1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-3688-PRE/835		*Out., 1985*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DIN/DEP*	Programa *POPES/INFOR*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
PENALIDADE
PROGRAMAÇÃO INTEIRA

7. C.D.U.: *519.853*

8. Título *INPE-3688-PRE/835*

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE DUALIDADE/PENALIDADE EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

10. Páginas: *09*

11. Última página: *07*

12. Revisada por

Acioli Antonio de Olivo

9. Autoria *Luiz Antonio Nogueira Lorena*

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

Este trabalho apresenta uma abordagem geométrica da teoria de dualidade/penalidade para problemas convexos e não convexos, e especialmente para problemas discretos de programação. O objetivo é proporcionar um "insight" para os leitores que já conhecem a teoria, mas apenas superficialmente, e motivar aqueles que ainda não tiveram oportunidade de estudar a teoria de dualidade em Programação Matemática.

15. Observações
Trabalho apresentado no 8º CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Florianópolis, 16 a 20 de Setembro de 1985.

ABSTRACT

This work shows a geometrical approach of the Duality/Penalty theory for convex and nonconvex problems, and specially for Discrete Programming Problems. The objetive is to give insight for the readers that know the theory, but only superficially, and motivate those that did not have the opportunity to study the Duality Theory in Mathematical Programming.

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE DUALIDADE/PENALIDADE EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Luiz Antonio Nogueira Lorena
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
Caixa Postal 515 - 12200 - São José dos Campos - SP - Brasil

A teoria de dualidade/penalidade constitui um dos segmentos de maior beleza e grande importância em Programação Matemática. A Teoria de Dualidade em Programação Linear, desenvolvida há muitos anos (Dantzig, 1963); se mostrou de larga aplicação e de aprendizado relativamente fácil. O mesmo não se pode dizer da Dualidade em Programação Não-linear, mais recente, e de árduo aprendizado e aplicação (Geoffrion, 1971; Rockafellar, 1974; Tind e Wolsey; 1981). Mais recente ainda, a Dualidade em Programação Inteira (Relaxação lagrangiana) tem sido largamente aplicada para a aproximação da solução ótima de problemas gerais de Combinatória (Geoffrion, 1974; Shapiro, 1979; Fisher, 1985).

O objetivo deste trabalho é apresentar a Teoria de Dualidade/Penalidade em Programação Matemática, usando uma abordagem inteiramente geométrica, a qual se espera venha esclarecer alguns de seus diversos aspectos e dar uma introdução ao assunto.

Para a Teoria de Penalidade serão mostrados alguns resultados recentes para Programação Discreta (Lorena, 1985; Lorena e Oliveira, 1984).

Para o seguinte problema geral:

$$
(P) \quad \begin{aligned} v = \sup\ & f(x) \\ & g(x) \leqq b \\ & x \in X \end{aligned}
$$

onde $X \subseteq R^n$ (não-vazio), $f:R^n \to R$, $g:R^n \to R^m$ e $b \in R^m$; pode-se definir a seguinte função $L(.,.):R^n X R^m \to R$; $L(x,u)=f(x)-u(g(x)-b)$ e a função lagrangiana $L(.):R^m \to R$; $L(u) = \sup\limits_{x \in X} L(x,u)$.

As componentes do vetor u são conhecidas como multiplicadores de Lagrange. Observa-se que para todo $u \geqq 0$, $L(u) \geqq v$. Desta forma, pode-se procurar o menor limitante superior de v através do Problema Dual de (P):

$$
(D) \quad d = \inf_{u \geqq 0} L(u).
$$

Obviamente $d \geqq v$, e possivelmente $d > v$, no caso em que se diz existir um "gap" (salto) de dualidade.

Existe ainda uma função importante para estabelecer relações entre os problemas (P) e (D). Esta é a função perturbação $p:R^m \to \overline{R}(\overline{R}=RU\pm\infty)$, definida por: $p(y) = \sup_{x \varepsilon X}\{f(x):g(x) \leq y\}$, onde y é o vetor perturbação. Obviamente p é não-decrescente e $p(b) = v$.

As Figuras de 1 a 3 do Apêndice apresentam as relações entre os problemas (P) e (D), para (P) convexo (f é côncava, g é convexa e X é convexo). Observa-se que, exceto em alguns casos patológicos (veja a Figura 4), obtém-se $v=d$. Um exemplo de problema convexo é o Problema de Programação Linear como o da Figura 5.

