



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/03.12.13.05-TDI

ESTABILIDADE DE VEÍCULOS ESPACIAIS EM RESSONÂNCIA

Rubens Antonio Condeles Júnior

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Tadashi Yokoyama, aprovada em 06 de abril de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3QMPS3E>>

INPE
São José dos Campos
2018

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/03.12.13.05-TDI

ESTABILIDADE DE VEÍCULOS ESPACIAIS EM RESSONÂNCIA

Rubens Antonio Condeles Júnior

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Tadashi Yokoyama, aprovada em 06 de abril de 2018.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3QMPS3E>>

INPE
São José dos Campos
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Condeles Júnior, Rubens Antonio.

C751e Estabilidade de veículos espaciais em ressonância / Rubens Antonio Condeles Júnior. – São José dos Campos : INPE, 2018. xxviii + 132 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/03.12.13.05-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Tadashi Yokoyama.

1. Astrodinâmica. 2. Ressonância. 3. Perturbações orbitais. 4. Kozai-Lidov. 5. Estabilidade orbital. I. Título.

CDU 629.7.017.2



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Rubens Antonio Condeles Júnior**

Título: "ESTABILIDADE DE VEÍCULOS ESPACIAIS EM RESSONÂNCIA"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Doutor(a)** em
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente / INPE / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

() Participação por Video - Conferência

Dr. Tadashi Yokoyama



Orientador(a) / UNESP / Rio Claro - SP

() Participação por Video - Conferência

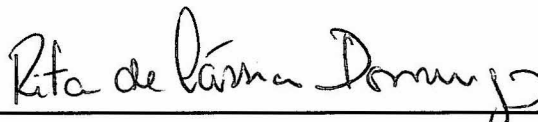
Dr. Diogo Merguizo Sanchez



Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

() Participação por Video - Conferência

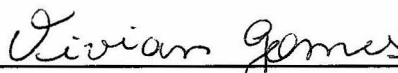
Dra. Rita de Cássia Domingos



Convidado(a) / UNESP / São João da Boa Vista - SP

() Participação por Video - Conferência

Dra. Vivian Martins Gomes



Convidado(a) / UNESP/FEG / Guaratinguetá - SP

() Participação por Video - Conferência

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 06 de abril de 2018

*A meus pais **Rubens** e **Maria Cecília**, a minha esposa **Suzana**, a minhas filhas **Lauren** e **Rúbia**, a meu filho **Leonardo**, a meus irmãos **José Fernando**, **André**, **Pedro** e **Paulo** e a minha irmã **Elisabeth***

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, Rubens e Maria Cecília que sempre me apoiaram.

A minha esposa, Suzana, pelo apoio, carinho, compreensão e pela paciência.

As minhas filhas, Lauren e Rúbia, pelo amor e carinho.

Aos meus irmãos José Fernando, Elisabeth, André, Pedro e Paulo, pelo apoio e incentivo.

Aos meus orientadores Bertachini, Tadashi e Diogo, pela amizade e orientação, pelo apoio no período que estive fora do INPE e principalmente pela compreensão no período em que estive mais afastado.

Ao Geraldo pelo apoio e amizade.

Aos Docentes do INPE.

Aos funcionários do INPE.

A todos os colegas de pós-graduação.

À UFTM, por conceder meu afastamento remunerado para cursar o doutorado.

RESUMO

Neste trabalho é analisada a estabilidade de veículos espaciais em ressonância. Escolhemos o sistema de Haumea por ter propriedades únicas com relação aos sistemas já conhecidos, e é considerado um forte candidato para receber uma missão de exploração. O sistema foi modelado considerando o potencial gravitacional perturbador de Haumea até grau e ordem seis dos polinômios de Legendre e também adicionamos a perturbação de suas duas luas, Namaka e Hi'iaka. Analisamos o desempenho das forças perturbadoras do sistema sobre o veículo espacial através dos métodos da integral da perturbação. Por meio dos mapas da excentricidade máxima da órbita do veículo espacial, do tempo de vida do veículo espacial e da integral da perturbação, avaliamos a estabilidade das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Também avaliamos a estabilidade das órbitas nas ressonâncias de movimentos médios, 1:1 veículo-Hi'iaka e 3:1 veículo-Namaka. Ao final do trabalho avaliamos o mecanismo Kozai-Lidov excêntrico em um sistema de pequenos corpos e aplicamos ao sistema de Haumea, também mostramos em quais cenários o mecanismo pode ocorrer no sistema de Haumea.

Palavras-chave: Astrodinâmica. Ressonância. Perturbações orbitais. Kozai-Lidov. Estabilidade orbital.

STABILITY SPACECRAFT IN RESONANCE

ABSTRACT

In this work the stability of spacecraft in resonance is analyzed. We chose the Haumea system because it has unique properties with respect to known systems, and is considered a strong candidate to receive an exploration mission. The system was modeled considering the disturbing gravitational potential of Haumea up to degree and order six of the Legendre polynomials and also added the perturbation of its two moons, Namaka and Hi'iaka. We analyze the performance of the disturbing forces of the system on the spacecraft through the perturbation integral methods. By means of the maps of the maximum eccentricity of the spacecraft orbit, of the life time of the spacecraft and of the perturbation integral, we evaluated the stability of the orbits of the spacecraft in the Haumea system. We also evaluated the stability of the orbits in mean motion resonances, 1:1 spacecraft-Hi'iaka and 3:1 spacecraft-Namaka. At the end of the study, we evaluated the eccentric Kozai-Lidov mechanism in a of small bodies system and we apply to the Haumea system, we also show in which scenarios the mechanism can occur in the Haumea system

Keywords: Astrodynamics. Kozai-Lidov. Orbital perturbation. Orbital stability. Resonance.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Representação dos harmônicos esféricos. (a) Harmônicos zonais, (b) Harmônicos setoriais e (c) Harmônicos tesserais.	12
3.2 Elipsoide triaxial com $a > b > c$	14
4.1 Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), com $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital, devida a contribuição dos termos C_{20} e C_{22} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.	22
4.2 Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a contribuição dos termos C_{40} , C_{42} e C_{44} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.	23
4.3 Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a contribuição dos termos C_{60} , C_{62} , C_{64} e C_{66} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.	24
4.4 Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a contribuição de todos os termos do potencial perturbador de Haumea.	25
4.5 Representação gráfica das órbitas.	25
4.6 Excentricidade máxima da órbita em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital.	26
4.7 Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial. As órbitas são circulares e equatoriais.	27
4.8 Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, separadas pelos harmônicos do potencial perturbador em escala logarítmica. As órbitas são equatoriais e circulares.	28
4.9 Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, separadas pelos harmônicos do potencial perturbador em escala logarítmica. As órbitas são equatoriais com excentricidade igual a 0,4.	29

4.10	Integral da perturbação total de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial para várias excentricidades de órbitas equatoriais.	30
4.11	Integral da perturbação total de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, para órbitas equatoriais (preto), órbitas inclinadas ($i = 45$ graus) (azul) e órbitas polares (vermelho).	31
4.12	Integral da perturbação de Haumea em função da inclinação (i) do plano orbital do veículo espacial. As órbitas são circulares com semi-eixo maior inicial de 3000 km.	32
4.13	Representação gráfica das órbitas	32
4.14	Integral da perturbação total de Haumea em função da inclinação do plano orbital do veículo espacial para vários semi-eixos maiores iniciais de órbitas circulares.	33
4.15	Integral da perturbação total de Haumea em função da inclinação do plano orbital do veículo espacial para várias excentricidades iniciais de órbitas com semi-eixo maior igual a 4000 km.	34
4.16	Integral da perturbação total de Haumea em função da excentricidade da órbita do veículo espacial para órbitas equatoriais com semi-eixo maior inicial $a = 3000$ km.	35
4.17	Integral da perturbação total de Haumea na escala logarítmica em função da excentricidade da órbita do veículo espacial para vários semi-eixos maiores iniciais de órbitas equatoriais.	36
4.18	Integral da perturbação total de Haumea em função da excentricidade da órbita do veículo espacial, para órbitas equatoriais (preto), inclinada (vermelho) e polar (azul), com semi-eixo maior igual a 3000 km.	36
4.19	Diferença relativa percentual entre as integrais da perturbação truncadas no segundo e quarto graus. Onde, (a) apresenta ΔP em função do semi-eixo maior inicial a_0 com $e_0 = 0$ e $i_0 = 0$ grau, (b) apresenta ΔP em função da inclinação inicial i_0 com $a_0 = 3000$ km e $e_0 = 0$ e (c) apresenta ΔP em função da excentricidade inicial e_0 com $a_0 = 3000$ km e $i_0 = 0$	38
4.20	Diferença relativa percentual entre as integrais da perturbação truncadas no quarto e sexto graus. Onde, (a) apresenta ΔP em função do semi-eixo maior inicial a_0 com $e_0 = 0$ e $i_0 = 0$ grau, (b) apresenta ΔP em função da inclinação inicial i_0 com $a_0 = 3000$ km e $e_0 = 0$ e (c) apresenta ΔP em função da excentricidade inicial e_0 com $a_0 = 3000$ km e $i_0 = 0$	39

4.21	Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a interação com os satélites naturais Namaka e Hi'iaka, respectivamente.	40
4.22	Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, em um período orbital, devida à interação com Namaka, Hi'iaka, respectivamente e da contribuição do termo C_{20} do potencial gravitacional de Haumea.	41
4.23	Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, por um período de 49,44 dias, devida a interação com Namaka (esquerda) e Hi'iaka (direita).	42
4.24	Excentricidade máxima da órbita em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, em um período de 49,44 dias.	42
5.1	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.	45
5.2	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. O gráfico (a) apresenta o argumento do nodo ascendente, (b) mostra o argumento do pericentro, (c) mostra a excentricidade e (d) o semi-eixo maior. Os parâmetros iniciais foram: $a_0 = 2000$ km, $e_0 = 0$, $i_0 = 60$ graus e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau.	47
5.3	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. O gráfico (a) apresenta o argumento do nodo ascendente, (b) mostra o argumento do pericentro, (c) mostra a excentricidade e (d) o semi-eixo maior. Os parâmetros iniciais foram: $a_0 = 2000$ km, $e_0 = 0$, $i_0 = 30$ graus e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau.	48

5.4	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando até o quarto grau e quarta ordem do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.	50
5.5	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando os termos do potencial gravitacional de Haumea de coeficientes C_{20} e C_{22} . A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.	51
5.6	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando o termo de coeficiente C_{20} do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.	52
5.7	Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos.	53
5.8	Tempo de vida do veículo espacial em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos.	54
5.9	Mapa de colisões, capturas e escape em função do semi-eixo maior e da inclinação iniciais.	55
5.10	Mapa de colisão e escape em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais no término de cinco anos de integração do movimento. Neste mapa não aplicamos o critério de capturas.	56
6.1	Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos. A diferença entre as longitudes médias do veículo espacial e de de Hi'iaka é de $\sigma = 42$ graus.	60

6.2	Excentricidade máxima (e_{max}) em função de $\sigma = \lambda_v - \lambda_H$ e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 1 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1$ grau e o tempo de integração é de 10 anos.	61
6.3	Inclinação máxima (i_{max}) em função de $\sigma = \lambda_v - \lambda_H$ e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 1 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1$ grau e o tempo de integração é de 10 anos.	62
6.4	Mapa da perturbação obtido pela PI do primeiro método (PI_i), para as órbitas da Figura 6.2.	62
6.5	Mapa da perturbação obtido pela PI do segundo método (PI_{ii}), para as órbitas da Figura 6.2.	63
6.6	Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}), para as órbitas da Figura 6.2.	63
6.7	Variação máxima de σ para as órbitas da Figura 6.2.	64
6.8	Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de Ω_0 e ω_0 para o tempo de integração de 10 anos.	65
6.9	Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de Ω_0 e σ_0 para o tempo de integração de 10 anos.	65
6.10	Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de a_0 e e_0 para o tempo de integração de 10 anos.	66
6.11	Variação máxima da excentricidade das simulações da Figura 6.10.	67
6.12	Mapa da perturbação obtido pela PI do primeiro método (PI_i), das simulações da Figura 6.10.	68
6.13	Variação máxima da excentricidade em função de a_0 e e_0 para órbitas retrógradas com $\sigma_0 = 60$ graus e tempo de integração de 10 anos	68
6.14	Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}), para as órbitas da Figura 6.13.	69
6.15	Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 0$ e o tempo de integração é de 5 anos (ampliação do mapa 5.7). A seta marca a MMR 3:1 veículo-Namaka.	70
6.16	(a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 12360$ km (MMR Veículo-Namaka 3:1). O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.	71

6.17	(a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 11800$ km. O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.	72
6.18	(a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 12700$ km. O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.	73
6.19	Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_4 = \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 46,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.	74
6.20	Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_5 = \lambda - 3\lambda_N + \varpi + \varpi_N$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 166,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.	75
6.21	Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_6 = \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi_N$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 76,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.	76
7.1	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 90 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.	77
7.2	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 200 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.	78

7.3	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 400 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.	79
7.4	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 500 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.	79
7.5	Mapa de energia de órbitas em torno de Namaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 500 km com tempo máximo de integração de 5 anos.	80
7.6	Situação do veículo espacial em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 500 km com tempo máximo de integração de 5 anos. O diagrama de cores indicam: colisão com Namaka (preto), ainda orbitando Namaka (amarelo) e capturado por Haumea (roxo).	81
7.7	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 200 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.	82
7.8	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 300 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.	83
7.9	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 1000 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.	83
7.10	Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 2500 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.	84
7.11	Mapa de energia de órbitas em torno de Hi'iaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 2500 km com tempo máximo de integração de 5 anos.	84

7.12	Situação do veículo orbitando Hi'iaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 2500 km com tempo máximo de integração de 5 anos. O diagrama de cores indicam: colisão com Hi'iaka (preto), ainda orbitando Hi'iaka (amarelo) e capturado por Haumea (azul).	85
8.1	Resultados de um sistema planetário similar ao adotado por Naoz (NAOZ et al., 2011): O primeiro gráfico mostra a inclinação da órbita do corpo interno (i_1) em função do tempo. O segundo gráfico mostra a excentricidade da órbita do corpo interno (e_1) em função do tempo. Os dois últimos gráficos mostram as projeções do momento angular das órbitas interna e externa sobre o momento angular total, respectivamente.	88
8.2	Resultados da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.1. (a) gráfico da inclinação em função do tempo. (b) gráfico da excentricidade em função do tempo, (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente em função do tempo, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.	90
8.3	Resultados da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.2. (a) gráfico da inclinação em função do tempo. (b) gráfico da excentricidade em função do tempo, (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente em função do tempo, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.	91
8.4	Curvas Kozai no plano $e - i$ da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.1 para o gráfico (a) e com as condições iniciais da Tabela 8.2 para o gráfico (b).	92
8.5	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra o ângulo $\Delta\varpi$ oscilando em torno de 180 graus (verde) e $\Delta\varpi$ filtrado com filtro FFT passa baixa com a frequência de corte igual a 0.02 ciclos por ano (preto). O gráfico (b) mostra a evolução da longitude do pericentro da órbita interna. E (c) mostra a longitude do pericentro da órbita externa.	93
8.6	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.	95

8.7	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.	96
8.8	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.	98
8.9	Análise da distinção qualitativa entre órbita direta e retrógrada: Nesta figura, temos a inclinação do plano orbital em função do tempo, mostrando órbitas diretas (verde) e órbitas retrógradas (vermelho) (a); excentricidade representada por $1 - e_1$ (b) e $\Delta\varpi$ (c).	99
8.10	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. Anomalia verdadeira do corpo perturbador (preto), inclinação do corpo perturbado (azul) e a energia do corpo perturbado (vermelho) durante a evolução de um pico no valor da inclinação do corpo perturbado.	100
8.11	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. Projeção das órbitas no plano xy, do corpo perturbado (a) e do corpo perturbador dividido por um fator 2 (b).	101
8.12	Integral da perturbação (modelo PI_{ii}) em função do tempo, calculada com intervalos de tempo de 20 períodos orbitais do corpo perturbado (azul), excentricidade em função do tempo (vermelho).	102
8.13	Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2, definindo o mapa da excentricidade máxima (e_{max}) (A), variação da inclinação ($i_{max} - i_{min}$), e o tempo de vida da órbita do corpo perturbado (C,D,E,F,G e H), todo em função de a_1 e i_1	104
8.14	Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3. O primeiro gráfico (a) mostra a inclinação em função do tempo. O segundo gráfico (b) mostra a excentricidade em função do tempo. (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.	106
8.15	Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3. O gráfico (a) mostra o ângulo $\Delta\varpi$. (b) mostra a evolução da longitude do pericentro do corpo de órbita interna. (c) mostra a longitude do pericentro do corpo de órbita externa.	107

8.16	Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3 com algumas alterações: (a) $\omega_{\odot} = 90^{\circ}$, (b) ($e_{\odot} = 0.1$ e $i_{\odot} = 2^{\circ}$), (c) usamos o mesmo conjunto de dados do primeiro caso do sistema de quatro corpos, porém, a perturbação do quarto corpo não tem efeito sobre o corpo M_2	108
8.17	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra a inclinação da órbita, (b) apresenta a excentricidade, (c) o argumento do pericentro e (d) o argumento do nodo ascendente.	110
8.18	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra $\Delta\varpi$, (b) apresenta a longitude do pericentro a órbita do veículo espacial (ϖ_1) e (c) a longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2).	111
8.19	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka e Hi'iaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) temos o semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, (b) mostra a inclinação da órbita, (c) apresenta a excentricidade, (d) o argumento do pericentro e (e) o argumento do nodo ascendente.	112
8.20	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka e Hi'iaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra $\Delta\varpi$, (b) apresenta a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial (ϖ_1) e (c) a longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2).	113
8.21	Resultado da perturbação de Hi'iaka sobre Namaka. (a) inclinação de Namaka e (b) excentricidade de Namaka.	114
8.22	Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Variação da inclinação ($\Delta i = i_{max} - i_{min}$) em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0, 4$	115
8.23	Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Variação da excentricidade ($\Delta e = e_{max} - e_{min}$) em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0, 4$	116

8.24	Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Tempo de vida em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0,4$	116
8.25	Curvas Kozai para duas órbitas distintas. (a) Ressonância 4:1 entre o veículo espacial e Namaka ($a = 10150$ km). (b) Órbita com $a = 10000$ km. Para os dois casos, $e = 0,4, i = 40$ graus, $\omega = \Omega = M = 0$ grau.	117
8.26	Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka, Hi'iaka e pelo potencial perturbador de Haumea. Em (a) mostra a inclinação da órbita, (b) apresenta a excentricidade, (c) o argumento do pericentro e (d) o argumento do nodo ascendente.	118
A.1	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,1$	129
A.2	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,2$	129
A.3	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,3$	130
A.4	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,4$	130
A.5	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,5$	130
A.6	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,6$	131
A.7	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,7$	131
A.8	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,8$	131
A.9	Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,9$	132

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos do potencial gravitacional de Haumea obtidos por meio das Equações 3.10.	15
3.2 Valores normalizados dos coeficientes dos harmônicos esféricos do potencial gravitacional de Haumea.	15
4.1 Alguns dados físicos e parâmetros orbitais do sistema Haumea utilizados na simulação	21
8.1 Valores iniciais para a simulação do modelo de três corpos fictício baseado nos dados do sistema triplo de asteroides 2001SN263. Estes dados iniciais geram os resultados que mostram o efeito Kozai padrão sobre o corpo de órbita interna.	89
8.2 Valores iniciais para a simulação do modelo de três corpos fictício baseado nos dados do sistema triplo de asteroides 2001SN263. Estes dados iniciais geram os resultados que mostram os flips do plano orbital do corpo de órbita interna.	91
8.3 Valores iniciais para a simulação do quarto corpo (Sol) inserido no sistema triplo de asteroides baseados nos dados do sistema 2001SN263.	105

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Sistema de Haumea	5
2.2 Perturbação devida ao corpo central	6
2.3 Perturbação pela presença de um terceiro corpo e ressonâncias	7
2.4 Inferência para o desenvolvimento do presente trabalho	8
3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO E METODOLOGIA	11
3.1 Formalismo das equações de movimento e perturbações	11
3.2 Integral da perturbação (Perturbation Integral - PI)	16
3.3 Ressonâncias de movimento médio (Mean Motion Resonances - MMR).	17
3.4 Mecanismo Kozai	19
3.5 Integração Numérica	20
4 Potenciais perturbadores de Haumea, Namaka e Hi'iaka	21
4.1 Mapas topográficos do potencial perturbador de Haumea	21
4.2 Simulações do potencial perturbador de Haumea em vários cenários	26
4.3 Mapas topográficos das perturbações de Namaka e Hi'iaka	40
5 Estudo da estabilidade das órbitas pelo período de cinco anos	43
6 Ressonâncias de movimentos médios (MMRs)	59
6.1 MMR 1:1 veículo espacial-Hi'iaka	59
6.2 MMR 3:1 veículo espacial-Namaka	69
7 Estudo da dinâmica de veículos espaciais orbitando Namaka e Hi'iaka	77
7.1 Veículos espaciais orbitando Namaka	77
7.2 Veículos espaciais orbitando Hi'iaka	81
8 Flips do plano orbital em sistemas de pequenas massas (Ressonância Kozai)	87
8.1 Validação do modelo	87

8.2	Caso 1: Sistema triplo de asteroides	89
8.3	Caso 2: Adicionando um quarto corpo ao sistema	105
8.4	Aplicação no sistema de Haumea	109
8.5	Discussão geral do capítulo	119
9	CONCLUSÕES	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
	APÊNDICE A - Resultados Extras das Simulações.	129
A.1	Mapas de e_{max} e Tempo de Vida em função de i_0 e a_0	129

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da ciência moderna até o final do século passado a astronomia do sistema solar caracterizava de forma categórica os corpos celestes denominados planetas. O avanço da tecnologia e da metodologia de observação dos corpos do sistema solar proporcionaram, nos últimos anos, observar de forma mais precisa os corpos que orbitam além da órbita de Netuno. Foram descobertos vários corpos, dentre os quais, alguns apresentando características semelhantes às de Plutão. Neste aspecto, os novos corpos seriam classificados como planetas, aumentando de forma expressiva a quantidade de planetas no sistema solar. Diante deste fato, a União Astronômica Internacional redefiniu as regras de classificação dos corpos celestes, caracterizando-os de forma mais precisa quanto a sua interação com os pequenos corpos do sistema solar e suas características físicas. De acordo com as novas regras, surgiu a categoria denominada planeta anão. Faz parte desta categoria o corpo celeste que está em órbita ao redor do sol, tenha massa suficiente para que sua autogravidade supere as forças de corpo rígido de maneira que ele assuma o equilíbrio hidrostático e tenha a forma quase esférica, não limpou as vizinhanças de sua órbita e não seja um satélite (IAU., 2006a). De acordo com as novas regras, Plutão (IAU., 2006b) e o asteroide Ceres, passam ser classificados como planetas anões. Dentre as novas descobertas, três corpos já são classificados como planetas anões, Éris, Makemake e Haumea, descobertos por Mike Brown (BROWN et al., 2005b; BROWN et al., 2005a).

Com o aumento da descoberta de novos corpos celestes, houve também um aumento no interesse em estudá-los mais diretamente, principalmente os objetos transnetunianos. Porém, para cumprir esta tarefa, há a necessidade do envio de sondas espaciais. A “New Horizons” foi a primeira sonda dedicada a fazer o reconhecimento do planeta anão Plutão e explorar o cinturão de Kuiper. Lançada em janeiro de 2006, efetuou uma passagem por Plutão em julho de 2015, registrando imagens de sua atmosfera e da superfície. A sonda “Dawn”, lançada em setembro de 2007, orbitou o asteroide Vesta entre julho de 2011 e setembro de 2012 e iniciou a orbitar o planeta anão Ceres em março de 2015.

Neste cenário, o sistema de Haumea é um forte candidato a receber missões exploratórias. Pois, este sistema tem características únicas comparadas com as características dos outros corpos já conhecidos do sistema solar (KONDRATYEV, 2016). Tem o formato de um elipsoide triaxial, possui curto período de rotação e tem dois satélites naturais, Namaka e Hi'iaka.

Como motivação, estes fatos justificam o estudo da dinâmica de veículos espaciais

no sistema de Haumea. O estudo desenvolvido neste trabalho tem como objetivo explorar a estabilidade de veículos espaciais em ressonância neste sistema. Então o estudo foi conduzido da seguinte forma: foram caracterizadas as perturbações do sistema sobre o veículo espacial. Posteriormente foi realizado o estudo da estabilidade do veículo espacial no sistema, que permitiu a identificação de algumas ressonâncias de movimentos médios notáveis para desenvolver o estudo da estabilidade do veículo na ressonância. Foi desenvolvido o estudo da estabilidade do veículo espacial orbitando Namaka e Hi'iaka. Finalizando o trabalho foi desenvolvida a possibilidade da ocorrência de “flip” (virada) do plano orbital em sistemas de pequenas massas com aplicação em um veículo espacial no sistema de Haumea (ressonância Kozai-Lidov).

A metodologia e o formalismo teórico adotados neste trabalho podem ser relacionados da seguinte forma: Adotamos o formalismo do problema de N corpos para modelar o movimento dos corpos do sistema. Este formalismo incorpora as perturbações dos N-2 corpos sobre o corpo perturbado. Adotamos a expansão dos polinômios de Legendre para o modelo da perturbação devida ao formato do corpo central. Para o estudo da intensidade das perturbações adotamos o método da integral da perturbação. A ressonância de movimentos médios foi determinada pela relação entre as frequências dos movimentos médios dos corpos perturbado e perturbador e também identificadas por meio de mapas de variação da excentricidade em função da inclinação e do semi-eixo maior. Para o estudo da ocorrência do mecanismo Kozai, também conhecido como ressonância Kozai, usamos o conceito do acoplamento entre a inclinação e a excentricidade que pode ser verificado por meio da curva $i \times e$, denominada como curva Kozai. E a construção de mapas da dinâmica das órbitas foi um método recorrente para avaliar a estabilidade das órbitas. O detalhamento das metodologias e formalismos é apresentado no capítulo 3.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O capítulo 2 apresenta o estudo bibliográfico do sistema de Haumea e os estudos bibliográficos introduzindo os conceitos abordados no desenvolvimento teórico e metodologia. Este capítulo também apresenta a inferência do estudo bibliográfico para o desenvolvimento deste trabalho. O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento teórico e a metodologia utilizados para a modelagem do problema. O capítulo 4 apresenta os resultados do estudo dos potenciais perturbadores de Haumea, Namaka e Hi'iaka. O capítulo 5 mostra os resultados do estudo da estabilidade das órbitas ao longo do período de cinco anos. O capítulo 6 apresenta os resultados do estudo das ressonâncias de movimentos médios (MMRs). O capítulo 7 apresenta os resultados do estudo da dinâmica de veículos espaciais orbitando Namaka e Hi'iaka. O capítulo 8 apresenta os resultados do es-

tudo de flips do plano orbital em sistemas de pequenas massas (ressonância Kozai) com aplicação no sistema de Haumea e o capítulo 9 apresenta as conclusões.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresentamos o estudo para estabelecer o conhecimento do sistema de Haumea, da ação do potencial gravitacional perturbador do corpo central sobre os corpos que o orbitam, e dos efeitos das perturbações devidas aos satélites naturais sobre um corpo inserido no sistema com relevância para as ressonâncias.

2.1 Sistema de Haumea

O sistema de Haumea possui característica única comparada ao que já é conhecido do sistema solar, fato devido ao formato e a dinâmica de Haumea (KONDRATYEV, 2016). O planeta anão Haumea tem o formato que se assemelha a um elipsoide triaxial (RABINOWITZ et al., 2006), com período de rotação de 3,9155 horas (RAGOZZINE; BROWN, 2009). É orbitado por dois satélites naturais, Namaka de órbita interna com semi-eixo maior $a = 25657$ km e período orbital de 18,278 dias e Hi'iaka com semi-eixo maior $a = 49880$ km e período orbital de 49,462 dias (RAGOZZINE; BROWN, 2009). Haumea possui a superfície coberta com gelo, e recentemente (em 2017), foi encontrado em torno de Haumea, um anel de 70 km de largura e 2287 km de raio (DUMAS et al., 2011; THIROUIN et al., 2016; ORTIZ et al., 2017). É um planeta distinto dos demais principalmente pela alta velocidade de rotação além de sua forma elipsoidal proeminente. Também os estudos indicam que Namaka e Hi'iaka estão orbitando numa configuração próxima à ressonância 8:3 de movimento médio, e provavelmente, tenham passados pela ressonância de movimento médio 3:1 (RAGOZZINE; BROWN, 2009).

Observações e medições realizadas desde o descobrimento de Haumea e suas luas, formam um conjunto suficiente de dados para a modelagem da dinâmica deste sistema (RABINOWITZ et al., 2006; RAGOZZINE; BROWN, 2009; LOCKWOOD et al., 2014). Vários modelos da dinâmica deste sistema vem sendo apresentados. Temos, desde modelos que buscam determinar o motivo da configuração atual da dinâmica de Namaka e Hi'iaka (SCHLICHTING; SARI, 2009; CUK et al., 2013) a modelos que determinam a forma mais eficiente de introduzir e manter sondas exploratórias no sistema (SANCHEZ et al., 2014; SANCHEZ, 2015).

Schlichting e Sari (2009) propõe um modelo para a formação da família colisional de Haumea, incluindo suas luas, que ocorre na seguinte sequência: Haumea sofre um grande impacto, esta colisão dá origem ao rápido período de rotação de Haumea, que ejeta material para formar um único satélite. Este satélite sofre uma evolução por maré, que aumenta o semi-eixo maior de sua órbita. Posteriormente, o satélite

sofre uma colisão destrutiva com um objeto do cinturão de Kuiper. Os detritos da colisão são ejetados, formando os objetos da família colisional de Haumea, além de formar as duas luas Namaka e Hi'iaka.

