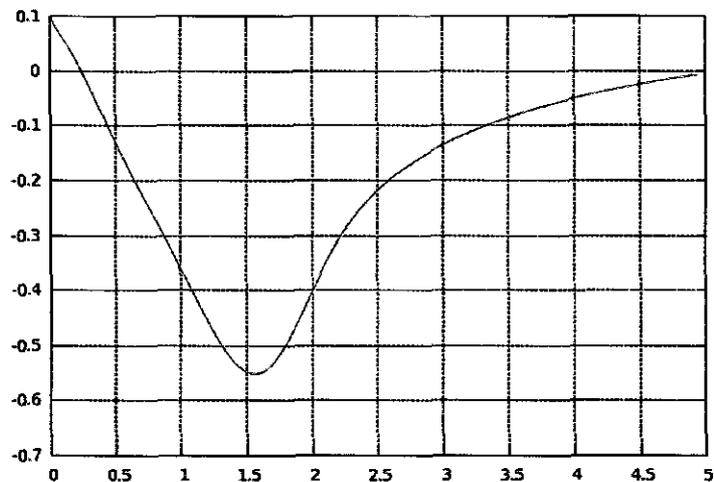


Figura 2 - Expoente de Lyapunov máximo em função de alfa

Pode-se perceber então que se o fator de acoplamento estiver na região entre 0.2 e 5, o expoente de Lyapunov máximo é negativo de modo que esse seria uma boa região para usar definir o fator de acoplamento.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1 Redes de conexão

Estudaremos agora o comportamento de osciladores ligados por redes de conexão. Uma rede de conexão pode ser interpretada como um grafo, no qual ligamos dois vértices (que representam os osciladores) por arestas se eles influenciam no comportamento do outro. Um exemplo de acoplamento simples é o acoplamento em círculo, onde cada oscilador tem ligação com seus dois vizinhos.

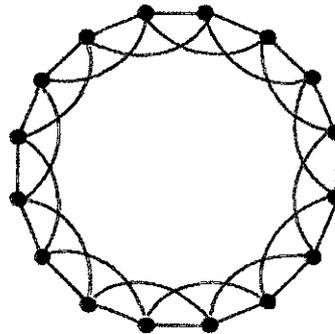


Figura 3 - Acoplamento em círculo

Nesses tipos de redes a distância média entre dois osciladores é alta. Porém adicionando poucas arestas de maneira aleatória, geramos um grafo de distância muito menor. Esses grafos são chamados de smallworld.

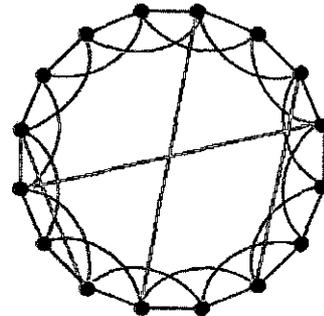


Figura 4 - Rede smallworld

Queremos saber agora para uma dada rede se é possível sincronizar os osciladores de modo que todos estejam na mesma configuração. Para isso iremos o caso de acoplamento linear.

3.2 Acoplamento Linear

Inicialmente vamos considerar que todos os osciladores da rede são iguais, para que seja possível a sincronização. Então o comportamento isolado de cada um é definido por:

$$\frac{dv^i}{dt} = F(v^i)$$

Onde os números sobrescritos indicam o índice do oscilador (1 a n) e o subscritos indicam uma coordenada do oscilador (1 a m). Sendo então G a matriz simétrica que indica se dois osciladores estão acoplados e H uma função sobre o estado do oscilador, o sistema acoplado seria descrito da forma:

$$\frac{dv^i}{dt} = F(v^i) - \sigma \sum_{j=1}^n G_{ij} H(v^j)$$

Onde σ é chamado de fator de acoplamento geral. No caso em que ocorre sincronização, o termo $\sigma \sum_{j=1}^n G_{ij} H(v^j)$ tem que ser constante, que para fins e simplificação consideraremos como 0. Para isso basta fazer com que cada linha da matriz G some 0, pois no estado sincronizado todos os termos $H(v^j)$ são iguais. Com isso cada oscilador teria o mesmo comportamento de um desacoplado.