Para problemas não-convexos, a imagem de X no plano (f,g) poderá ser não-convexa, como na Figura 6. Verifica-se que nesse caso d é geralmente um Limitante superior de $v(d > v)$, existindo o "gap" de dualidade $d - v$.

Seja agora resolver o problema:

$$
(P^*) \quad \begin{aligned} v^* = \sup \; & f(x) \\ & g(x) \leq b \\ & x \;\varepsilon\; [X]^c \subseteq R^n \end{aligned}
$$

onde $[X]^c$ é a envoltória convexa de X. Desta forma tem-se em geral $d = v^*$ (a envoltória convexa da imagem de X está sombreada na Figura 7). Esta propriedade mostra que resolver o Dual equivale, em geral, a "convexificar" o Problema Primal (P).

Os resultados obtidos podem ser generalizados considerando a classe de funções não-decrescentes:

$H_+^m = \{h : R^m \to R : h(d^1) \geq h(d^2), \forall\, d^1, d^2 \in R^m$, tais que $d_i^1 \geq d_i^2$, $i=1,\ldots,m\}$.

Escreve-se a função $L(.,.)$ para $h \in H_+^m$, $L(x,h) = f(x) - h(g(x)-b)$, e a função lagrangiana $L(h) = \sup_{x \in X} L(x,h)$.

Pode-se redefinir o Problema Dual: $d = \inf_{h \in H_+^m} L(h)$

e definir o seguinte "Problema com Penalidades":

$$\text{(PP)} \qquad w = \sup_{x \in X} L(x,h) = L(h)$$

A Figura 8 mostra como uma sequência $\{h_i\} \to \bar{h}$ pode ser construída para obter $d=v$, mesmo no caso não-convexo. Caso $\bar{h}$ fosse conhecida a priori, bastava uma otimização e o resultado obtido seria a solução de (PP), w. Observa-se que: $\bar{h}(d) - \bar{h}(b) \geq p(d) - p(b)$, $\forall\, d \in R^m$. Esta é uma condição necessária e suficiente para que os problemas (P) e (PP) possuam soluções ótimas e valores ótimos iguais (Lorena, 1985; Lorena e Oliveira, 1984).

Observa-se ainda que $h_i(d) \geq p(d)$, $\forall\, d \in R^m$, e $\bar{h}(b) = p(b)$, são condições necessárias e suficientes para a igualdade dos valores ótimos de (P) e (D) (Lorena, 1985).

As Figuras 9 e 10 mostram o problema (P) no caso em que X é um conjunto discreto e finito, usando-se para o seu dual a seguinte função: $h_1(d)=$

$= \sum_{i=1}^{m} [u(d_i-b_i)+z|d_i-b_i|]$, para $u \geq z$. A Figura 9 mostra h_1, para $u=z$, enquanto a Figura 10 mostra h_1 para $u > z$. No primeiro caso obtêm-se a igualdade das soluções ótimas e do valor ótimo, enquanto no segundo caso somente as soluções ótimas serão iguais.

BIBLIOGRAFIAS

DANTZIG, G.B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, Princeton University Press, 1963.

FISHER, M.L. An Application Oriented Guide to Lagrangian Relaxation. *Interfaces*, 15:10-21, 1985.

GEOFRION, A.M. Duality in Nonlinear Programming: a simplified applications oriented development. *Siam Review*, 13:1-37, 1971.

——— Lagrangean Relaxation for Integer Programming. *Math. Prog. Study*, 2:82-114, 1974.

LORENA, L.A.N. *Uma nova classe de funções penalidade e sua aplicação a problemas discretos*. Tese de Doutoramento no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1985.

LORENA, L.A.N.; OLIVEIRA, P.R. *Equivalência entre problemas de maximização sujeitos a restrições de desigualdades*. Anais do XVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2:54-270, 1984.

ROCKAFELLAR, R.T. Augmented Lagrange multiplier functions to duality in nonconvex programming. *SIAM J. on Control*, 12:268-283, 1974.

SHAPIRO, J.F. A survey of Lagrangean techniques for discrete optimizations. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:113-137, 1979.

TIND, J.; WOLSEY, L.A. An elementary survey of general duality theory in Mathematical Programming. *Math. Progr.*, 21:241-261, 1981.