Cuk et al. (2013) estudaram a dinâmica de longo prazo dos dois satélites naturais de Haumea usando integrações numéricas. Chegaram à conclusão de que a melhor explicação para a atual configuração do sistema de Haumea consiste da ruptura por colisão de uma grande lua de Haumea, onde os detritos que escaparam formaram os objetos da família de Haumea, enquanto os detritos ligados a Haumea formaram um grande disco a partir do qual Namaka e Hi'iaka se formaram.

Sanchez (2015) realizou um estudo mapeando a intensidade das perturbações do sistema formado por Haumea utilizando a técnica da integral das acelerações perturbadoras gerando os mapas de perturbações. Por meio deste estudo foram determinadas várias configurações de manutenção orbital de sondas espaciais para diferentes objetivos de missões. Cobrindo desde órbitas estáveis (pelo menos 5 anos de duração) que possibilita a coleta sistemática de dados, até órbitas instáveis que levam à colisão com Haumea ou com uma de suas luas, para coleta de dados na superfície.

2.2 Perturbação devida ao corpo central

O modelo matemático mais usado para a perturbação devida a distribuição da massa do corpo central é a expansão dos polinômios de Legendre. Este modelo é recorrente nos livros textos que tratam de dinâmica orbital e mecânica celeste (CURTIS, 2014; VALLADO, 1997).

Quanto à atuação da perturbação do corpo central, os efeitos dos harmônicos zonais predominam, gerando perturbações seculares, perturbações de longo período e perturbações de curto período. A longitude do nodo ascendente (Ω), o argumento do periastro (ω), e a anomalia média (M) são os elementos orbitais afetados pelas perturbações seculares (VALLADO, 1997). Porém, considerando que Haumea tem um proeminente achatamento equatorial os efeitos dos harmônicos setoriais devem ser considerados, bem como os efeitos dos harmônicos tesserais. Estas considerações são importantes na obtenção de resultados mais precisos em simulações de longo prazo (CURTIS, 2014; VALLADO, 1997).

Cuk et al. (2013) utilizou somente o termo correspondente ao achatamento de Haumea (termo J_2) para o estudo da origem das luas de Haumea.

Sanchez (2015) utilizou a expansão dos polinômios de Legendre até o grau e ordem

4 estabelecendo os mapas das perturbações, que determinaram o conjunto das condições iniciais do veículo espacial pertinentes ao tipo de missão desejada no sistema de Haumea.

2.3 Perturbação pela presença de um terceiro corpo e ressonâncias

Quanto à presença do terceiro corpo, temos perturbações seculares no argumento do periastro e na longitude do nodo ascendente. Os movimentos dos periastrós do corpo perturbado e do corpo perturbador causam variações de longo período na excentricidade, inclinação, argumento do periastro e na longitude do nodo ascendente (VALLADO, 1997). O efeito destas perturbações são ampliadas quando o corpo perturbado está em ressonância de movimentos médios com o corpo perturbador, ou seja, quando há a comensurabilidade entre o período orbital do corpo perturbado e o período orbital do corpo perturbador (MURRAY; DERMOTT, 1999). Nesta configuração as perturbações mútuas se repetem periodicamente resultando o aumento da amplitude dessas perturbações. Portanto, as variações de longo período nos elementos orbitais do veículo espacial podem influenciar no tempo de vida da missão.

Sanchez e Prado (2017) realizaram um estudo da estabilidade de sondas espaciais por meio de mapas de perturbações na região próxima a Namaka considerando as perturbações de Namaka e Hi'iaka. A região estudada compreende a região de semi-eixos maiores entre 20000 km e 30000 km. Os resultados mostraram que esta região é caótica, contudo, encontraram uma região ao redor de Namaka com baixa perturbação. Esta menor perturbação ocorre quando a sonda espacial está em movimento coorbital com Namaka, próxima à ressonância de movimentos médios 1:1, sendo a região das órbitas retrógradas mais estável, contendo uma região de menor perturbação mais larga comparada com a região de menor perturbação das órbitas diretas.

As perturbações causadas pelo terceiro corpo também podem levar a grandes variações na excentricidade e na inclinação do corpo perturbado de forma acoplada. Perturbações com esta característica são denominadas de mecanismo Kozai-Lidov (KOZAI, 1962; LIDOV, 1962).

Ford et al. (2000), mostraram que o desenvolvimento das equações de perturbação secular para um sistema triplo, usando a Hamiltoniana de perturbação clássica até a terceira ordem, permite analisar o mecanismo Kozai-Lidov em sistemas com alta inclinação e alta excentricidade.

Yokoyama et al. (2003) desenvolveram uma abordagem analítica com a função perturbadora truncada na quarta ordem para o estudo dos satélites exteriores de Júpiter. Este desenvolvimento apresenta nos resultados o que agora é conhecido como mecanismo Kozai excêntrico (Eccentric Kozai Mechanism - EKM) (LITHWICK; NAOZ, 2011) ou mecanismo Kozai-Lidov excêntrico (Eccentric Kozai-Lidov - EKL).

Naoz et al. (2011), realizaram um estudo que, por meio do mecanismo Kozai-Lidov, conseguiram explicar as órbitas retrógradas de “Hot-Jupiters” que não poderiam ser explicadas por meio da teoria de formação de planetas, que assume que os sistemas planetários são formados de um disco de matéria, gerando somente órbitas diretas para os planetas. No estudo desenvolvido por Naoz et al. (2011), que também foi utilizada a Hamiltoniana de perturbação clássica desenvolvida até a terceira ordem, foi obtido como resultado que a perturbação por um terceiro corpo massivo (um planeta ou um corpo celeste como uma anã marrom) que possui órbita de alta excentricidade, pode causar “flips” do plano orbital do corpo perturbado, levando um corpo com órbita direta para órbita retrógrada e vice-versa, desde que o plano orbital do corpo perturbado tenha alta inclinação com relação ao plano orbital do corpo perturbador (≈ 60 graus). Mostraram também, que a condição necessária para a ocorrência do “flip” do plano orbital é a evolução da órbita do corpo perturbado para altas excentricidades, atingindo valores próximos de uma unidade.

Vários estudos foram realizados com o objetivo de aprofundar o conhecimento deste mecanismo e seu efeito sobre exoplanetas em sistemas de estrelas binárias e planetas perturbados por um terceiro corpo de grande massa (CARVALHO et al., 2013; NAOZ et al., 2013; LI et al., 2014; CARVALHO et al., 2015b; CARVALHO et al., 2015a; MORAES et al., 2015).

2.4 Inferência para o desenvolvimento do presente trabalho

Os tópicos abordados neste capítulo estabelecem o direcionamento para o desenvolvimento deste trabalho. A bibliografia adotada neste trabalho fornece um conjunto de dados, sobre o sistema de Haumea, que permitem aprimorar o que já se conhece deste sistema e produzir novas descobertas.

Quanto ao modelo da perturbação devida a Haumea, os trabalhos relacionados na bibliografia adotaram a expansão dos polinômios de Legendre. Destes trabalhos, o que apresentou maior expansão destes polinômios desenvolveu até grau e ordem 4. No presente trabalho vamos utilizar a expansão dos polinômios de Legendre até o grau e ordem 6 e comparar com os modelos que abordam a expansão dos polinô-

mios de Legendre até grau e ordem inferiores 6. Deste estudo esperamos verificar a aplicabilidade dos modelos quanto ao grau e a ordem da expansão.

Usando o modelo da perturbação por Haumea, juntamente com a perturbação devida às luas de Haumea, vamos estudar a estabilidade das órbitas dos veículos espaciais inseridos no sistema de Haumea. Deste estudo, esperamos encontrar regiões de condições iniciais para o movimento orbital que sejam interessantes para desenvolver o estudo da estabilidade de veículos espaciais em ressonância.

As perturbações produzidas por Namaka e por Hi'iaka provocam o surgimento de ressonâncias de movimentos médios e ressonâncias do tipo Kozai-Lidov. Vamos explorar as ressonâncias de movimentos médios com relação a Namaka e com relação a Hi'iaka, visto que, até este momento, somente a ressonância de movimentos médios 1:1 com Namaka já foi muito bem estudada.

Atualmente, o uso do conceito da ressonância do tipo Kozai-Lidov aparece frequentemente para explicar as órbitas de elevada inclinação ou retrógradas de sistema extrassolares. O caso da órbita retrógrada é explicado pelo flip do plano orbital. Neste trabalho vamos verificar a possibilidade da ocorrência de flips do plano orbital em sistemas de pequenas massas, tais como, um sistema triplo de asteroides e um veículo espacial no sistema de Haumea. Entretanto, como vimos na seção 2.3, o flip ocorre quando a órbita do corpo perturbado atinge uma excentricidade muito elevada, muito próxima de uma unidade. Portanto, sistemas de pequenos corpos, não admitem, fisicamente, órbitas de excentricidades tão elevadas. Pois este mecanismo pode levar o corpo perturbado à colisão com o corpo central ou expelir o corpo perturbado para fora do sistema. Entretanto, os resultados numéricos das simulações em sistemas de pequenos corpos poderão mostrar a inexistência de órbitas retrógradas geradas pelo mecanismo Kozai-Lidov em sistemas de pequenos corpos.

3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO E METODOLOGIA

3.1 Formalismo das equações de movimento e perturbações

As equações de movimento dos corpos são dadas pelas equações de movimento para o sistema de N-corpos. Estas equações podem ser escritas da seguinte forma (GEYLING; WESTERMAN, 1971; ROY, 1965; ROY, 2005; VALLADO, 1997; MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G(m_n + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_{in}^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_{jn}^3} \right) \quad (3.1)$$

onde G é a constante gravitacional, o índice n refere-se ao corpo central. A parcela que contém o somatório, representa a perturbação dos m_j corpos sobre o corpo m_i . Os termos referentes à primeira parcela do somatório representam as perturbações diretas da ação gravitacional dos m_j corpos do sistema sobre o corpo de massa m_i , os termos referente à segunda parcela do somatório representam as perturbações indiretas provenientes da interação dos m_j corpos sobre o corpo central. No caso do sistema Haumea, $j = 2$, referentes aos satélites naturais Namaka e Hi'iaka.

Para completar a equação de movimento para o sistema de Haumea, foi adicionado o termo \vec{P}_c que representa a perturbação devida a forma do corpo central. Adicionando o veículo espacial, temos um sistema de quatro corpos e $j = 3$. Porém, a massa do veículo espacial é desprezível. Desta forma, a equação completa pode ser escrita como,

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G(m_n + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_{in}^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_{jn}^3} \right) + \vec{P}_c \quad (3.2)$$

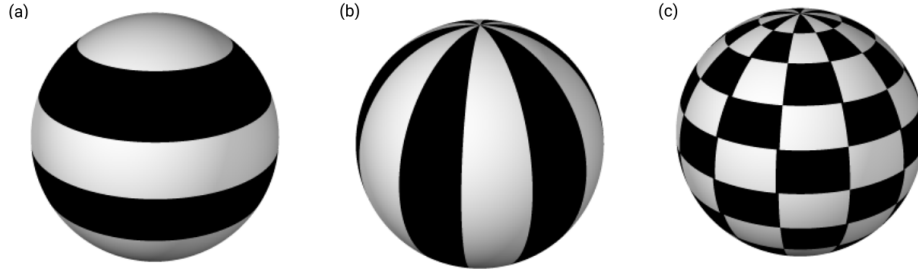
O potencial perturbador do corpo central em coordenadas polares esféricas, com referencial fixo ao corpo e no seu centro de massa, pode ser escrito da seguinte forma (VALLADO, 1997; ROSSI et al., 1999; BALMINO, 1994):

$$U(r, \lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sen(m\lambda)) P_{nm}(\sen(\phi)) \quad (3.3)$$

onde, $\mu = Gm_n$, a_e é o raio equatorial do planeta, r é a distância do veículo espacial ao centro de massa do planeta, λ é a longitude planetocêntrica, ϕ é a latitude planetocêntrica, C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos e P_{nm} são as funções associadas de Legendre.

Os harmônicos esféricos se dividem em três tipos de termos, harmônicos zonais, setoriais e tesserais (KUGA et al., 2011; VALLADO, 1997). Os harmônicos zonais são definidos pelos termos de ordem zero ($m = 0$), eles não dependem da longitude (λ) e divide a esfera em zonas, como mostra a figura 3.1(a). Os harmônicos setoriais são definidos pelos termos onde $n = m$, eles dividem a esfera em setores, como mostra a figura 3.1(b). E os harmônicos tesserais, definidos pelos termos $n \neq m$ para $m \neq 0$, dividem a esfera em compartimentos, como mostra a figura 3.1(c). O conhecimento destas características permite discutir o efeito dos harmônicos, por tipo de harmônico, sobre o corpo perturbado.

Figura 3.1 - Representação dos harmônicos esféricos. (a) Harmônicos zonais, (b) Harmônicos setoriais e (c) Harmônicos tesserais.



Com o objetivo de evitar a singularidade nos polos representamos a Equação 3.3 na forma uniforme dada pela Equação 3.4 (PINES, 1973):

$$U(r, \lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm} r_m + S_{nm} i_m) A_{nm}(\text{sen}(\phi)) \quad (3.4)$$

onde, $r_m = \cos(m\lambda) \cos^m(\phi)$, $i_m = \text{sen}(m\lambda) \cos^m(\phi)$ e os polinômios derivados de Legendre são dados pela Equação 3.5,

$$A_{nm} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{(d \text{sen}(\phi))^{n+m}} (\text{sen}^2(\phi) - 1)^n \quad (3.5)$$

onde d representa a derivada.

Os coeficientes dos harmônicos esféricos para o potencial gravitacional tornam-se muito pequenos à medida que o grau e a ordem aumentam. Isto provoca erros de arredondamentos nas operações computacionais. Para evitar os erros de arredondamentos usamos a forma normalizada dos coeficientes (Equação 3.6) e dos polinômios (Equação 3.7) (VINTI, 1971; VALLADO, 1997).

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[\frac{(n+m)!}{\varepsilon_m (2n+1)(n-m)!} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\bar{A}_{nm} = \left[\frac{\varepsilon_m (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} A_{nm} \quad (3.7)$$

com

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ 2, & \text{se } m \geq 1. \end{cases}$$

Agora podemos escrever a função perturbadora devida ao corpo central da seguinte forma.

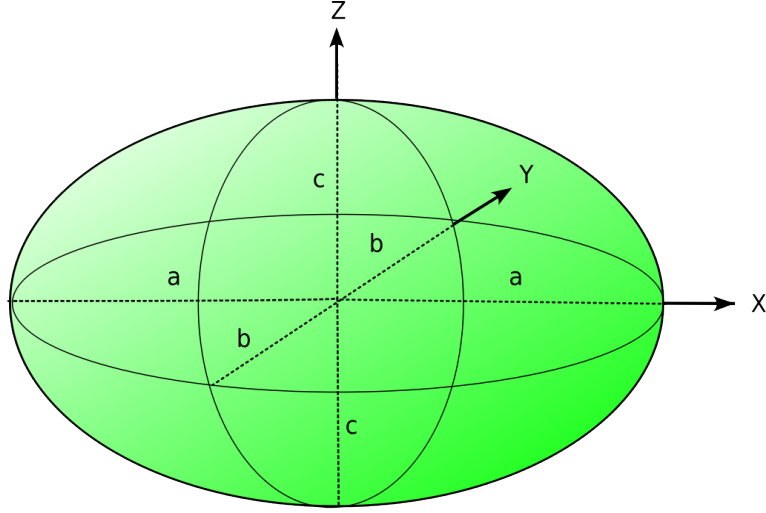
$$U(r, \lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} r_m + \bar{S}_{nm} i_m) \bar{A}_{nm}(\text{sen}(\phi)) \quad (3.8)$$

Quanto ao formato de Haumea, medidas efetuadas determinam que trata-se de um elipsoide triaxial ou elipsoide de Jacobi (Figura 3.1) (RABINOWITZ et al., 2006). Sendo os semi-eixos do plano equatorial nomeados por a e b e o semi-eixo perpendicular ao plano sendo c , este elipsoide tem a seguinte relação para os semi-eixos: $a > b > c$.

Considerando esta relação, foram determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos, dados pela Equação 3.9 (BALMINO, 1994):

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{2 - \delta_{m0}}{a_e^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M (r')^n P_{nm}(\text{sen}(\phi')) \begin{bmatrix} \cos(m\lambda') \\ \text{sen}(m\lambda') \end{bmatrix} dM \quad (3.9)$$

Figura 3.2 - Elipsoide triaxial com $a > b > c$.



onde as variáveis com índice (') determinam a posição do elemento de massa a ser integrado e δ_{m0} é o delta de Kronecker.

Integrando as Equações 3.9 obtemos as equações para os coeficientes do polinômio de Legendre até grau e ordem 6 (Equações 3.10):

$$\begin{aligned}
 C_{20} &= \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{10a_e^2}, \\
 C_{22} &= \frac{(a^2 - b^2)}{20a_e^2}, \\
 C_{40} &= \frac{3(3(a^4 + b^4) + 8c^2(c^2 - a^2 - b^2) + 2a^2b^2)}{280a_e^4}, \\
 C_{42} &= \frac{(a^2 - b^2)(2c^2 - a^2 - b^2)}{280a_e^4}, \\
 C_{44} &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{2240a_e^4}, \\
 C_{60} &= \frac{1}{336a_e^6}(2c^2 - (a^2 + b^2))(5(a^4 + b^4) + 8c^2(c^2 - a^2 - b^2) - 2a^2b^2), \\
 C_{62} &= \frac{1}{6720a_e^6}(a^2 - b^2)(16c^2(c^2 - a^2 - b^2) + 5(a^4 + b^4) + 6a^2b^2), \\
 C_{64} &= \frac{(a^2 - b^2)^2(2c^2 - a^2 - b^2)}{40320a_e^6}, \\
 C_{66} &= \frac{(a - b)^3(a + b)^3}{483840a_e^6},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $S_{nm} = 0$ para todos n e m , $C_{nm} = 0$ se n ou m ou ambos forem ímpares. O coeficiente C_{40} apresentado na Equação 3.10 difere da equação referente a este coeficiente apresentada por Rossi et al. (1999), porém, as integrais foram conferidas e verificamos que a equação do artigo do Rossi et al. (1999) está errada.

Medidas do formato de Haumea mostram que os valores dos eixos ($2a \times 2b \times 2c$) são dados por $(1920 \times 1540 \times 990)$ km (LOCKWOOD et al., 2014). A Tabela 3.1 apresenta os valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos obtidos por meio das Equações 3.10, e a Tabela 3.2 apresenta os valores normalizados dos coeficientes.

Tabela 3.1 - Valores dos coeficientes dos harmônicos esféricos do potencial gravitacional de Haumea obtidos por meio das Equações 3.10.

Coeficiente	valor
C_{20}	$-1,11159939 \times 10^{-1}$
C_{22}	$1.78331163 \times 10^{-2}$
C_{40}	$2.78412261 \times 10^{-2}$
C_{42}	$-1.41594866 \times 10^{-3}$
C_{44}	$5.67892924 \times 10^{-5}$
C_{60}	$-9.43843979 \times 10^{-3}$
C_{62}	$2.69079479 \times 10^{-4}$
C_{64}	$-3.50705239 \times 10^{-6}$
C_{66}	$9.37713016 \times 10^{-8}$

Tabela 3.2 - Valores normalizados dos coeficientes dos harmônicos esféricos do potencial gravitacional de Haumea.

Coeficiente	valor
\bar{C}_{20}	$-4.97122361 \times 10^{-2}$
\bar{C}_{22}	$2.76269450 \times 10^{-2}$
\bar{C}_{40}	$9.28040869 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{42}	$-6.33231492 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{44}	$2.68775988 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{60}	$-2.61775220 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{62}	$2.16296028 \times 10^{-3}$
\bar{C}_{64}	$-9.26450239 \times 10^{-4}$
\bar{C}_{66}	$4.02486903 \times 10^{-4}$

3.2 Integral da perturbação (Perturbation Integral - PI)

Uma forma de analisar a perturbação sobre o veículo espacial é a utilização do método da integral da perturbação (PI). Originalmente, a integral da perturbação foi desenvolvida com o objetivo de buscar órbitas que minimizem o consumo de combustível para manobras de manutenção de estações (PRADO, 2013). Como a PI é baseada na integral das forças perturbadoras ao longo do tempo, o resultado fornece a variação de velocidade devida à força perturbadora com relação à órbita kepleriana. Desta forma, a correção da órbita pode ser efetuada aplicando uma variação de velocidade no sentido de anular a variação de velocidade provocada pela força perturbadora. Além deste propósito, a PI pode ser usada para mapear a perturbação dominante entre as várias perturbações coexistentes numa dada região do sistema.

Desde quando foi definida a PI, ela passou por aprimoramentos e neste trabalho vamos usar três métodos de aplicação da PI, onde cada método tem um propósito.

No primeiro método, a PI_i foi definida como a integral da força para o intervalo de tempo de um período orbital do veículo espacial (T) (PRADO, 2013; PRADO, 2014), porém T , pode ser um intervalo de tempo arbitrário. A equação da PI_i é dada por:

$$PI_i = \int_0^T |\nabla \vec{U}| dt, \quad (3.11)$$

onde $\nabla \vec{U}$ é o gradiente do potencial perturbador. Através deste método podemos avaliar a variação total da velocidade do veículo espacial devida as perturbações, em outras palavras, o método avalia a intensidade das forças perturbadoras. Da forma que foram determinadas as equações das perturbações em 3.2 e 3.8 juntamente com a flexibilidade da definição da integral da perturbação, podemos determinar a intensidade da perturbação sobre o veículo espacial de todas as forças perturbadoras individualmente por meio de qualquer método numérico (PRADO, 2014). Dessa forma é possível analisar a contribuição de cada harmônico do potencial e de cada corpo perturbador do sistema.

No segundo método (Equação 3.12) a (PI_{ii}) avalia a perturbação total na direção do movimento do veículo espacial. Da forma em que é aplicada a PI_{ii} , podemos ter a variação total da velocidade sendo positiva ou negativa devida a compensação do efeito da perturbação durante o movimento orbital, ou seja, o método avalia a variação da energia do veículo espacial (SANCHEZ; PRADO, 2017). A equação da PI_{ii}

é definida da seguinte forma,

$$PI_{ii} = \int_0^T a_v dt \quad (3.12)$$

onde T é o tempo final e a_v é a aceleração na direção do movimento do veículo espacial, onde $a_v = \langle \vec{a}, \hat{v} \rangle$, \vec{a} é a aceleração perturbadora (força perturbadora por unidade de massa) e $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$ é o vetor unitário no sentido da velocidade (\vec{v}) do veículo espacial.

O terceiro método de avaliar o efeito das perturbações consiste em integrar a perturbação nas componentes da força perturbadora e determinar o módulo do vetor velocidade total, como mostra a Equação 3.13. O método avalia a perturbação líquida sobre o veículo espacial durante o intervalo de tempo da integração. Esta abordagem pode indicar as órbitas mais estáveis aquelas que têm menor perturbação líquida (SANCHEZ; PRADO, 2017). A PI_{iii} pode ser escrita da seguinte forma,

$$PI_{iii} = \sqrt{\left(\int_0^T a_x dt\right)^2 + \left(\int_0^T a_y dt\right)^2 + \left(\int_0^T a_z dt\right)^2} \quad (3.13)$$

onde a_x , a_y e a_z são as componentes da aceleração perturbadora.

Outros resultados importantes da PI são: (i) A integral da perturbação depende dos valores iniciais dos elementos orbitais do veículo espacial. Este fato é importante para mapear órbitas menos perturbadas (PRADO, 2013; PRADO, 2014; VENDITTI; PRADO, 2015). (ii) Também é sensível ao ponto inicial de integração, porém este efeito diminui com o aumento do tempo de integração e tende a zero após aproximadamente 20 órbitas (SANCHEZ et al., 2014). (iii) As integrais das perturbações são cumulativas com o tempo. Ou seja, o valor da PI pode crescer tanto quanto maior for o tempo de integração. Porém, a dependência do tempo de integração pode ser reduzida ao normalizar a integral pelo tempo de integração para obter resultados médios (SANCHEZ et al., 2014).

3.3 Ressonâncias de movimento médio (Mean Motion Resonances - MMR).

A ressonância de movimento médio caracteriza-se por apresentar a comensurabilidade entre o período orbital do corpo perturbado e o período orbital do corpo

perturbador, convenientemente e tradicionalmente representada pela relação entre as frequências dos movimentos médios dos corpos perturbado n (de massa m) e perturbador n' (de massa m').

O movimento é dito ressonante se a razão entre as duas frequências é próxima à razão entre dois inteiros dados pela relação 3.14 (LEMAÎTRE, 2010), (MURRAY; DERMOTT, 1999).

$$\frac{n}{n'} = \frac{j+i}{j} \quad (3.14)$$

Onde m realiza $(j+i)$ revoluções enquanto m' realiza j revoluções. A ordem da ressonância é dada por i e o grau é dado por j . Se $a < a'$ a órbita de m é interna à órbita de m' e temos uma ressonância interna e $j > 0$. Caso contrário, quando $a > a'$ temos uma ressonância externa e $j < 0$. Relacionando a Equação 3.15, do movimento médio da órbita kepleriana, com a Equação 3.14 podemos determinar uma aproximação para o semi-eixo maior ressonante a_{ress} com relação a a' , como mostra a Equação 3.16.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n'} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}{\sqrt{\frac{\mu}{a'^3}}} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{j+i}{j}, \\ a_{ress} &= \left(\frac{j}{j+i}\right)^{\frac{2}{3}} a' \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como neste trabalho optamos por trabalhar com as equações nas componentes xyz, para o movimento dos corpos, os efeitos da ressonância de movimentos médios serão identificados por meio de mapas relacionando o semi-eixo maior da órbita (a), a inclinação (i) e a excentricidade (e) iniciais com a excentricidade máxima (e_{max}) ou com a inclinação máxima (i_{max}), ou até mesmo, pelas variações da excentricidade e da inclinação, respectivamente Δe e Δi . Com esta observação, podemos também obter, a principal influência da ressonância, se age sobre a inclinação e ou sobre a excentricidade.

3.4 Mecanismo Kozai

Na dinâmica planetária, quando é investigada a perturbação pelo terceiro corpo, o mecanismo Kozai é um acoplamento entre a inclinação e a excentricidade. Este acoplamento pode ser verificado por meio da curva $i \times e$ denominada de curva Kozai, podendo ser usada para caracterizar a ocorrência do mecanismo Kozai-Lidov. Para a função perturbadora desenvolvida até a segunda ordem, se a inclinação inicial for maior do que a inclinação crítica (39,2 graus), a inclinação e a excentricidade oscilam com grande amplitude com excentricidade máxima dada pela Equação 3.17 (HOLMAN et al., 1997; TAKEDA; RASIO, 2005), porém, a órbita será sempre direta.

$$e_{max} \approx \sqrt{1 - (5/3) \cos^2 i_0} \quad (3.17)$$

Com o desenvolvimento da função perturbadora com ordens superiores, aparecem os efeitos que levam a inclinação e a excentricidade a oscilar com amplitude maior que a amplitude observada no Mecanismo Kozai-Lidov padrão, nesta circunstância, o Mecanismo Kozai-Lidov passa a ser denominado de Mecanismo Kozai-Lidov Excêntrico (FORD et al., 2000; YOKOYAMA et al., 2003; LITHWICK; NAOZ, 2011). Este formalismo permite verificar a ocorrência de flips do plano orbital do corpo perturbado, do mesmo modo, o modelo matemático de N-corpos para o movimento orbital também permite avaliar a ocorrência dos flips do plano orbital.

Abordaremos como parte deste trabalho a verificação da hipótese da ocorrência do mecanismo Kozai-Lidov Excêntrico, capaz de causar flips do plano orbital, aplicados a sistemas de pequenos corpos, como sistemas triplos de asteroides. Utilizamos as equações de movimento 3.1 para um sistema triplo de asteroides fictício, com dados baseados na estrutura do sistema 2001SN263. Foram alteradas algumas características do sistema 2001SN263 para obter o padrão necessário para o aparecimento dos flips, que são: alta inclinação relativa inicial entre o corpo perturbado e um corpo perturbador, o corpo perturbador mais massivo e com alta excentricidade.

Verificado o aparecimento dos flips do plano orbital do corpo perturbado para o sistema de pequenos corpos, aplicaremos o conceito sobre um veículo espacial inserido no sistema de Haumea modelado segundo a Equação 3.1. Posteriormente, usaremos o formalismo da equação 3.2 e analisaremos as consequências da perturbação devida a forma do corpo central no sistema.

3.5 Integração Numérica

As equações de movimento dos corpos foram integradas utilizando o integrador RADAU desenvolvido por Everhart (EVERHART, 1985). Este integrador é rápido, preciso e muito utilizado para integração numérica em dinâmica orbital. O código foi escrito em linguagem de programação Fortran, compilado e executado no sistema GNU/Linux.

A integral da perturbação será calculada da seguinte forma: durante a integração das equações de movimento por meio do integrador RADAU as acelerações perturbadoras de interesse serão escritas em um arquivo de dados temporário, depois usaremos o método numérico de integração Simpson 1/3 para calcular a PI.

4 Potenciais perturbadores de Haumea, Namaka e Hi'iaka

Este capítulo apresenta o estudo da ação dos potenciais perturbadores de Haumea, Namaka e Hi'iaka, sobre um veículo espacial inserido no sistema. O estudo foi conduzido pela avaliação da perturbação dos harmônicos esféricos de Haumea e das perturbações causadas por Namaka e Hi'iaka por meio da PI_i apresentada na seção 3.2 que mostra a variação total da velocidade causada pelo termo perturbador. A seção 4.1 mostra o mapa topográfico da perturbação dos harmônicos esféricos do potencial perturbador de Haumea. A seção 4.2 apresenta os resultados do estudo da ação do potencial perturbador de Haumea em vários cenários. E a seção 4.3 mostra os resultados das perturbações causadas por Namaka e Hi'iaka por meio de mapas topográficos.