Para o caso do acoplamento em círculo (considerando somente os vizinhos imediatos), o G seria da forma:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Queremos saber se para uma dada configuração, ocorre a sincronização. Já vimos que uma configuração sincronizada as soluções satisfazem a equação que descreve o sistema desacoplado, portanto iremos analisar a estabilidade considerando pequenas perturbações ξ^j para cada oscilador e verificar se essas perturbações desaparecem com o tempo. Para isso usaremos o expoente de Lyapunov.

O Expoente de Lyapunov nesse caso oferece uma fraca relação de estabilidade, porém serve para os propósitos do projeto. Sendo então s a solução do sistema desacoplado, temos que cada oscilador é da forma:

$$v^j = s + \xi^j$$

Considerando que as perturbações são pequenas, podemos usar a Série de Taylor para aproximar F e H para suas expansões de primeira ordem, obtendo:

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \sum_{j=1}^n [DF(s)\delta_{ij} - \sigma G_{ij} DH(s)] \xi^j$$

Onde DF e DH representam as jacobianas de F e H, respectivamente. Podemos reescrever o sistema de uma maneira mais simples, separando por blocos através da diagonalização da matriz G. Obtemos então o sistema mais simples:

$$\frac{d\zeta^i}{dt} = [DF(s) - \sigma\gamma_i DH(s)]\zeta^i$$

Onde γ_i é o i -ésimo autovalor de G . Agora basta analisar os Expoentes de Lyapunov para esse sistema e ver se ocorre a estabilidade. Uma vez que a soma de cada linha de G é 0, temos que 0 é um autovalor. Nesse caso, o sistema se refere ao sistema isolado, de modo que instabilidades nesses pontos não afetam a sincronização.

Podemos reescrever as equações para:

$$\frac{d\zeta^i}{dt} = [DF(s) - \alpha DH(s)]\zeta^i$$

Assim podemos achar os Expoentes em função do parâmetro α . Um fato conhecido é que normalmente os sistemas têm que Expoente de Lyapunov máximo se comporta como na figura a seguir.

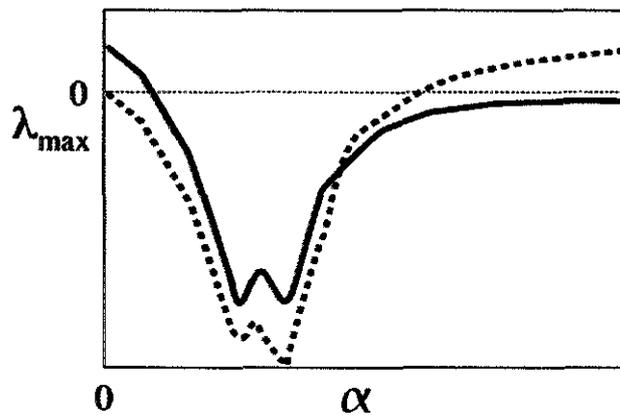


Figura 5 - Comportamento típico do maior Expoente de Lyapunov em função de alfa

Dessa forma, considerando que $0 = \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_{\max}$, basta que $\sigma\gamma_2$ e que $\sigma\gamma_n$ estejam na região de λ_{\max} negativo. No caso em que existe um trecho com Expoente Negativo, na região $(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2)$, basta que:

$$\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_2} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Para que possamos ajustar σ de modo que todos os expoentes sejam negativos.

3.3 Acoplamento não linear

Podemos generalizar o raciocínio acima para o caso de acoplamento não linear. Se considerarmos que cada oscilador depende da forma como os outros o influem, temos que as equações que descrevem cada sistema viram:

$$\frac{dv^i}{dt} = F^i(v^i, H(v^j))$$

Onde agora cada F^i é diferente para cada sistema e recebe $N+1$ parâmetros de entrada. Para que seja possível a sincronização devemos ter:

$$F^i(\mathbf{s}, H(\mathbf{s})) = F^j(\mathbf{s}, H(\mathbf{s}))$$

Analogamente, usando as perturbações podemos reescrever para:

$$\frac{d\tilde{\xi}^i}{dt} = \sum_{j=1}^n [D_0 F^i(\mathbf{s}, H(\mathbf{s})) \delta_{ij} + D_j F^i(\mathbf{s}, H(\mathbf{s})) DH(\mathbf{s})] \tilde{\xi}^j$$

Onde $D_{j,i}$ se refere a derivada parcial do j -ésimo argumento. Considerando que cada derivada parcial se comporta como forçantes nos outros osciladores, i.e. $D_j F^i(\mathbf{s}, H(\mathbf{s})) = -\sigma G_{ij} \mathbf{1}$, chegamos ao mesmo caso do acoplamento linear.