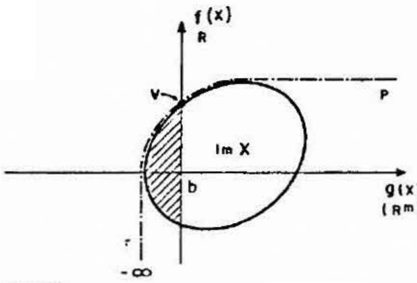

FIGURA 1

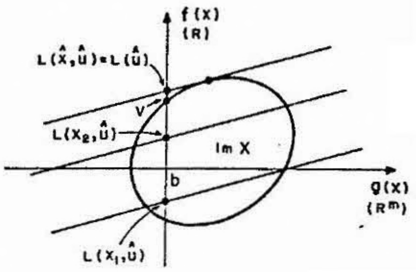

FIGURA 2

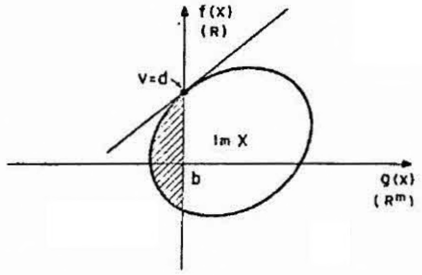

FIGURA 3

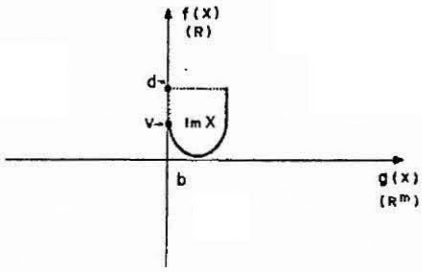

FIGURA 4

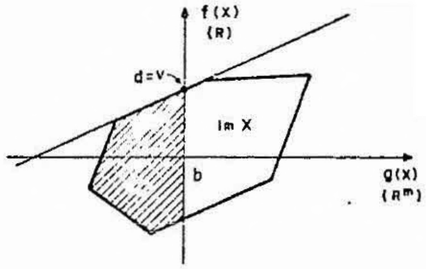

FIGURA 5

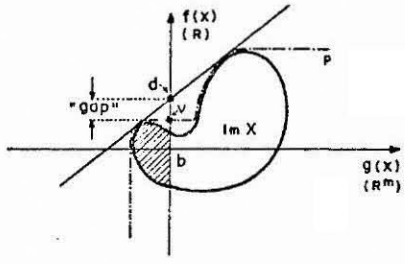

FIGURA 6

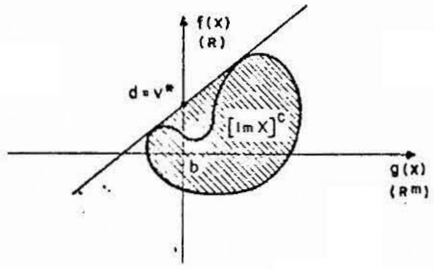

FIGURA 7

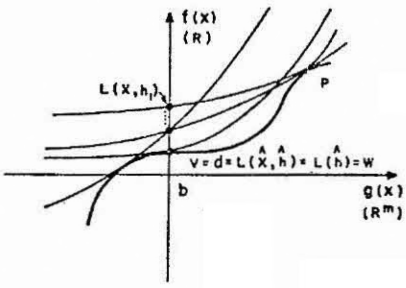

FIGURA 8

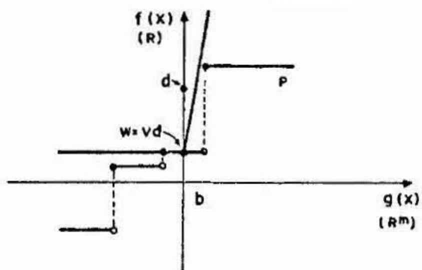

FIGURA 9

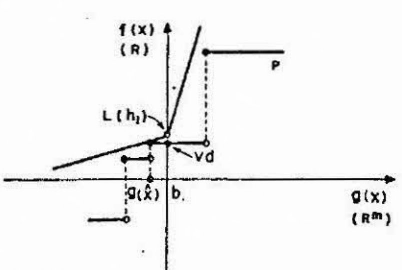

FIGURA 10