Alguns dados físicos e parâmetros orbitais do sistema Haumea usados nestas simulações são apresentados na Tabela 4.1, obtidos de Cuk et al. (2013) e Lockwood et al. (2014). Para todas simulações deste capítulo, para o veículo espacial, usamos o argumento do nodo ascendente inicial $\Omega_0 = 0$ grau e a anomalia média inicial $M_0 = 0$ grau.

Tabela 4.1 - Alguns dados físicos e parâmetros orbitais do sistema Haumea utilizados na simulação

Parâmetros	Namaka	Hi'iaka	Haumea
a (km)	25657	49880	
e	0,249	0,0513	
i (graus)	13,0	2,0	
massa (kg)	$1,79 \times 10^{18}$	$1,79 \times 10^{19}$	$4,006 \times 10^{21}$

4.1 Mapas topográficos do potencial perturbador de Haumea

Nesta seção apresentamos os resultados da contribuição dos harmônicos do potencial perturbador devido à forma de Haumea. Na seção 3.1 determinamos os valores dos coeficientes normalizados dos harmônicos esféricos \bar{C}_{20} , \bar{C}_{22} , \bar{C}_{40} , \bar{C}_{42} , \bar{C}_{44} , \bar{C}_{60} , \bar{C}_{62} , \bar{C}_{64} e \bar{C}_{66} para potencial gravitacional de Haumea. Estes valores são apresentados na Tabela 3.2. Eles foram usados na Equação 3.8, a qual gerou a função potencial gravitacional de Haumea. Esta função pode ser truncada em qualquer um dos termos apresentados, e novas formas do potencial gravitacional perturbador são geradas.

Os resultados apresentados na sequência mostram a variação total da velocidade

(PI_i) proporcionada por cada um dos termos do potencial gravitacional de Haumea. Estes dados foram obtidos integrando as equações de movimento no intervalo de tempo de um período orbital do veículo espacial. Os mapas foram produzidos variando a inclinação (i_0) e o argumento do pericentro (ω_0) iniciais do veículo espacial. Desta forma os resultados mostram a topografia da variação total da velocidade em uma superfície esférica de condições iniciais em torno de Haumea. Nesta simulação integramos o movimento orbital de um veículo espacial em órbita circular com semi-eixo maior inicial de 1920 km que equivale a duas vezes o raio do maior eixo equatorial de Haumea. O período orbital é de $T = 8,98$ hs e para cada órbita foram gerados 3233 pontos para calcular a PI.

As Figuras (4.1), (4.2) e (4.3) mostram as variações de velocidade referentes a cada termo do potencial de Haumea de segundo, quarto e sexto grau, respectivamente. Por meio destes gráficos podemos verificar que intensidade da perturbação, em cada grau, estão separadas por aproximadamente uma ordem de grandeza. Os harmônicos zonais (de coeficientes C_{20} , C_{40} e C_{60}), com proeminência o harmônico de coeficiente C_{20} , apresentam máximos para as órbitas polares de argumento do pericentro inicial em torno de 0 grau e 180 graus. Este fato é decorrente da órbita iniciar próximo ao ápice do maior eixo de Haumea. Os resultados também mostram que os harmônicos tesserais (de coeficientes C_{42} , C_{62} e C_{64}) e os harmônicos setoriais (de coeficientes C_{22} , C_{44} e C_{66}), com proeminência o harmônico setorial de coeficiente C_{22} , apresentam maiores valores da PI para órbitas próximas ao plano equatorial. Este resultado é coerente, pois ambos os harmônicos setoriais e tesserais modelam o achatamento equatorial.

Figura 4.1 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), com $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital, devida a contribuição dos termos C_{20} e C_{22} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.

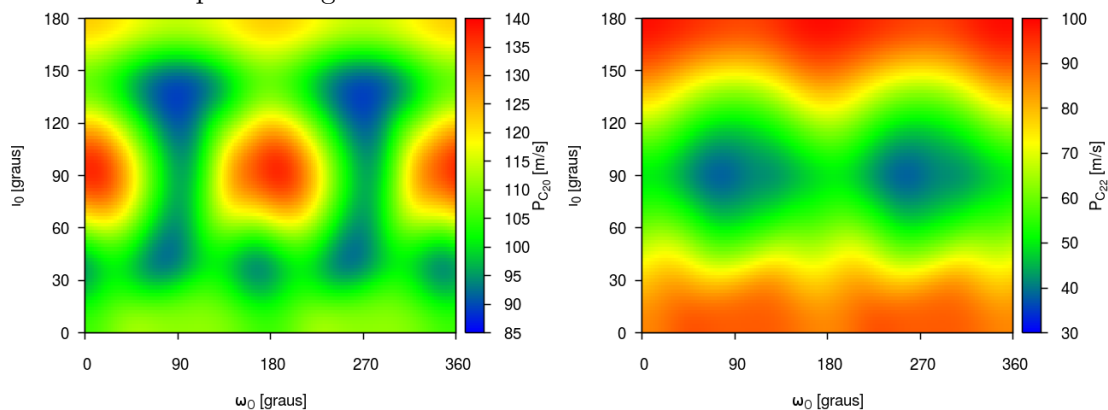


Figura 4.2 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a contribuição dos termos C_{40} , C_{42} e C_{44} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.

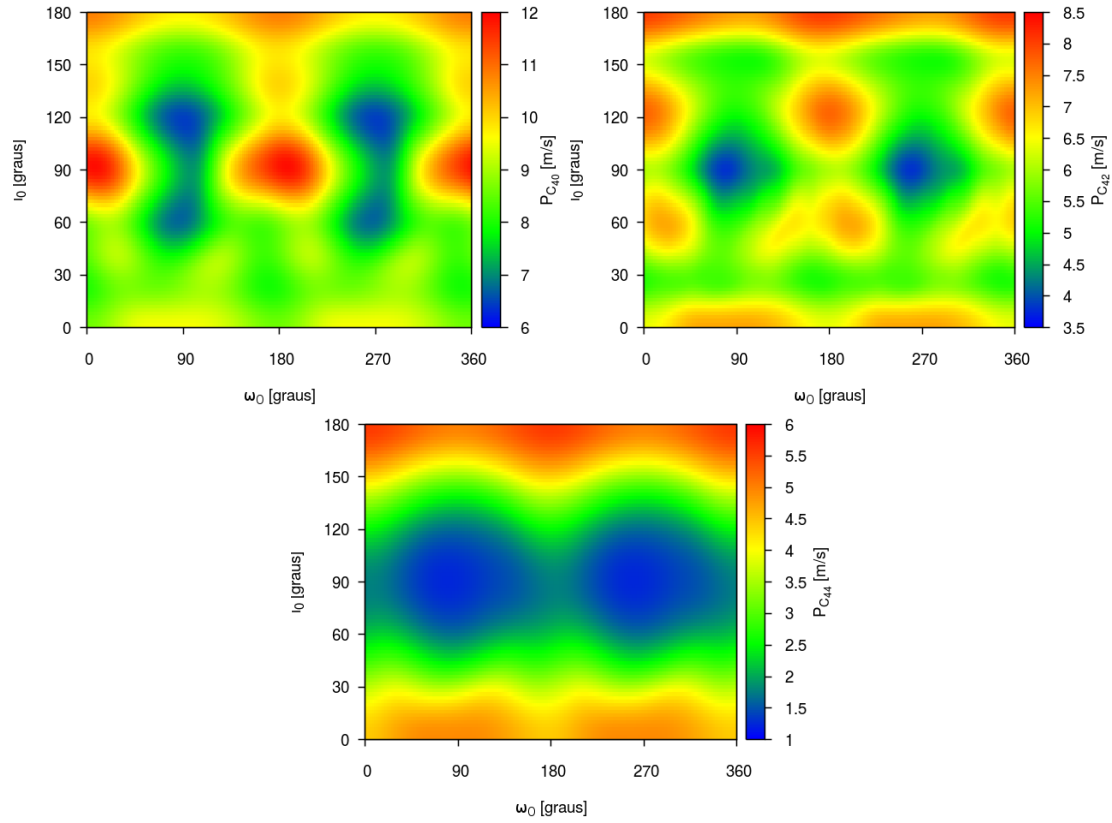
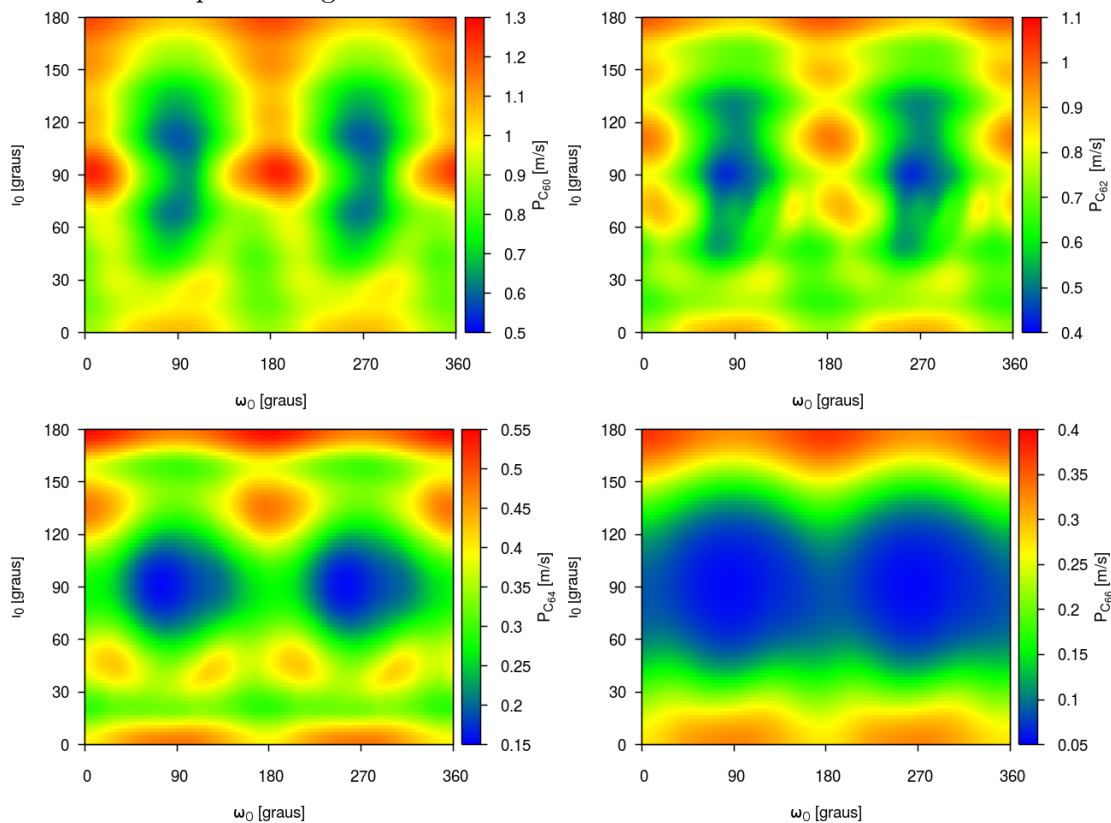


Figura 4.3 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a contribuição dos termos C_{60} , C_{62} , C_{64} e C_{66} , respectivamente, do potencial gravitacional de Haumea.



A figura 4.4 mostra a PI de todos os termos perturbadores do potencial gravitacional de Haumea até grau e ordem 6. O resultado mostra que as órbitas próximas ao plano equatorial de Haumea apresentam maior variação total da velocidade. Isso ocorre pelo fato da trajetória do satélite passar mais tempo próximo aos ápsces do maior eixo de Haumea durante o movimento orbital, como mostra a ilustração da figura 4.5. Este resultado também mostra que a órbita retrógrada tem maior variação total da velocidade comparada com a órbita direta. Para a órbita retrógrada temos o sentido de translação do veículo espacial oposto ao sentido de rotação de Haumea, desta forma, ocorre mais encontros próximos aos ápsces do maior eixo de Haumea, se comparado com as órbitas diretas, como mostra a ilustração da figura 4.5.

Figura 4.4 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devido a contribuição de todos os termos do potencial perturbador de Haumea.

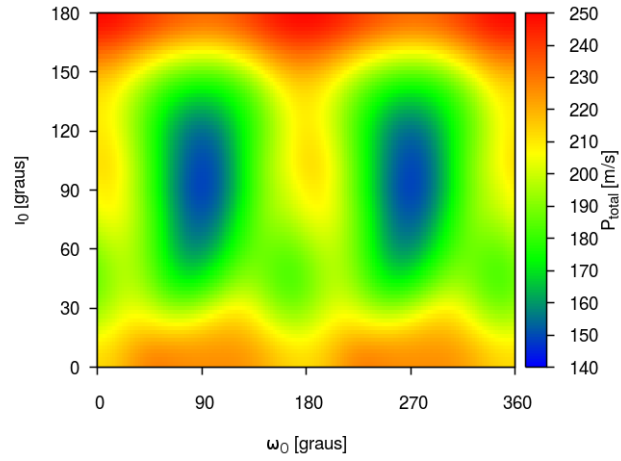


Figura 4.5 - Representação gráfica das órbitas.

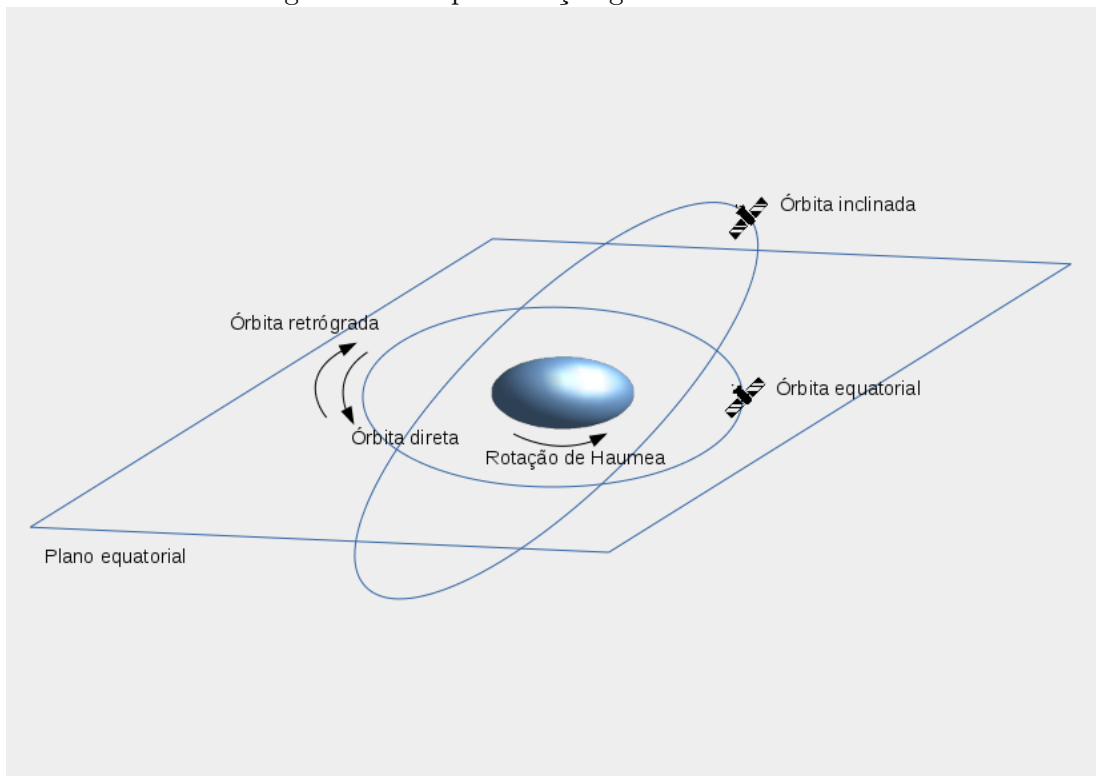
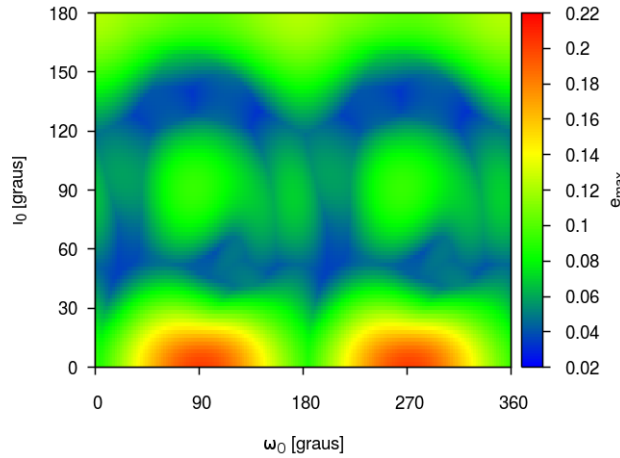


Figura 4.6 - Excentricidade máxima da órbita em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital.

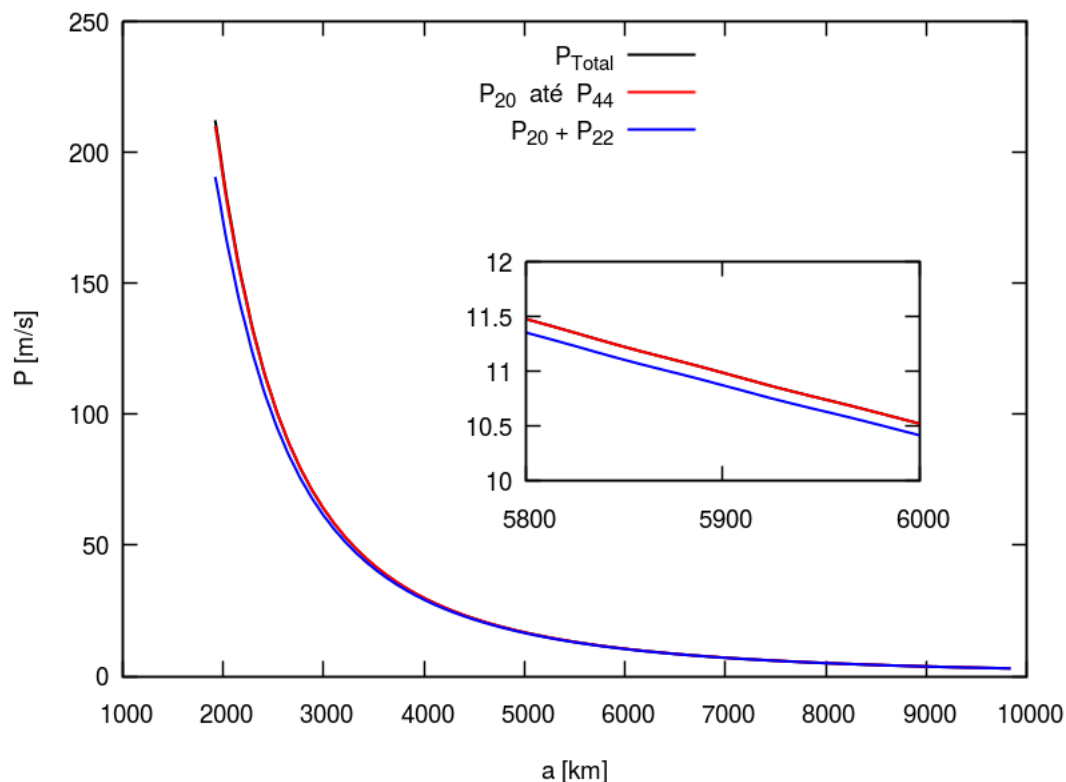


A Figura 4.6 mostra a excentricidade máxima atingida durante a integração das equações de movimento. Nesta figura, podemos identificar dois polos de maior variação da excentricidade, um em torno de $\omega_0 = 90^\circ$ e outro em torno de $\omega_0 = 270^\circ$, ambos para inclinações iniciais abaixo de 30° . Comparando este resultado com o resultados da figura 4.4 nota-se que a região de máximo da excentricidade coincide com a região de máximo da PI de todos os termos do potencial gravitacional perturbador de Haumea para órbitas diretas. A PI apresentada na figura 4.4 mostra a maior intensidade para as órbitas retrógradas com plano orbital próximo ao plano equatorial de Haumea, porém, a excentricidade máxima não é tão acentuada se comparada com a excentricidade máxima das órbitas diretas com plano orbital próximo ao plano equatorial de Haumea. Neste caso, a perturbação líquida é menor para as órbitas retrógradas.

4.2 Simulações do potencial perturbador de Haumea em vários cenários

A Figura 4.7 apresenta a integral do potencial perturbador total de Haumea (até o sexto grau e sexta ordem) em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial (curva em preto), numa órbita equatorial e circular com $\omega_0 = 0$ e $\Omega_0 = 0$. O resultado mostra a perturbação total decrescendo de forma exponencial em função do aumento do semi-eixo maior do veículo espacial. Neste mesmo gráfico, temos a contribuição do potencial perturbador até o quarto grau e quarta ordem (vermelho) e a contribuição do potencial de segundo grau (azul). Comparando a integral do potencial total (até sexto grau e sexta ordem) com a integral do potencial truncado no quarto grau e

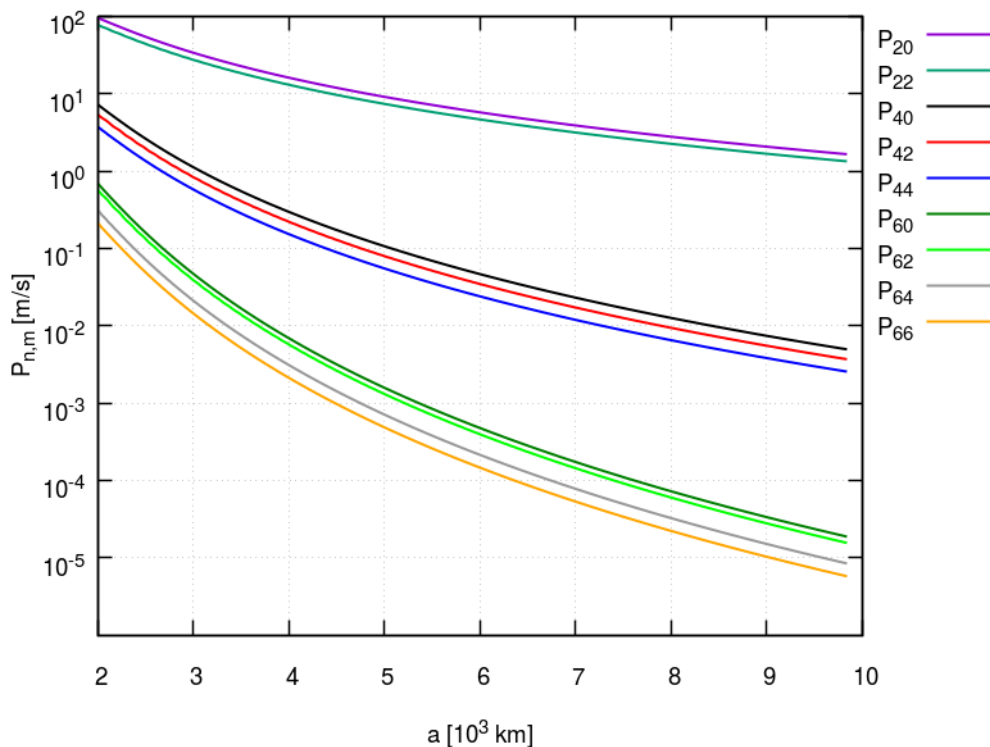
Figura 4.7 - Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial. As órbitas são circulares e equatoriais.



quarta ordem, verificamos que a diferença é imperceptível na figura. Por meio deste resultado, podemos ver que é notável a diferença entre a integral do potencial total e a integral do potencial perturbador truncado no segundo grau, porém, como esta diferença diminui com o aumento do semi-eixo maior da órbita, dependendo da precisão desejada, a propagação do movimento com um modelo de segundo grau para o potencial perturbador de Haumea pode ser adotado. A diferença entre a integral do potencial de grau e ordem seis, comparada com a integral do potencial de segundo grau é menos de 1% a partir de $a \approx 6000$ km e diminui com o aumento do semi-eixo maior da órbita.

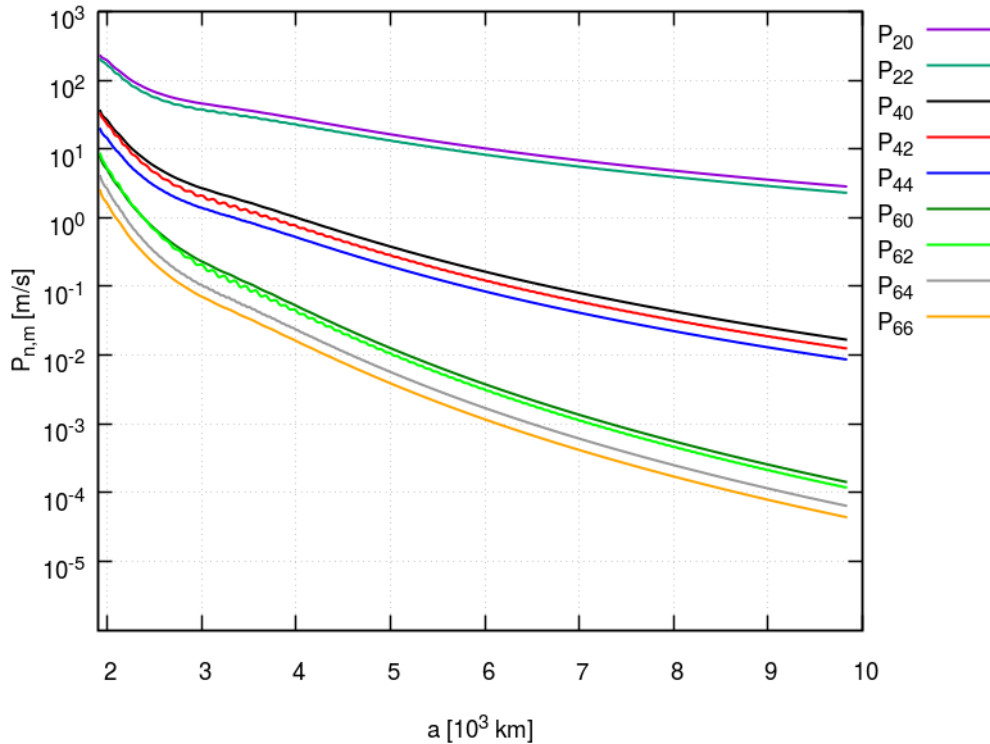
A Figura 4.8 mostra a contribuição de cada termo do potencial perturbador de Haumea na integral da perturbação, em função do semi-eixo maior inicial do veículo espacial. Neste gráfico apresentamos a integral da perturbação na escala logarítmica, visando obter uma maior separação entre as curvas para a análise dos dados. Para órbitas mais baixas ($a = 2000$ km), os termos de segundo, quarto e sexto graus, do potencial perturbador, têm magnitudes separadas por aproximadamente uma ordem de grandeza respectivamente. Conforme o semi-eixo maior inicial da órbita cresce,

Figura 4.8 - Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, separadas pelos harmônicos do potencial perturbador em escala logarítmica. As órbitas são equatoriais e circulares.



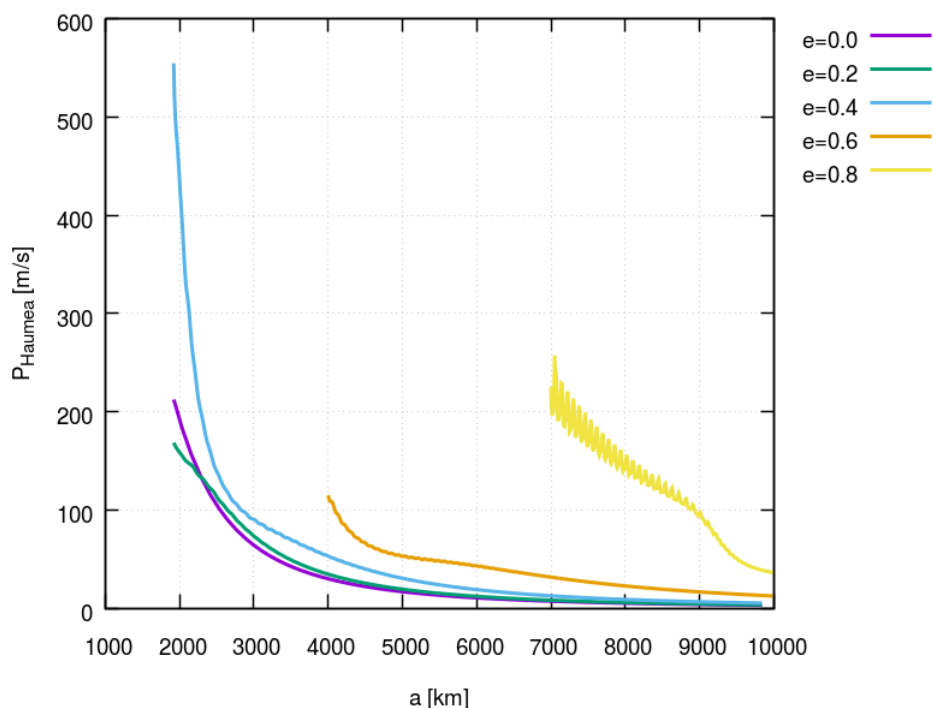
a separação relativa da integral da perturbação torna-se ainda maior, chegando a uma separação de cinco ordens de grandeza entre os potenciais perturbadores de segundo e sexto graus, e a uma separação de três ordens de grandeza entre os potenciais perturbadores de segundo e quarto graus, para o semi-eixo maior de 10000 km. Como esperado, e de acordo com a função perturbadora (Equação 3.4), os termos do potencial perturbador de sexto grau, tem o mais acentuado decaimento da intensidade da perturbação em função do aumento semi-eixo maior da órbita. Neste aspecto, para órbitas de baixa excentricidade, é relevante, dependendo do grau de precisão que se deseja, o uso dos termos de sexto grau somente em órbitas mais próximas de Haumea. Entretanto, para órbitas mais excêntricas, a contribuição dos termos quarto e sexto graus é mais significativa, comparada com o resultado obtido para órbitas circulares, como mostram os resultados da Figura 4.9, onde $e = 0,4$. Desta comparação, podemos ver que há uma diminuição da separação entre as integrais da perturbação de quarto e sexto graus em relação à integral da perturbação de segundo grau de aproximadamente uma ordem de grandeza.