3.4 Grafos e redes de Conexão

Para o estudo das redes o descrevemos como grafos, e agora vamos definir mais formalmente o que é um grafo. Um grafo U é um conjunto de vértices e arestas, onde as arestas são um par de vértices que indicam que há um conexão entre eles. Normalmente é utilizado $V(U)$ para definir o conjunto de vértices e $E(U)$ para as arestas. Então, sendo n o número de vértices, podemos ter de 0 à $n(n-1)/2$ arestas, sendo nesse caso todos os vértices conectados uns aos outros.

A maneira mais comum de representação de grafos é através da matriz de adjacência A . A matriz A é ma matriz simétrica onde $A_{ij} = 1$ se e somente se existe uma aresta ligando o vértice i ao vértice j , e 0 caso contrário. Dessa forma, por exemplo, no grafo abaixo:

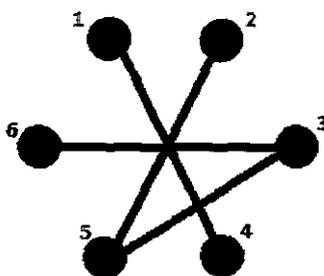


Figura 6 - Exemplo de grafo

Temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O grau de cada vértice é o número de arestas que estão conectadas no vértice. Dessa forma o grau do vértice i é a soma dos elementos da linha i .

Numa rede de conexão os vértices representam os osciladores e as arestas as ligações entre eles. No exemplo teríamos que os osciladores 1 e 4 geram influência um no outro. A partir da matriz de adjacência, podemos construir a matriz G usada anteriormente.

Seja D a matriz onde D_{ii} é o grau do vértice i e o restante da tabela é 0. Com isso temos que:

$$G = D - A$$

Portanto, no exemplo acima teríamos que:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que por construção 0 é um autovalor da matriz, associado ao autovetor $\mathbf{1}$.

3.5 Resultados

A fim de verificar os resultados obtidos foi simulado uma rede de osciladores para o caso da seguinte matriz de adjacência:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Onde teríamos que:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para essa matriz, seus autovalores são $\{0, 1.382, 1.382, 3.618, 3.618\}$. Para a verificação de sincronização foi plotado os valores da coordenada x de cada sistema. Segue então os resultados obtidos para vários valores do parâmetro σ .