Figura 4.9 - Integral da perturbação de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, separadas pelos harmônicos do potencial perturbador em escala logarítmica. As órbitas são equatoriais com excentricidade igual a 0,4.



A Figura 4.10 apresenta a integral do potencial perturbador de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita para várias excentricidades, onde todas as órbitas são equatoriais. Neste gráfico, vemos que, para as órbitas mais excêntricas, mesmo que o semi-eixo maior seja grande ($a \approx 10000$ km), é muito significativa a contribuição da perturbação devida a distribuição da massa em Haumea. Nestas circunstâncias, órbitas com $e = 0,8$ e $a \approx 10000$ km têm integral da perturbação equivalente a integral da perturbação das órbitas circulares com $a \approx 3500$ km. Nesta figura, ainda podemos observar um comportamento anômalo da integral da perturbação. Para órbitas excêntricas, como está notável na curva de $e = 0,8$, a integral da perturbação oscila muito para semi-eixos maiores orbitais menores que aproximadamente 9300 km. Este efeito ocorre devido ao pericentro estar muito próximo ao corpo central. Portanto, esta curva da integração da perturbação já mostra a região de órbitas mais instáveis, e vulneráveis a um curto período de sobrevivência.

Figura 4.10 - Integral da perturbação total de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial para várias excentricidades de órbitas equatoriais.



A Figura 4.11 mostra a integral da perturbação em função do semi-eixo maior da órbita, para órbitas circulares: equatoriais (preto), inclinada (azul) e polar (vermelho). As órbitas equatoriais e polares apresentam valores um pouco mais elevados para a integral da perturbação comparados com os valores obtidos para as órbitas inclinadas de 45 graus. Todas as curvas apresentam a mesma forma de variação do tipo exponencial e conforme o semi-eixo maior inicial da órbita aumenta a diferença da integral da perturbação entre as inclinações diminui, como esperado. A correlação entre a integral da perturbação e a inclinação pode ser verificada através da figura 4.12. Esta figura mostra a integral da perturbação em função da inclinação, para uma órbita circular com semi-eixo maior $a = 3000$ km, devida a todos os termos do potencial perturbador até o sexto grau e sexta ordem (curva em preto). Novamente, comparamos a contribuição do potencial perturbador, truncado em cada grau do potencial perturbador de Haumea. Como esperado, a perturbação de segundo grau (azul) é dominante, e considerando os efeitos até o quarto grau e quarta ordem (vermelho), de forma prática, se aproxima muito bem da contribuição do potencial total. Este resultado também mostra que, os máximos da perturbação ocorrem nas proximidades das órbitas polares e equatoriais, os mínimos ocorrem nas proximidades das inclinações de 45 graus e 135 graus. Este resultado confirma o resultado apresen-

tado na figura 4.11 onde a órbita inclinada (45 graus) apresenta menor perturbação para todo semi-eixo maior inicial. Este fato é consequência da interação entre o veículo espacial e o ápce do maior eixo de Haumea, como ilustra a figura 4.13. No caso das órbitas equatoriais, a órbita retrógrada apresenta maior perturbação comparada com a órbita direta, esta diferença foi discutida na seção anterior, onde vimos que as órbitas retrógradas apresentam mais encontros com os ápces do eixo maior de Haumea. No caso da órbita polar o máximo ocorre devido ao harmônico esférico de coeficiente C_{20} que modela o achatamento nos polos, além do movimento do veículo espacial iniciar no plano equatorial de Haumea.

Figura 4.11 - Integral da perturbação total de Haumea em função do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, para órbitas equatoriais (preto), órbitas inclinadas ($i = 45$ graus) (azul) e órbitas polares (vermelho).

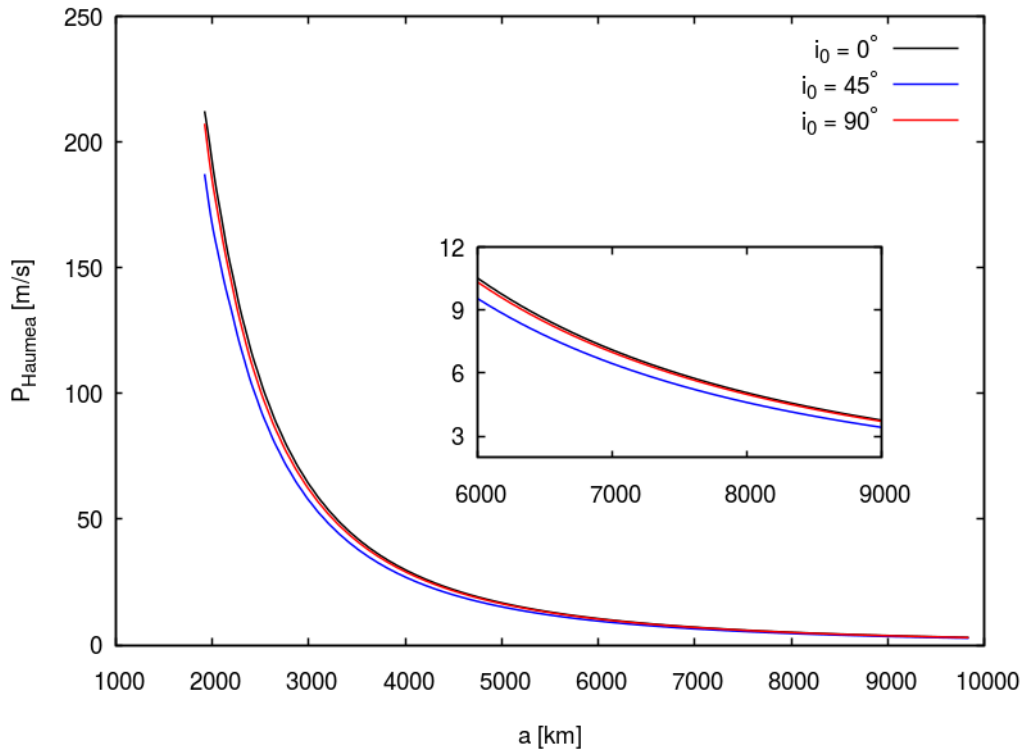


Figura 4.12 - Integral da perturbação de Haumea em função da inclinação (i) do plano orbital do veículo espacial. As órbitas são circulares com semi-eixo maior inicial de 3000 km.

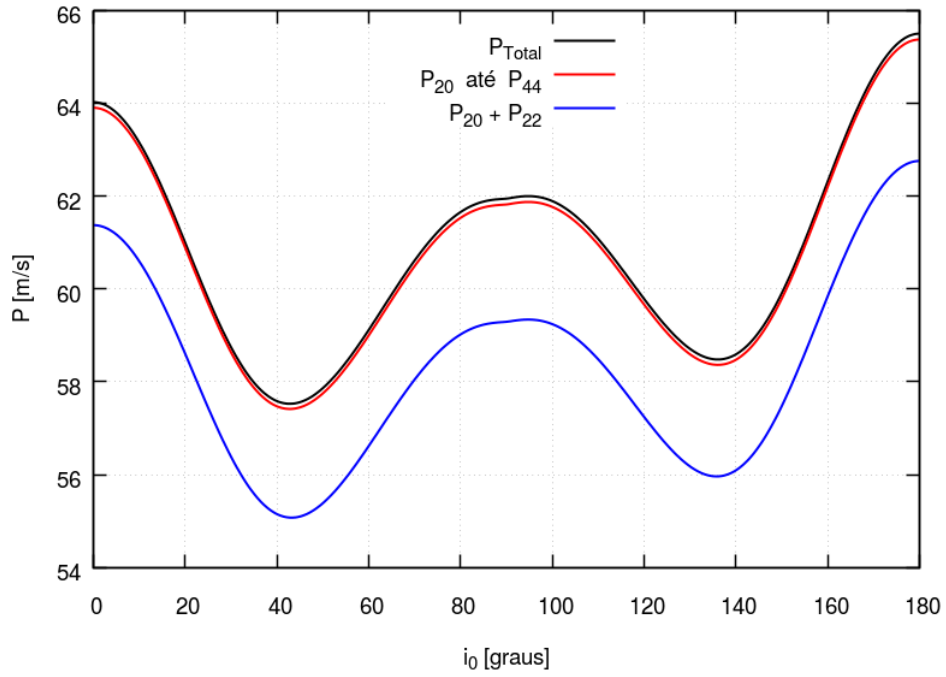
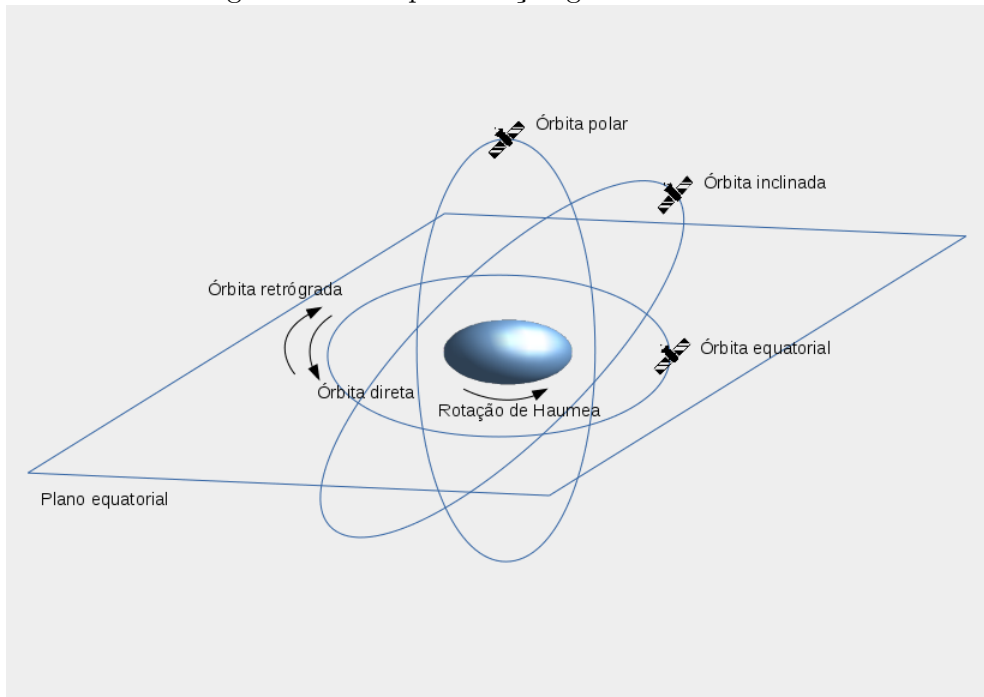
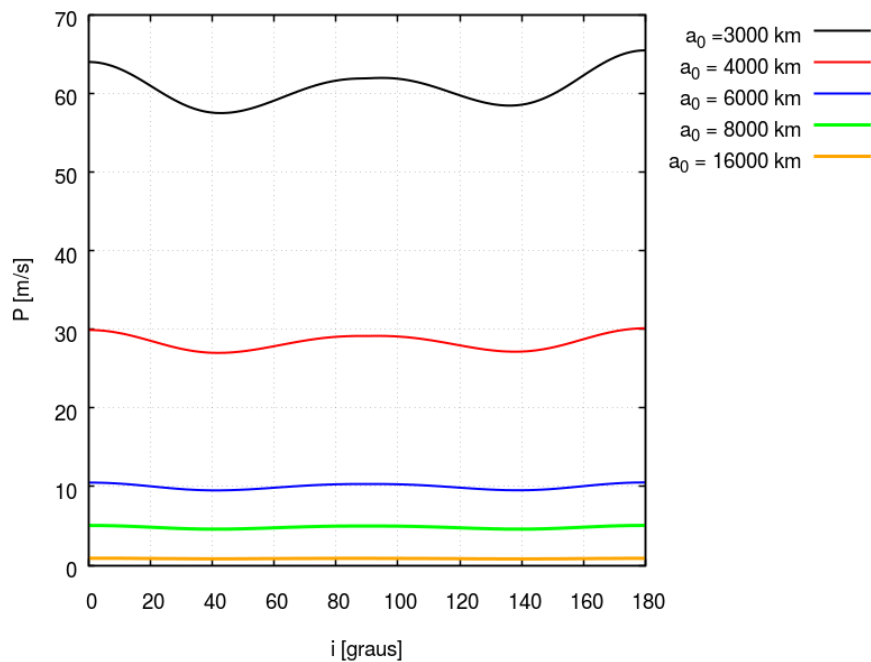


Figura 4.13 - Representação gráfica das órbitas



A Figura 4.14 apresenta o resultado da integral da perturbação em função da inclinação para vários semi-eixos maiores iniciais de órbitas circulares, mantendo uma variação semelhante em função da inclinação. Como esperado, o valor da integral da perturbação diminui com o aumento do semi-eixo maior da órbita. Com relação à inclinação, temos os mínimos da integral da perturbação para inclinações de 45 e 135 graus, e máximos nas inclinações de 0, 90 e 180 graus. Ainda nesta figura, podemos verificar que, para órbitas retrógradadas as integrais da perturbação são ligeiramente maiores comparadas às integrais de órbitas diretas. Isto ocorre, devido ao movimento de rotação de Haumea, pois, durante um período da órbita retrógrada, temos mais rotações de Haumea relativas à órbita do veículo espacial, permitindo uma soma maior da variação da velocidade.

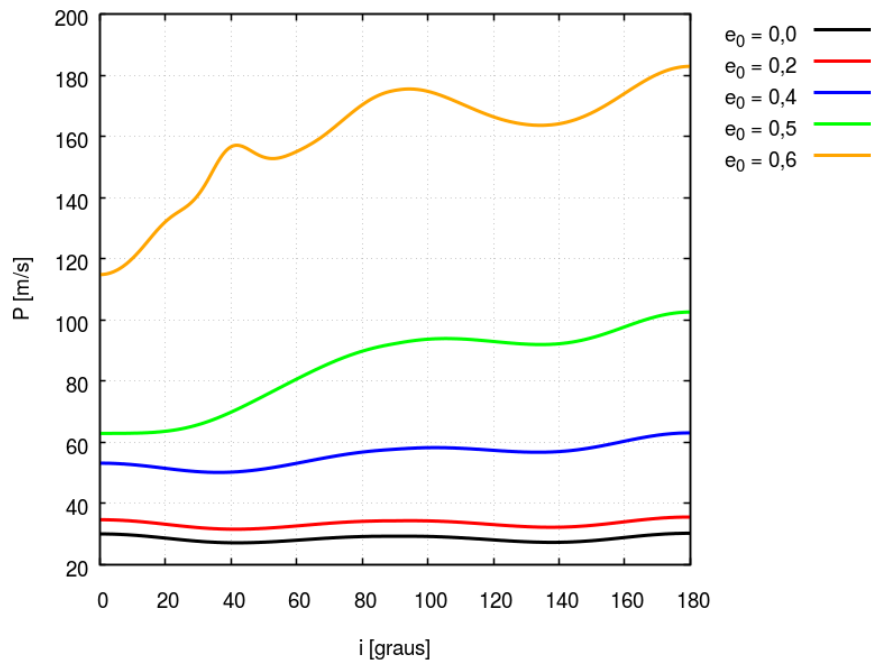
Figura 4.14 - Integral da perturbação total de Haumea em função da inclinação do plano orbital do veículo espacial para vários semi-eixos maiores iniciais de órbitas circulares.



A Figura 4.15 apresenta o resultado da integral da perturbação em função da inclinação para várias excentricidades com semi-eixo maior de 4000 km. As curvas mostram que conforme a excentricidade cresce, a perturbação aumenta, e igualmente verificado na Figura 4.14, para órbitas retrógradadas a variação total da velocidade é maior comparada com a órbita direta, e mais intensa conforme o aumento da excentricidade.

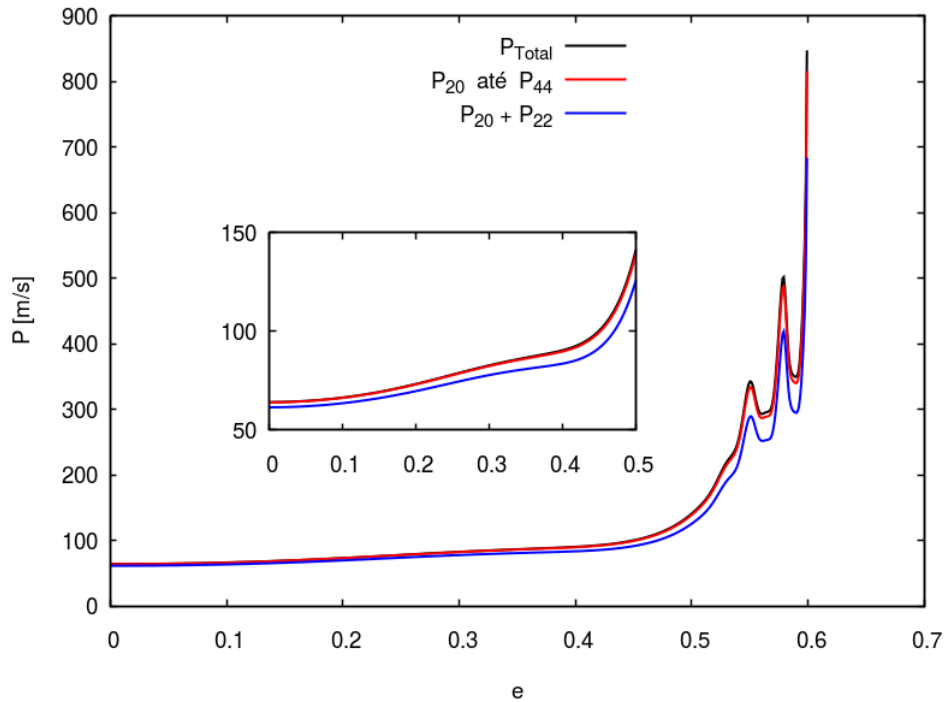
cidade. Ainda neste resultado, podemos observar que nas excentricidades menores as curvas são semelhantes na forma, em função da inclinação. Para as excentricidades mais altas, a semelhança desaparece mostrando que a região de órbitas diretas apresentam maior variação da integral da perturbação em função da inclinação, comparada com a região das órbitas retrógradadas.

Figura 4.15 - Integral da perturbação total de Haumea em função da inclinação do plano orbital do veículo espacial para várias excentricidades iniciais de órbitas com semi-eixo maior igual a 4000 km.



A Figura 4.16 mostra o resultado da integral da perturbação devida a Haumea em função da excentricidade inicial. A curva em preto mostra a perturbação total, referente ao desenvolvimento da função perturbadora até o grau e ordem seis. A curva em vermelho mostra a contribuição da perturbação até o grau e ordem quatro e a curva azul mostra a contribuição até o grau e ordem dois. Como verificado no resultado anterior, a integral da perturbação cresce com o aumento da excentricidade da órbita. Também podemos ver que, quando a excentricidade atinge valores mais elevados, ocorre a diminuição da estabilidade da órbita. Quanto ao potencial perturbador, procede a análise já efetuada, sendo os termos de segundo grau dominantes, os termos de quarto grau são necessários, pois sua contribuição é expressiva e os termos de sexto grau têm uma contribuição pequena, porém necessários dependendo da precisão desejada.

Figura 4.16 - Integral da perturbação total de Haumea em função da excentricidade da órbita do veículo espacial para órbitas equatoriais com semi-eixo maior inicial $a = 3000$ km.



A Figura 4.17 apresenta os resultados da integral da perturbação devida a Haumea na escala logarítmica em função da excentricidade, para vários valores de semi-eixo maior, onde todas as órbitas são equatoriais. Por meio desta figura podemos observar que a variação total da velocidade cresce com o aumento da excentricidade para todos os semi-eixos maiores adotados, e como verificado nos resultados da Figura 4.10, as órbitas com elevado valor de semi-eixo maior e alta excentricidade também estão sujeitas a uma grande influência do potencial perturbador de Haumea. Analisando as curvas podemos ver que uma órbita de $a = 16000$ km e $e \approx 0,85$ tem aproximadamente o valor da integral da perturbação de uma órbita circular de $a = 4000$ km.

A posição do plano orbital também tem influência significativa na variação total da velocidade. A Figura 4.18 apresenta os resultados da integral da perturbação em função da excentricidade para alguns valores da inclinação em órbitas com semi-eixo maior de 3000 km. As curvas representam as seguintes órbitas: equatorial (preto), inclinada (45 graus) (vermelho) e polar (azul). As curvas mostram que, à medida que a excentricidade cresce, ocorre uma maior separação entre as curvas das integrais das perturbações. Também é notável o registro de órbitas instáveis para elevados

valores de excentricidade.

Figura 4.17 - Integral da perturbação total de Haumea na escala logarítmica em função da excentricidade da órbita do veículo espacial para vários semi-eixos maiores iniciais de órbitas equatoriais.

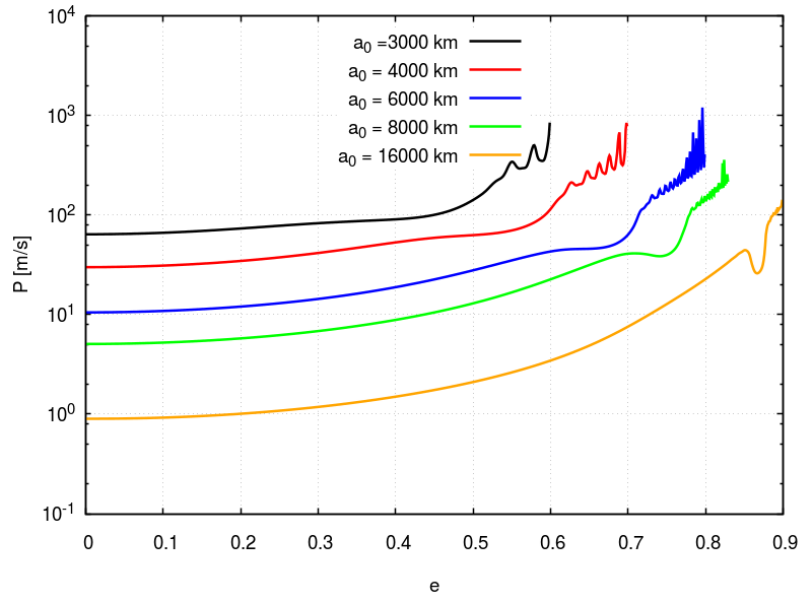
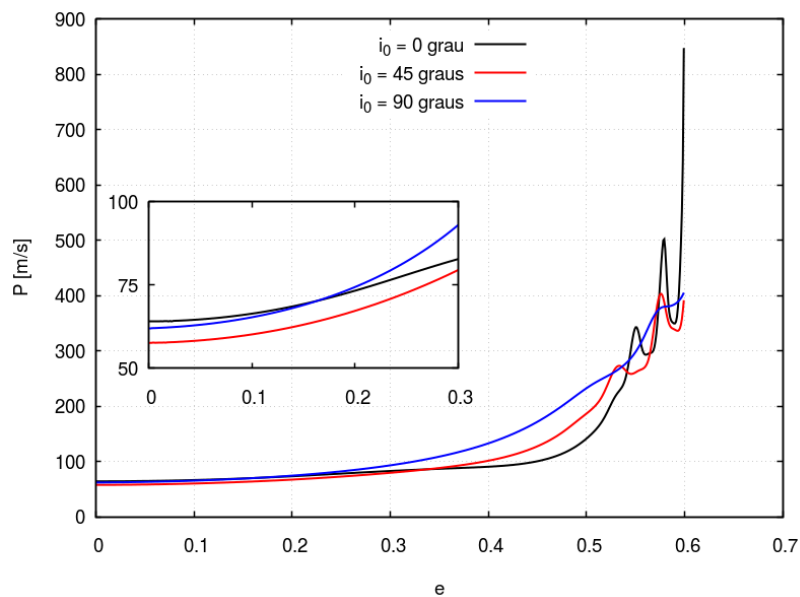


Figura 4.18 - Integral da perturbação total de Haumea em função da excentricidade da órbita do veículo espacial, para órbitas equatoriais (preto), inclinada (vermelho) e polar (azul), com semi-eixo maior igual a 3000 km.



Caracterizando de forma geral os resultados obtidos nesta seção, sobre o potencial perturbador de Haumea, temos: os termos de segundo grau do potencial perturbador de Haumea são dominantes. O desenvolvimento da função perturbadora até o grau e ordem quatro é excelente para descrever qualitativamente a atuação da perturbação de Haumea sobre o veículo espacial. Em termos quantitativos, é indispensável o desenvolvimento da função perturbadora até o grau e ordem quatro. Dependendo da precisão desejada, os termos de sexto grau também tornam-se indispensáveis, como mostram os resultados seguintes. E os resultados mostraram que, com relação ao potencial gravitacional de Haumea, a excentricidade da órbita é a variável predominante para determinar a estabilidade das órbitas.

A Figura 4.19 apresenta a diferença relativa percentual entre as integrais da perturbação, correspondente às contribuições de segundo e quarto graus. Calculada conforme a equação 4.1.

$$\Delta P = \frac{P_k - P_j}{P_j} 100 \quad (4.1)$$

Onde, P_k é a integral da perturbação de maior ordem e P_j a integral da perturbação de menor ordem. O gráfico 4.19-(a) mostra a diferença relativa percentual em função do semi-eixo maior da órbita, onde $e_0 = 0$ e $i_0 = 0$ grau. A diferença inicia em torno de 11% para o semi-eixo maior inicial $a = 1920$ km e diminui de forma exponencial com o aumento do semi-eixo maior. O gráfico 4.19-(b) mostra o resultado da diferença relativa percentual em função da inclinação, variando entre 4% e 4,4%. Nestas simulações, as órbitas são circulares com semi-eixo maior de $a_0 = 3000$ km. O gráfico 4.19-(c) apresenta o resultado da diferença relativa percentual em função da excentricidade inicial, variando entre 4% e 5,5% de $e = 0$ até $e = 0,4$, onde $a_0 = 3000$ km e $i_0 = 0$ grau.

A Figura 4.20 apresenta a diferença relativa percentual da integral da perturbação entre a contribuição do potencial perturbador até o quarto grau e quarta ordem e a contribuição total (até sexto grau e sexta ordem). As condições iniciais são iguais às condições iniciais do caso anterior. Analisando a sequência de gráficos da figura, podemos ver uma diferença de aproximadamente 1,2% para o semi-eixo maior inicial $a = 1920$ km e caindo de forma exponencial em função do aumento do semi-eixo maior (Figura 4.20(a)), a diferença varia entre 0,18% e 0,21% em função da inclinação inicial (Figura 4.20-(b)) e varia entre 0,2% e 0,4% em função da excentricidade até $e = 0.4$ (Figura 4.20-(c)).

Figura 4.19 - Diferença relativa percentual entre as integrais da perturbação truncadas no segundo e quarto graus. Onde, (a) apresenta ΔP em função do semi-eixo maior inicial a_0 com $e_0 = 0$ e $i_0 = 0$ grau, (b) apresenta ΔP em função da inclinação inicial i_0 com $a_0 = 3000$ km e $e_0 = 0$ e (c) apresenta ΔP em função da excentricidade inicial e_0 com $a_0 = 3000$ km e $i_0 = 0$.

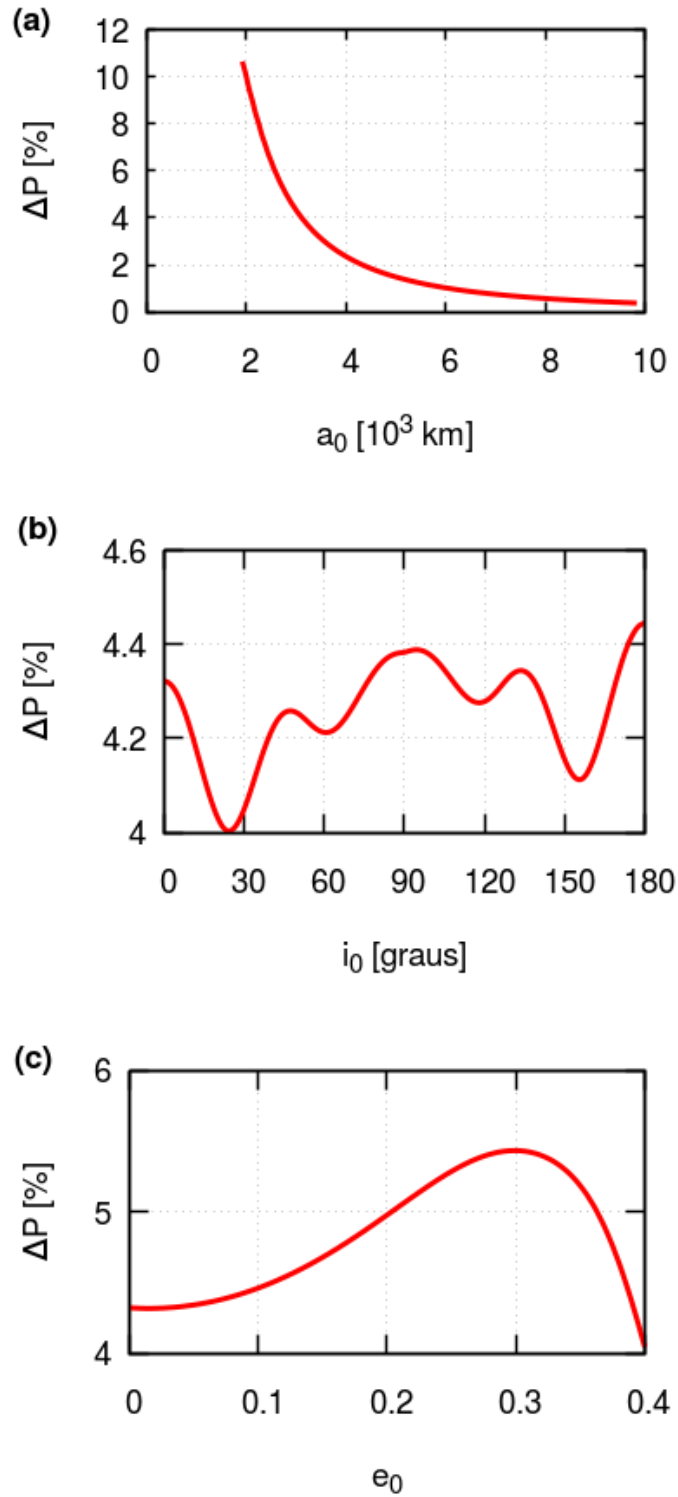
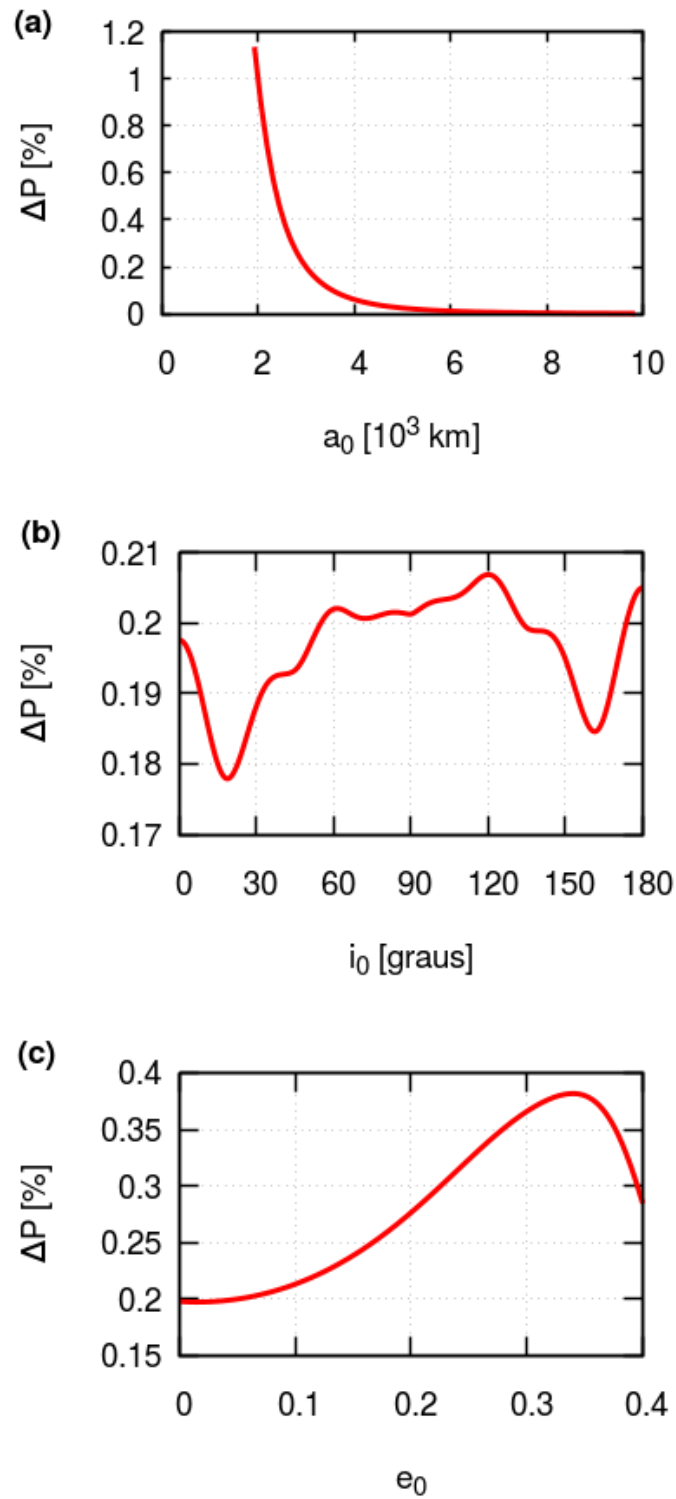


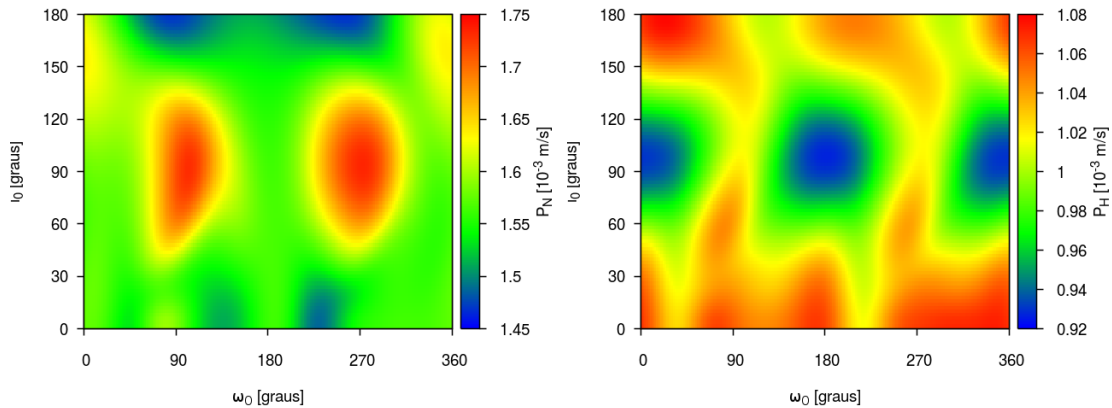
Figura 4.20 - Diferença relativa percentual entre as integrais da perturbação truncadas no quarto e sexto graus. Onde, (a) apresenta ΔP em função do semi-eixo maior inicial a_0 com $e_0 = 0$ e $i_0 = 0$ grau, (b) apresenta ΔP em função da inclinação inicial i_0 com $a_0 = 3000$ km e $e_0 = 0$ e (c) apresenta ΔP em função da excentricidade inicial e_0 com $a_0 = 3000$ km e $i_0 = 0$.



4.3 Mapas topográficos das perturbações de Namaka e Hi'iaka

Nas simulações para determinação das perturbações devidas aos harmônicos esféricos do potencial de Haumea também foram determinadas as contribuições de Namaka e Hi'iaka (Figura 4.21). Em um período orbital do veículo espacial com semi-eixo maior inicial de 1920 km, Namaka e Hi'iaka deslocam-se muito pouco com relação a uma órbita completa. No entanto, o resultado da PI para este intervalo de tempo apresenta uma estimativa da intensidade da perturbação de Namaka e de Hi'iaka com relação à perturbação devida a Haumea, em termos de ordens de grandeza. Comparando a figura 4.21 com a Figura 4.1, podemos ver que as perturbações devidas aos satélites naturais são de aproximadamente cinco ordens de grandeza menores do que a perturbação devida ao termo de coeficiente C'_{20} do potencial perturbador de Haumea. Estes resultados mostram, como esperado, o domínio absoluto do potencial perturbador de Haumea em órbitas baixas (órbitas que o veículo espacial está mais próximo de Haumea).

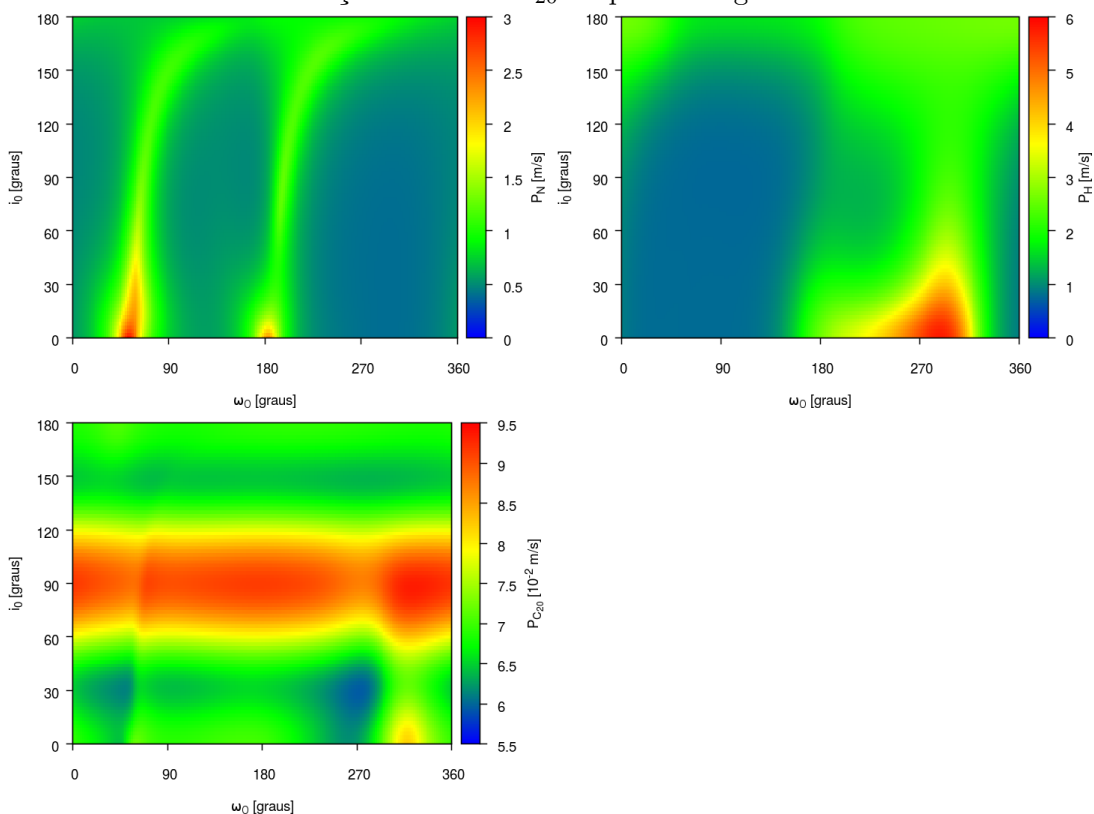
Figura 4.21 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 1920$ km, em um período orbital devida a interação com os satélites naturais Namaka e Hi'iaka, respectivamente.



Porém, à medida que temos órbitas mais distantes de Haumea e aproximando-se dos satélites naturais, a influência da perturbação do corpo central evolui tornando-se menor e as perturbações devidas a Namaka e Hi'iaka tornam-se predominantes. A Figura 4.22 mostra os resultados da integral da perturbação em função da inclinação e do argumento do pericentro para órbitas circulares com semi-eixo maior de 35000 km, respectivamente, para Namaka, Hi'iaka e o termo C'_{20} do potencial perturbador de Haumea. Como esperado, por meio destes resultados, podemos confirmar a

predominância das perturbações de Namaka e de Hi'iaka sobre o veículo espacial comparadas com os efeitos do achatamento de Haumea, sendo as perturbações dos satélites naturais cerca de duas ordens de grandeza superiores à perturbação devida ao termo mais significativo do potencial perturbador de Haumea.

Figura 4.22 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, em um período orbital, devida à interação com Namaka, Hi'iaka, respectivamente e da contribuição do termo C_{20} do potencial gravitacional de Haumea.



Para incorporar a perturbação total de pelo menos uma revolução completa de Hi'iaka, fizemos uma integração de 49,44 dias com as mesmas condições iniciais (Figura 4.23). A Figura 4.24 mostra o resultado da excentricidade máxima. Comparando os gráficos da figura 4.23, verificamos, como esperado, que Hi'iaka domina a perturbação sobre o veículo espacial na região do semi-eixo maior de 35000 km. O efeito da perturbação por Hi'iaka pode ser visto no mapa da excentricidade máxima apresentado na figura 4.24, onde a região de maior excentricidade máxima coincide com a região de maior valor da PI de Hi'iaka.

Figura 4.23 - Variação total da velocidade em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, por um período de 49,44 dias, devida a interação com Namaka (esquerda) e Hi'iaka (direita).

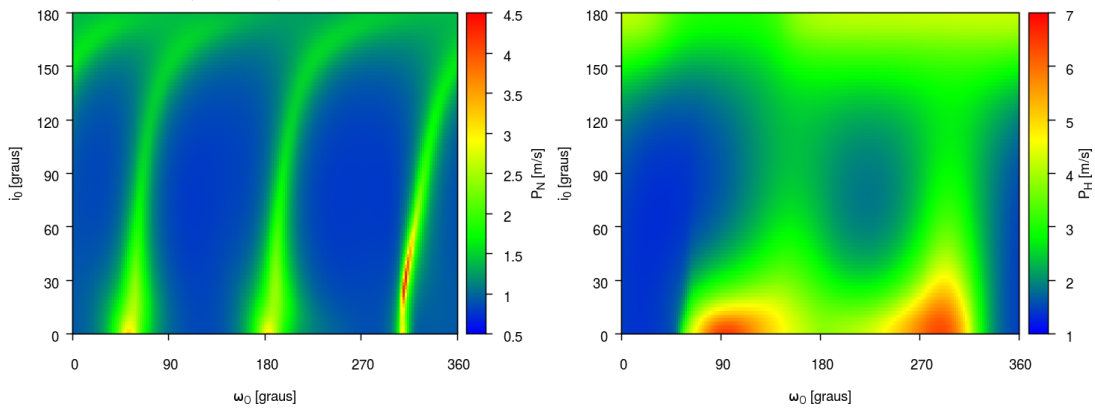
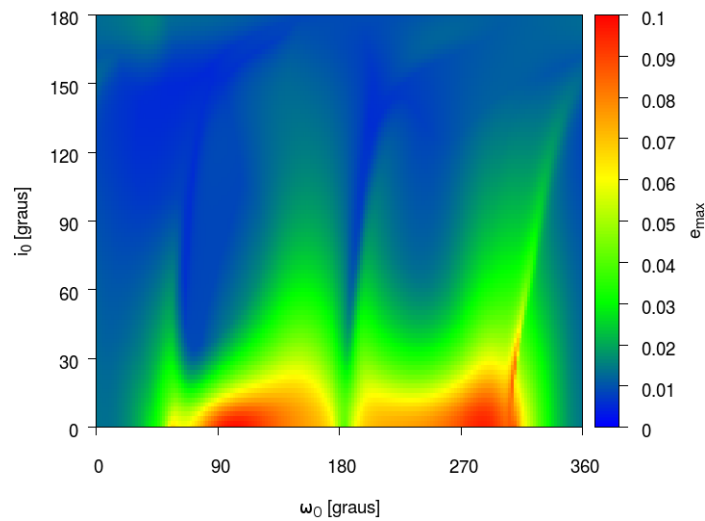


Figura 4.24 - Excentricidade máxima da órbita em função da inclinação inicial (I_0) e do argumento do pericentro inicial (ω_0), sendo $e_0 = 0$ e $a_0 = 35000$ km, em um período de 49,44 dias.



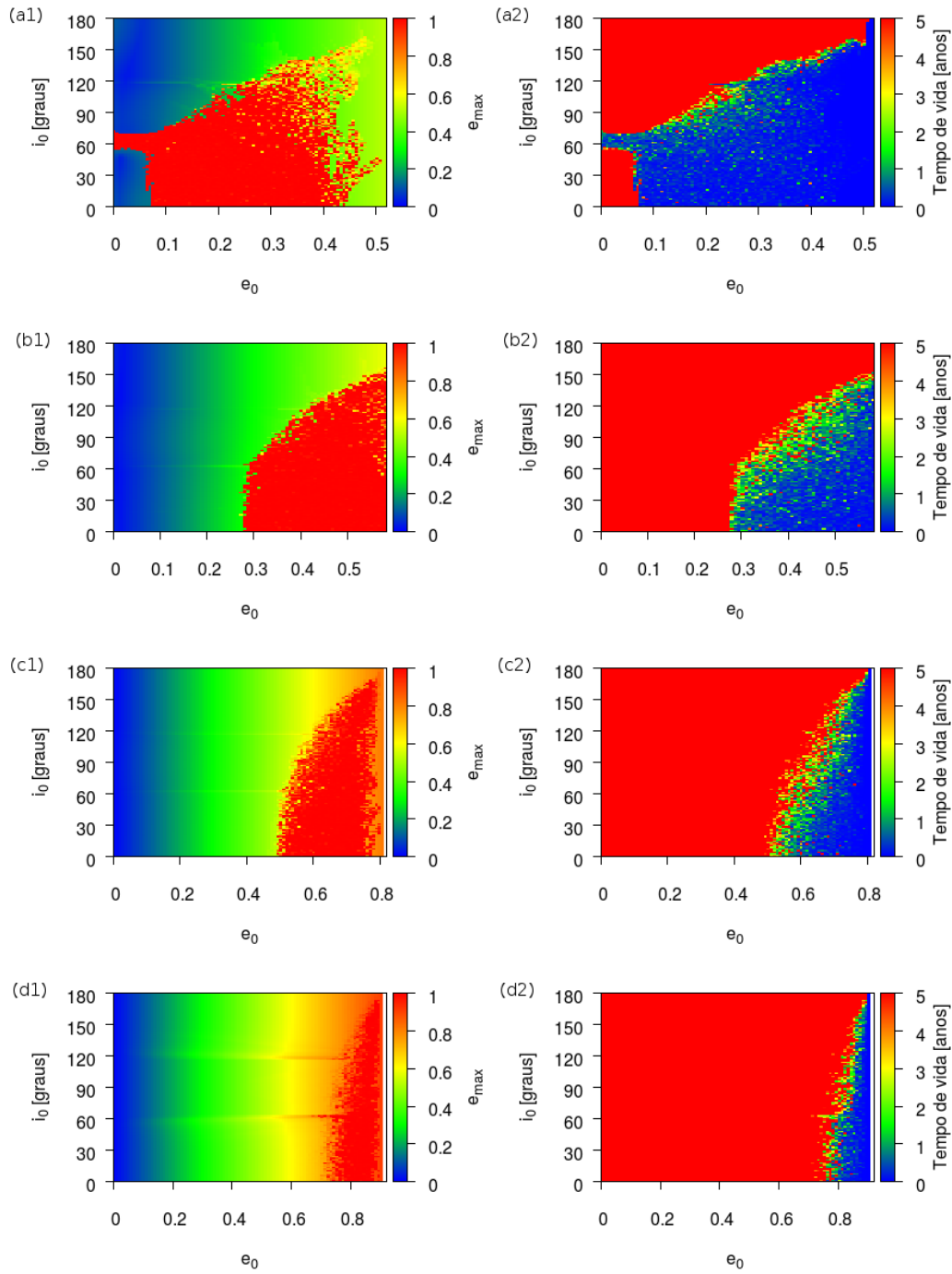
5 Estudo da estabilidade das órbitas pelo período de cinco anos

Além das integrais da perturbação, uma forma de estudar a estabilidade da órbita de um veículo espacial sob os efeitos dos potenciais perturbadores é mapear a variação dos elementos orbitais e o tempo de vida do veículo espacial para várias condições iniciais do movimento. Neste trabalho a estabilidade é definida pelo tempo de vida do veículo espacial em órbita e pela variação da excentricidade, que pode evoluir gerando encontros próximos entre o veículo espacial e um dos corpos naturais do sistema. Neste contexto, para garantir que a órbita seja estável no período de tempo desejado, podemos definir que temos uma órbita instável quando o veículo espacial tem alta variação da excentricidade, escapa ou é capturado mesmo que temporariamente por Namaka ou Hi'iaka, ou seja, quando a energia da órbita for positiva com relação a Haumea e negativa com relação a Namaka ou Hi'iaka. Quando a energia da órbita com relação ao corpo central fica positiva, interrompemos a simulação e registramos o tempo deste evento de instabilidade. Neste trabalho, esta avaliação foi feita para o tempo máximo de integração de cinco anos, de forma a obter mapas que mostram a estabilidade por cinco anos. Sobretudo, vale destacar que, caso seja adotado um outro tempo máximo de simulação, o perfil dos mapas pode ser alterado.

A Figura 5.1 mostra os mapas da excentricidade máxima (e_{max}) e do tempo de vida em função da inclinação inicial (i_0) e da excentricidade inicial (e_0), para o potencial gravitacional de Haumea desenvolvido até o termo de coeficiente C_{66} . As Figuras 5.1-(a1) e 5.1-(a2) mostram, respectivamente, a excentricidade máxima e o tempo de vida para o semi-eixo maior inicial $a_0 = 2000$ km. Na sequência, são apresentados os mapas para os semi-eixos maiores iniciais $a_0 = 3000$ km, $a_0 = 5000$ km e $a_0 = 10000$ km, respectivamente, com índices que iniciam com (b), (c) e (d), onde para todos os mapas usamos $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau. Todos os mapas foram construídos com uma grade de 91×121 pontos totalizando 11011 pontos. Desta forma, os mapas apresentam o incremento para a inclinação inicial de $\Delta i_0 = 1,5$ graus. Na grade dos mapas, a excentricidade inicial tem o valor máximo no limite de uma órbita sem colisão com o corpo central, ou seja, $e_0 < (1, 0 - ae/a)$. Onde ae é o maior semi-eixo de Haumea. Portanto, Δe_0 depende do semi-eixo maior adotado para construção do mapa, já que o número de pontos da grade é fixo. Portanto, o incremento da excentricidade nos mapas são: $\Delta e_0 \approx 0,0058$ para $a_0 = 2000$ km, $\Delta e_0 \approx 0,0075$ para $a_0 = 3000$ km, $\Delta e_0 \approx 0,0090$ para $a_0 = 5000$ km e $\Delta e_0 \approx 0,01$ para $a_0 = 10000$ km.

Analisando a sequência de gráficos da figura 5.1, identificamos regiões onde as condições iniciais geram órbitas com alta variação da excentricidade. Comparando estas regiões com o tempo de vida da órbita, fica claro que a instabilidade na excentricidade destas regiões geram órbitas com tempo de vida muito curto. Este resultado confirma a discrepância observada na curva da Figura 4.10 referente à excentricidade inicial $e_0 = 0,8$, onde, em um período orbital kepleriano, o veículo espacial passa longe do ponto de partida. Este resultado também aparece nas órbitas mais excêntricas dos resultados apresentados nas Figuras: 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18. Portanto, os resultados mostram que a integral da perturbação é um método rápido para determinação da estabilidade das órbitas. Já que a integral da perturbação por um período orbital consegue identificar onde a instabilidade pode aparecer, como mostra a figura 4.10.

Figura 5.1 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.



Verificamos também que, conforme o semi-eixo maior inicial aumenta, temos uma diminuição da região instável, permitindo órbitas estáveis para excentricidades iniciais maiores. Os mapas também mostram que a região estável cresce com o aumento da inclinação, incluindo maiores excentricidades. Ainda temos um aumento da excentricidade máxima nas regiões próximas a 60 e 120 graus. Sendo mais proeminente em órbitas com semi-eixo maior inicial $a = 2000$ km na região de 60 graus. Este aumento da excentricidade máxima desta região vem acompanhado da diminuição do tempo de vida do veículo espacial. Estas inclinações instáveis podem ser explicada por meio de uma ressonância especial que afeta a excentricidade da órbita do veículo espacial. Para o semi-eixo maior inicial considerado ($a = 2000$ km), o potencial gravitacional perturbador de Haumea é dominante, e as principais frequências para o sistema são a taxa de variação do argumento do pericentro ($\dot{\omega}$) e a taxa de variação do argumento do nodo ascendente ($\dot{\Omega}$). Onde a ressonância acontece se a razão entre as frequências é dada por (SANCHEZ et al., 2009):

$$\frac{\dot{\Omega}}{\dot{\omega}} = k \quad (5.1)$$

onde k é um número inteiro.

Para compreender a ação desta ressonância na região da inclinação crítica comparamos a evolução dos elementos orbitais de um veículo espacial nesta região com a evolução dos elementos orbitais de um veículo espacial na região estável.

A figura 5.2 mostra os resultados da propagação do movimento de um veículo espacial na região da inclinação crítica apresentada na figura 5.1-(a1). Os parâmetros iniciais para a propagação do movimento são: $a_0 = 2000$ km, $e_0 = 0$, $i_0 = 60$ graus e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau. A figura 5.3 mostra os resultados da propagação do movimento de um veículo espacial na região estável, onde as condições iniciais diferem do primeiro caso pela inclinação ($i_0 = 30$ graus). Comparando os gráficos (a) e (b) da figura 5.2, podemos estimar que inicialmente a relação secular entre as frequências $\dot{\Omega}$ e $\dot{\omega}$ está próxima de $k = -2$. No decorrer do tempo as taxas de variação de Ω e ω vão diminuindo até zero e após aproximadamente 85 dias de movimento o veículo espacial escapa do sistema. As figuras 5.2-(c) e 5.2-(d) mostram respectivamente a excentricidade e o semi-eixo maior da órbita aumentando neste intervalo de tempo. Estes resultados sugerem que ocorreram encontros próximos entre o veículo espacial e Namaka que resultou no escape do veículo espacial.

Comparando as figuras 5.3-(a) e 5.3-(b) podemos estimar que a relação secular entre as frequências $\dot{\Omega}$ e $\dot{\omega}$ está próxima de $k = -1$. A figura 5.3-(c) mostra a excentricidade estável para o intervalo de tempo de 85 dias. Neste caso, como mostra o resultado da figura 5.1-(a1), a estabilidade se mantém em 5 anos de movimento. Portanto, as ressonâncias dadas pela Equação 5.1 são importantes e podem explicar a instabilidade nas regiões das inclinações críticas. O estudo destas ressonâncias será retomado em outro trabalho para aprofundar o conhecimento da instabilidade das órbitas nas inclinações críticas.

Figura 5.2 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. O gráfico (a) apresenta o argumento do nodo ascendente, (b) mostra o argumento do pericentro, (c) mostra a excentricidade e (d) o semi-eixo maior. Os parâmetros iniciais foram: $a_0 = 2000$ km, $e_0 = 0$, $i_0 = 60$ graus e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau.

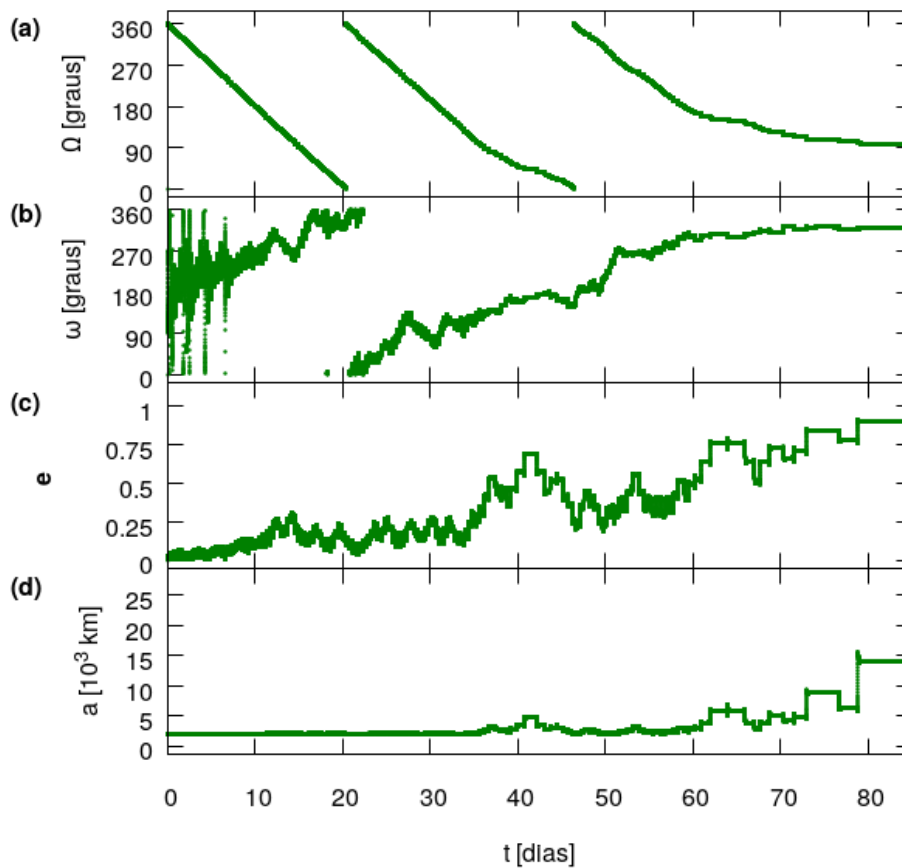
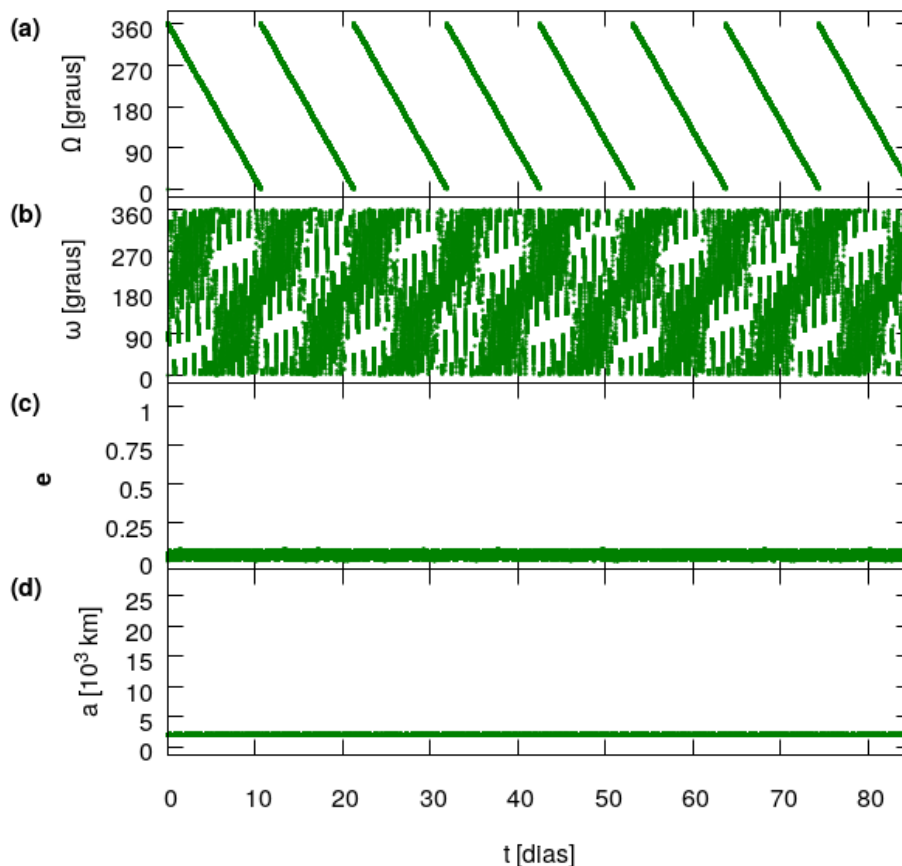


Figura 5.3 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial considerando até o sexto grau e sexta ordem do potencial gravitacional de Haumea. O gráfico (a) apresenta o argumento do nodo ascendente, (b) mostra o argumento do pericentro, (c) mostra a excentricidade e (d) o semi-eixo maior. Os parâmetros iniciais foram: $a_0 = 2000$ km, $e_0 = 0$, $i_0 = 30$ graus e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau.