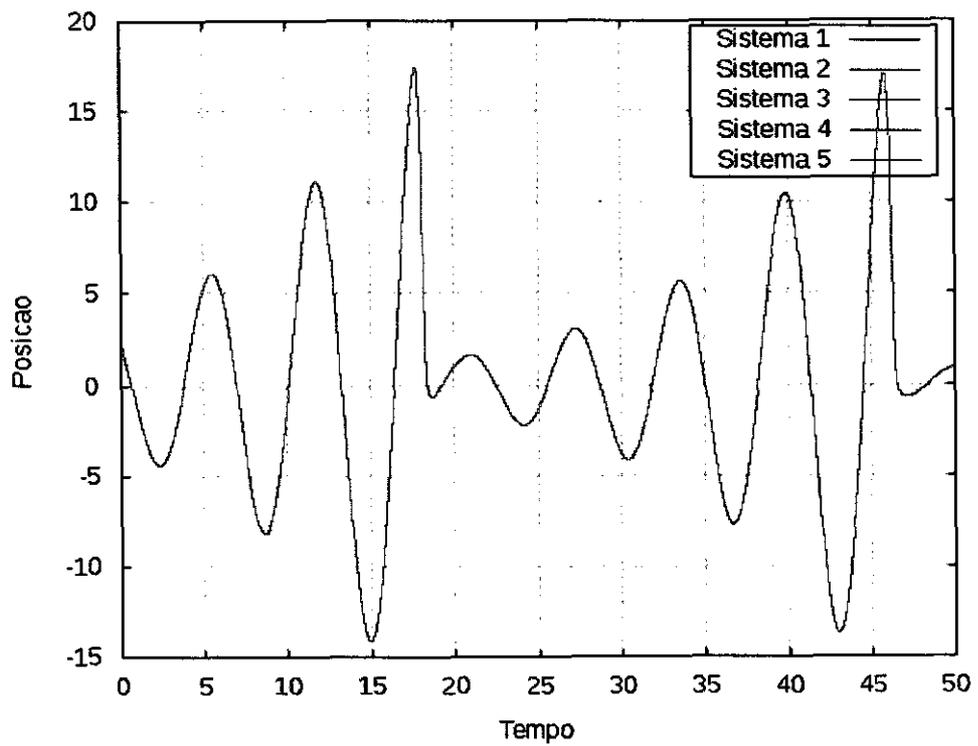


Figura 7 - Sigma = 0.001

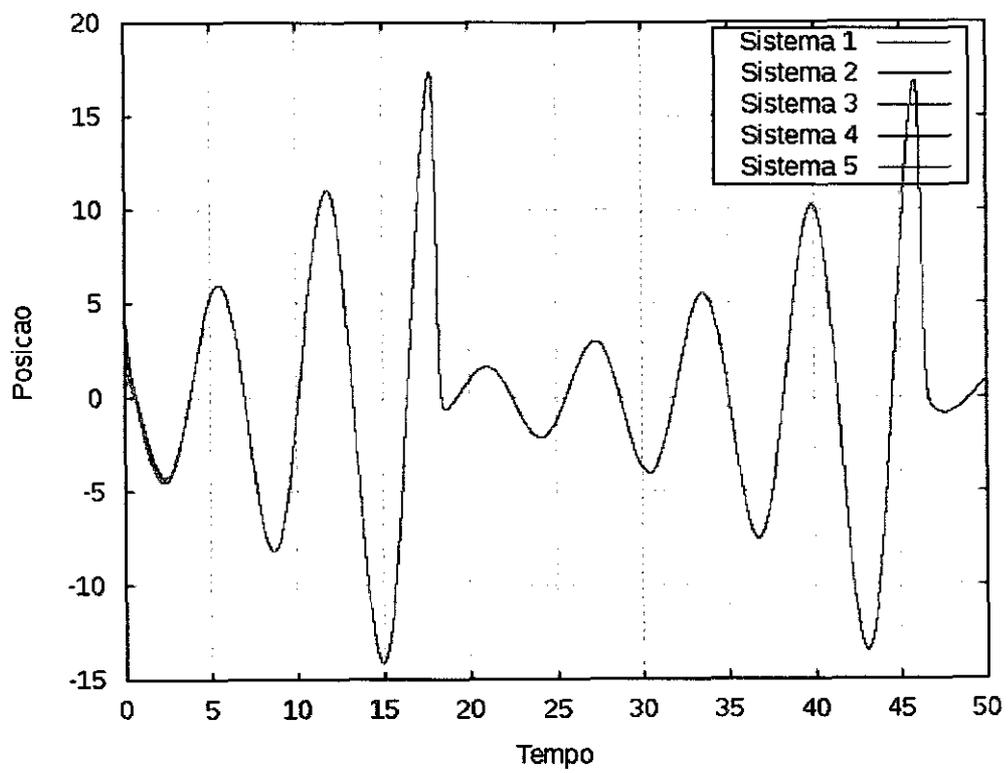


Figura 8 - Sigma = 0.0001

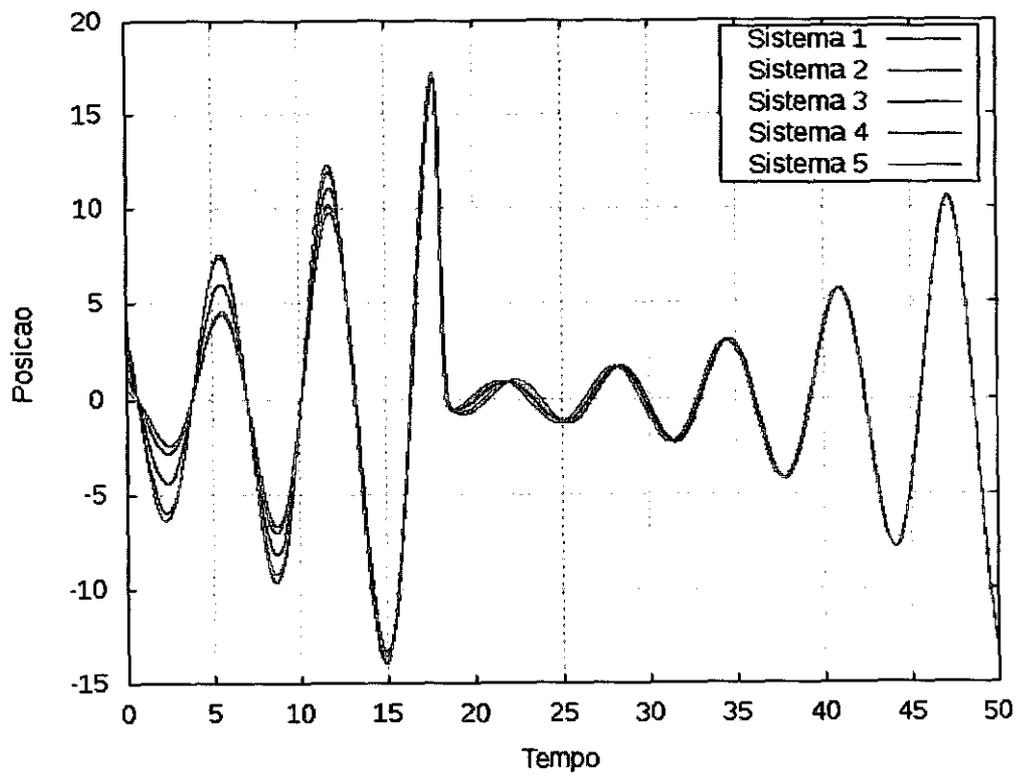


Figura 9 - Sigma = 0.00001

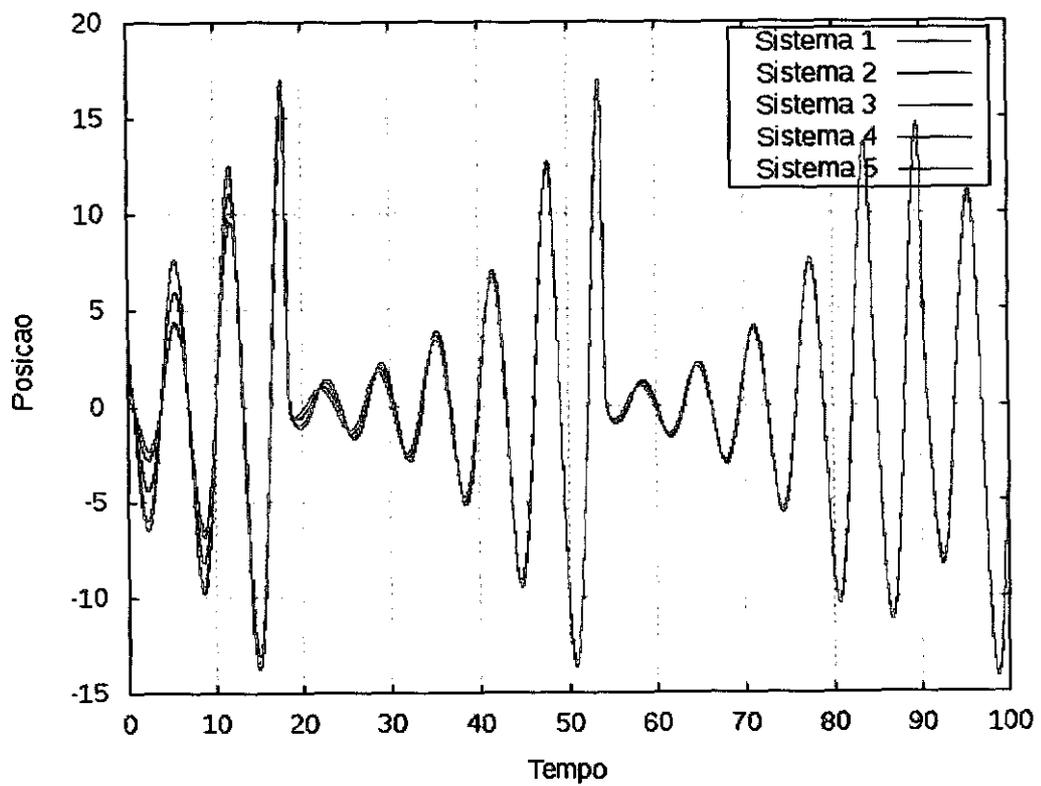


Figura 10 - Sigma = 0.000009

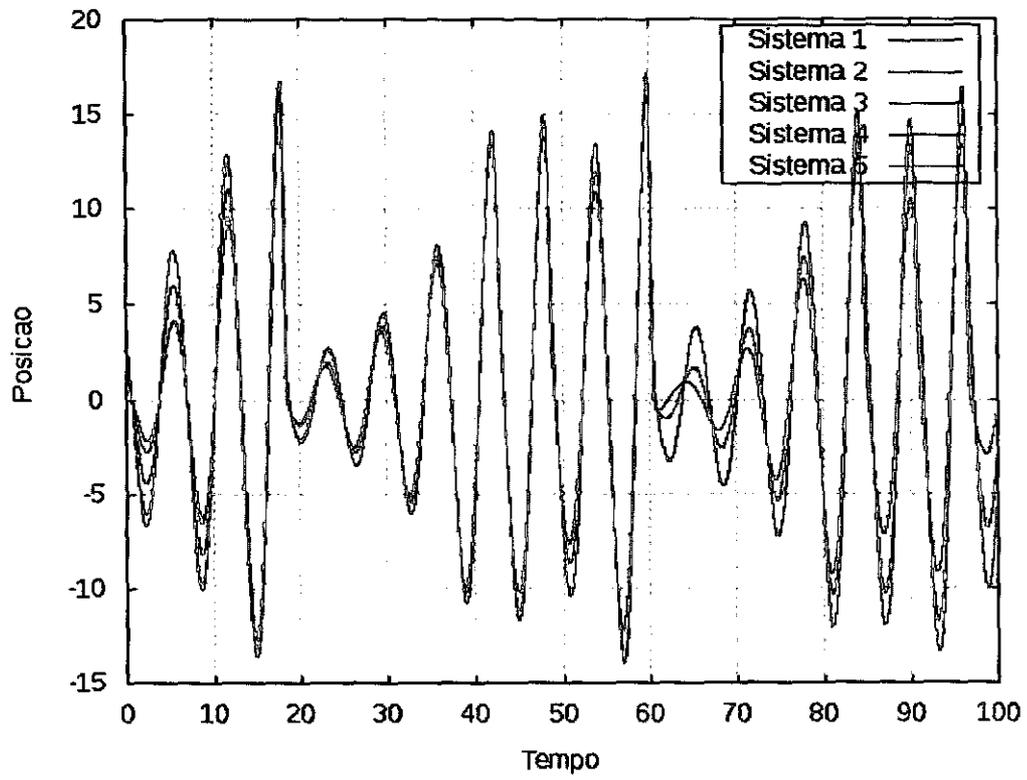


Figura 11 - Sigma = 0.000075