As Figuras (5.4), (5.5) e (5.6) mostram os mapas com o potencial gravitacional de Haumea, truncados nos termos com coeficientes C_{44} , C_{22} e C_{20} , respectivamente. As condições iniciais usadas para estes mapas são as mesmas condições iniciais que geraram os mapas da figura 5.1, inclusive grade, Δi_0 e Δe_0 . Comparando os resultados da Figura 5.1 com os resultados da Figura 5.4, observamos que não há diferença suficiente entre o potencial gravitacional até o termo C_{66} e o potencial gravitacional até o termo C_{44} , a qual, comprometa a análise da estabilidade das órbitas. Da comparação com os resultados da Figura 5.5, identificamos que, para as órbitas de semi-eixo maior inicial igual a 2000 km, o potencial gravitacional de Haumea desenvolvido até o termo de coeficiente C_{22} , difere de forma substancial do poten-

cial gravitacional desenvolvido até o termo de coeficiente C_{66} (Figura 5.1). Porém, comparando os gráficos que mostram os resultados das órbitas de semi-eixo maior inicial $a_0 = 3000$ km e superiores, podemos ver que, a adoção do potencial gravitacional desenvolvido até o termo de coeficiente C_{22} , não compromete os resultados da estabilidade da órbita para o tempo de cinco anos. A Figura 5.6 apresenta os resultados obtidos para o potencial gravitacional que modela somente o achatamento nos polos de Haumea (termo com coeficiente C_{20}). Os resultados mostraram que, para qualquer semi-eixo maior inicial adotado, os mapas já são muito divergentes, se comparado com os resultados do modelo que tem adicionado o termo do potencial gravitacional de coeficiente C_{22} , o qual modela o achatamento do equador de Haumea. Esta diferença é acentuada pelo fato de Haumea ter um elevado achatamento equatorial, mostrando que os resultados da Figura 5.5 provém do modelo mínimo para representar de forma aceitável o potencial gravitacional de Haumea, porém, desprovido de precisão para a predição do movimento orbital de veículos espaciais.

Figura 5.4 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando até o quarto grau e quarta ordem do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.

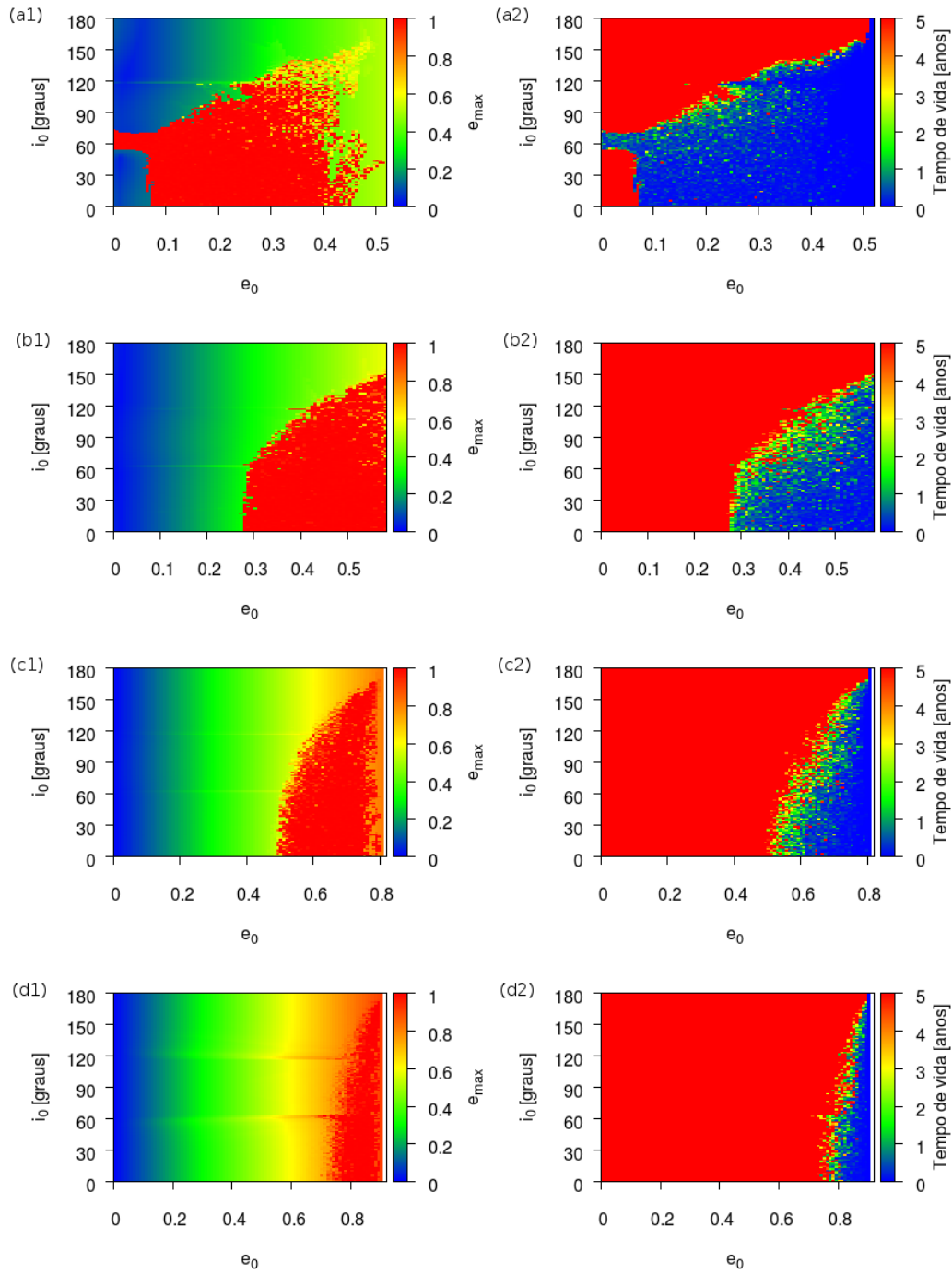


Figura 5.5 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando os termos do potencial gravitacional de Haumea de coeficientes C_{20} e C_{22} . A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.

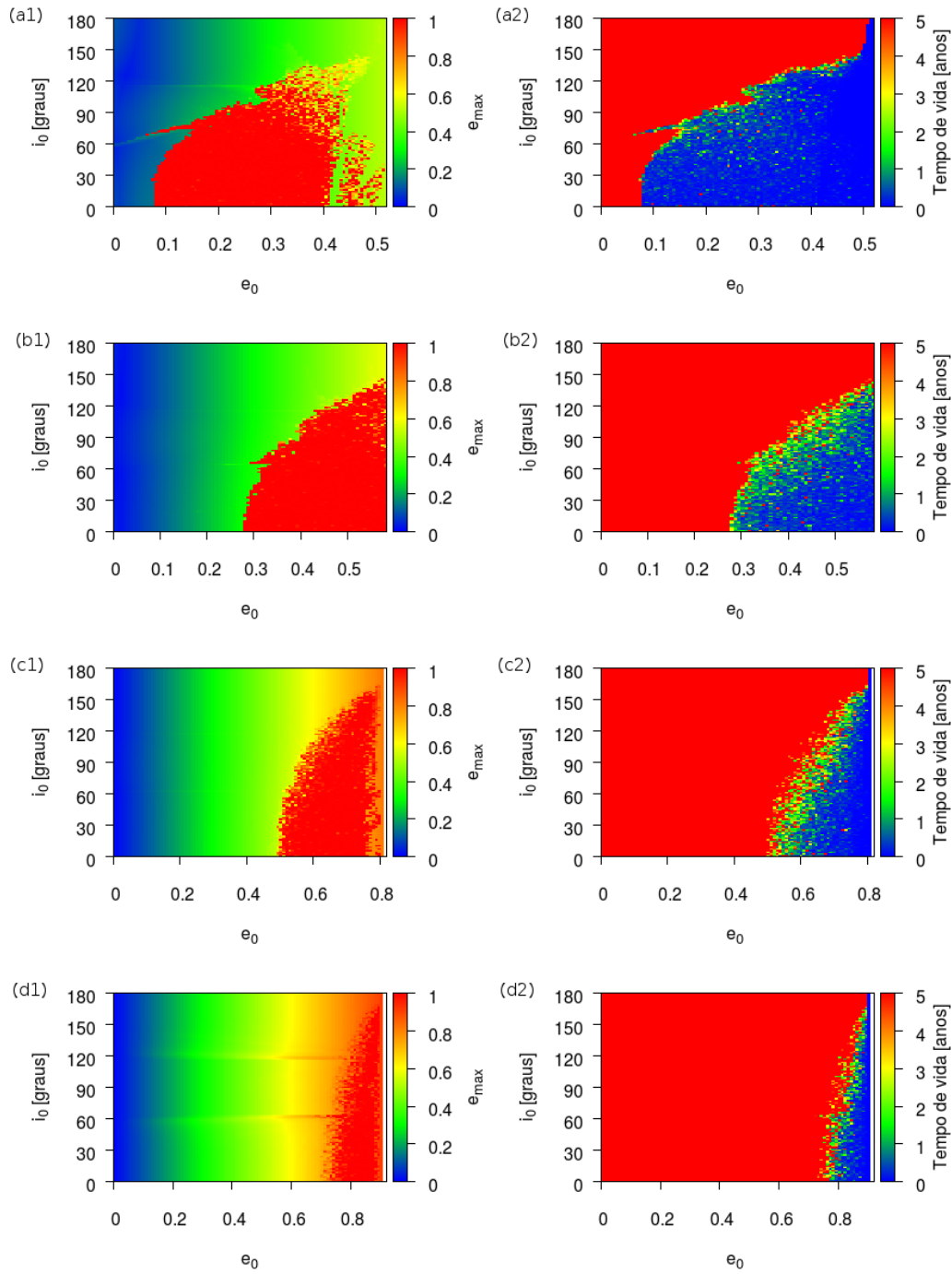
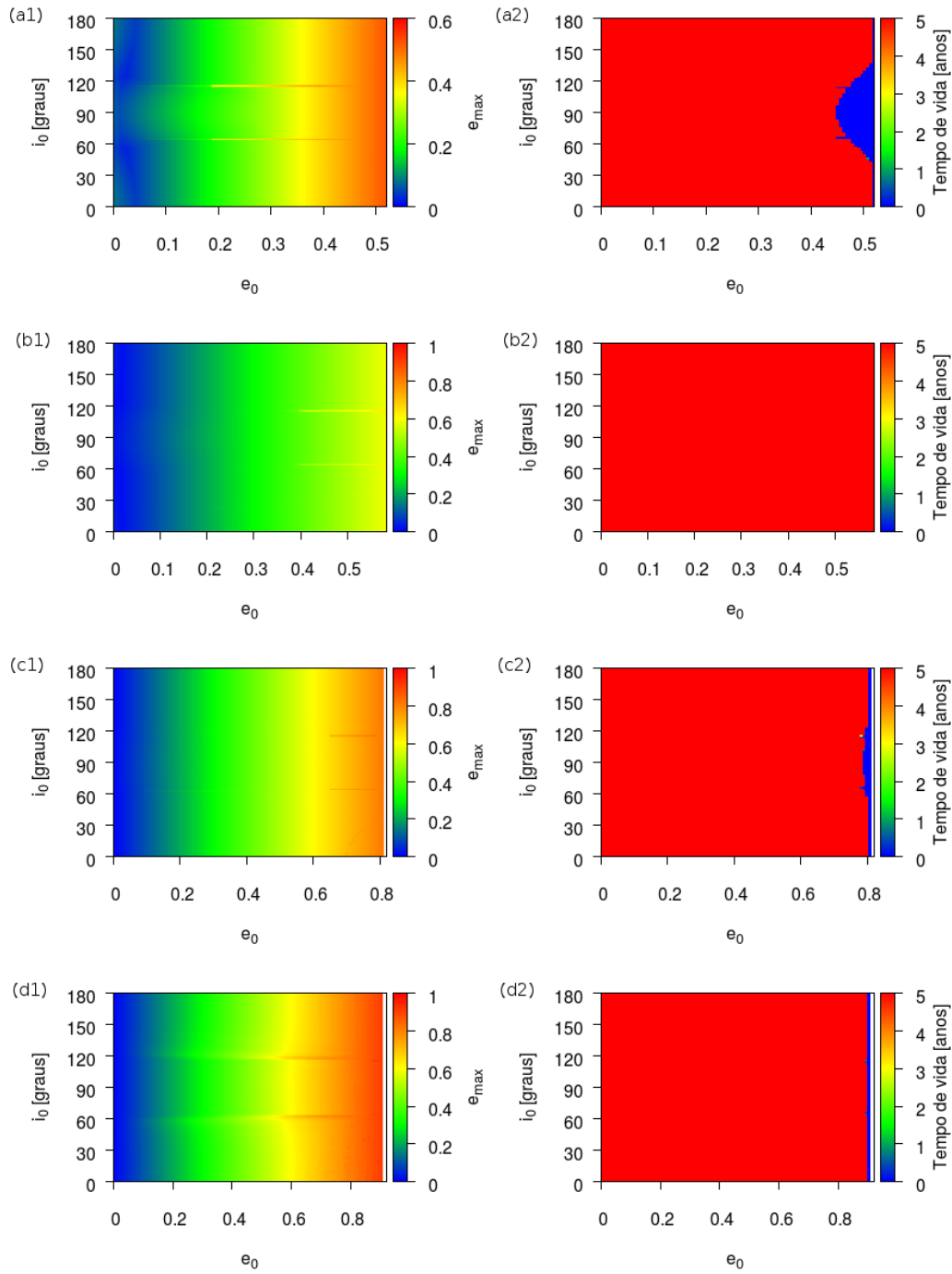
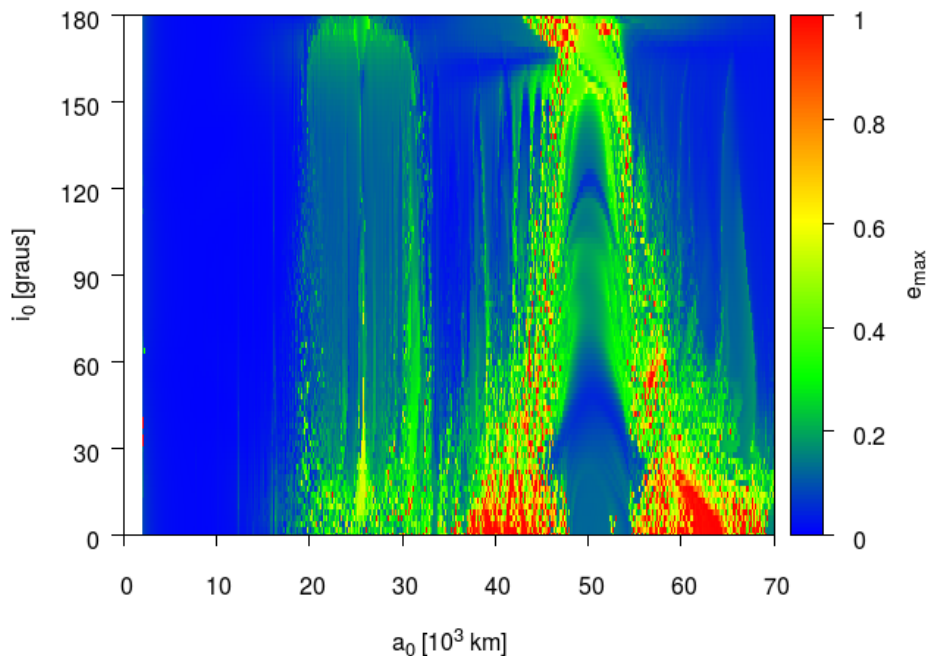


Figura 5.6 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial para o tempo máximo de simulação de 5 anos, considerando o termo de coeficiente C_{20} do potencial gravitacional de Haumea. A primeira coluna de gráficos mostra a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais para os semi-eixos maiores iniciais de 2000, 3000, 5000 e 10000 km, respectivamente, em a1, b1, c1 e d1. A segunda coluna apresenta o tempo de vida do veículo espacial para cada caso.



Uma outra análise importante para a verificação da estabilidade das órbitas, foi a construção de mapas que mostram a excentricidade máxima (e_{max}) e o tempo de vida, em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior inicial (a_0), como mostram as Figuras 5.7 e 5.8, respectivamente. É fato que o resultado da propagação do movimento depende do argumento do nodo ascendente, do argumento do pericentro e da anomalia média iniciais, porém, para efeito de comparação continuamos a utilizar $\omega_0 = 0$, $\Omega_0 = 0$ e $M_0 = 0$ para a integração do movimento. Os resultados apresentados nas Figuras 5.7 e 5.8 mostram as simulações para $e_0 = 0, 0$.

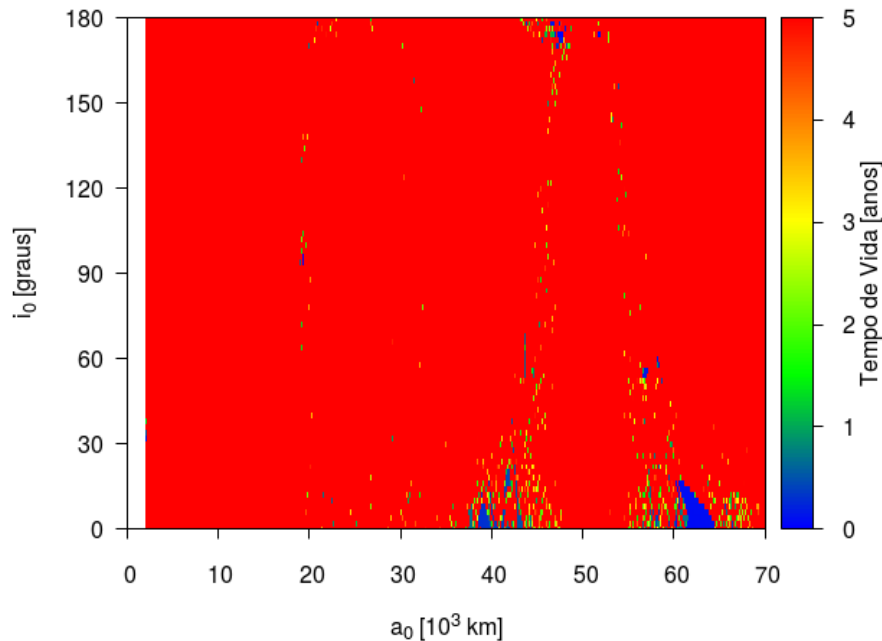
Figura 5.7 - Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos.



Quanto à variação da excentricidade, o resultado da Figura 5.7 mostra estabilidade na região em azul. A partir do semi-eixo maior inicial de aproximadamente 17000 km começam a aparecer as variações expressivas na excentricidade das órbitas. A esta distância de Haumea, estas variações são devidas as perturbações de Namaka e Hi'iaka. Dentre as regiões aparentemente estáveis a partir do semi-eixo maior inicial de 17000 km, destacam-se as órbitas com semi-eixo maior em torno de 50000 km, pois está embutida numa região instável. Nesta região as órbitas estão próximas à ressonância de movimentos médios 1:1 com Hi'iaka, esta propriedade será abordada

no próximo capítulo. Esta figura, também mostra linhas verticais que apresentam, um aumento da excentricidade máxima em regiões estáveis ou uma supressão da excentricidade máxima em regiões de maior variação da excentricidade. Uma observação mais cuidadosa das linhas, mostra que muitas delas aparecem nos valores de semi-eixo maior em que o veículo espacial está em ressonância ou muito próximo à ressonância de movimento médio com Namaka ou Hi'iaka ou ambos. Estes resultados permitem identificar algumas ressonâncias interessantes para o estudo da evolução orbital do veículo espacial. Neste mapa, ainda podemos identificar as regiões de maior instabilidade por meio da comparação com o tempo de vida do veículo espacial, apresentado na Figura 5.8. Por meio deste resultado, vimos que, mesmo com a existência de condições iniciais em que a variação da excentricidade é elevada, o veículo espacial sobrevive aos cinco anos de movimento orbital, porém, pelo fato da variação da excentricidade ser alta, a órbita pode ser caótica e não podemos afirmar que as órbitas são estáveis.

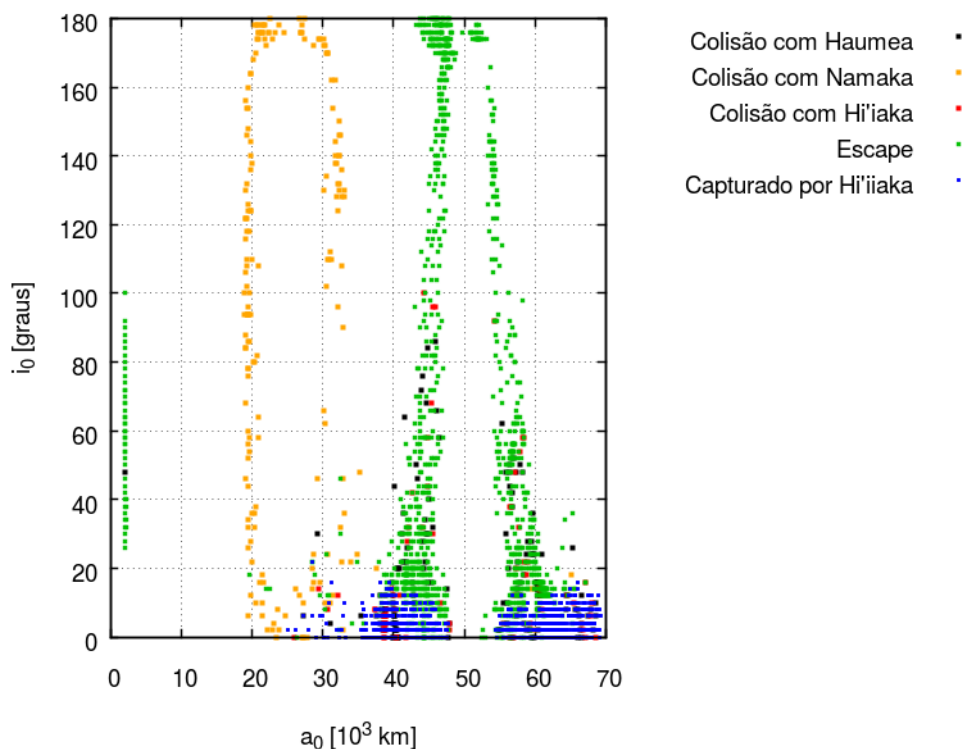
Figura 5.8 - Tempo de vida do veículo espacial em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos.



A Figura 5.9 mostra as colisões e a situação dos veículos espaciais no momento em que a energia da órbita com relação a Haumea deixa de ser negativa. Neste

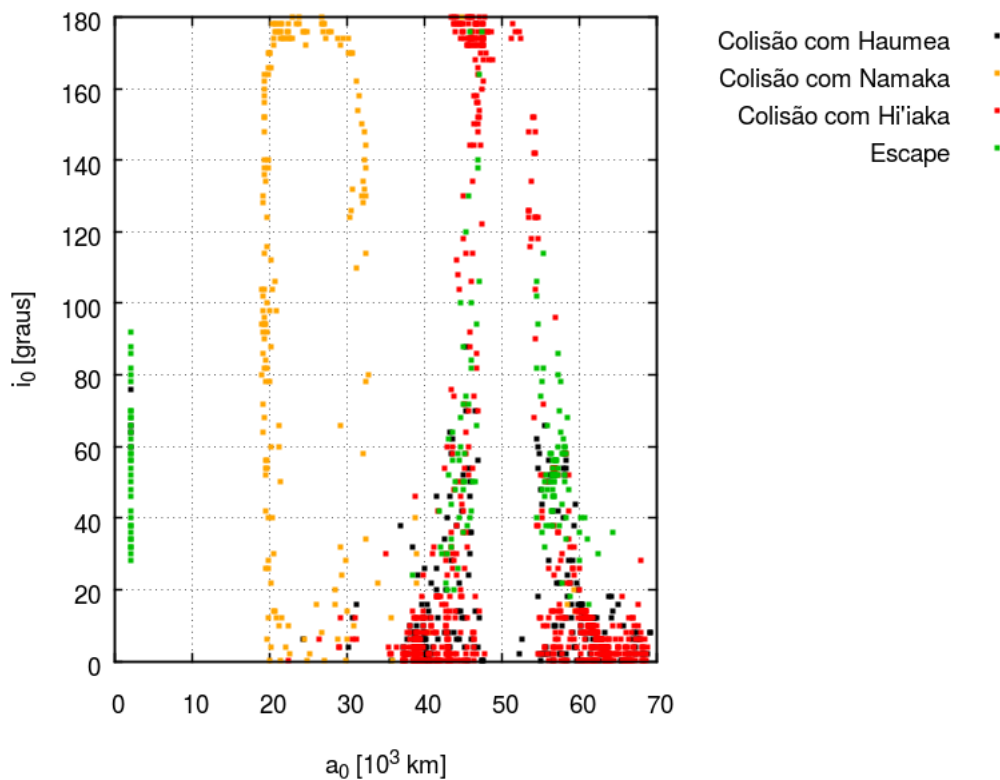
momento temos três possibilidades: (i) se a energia da órbita com relação a Namaka é negativa, consideramos que o veículo espacial foi capturado por Namaka, mesmo que temporariamente, (ii) se a energia da órbita com relação a Hi'iaka é negativa, consideramos que o veículo espacial foi capturado por Hi'iaka e (iii) se a energia também é positiva com relação a Namaka e Hi'iaka, consideramos que o veículo espacial escapou do sistema. O objetivo desta abordagem é estabelecer a região de influência de cada perturbador do sistema. O diagrama de cores da Figura 5.9 tem a seguinte associação: (laranja) colisão com Namaka, (verde) condição de escape da órbita, (azul) capturado por Hi'iaka, (vermelho) colisão com Hi'iaka, (preto) colisão com Haumea. A Figura mostra, em termos da inclinação e do semi-eixo maior, a região dominada por Namaka e a região dominada por Hi'iaka, com relação à perturbação. Notamos que a fronteira entre domínios fica próxima ao semi-eixo maior de 35000 km, portanto, mais próxima de Namaka. Este cenário é esperado pelo fato de Hi'iaka ter massa igual a uma ordem de grandeza superior à massa de Namaka. Entretanto, para órbitas de baixa inclinação, o domínio de Hi'iaka avança para semi-eixos maiores ainda menores sobrepondo a região onde o efeito da perturbação por Namaka é dominante. Este resultado mostra que a região em torno de Namaka é caótica.

Figura 5.9 - Mapa de colisões, capturas e escape em função do semi-eixo maior e da inclinação iniciais.



A Figura 5.10 mostra as órbitas que terminaram em colisão ou escape no término dos cinco anos de integração do movimento. Comparando-a com a Figura 5.9 notamos que, vários dos veículos espaciais que estavam na condição de escape, ainda continuaram orbitando Haumea e alguns terminaram em colisão com Hi'iaka ou Haumea. A maioria dos veículos espaciais que estavam na condição de capturado por Hi'iaka (Figura 5.9 (azul)) colidiram com ela (Figura 5.10 (vermelho)). Os resultados da Figura 5.10 também mostram que, os veículos espaciais que terminaram em colisão com Haumea ou escaparam, concentram-se na região sob o domínio da perturbação por Hi'iaka, exceto para os valores do semi-eixo maior cuja perturbação por Haumea é dominante.

Figura 5.10 - Mapa de colisão e escape em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais no término de cinco anos de integração do movimento. Neste mapa não aplicamos o critério de capturas.



Como esperado, o mapa de estabilidade da órbita também depende da excentricidade inicial. No apêndice A.1 mostramos o conjunto completo de mapas para excentricidades iniciais de $e_0 = 0,1$ até $e_0 = 0,9$. Conforme aumentamos a excentricidade inicial, vimos mudanças nas regiões mais instáveis, destacando o aumento da região

instável sob o domínio da perturbação por Haumea.

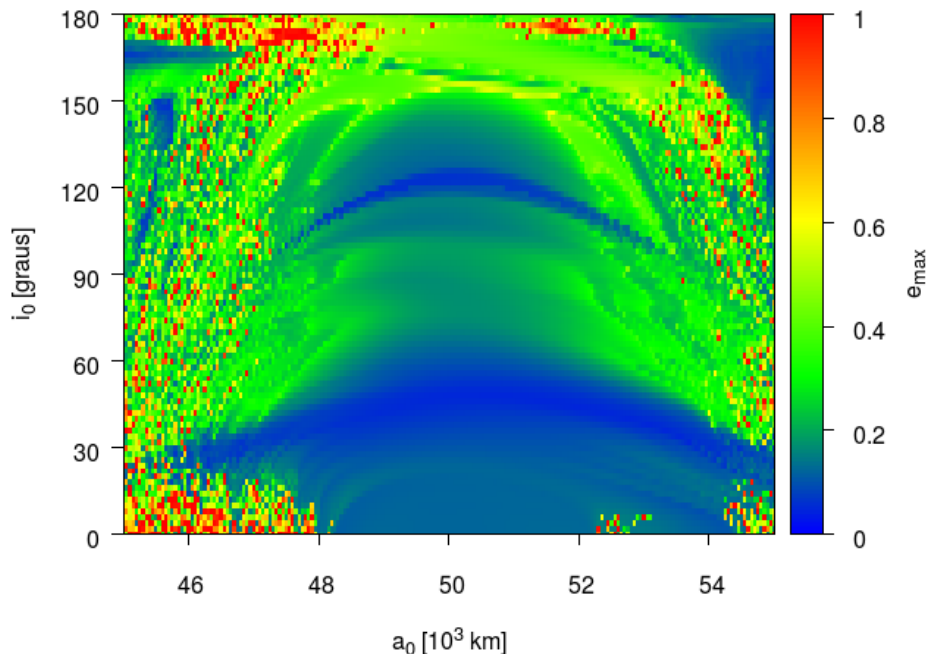
6 Ressonâncias de movimentos médios (MMRs)

Os resultados do capítulo anterior mostraram que as perturbações em consequência de Namaka e Hi'iaka são, como esperado, dominantes em órbitas mais distantes de Haumea como mostramos por meio dos resultados das Figuras 5.7, 5.9 e 5.10. Neste capítulo, vamos avaliar o desenvolvimento do movimento orbital em torno de duas regiões selecionadas no gráfico da Figura 5.7. A primeira região fica em torno do semi-eixo maior $a_0 = 50000$ km, próxima à ressonância de movimentos médios 1:1 veículo espacial-Hi'iaka e a segunda região fica em torno do semi-eixo maior $a_0 = 12360$ km, próxima à ressonância de movimentos médios 3:1 veículo espacial-Namaka.

6.1 MMR 1:1 veículo espacial-Hi'iaka

A primeira região interessante que fica em torno do semi-eixo maior $a_0 = 50000$ km (Figura 5.7) é apresentada na figura 6.1 de forma ampla. Veículos espaciais orbitando com este valor de semi-eixo maior encontram-se praticamente na ressonância de movimentos médios igual a 1:1 com Hi'iaka. Visto que, conforme o semi-eixo maior inicial da órbita afasta-se do semi-eixo maior ressonante temos órbitas instáveis (Figura 6.1), podemos dizer que o motivo da estabilidade nesta região é a ressonância de movimentos médios. Nesta região, as órbitas são estáveis para inclinações abaixo de aproximadamente 60 graus e na região com inclinações em torno de 120 graus. No caso das órbitas diretas, a diferença entre as longitudes médias da sonda espacial e de Hi'iaka é de $\sigma = 42$ graus, onde $\sigma = \lambda_v - \lambda_H$ (onde o índice v indica o veículo espacial e o índice H indica Hi'iaka) e $\lambda = \Omega + \omega + M$ é a longitude média (para órbitas retrógradas $\lambda = \Omega - \omega - M$). No problema restrito de três corpos, esta posição está próxima à posição angular do ponto de Lagrange L_4 com relação ao corpo central do sistema Haumea-Hi'iaka. Em outras palavras, temos uma supressão dos efeitos das perturbações sobre a excentricidade da órbita quando a sonda espacial está orbitando próximo ao ponto de Lagrange L_4 do sistema Hi'iaka-Haumea.

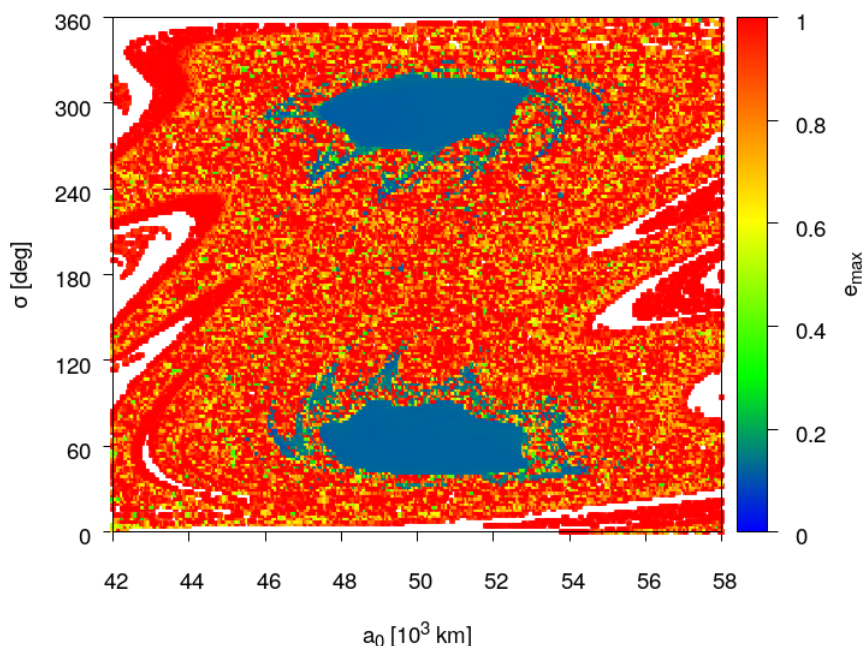
Figura 6.1 - Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. A excentricidade inicial é zero e o tempo de integração é de 5 anos. A diferença entre as longitudes médias do veículo espacial e de de Hi'iaka é de $\sigma = 42$ graus.



Visto esta característica, analisamos o movimento coorbital de uma sonda espacial com Hi'iaka. A Figura 6.2 mostra a excentricidade máxima em função de σ_0 e do semi-eixo maior inicial da órbita para órbitas próximas a Hi'iaka. A longitude do nodo ascendente é o mesmo de Hi'iaka. A inclinação inicial da sonda espacial é de 1 grau, desta forma a inclinação relativa entre a sonda espacial e Hi'iaka é de 1 grau. As órbitas têm excentricidade inicial de $e_0 = 1 \times 10^{-5}$. Os pontos em branco indicam as órbitas que terminaram em colisão com um dos corpos do sistema de Haumea. Estes resultados confirmam os menores efeitos das perturbações sobre a excentricidade quando as órbitas iniciam nas proximidades dos pontos de Lagrange L_4 e L_5 . A Figura 6.3 mostra a inclinação máxima registrada durante a propagação do movimento das órbitas da mesma região da Figura 6.2. Novamente, as menores variações concentram-se próximas aos pontos L_4 e L_5 .

Para analisar a estabilidade das órbitas destas regiões, usamos os métodos da integral da perturbação. As Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 mostram as aplicações dos três métodos da integral da perturbação, respectivamente. Através do resultado da Figura 6.4 podemos identificar as órbitas próximas aos pontos de Lagrange L_4 e L_5

Figura 6.2 - Excentricidade máxima (e_{max}) em função de $\sigma = \lambda_v - \lambda_H$ e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 1 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1$ grau e o tempo de integração é de 10 anos.



com menor variação total da velocidade durante o movimento, consequentemente com menor intensidade da ação dos perturbadores. O resultado da Figura 6.5 mostra que estas regiões são estáveis quanto à energia adquirida das perturbações. Dadas as perturbações envolvidas no problema (potencial perturbador de Haumea e Namaka), os pontos de equilíbrio não se encontram fixos exatamente nos pontos L_4 e L_5 do problema restrito de três corpos. Porém, através da análise da perturbação líquida podemos identificar a região menos afetada pelos potenciais perturbadores. O resultado da Figura 6.6 mostra a mínima perturbação líquida nas proximidades de L_4 e L_5 . Concluindo os resultados destas três figuras, podemos avaliar a estabilidade da seguinte forma. Procuramos encontrar regiões estáveis com o seguinte comportamento, dada uma pequena variação nas condições iniciais do movimento da sonda espacial, queremos obter órbitas com variações semelhantes para os elementos orbitais e para as integrais da perturbação durante o movimento da sonda espacial. Deste ponto de vista, as regiões próximas a L_4 e L_5 satisfazem à definição.

Figura 6.3 - Inclinação máxima (i_{max}) em função de $\sigma = \lambda_v - \lambda_H$ e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 1 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1$ grau e o tempo de integração é de 10 anos.

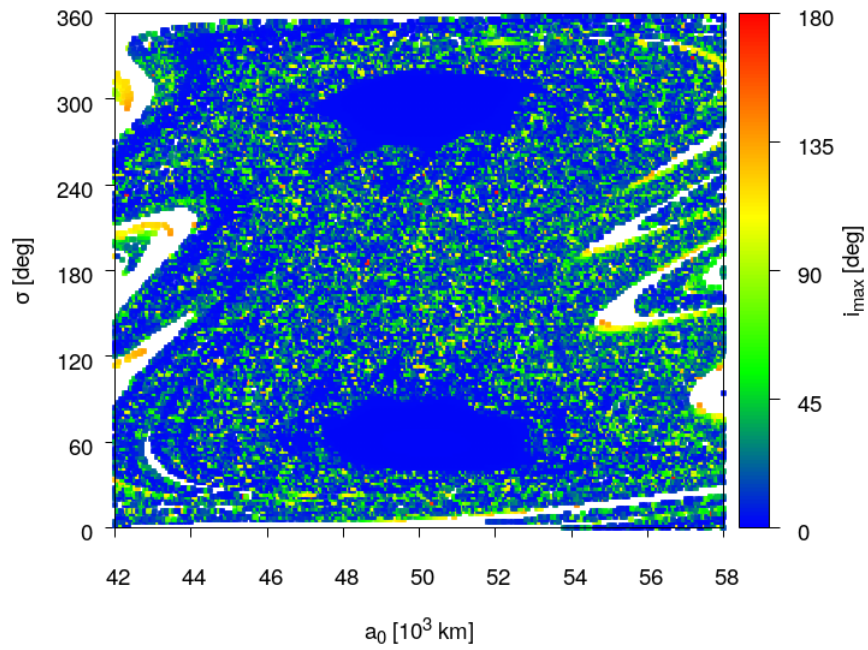


Figura 6.4 - Mapa da perturbação obtido pela PI do primeiro método (PI_i), para as órbitas da Figura 6.2.

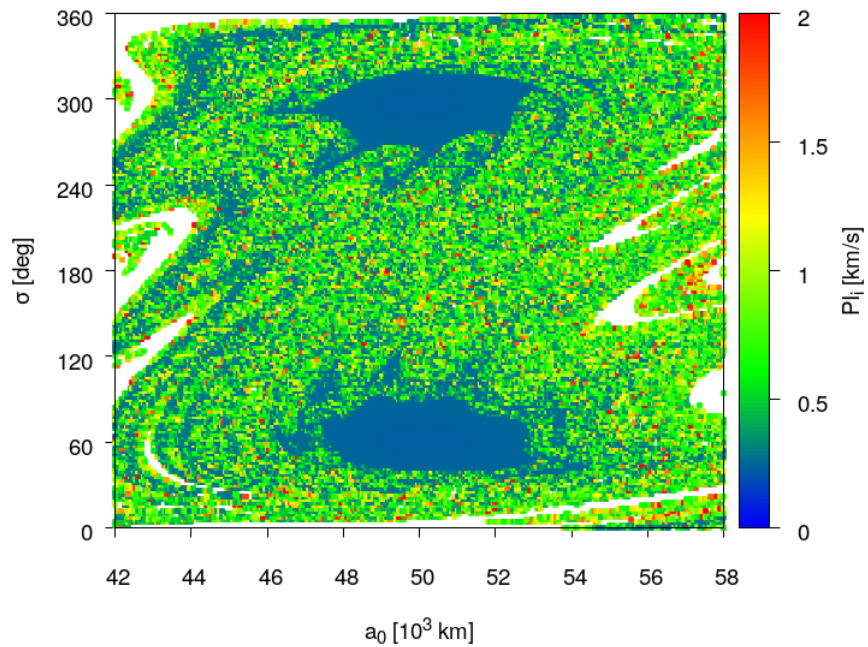


Figura 6.5 - Mapa da perturbação obtido pela PI do segundo método (PI_{ii}), para as órbitas da Figura 6.2.

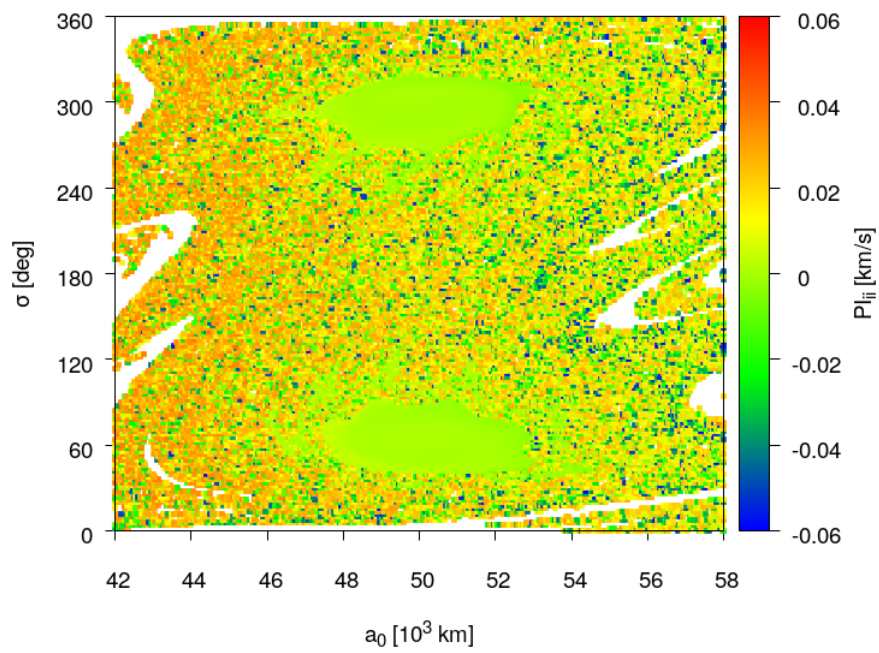
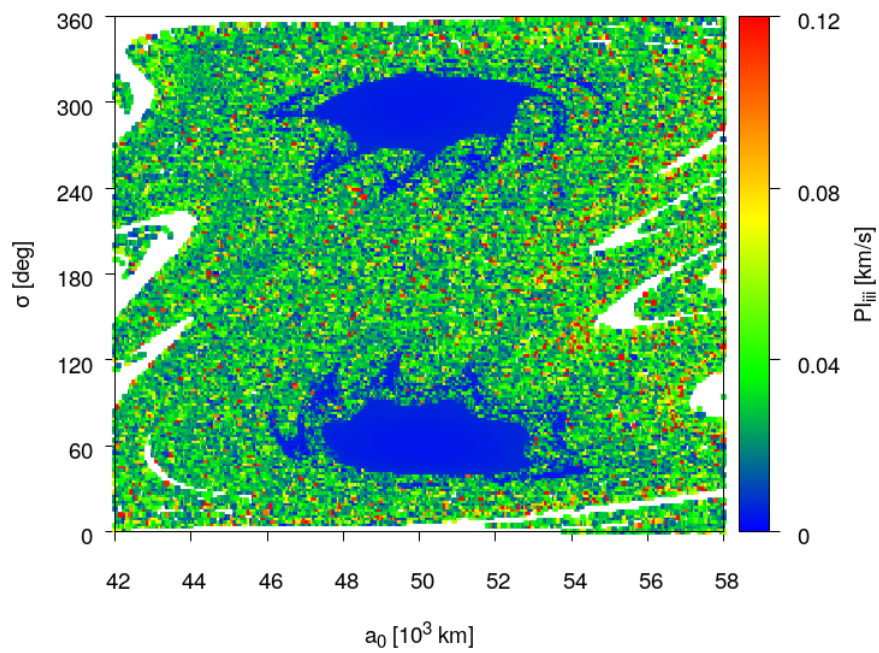
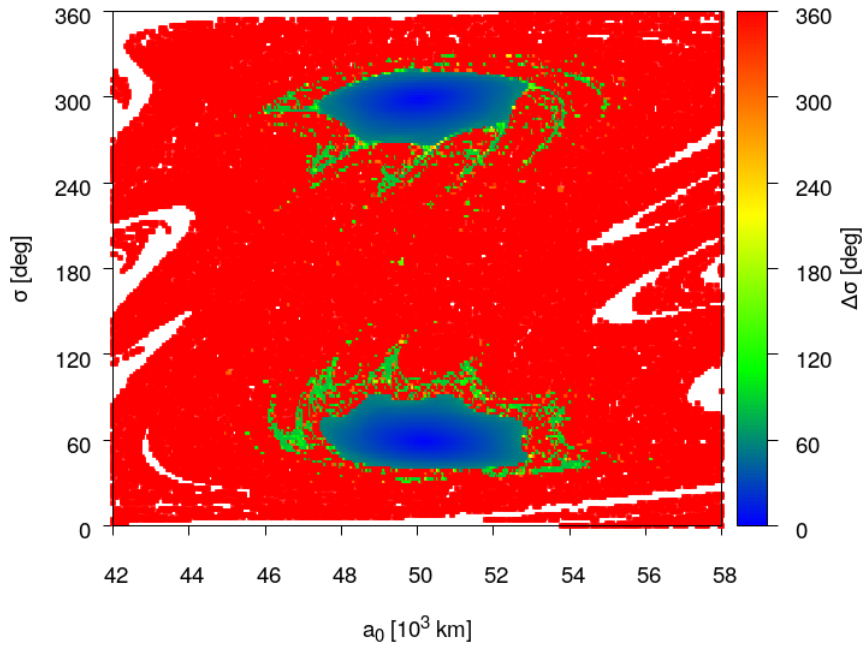


Figura 6.6 - Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}), para as órbitas da Figura 6.2.



A Figura 6.7 mostra o mapa da amplitude da variação de σ ($\sigma_{max} - \sigma_{min}$) para a mesma região. Podemos ver que, nas regiões em torno de L_4 e L_5 ocorre a libração de σ . Este resultado mostra que, com estas condições iniciais, as sondas espaciais executam um movimento do tipo troiano com relação a Hi'iaka.

Figura 6.7 - Variação máxima de σ para as órbitas da Figura 6.2.



A Figura 6.8 mostra a perturbação líquida em função de Ω_0 e ω_0 , onde o semi-eixo maior e a inclinação iniciais têm os mesmos valores de Hi'iaka, a excentricidade inicial é $e_0 = 1 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1$ e todas as órbitas iniciam com $M = 0$. O círculo preto indica a posição de Hi'iaka e os pontos em branco indicam as colisões.

A Figura 6.9 mostra o resultado da perturbação líquida em função de Ω_0 e σ_0 do mesmo conjunto de simulações. Analisando os dois resultados podemos ver que os pares (Ω, ω) levam a órbitas estáveis para λ_s inicial nas proximidades de ± 60 graus com relação a λ_H .

Figura 6.8 - Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de Ω_0 e ω_0 para o tempo de integração de 10 anos.

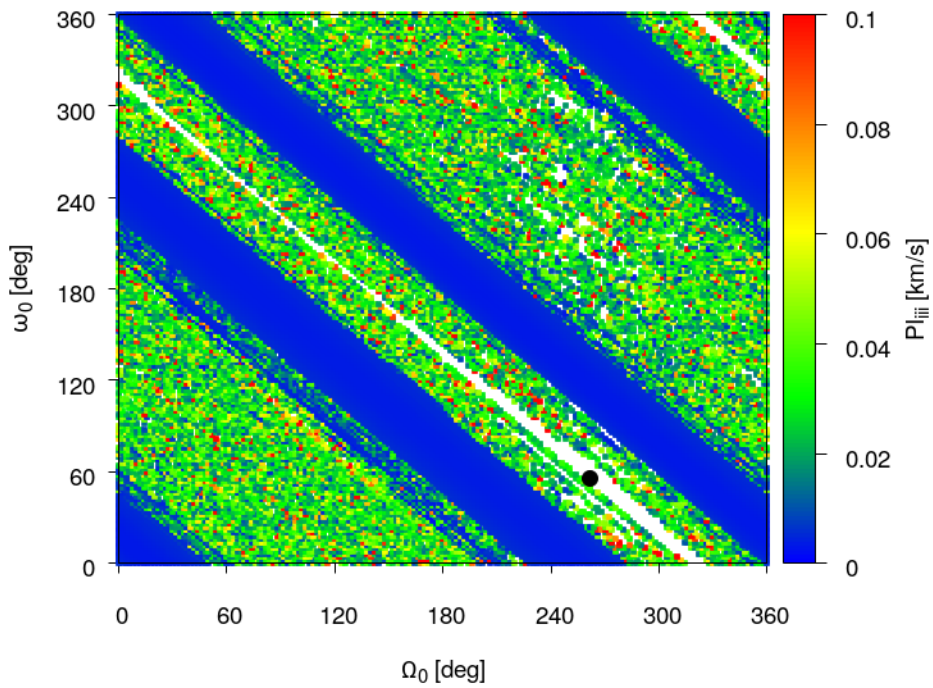
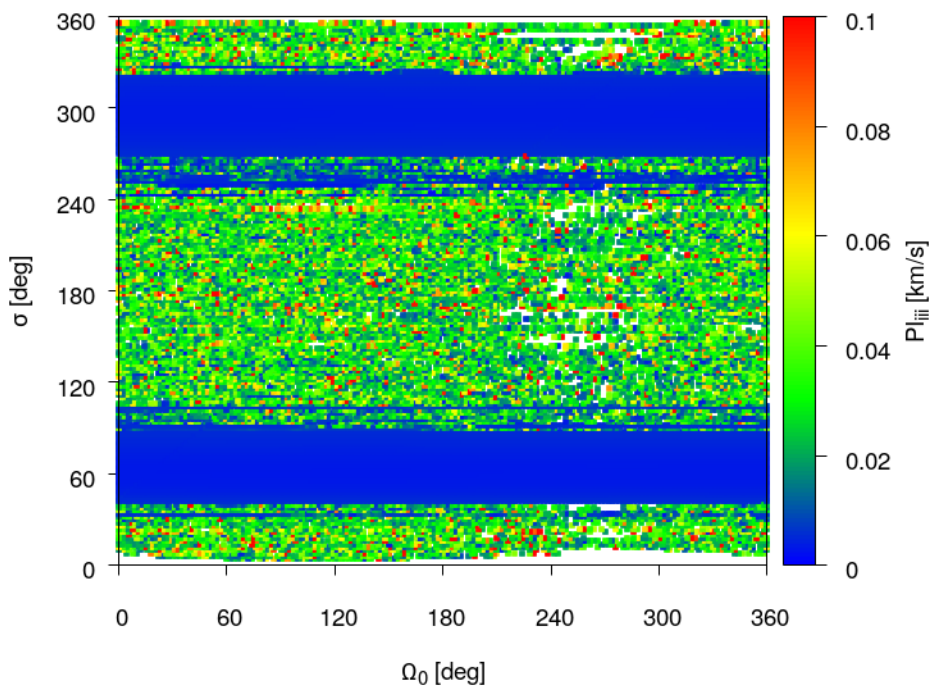


Figura 6.9 - Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de Ω_0 e σ_0 para o tempo de integração de 10 anos.



Também avaliamos o efeito da excentricidade inicial da órbita, partindo a propagação do movimento nas proximidades de $\sigma = 60$ graus (ponto L_4 para órbitas com mesmo semi-eixo maior de Hi'iaka). A Figura 6.10 mostra o resultado da perturbação líquida (PI_{iii}) em função de a_0 e e_0 com $\sigma_0 = 60$ graus. O círculo preto indica a posição de Hi'iaka e os pontos em branco indicam as colisões. Através deste resultado podemos ver que as órbitas são estáveis até $e \approx 0.3$ nas proximidades da MMR 1:1, assim como podemos verificar através do resultado da Figura 6.11, que mostra a variação da excentricidade ($e_{max} - e_{min}$) em função do semi-eixo maior e da excentricidade iniciais para o mesmo conjunto de simulações apresentado na Figura 6.10. O resultado também mostra que praticamente não existe variação da excentricidade na região de MMR 1:1 de excentricidade igual à de Hi'iaka ($e_H = 0,0513$) e baixa variação da excentricidade até $e_0 \approx 0,3$.

Figura 6.10 - Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}) em função de a_0 e e_0 para o tempo de integração de 10 anos.

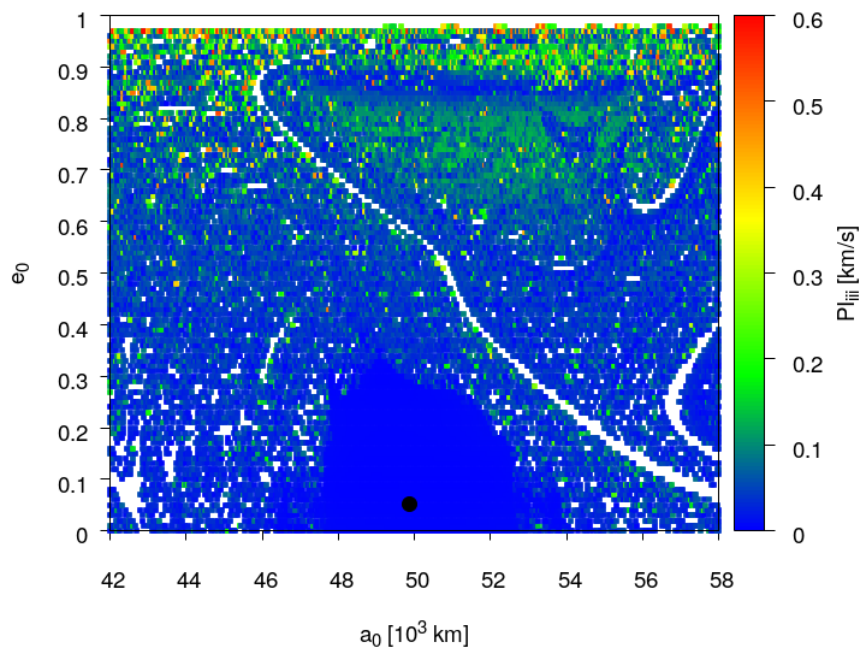
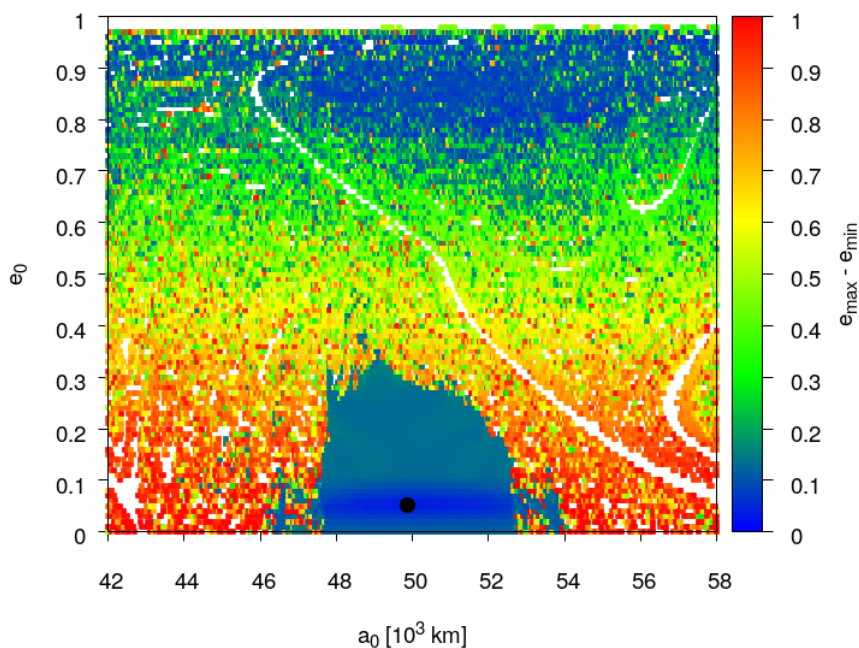


Figura 6.11 - Variação máxima da excentricidade das simulações da Figura 6.10.



A Figura 6.12 apresenta os resultados da perturbação total segundo o modelo PI_I para o mesmo conjunto de simulações apresentado na Figura 6.10. Comparando os dois resultados, verificamos que as órbitas da região estável também sofrem perturbações, pois a Figura 6.12 mostra que nesta região a perturbação total é diferente de zero, porém, como verificado na Figura 6.10, a perturbação líquida é muito pequena, ou seja, a perturbação é compensada durante o movimento orbital.