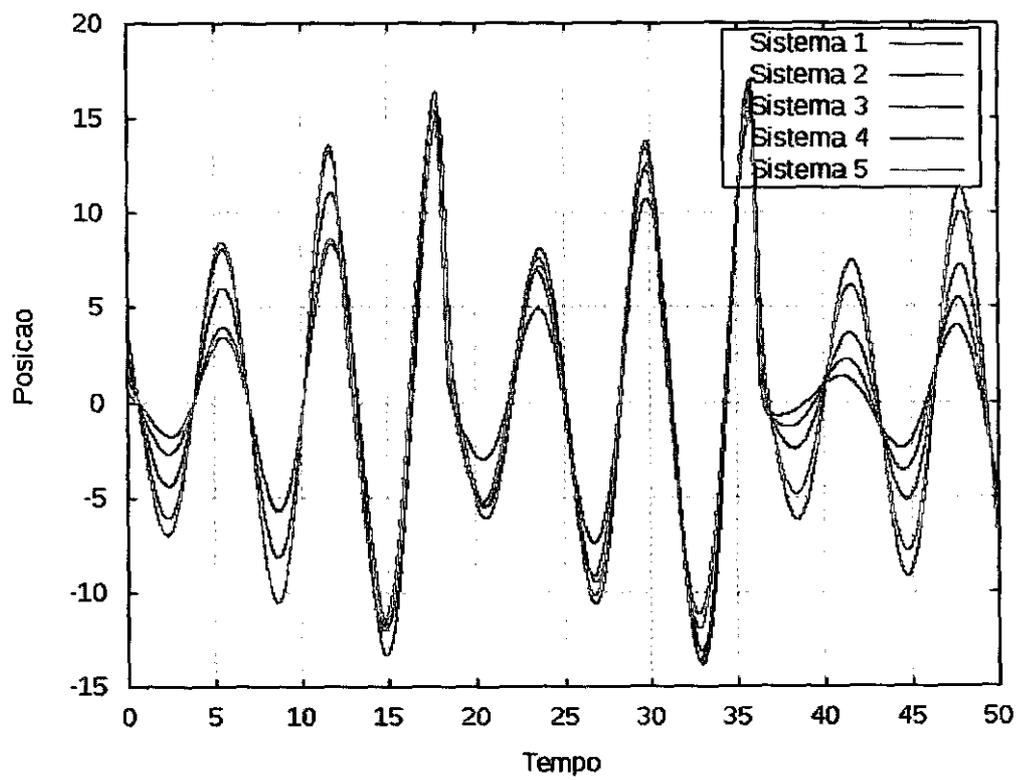


Figura 12 - Sigma = 0.000005

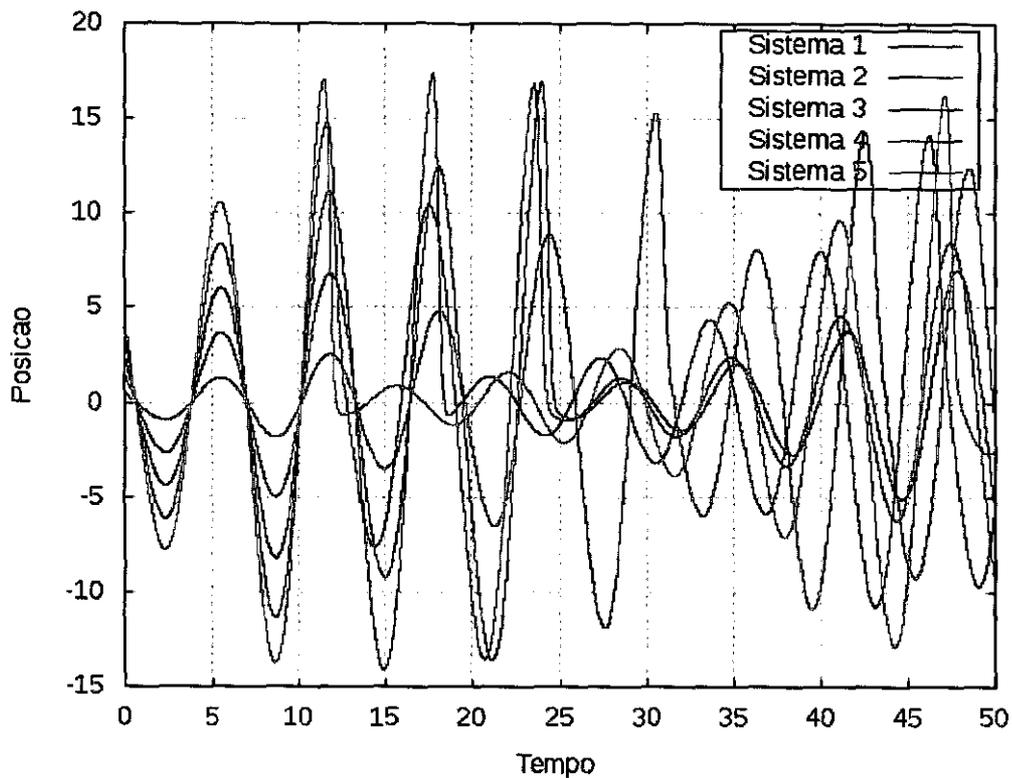


Figura 13 - Sigma = 0.000001

Analisando as figuras percebemos que para valores de σ maiores 0.000009 ocorre sincronização, enquanto para valores menores a força de acoplamento não é o suficiente para garantir a sincronização. Isso ocorre pois essas forças de acoplamento não fazem com que o $\sigma\gamma_2$ consiga atingir a região do Expoente máximo negativo. Outro fato interessante de se observar é que para valores próximos, porém menores, aparentemente ocorre a sincronização, mas depois de um tempo eles voltam a se dessincronizar, de maneira diferente dos casos em que praticamente não há acoplamento.

3.6 Autovalores para conexões em círculos

Podemos definir uma classes de grafo, chamada de k-círculo. Os grafos dessa forma têm os vértices dispostos em um círculo, e cada vértice conectados aos k vizinhos de cada lado. Por exemplo, o grafo estudado é um 1-ciclo de 5 vértices. Podemos então achar previamente os valores dos autovalores da matriz G.

Temos que eles são da forma:

$$\gamma_l = 2 \left[k - \sum_{j=1}^k \cos \left(\frac{2\pi(l-1)j}{n} \right) \right]$$

Com isso podemos achar a razão entre γ_{max}/γ_2 de modo que podemos tentar achar os sistema que satisfaça:

$$\frac{\gamma_{max}}{\gamma_2} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

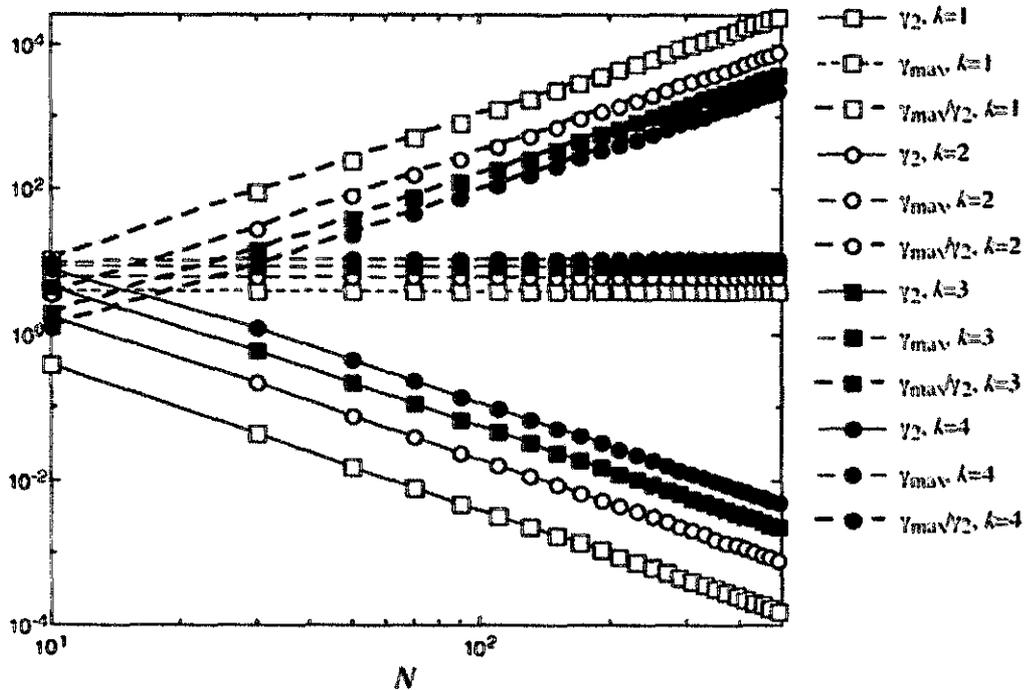


Figura 14 - Variação dos autolavores com relação a n e k

Podemos ver que aumentando k, ou seja, aumento o grau de influência de um oscilador no outro a razão diminuiu, o que faz sentido, uma vez que nesse caso cada oscilador sofre mais influência para se aproximar do comportamento dos outros.

4. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

Os programas utilizados para as simulações foram feitos na linguagem C e C++, por serem linguagens que o autor já possuía uma boa familiaridade. Os programas foram desenvolvidos de modo geral com o compilador GNU C++ Compiler 4.x (Linux) no editor Code::Blocks 8.x. Como o C não possui bibliotecas gráficas padrão, foi utilizado o conjunto de bibliotecas SDL (Simple Direct MediaLayer), que possui implementações em várias plataformas. Para a plotagem de alguns dos gráficos, foi utilizada a ferramenta gnuplot.

5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Vários conceitos referentes a sincronização de sistemas dinâmicos foram estudados, como expoente de Lyapunov e redes de acoplamento. No assunto de redes de acoplamento foi visto ainda condições para que ocorra a sincronização, bem como ajustar os parâmetros para que ela ocorra.

A continuação do trabalho consiste no estudo de sincronização de sistemas dinâmicos em diferentes tipos de conexão, e o comportamento para osciladores diferentes.

6. BIBLIOGRAFIA

[1]: Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. Louis M. Pecora, Thomas L. Carroll, Gregg A. Johnson, and Douglas J. Mar

[2]: Synchronization Of Oscillators In Complex Networks. Louis M. Pecora and Mauricio Barahona.