Também analisamos a estabilidade para o movimento coorbital retrógrado. A Figura 6.13 mostra a variação máxima da excentricidade ($e_{\max} - e_{\min}$) em função de a_0 e e_0 com $\sigma_0 = 60$ graus para o movimento coorbital com Hi'aka. O resultado mostra que as sondas espaciais com excentricidade inicial próxima da excentricidade de Hi'iaka têm grande variação da excentricidade, levando a colisões em muitos casos. Porém, para excentricidade inicial a partir de $e_0 \approx 0,12$ a região torna-se estável até as órbitas com $e_0 \approx 0,9$. Podemos ver que a partir da excentricidade $e_0 \approx 0,4$, a variação da excentricidade vai diminuindo até $e_0 \approx 0,9$.

Figura 6.12 - Mapa da perturbação obtido pela PI do primeiro método (PI_i), das simulações da Figura 6.10.

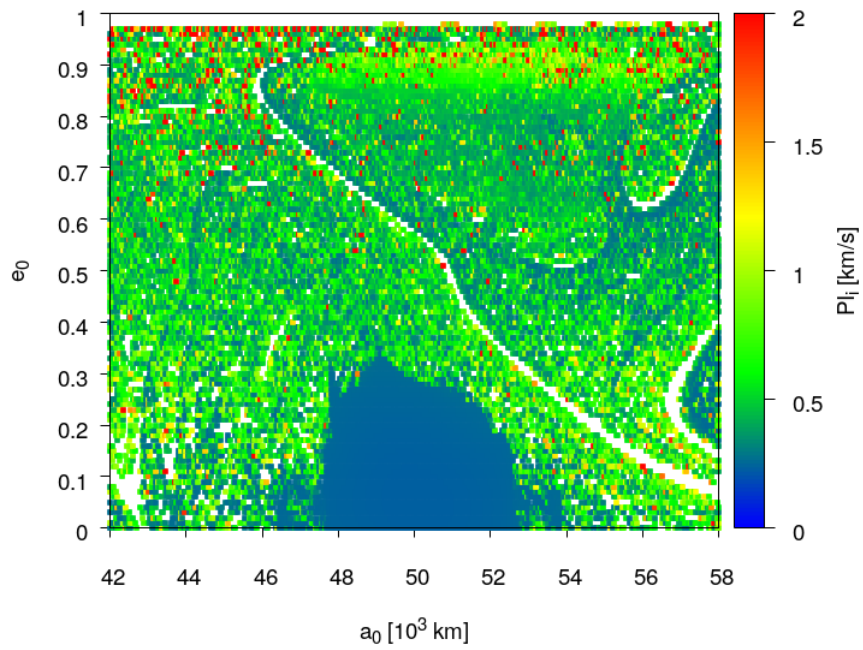
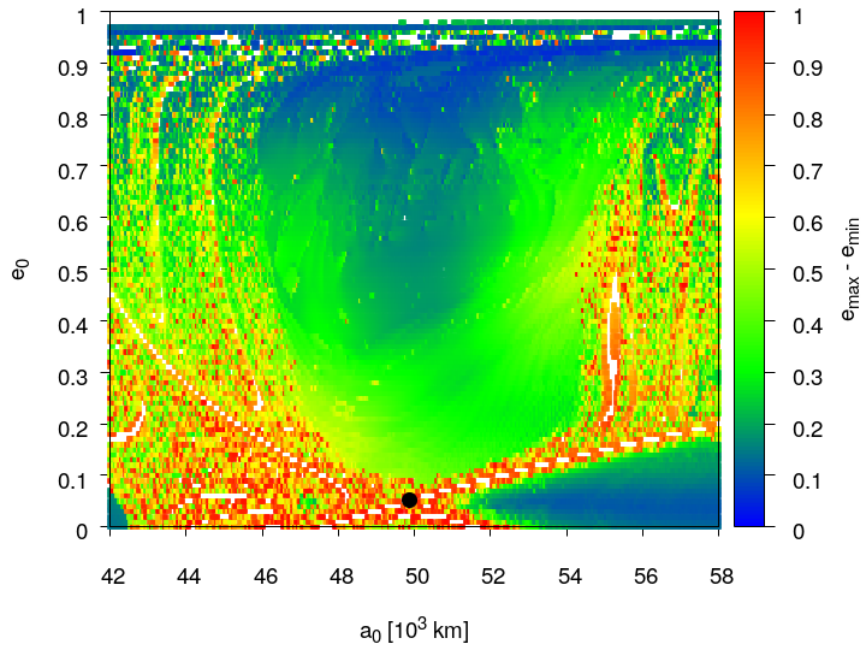


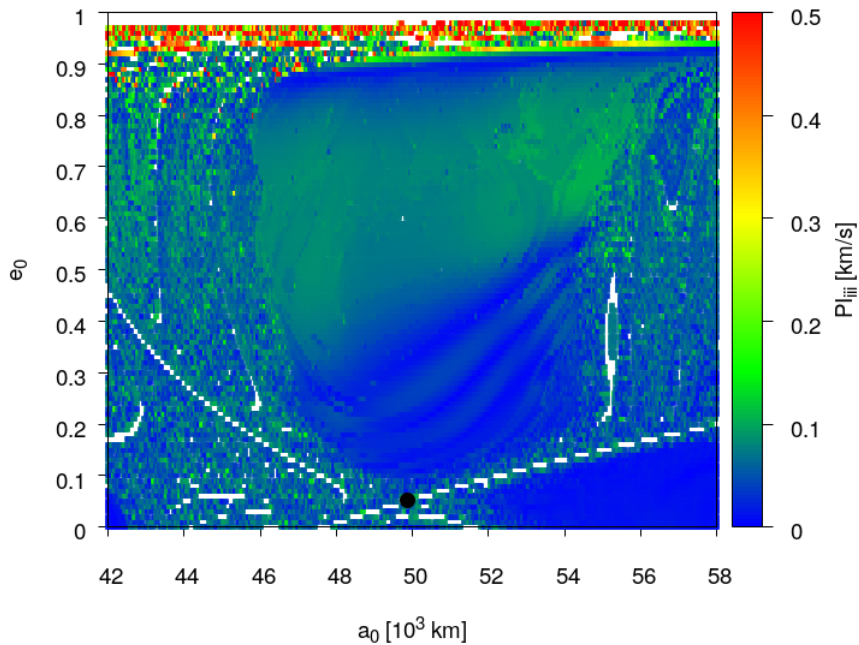
Figura 6.13 - Variação máxima da excentricidade em função de a_0 e e_0 para órbitas retrógradadas com $\sigma_0 = 60$ graus e tempo de integração de 10 anos



A Figura 6.14 mostra a perturbação líquida em função de a_0 e e_0 para o mesmo conjunto de simulações da Figura 6.13. O resultado reforça a condição estável da região, mostrando que para uma pequena variação da excentricidade inicial, encontramos órbitas que não apresentam uma discrepante mudança da perturbação líquida.

Comparando estes resultados com os resultados das órbitas diretas, podemos ver que as órbitas retrógradas permitem órbitas estáveis com maior excentricidade. As quais podem ser importantes para a exploração do sistema, pois podemos obter órbitas que passam perto de Haumea, Namaka e Hi'iaka.

Figura 6.14 - Mapa da perturbação obtido pela PI do terceiro método (PI_{iii}), para as órbitas da Figura 6.13.



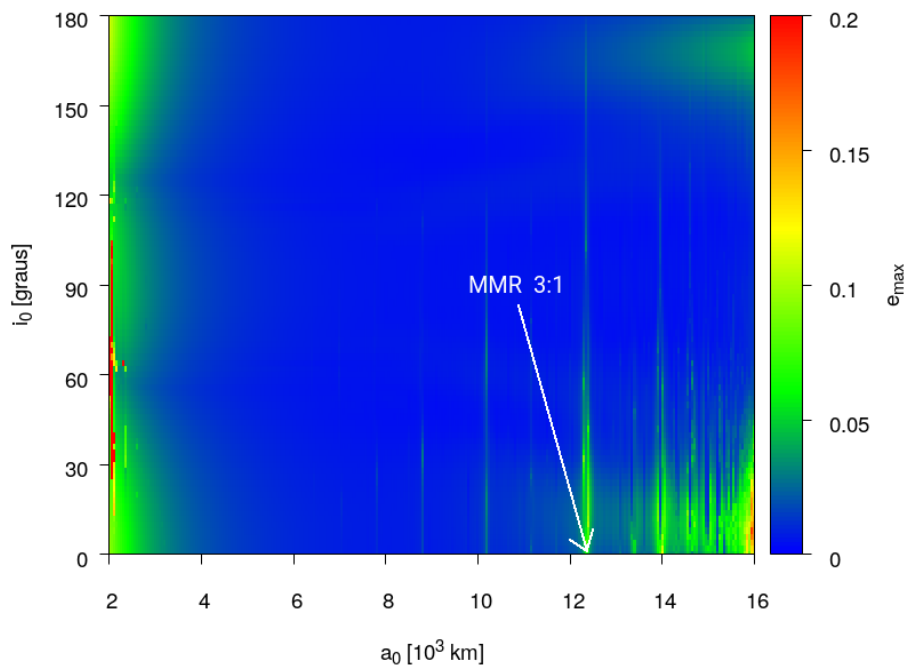
6.2 MMR 3:1 veículo espacial-Namaka

Quanto às linhas verticais notáveis no mapa da Figura 6.15 analisamos o caso no qual a linha aparece para o semi-eixo maior de aproximadamente 12360 km. Neste caso, temos a ressonância de movimentos médios veículo-Namaka igual a 3:1.

Para caracterizar o efeito da ressonância, construímos os mapas da perturbação e os mapas da excentricidade máxima segundo o modelo PI_{iii} , dado pela equação 3.13, desta forma obtemos a perturbação líquida de cada potencial perturbador.

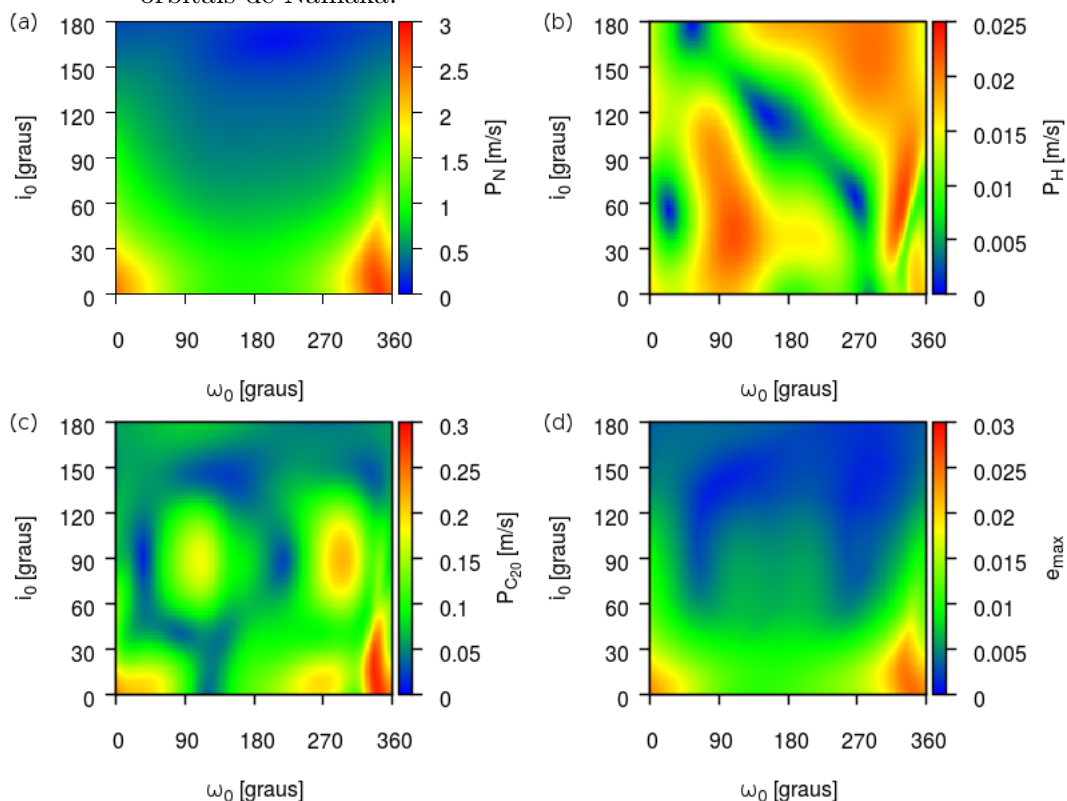
O tempo de integração equivale a 8 períodos orbitais de Namaka e aproximadamente 2,96 períodos orbitais de Hi'iaka. Este tempo de integração foi adotado para avaliar a integral das perturbações próximas a revoluções completas de Namaka e Hi'iaka, já que Namaka e Hi'iaka estão próximas à ressonância MMR 3:8. Desta forma, evitamos a contribuição de órbitas parciais, de Namaka e Hi'iaka, na perturbação sobre o veículo espacial.

Figura 6.15 - Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais. Com $e_0 = 0$ e o tempo de integração é de 5 anos (ampliação do mapa 5.7). A seta marca a MMR 3:1 veículo-Namaka.



A Figura 6.16 mostra o mapa para o semi-eixo maior ressonante $a_0 = 12360$ km. Construimos outros dois mapas para semi-eixos maiores próximos, porém, fora da ressonância 3:1. Um para $a_0 = 11800$ km (Figura 6.17) e outro para $a_0 = 12700$ km (Figura 6.18). As figuras apresentam as integrais da perturbação de Namaka (a), Hi'iaka (b) e para caracterizar suas magnitudes na perturbação do sistema, determinamos a perturbação desenvolvida pelo harmônico do potencial de Haumea com coeficiente C_{20} (c). Para estas três simulações utilizamos os seguintes valores para as condições iniciais que completam o conjunto de entrada: $e_0 = 0$ e $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau.

Figura 6.16 - (a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 12360$ km (MMR Veículo-Namaka 3:1). O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.



Para o semi-eixo maior ressonante, com as condições iniciais $\omega_0 = 0$ grau e $i_0 = 0$ grau, a perturbação líquida por Namaka sobre o veículo espacial é cerca de 10 vezes maior do que a perturbação líquida gerada por Haumea (mapas 6.16-(a) e 6.16-(c)) e aproximadamente 150 vezes maior do que a perturbação líquida gerada por Hi'iaka (mapa 6.16-(b)). Comparando estes mapas da perturbação com o mapa da excentricidade máxima (Figura 6.16-(d)) verificamos que a excentricidade da órbita é dominada pela perturbação devida a Namaka, como mostra a correlação entre a integral da perturbação por Namaka e a excentricidade máxima. Os resultados também mostram que perturbação devida a Namaka para o caso ressonante é expressivamente maior do que as perturbações não ressonantes vizinhas, podemos ver pela comparação dos três mapas da integral da perturbação por Namaka dos três casos (Figuras 6.16-(a), 6.17-(a) e 6.18-(a)).

Figura 6.17 - (a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 11800$ km. O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.

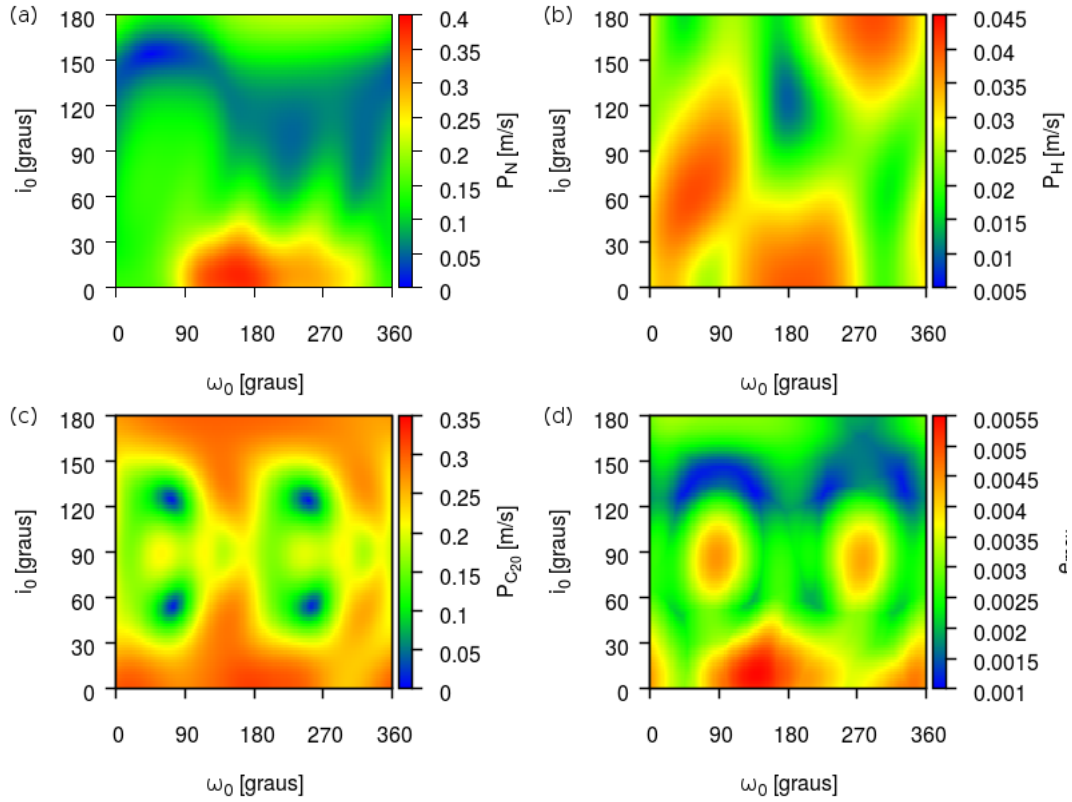
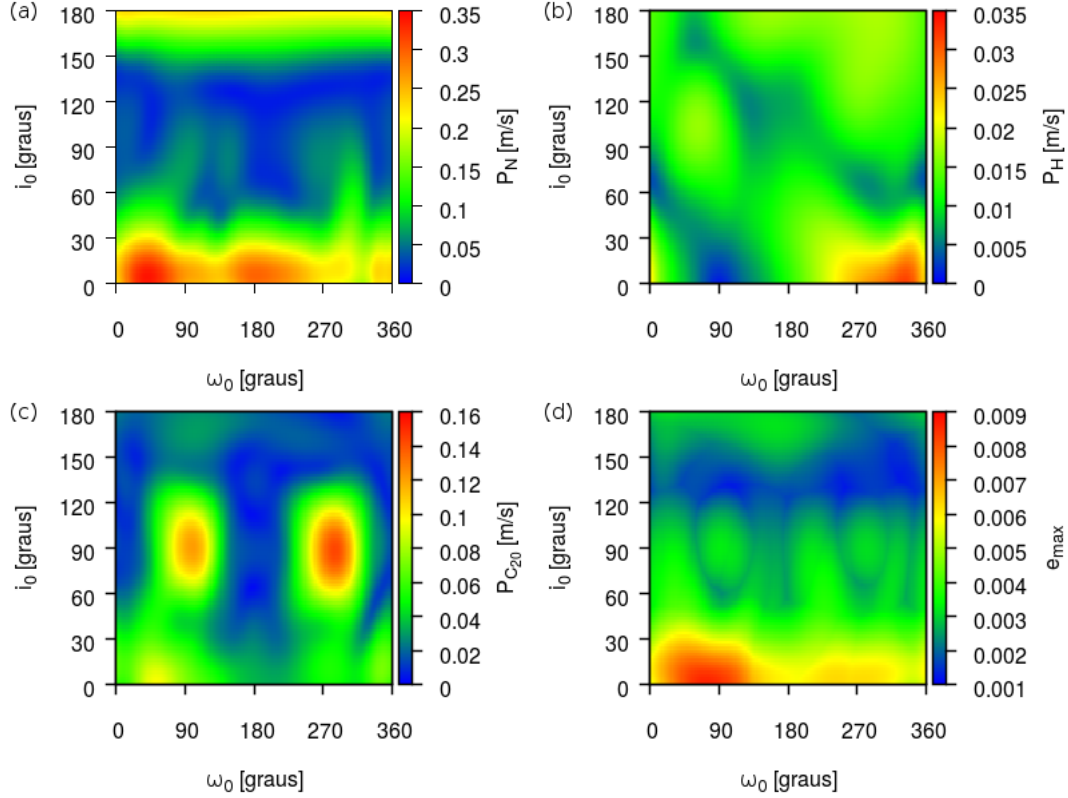


Figura 6.18 - (a), (b) e (c) variação total da velocidade em função da inclinação (i_0) e do argumento do pericentro (ω_0) iniciais, devida a perturbação por Namaka, Hi'iaka e pelo termo do potencial gravitacional de Haumea com coeficiente C_{20} , respectivamente. (d) excentricidade máxima (e_{max}) durante a propagação do movimento. Com semi-eixo maior inicial da órbita $a_0 = 12700$ km. O tempo de integração foi de 8 períodos orbitais de Namaka.



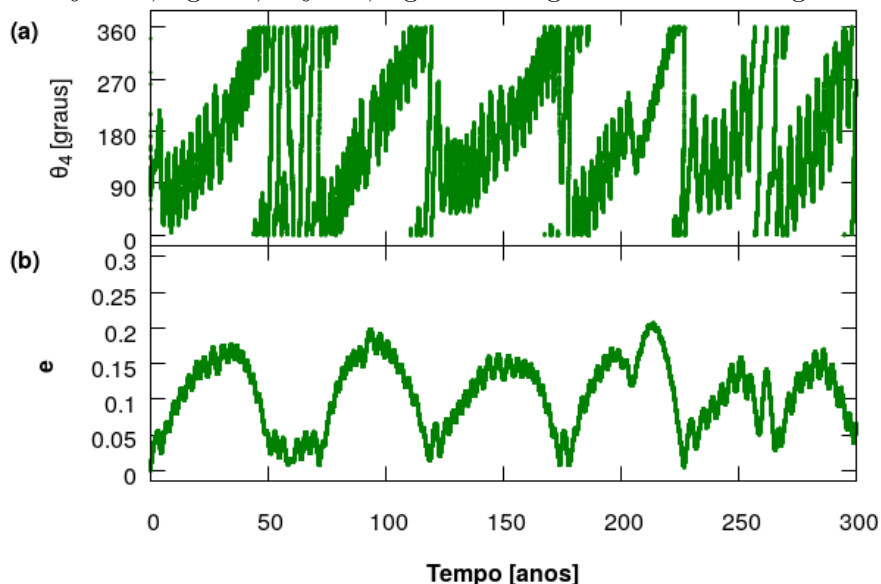
Para verificar se a relevante perturbação encontrada na região do semi-eixo maior de aproximadamente $a_0 = 12360$ km é devida à ressonância de movimentos médios 3:1 veículo-Namaka, analisamos os seis principais ângulos ressonantes (θ_i) para esta ressonância, dados por:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \lambda - 3\lambda_N + 2\Omega, \\
 \theta_2 &= \lambda - 3\lambda_N + \Omega + \Omega_N, \\
 \theta_3 &= \lambda - 3\lambda_N + 2\Omega_N, \\
 \theta_4 &= \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi, \\
 \theta_5 &= \lambda - 3\lambda_N + \varpi + \varpi_N, \\
 \theta_6 &= \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi_N
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde λ é a longitude média, Ω é o argumento do nodo ascendente, $\varpi = \omega + \Omega$ é a longitude do pericentro, as variáveis sem índice são atribuídas ao veículo espacial e as variáveis com índice N são atribuídas a Namaka.

Entre os ângulos ressonantes apresentados nas equações 6.1, apresentaram librações os ângulos θ_4 , θ_5 e θ_6 . Os resultados são apresentados respectivamente, nas figuras 6.19, 6.20 e 6.21, onde em cada figura o gráfico (a) mostra o ângulo ressonante em função do tempo e o gráfico (b) mostra a excentricidade em função do tempo. Estas simulações foram executadas com semi-eixo maior ressonante $a_0 = 12334,6$ km, dado pela equação 3.16. Os outros elementos orbitais iniciais comum para as simulações são: $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau e $M_0 = 0,0$ grau. Em cada simulação foi adotado o argumento do nodo ascendente de forma que o ângulo crítico inicia com valor de 180 graus. Desta forma, $\Omega_0 = 46,5$ graus para θ_4 , $\Omega_0 = 76,5$ graus para θ_5 e $\Omega_0 = 166,5$ graus para θ_6 . O tempo de simulação foi de 300 anos para os três casos.

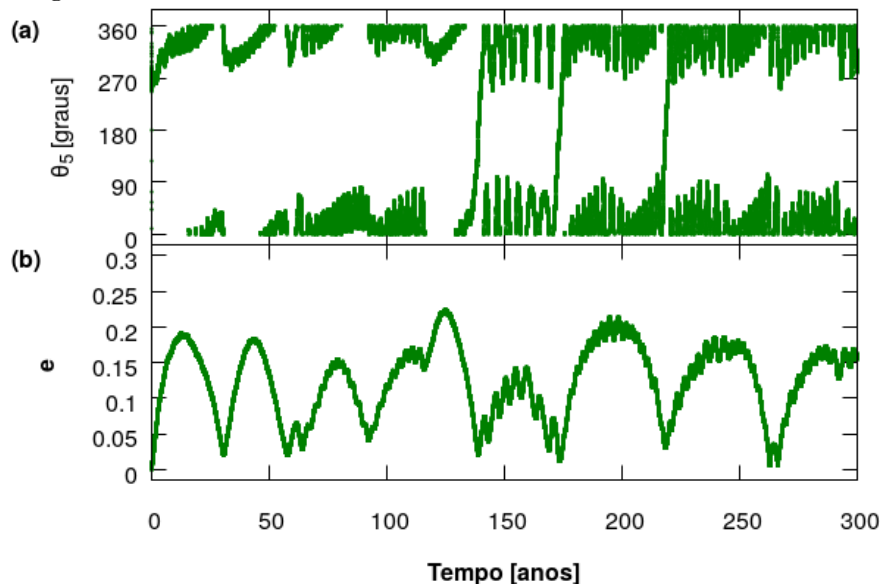
Figura 6.19 - Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_4 = \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 46,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.



A figura 6.19-(a) mostra o ângulo crítico θ_4 capturado em libração, no entanto, o centro de libração circular. Podemos notar também que o ângulo crítico apresenta circulação temporária quando o centro de libração passa por zero grau. É impor-

tante notar que ao comparar a figura 6.19-(a) com a figura 6.19-(b) a excentricidade apresenta o valor de máximo quando o centro de libração do ângulo crítico passa por 180 graus e apresenta valores mínimos quando o centro de libração do ângulo crítico passa por zero grau e apresenta uma circulação temporária. Esta análise mostra a correlação entre o período da variação da excentricidade e o período de circulação do centro de libração.

Figura 6.20 - Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_5 = \lambda - 3\lambda_N + \varpi + \varpi_N$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 166,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.



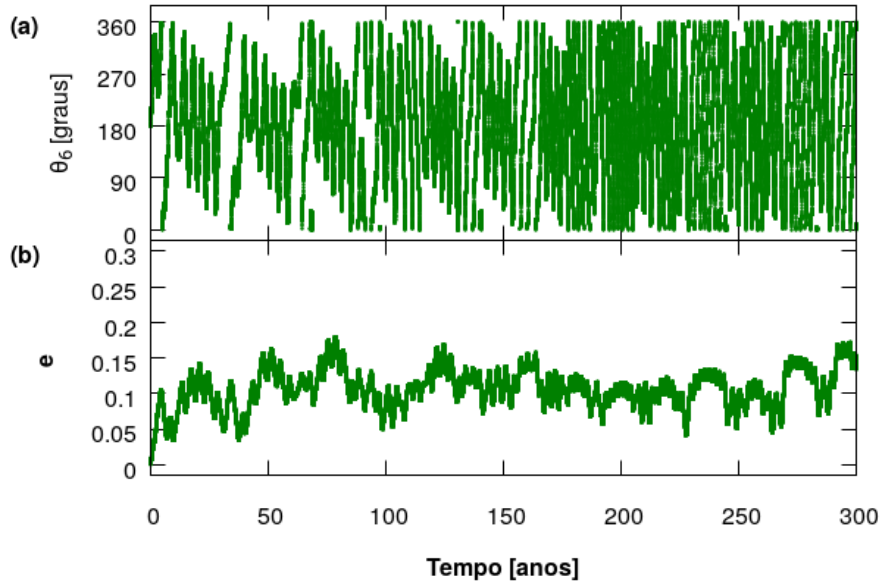
A figura 6.20-(a) mostra o ângulo crítico θ_5 capturado em libração em torno de 0 grau. Mostra também que ocorre uma breve circulação do ângulo crítico aproximadamente em: 130, 170 e 220 anos. Comparando esta figura com a figura 6.20-(b) podemos ver que a excentricidade apresenta mínimos quando o angulo crítico circula ou apresenta uma tendência em circular. Portanto, neste caso também aparece uma correlação periódica entre a variação da excentricidade e a evolução temporal do ângulo crítico.

A figura 6.21-(a) mostra o ângulo crítico θ_6 alternando entre libração temporária em torno de 180 graus e curtos períodos de circulação até aproximadamente 180 anos de simulação. Após este intervalo de tempo fica impreciso diferenciar a captura da

circulação do ângulo crítico.

Estes resultados que mostraram a captura em libração de alguns ângulos críticos confirmam a presença da ressonância de movimentos médios e ratificam os resultados já obtidos por meio da integral da perturbação apresentada no início desta seção, onde vimos que o efeito da perturbação por Namaka sobre o veículo espacial é ampliado nesta região.

Figura 6.21 - Evolução temporal do ângulo crítico $\theta_6 = \lambda - 3\lambda_N + 2\varpi_N$ (a) e da excentricidade (b) para MMR Veículo-Namaka 3:1. As condições iniciais são: $a_0 = 12334,6$ km, $e_0 = 1,0 \times 10^{-5}$, $i_0 = 1,0 \times 10^{-5}$ graus, $\omega_0 = 0,0$ grau, $\Omega_0 = 76,5$ graus, $M_0 = 0,0$ grau e o ângulo crítico inicial igual a 180 graus.



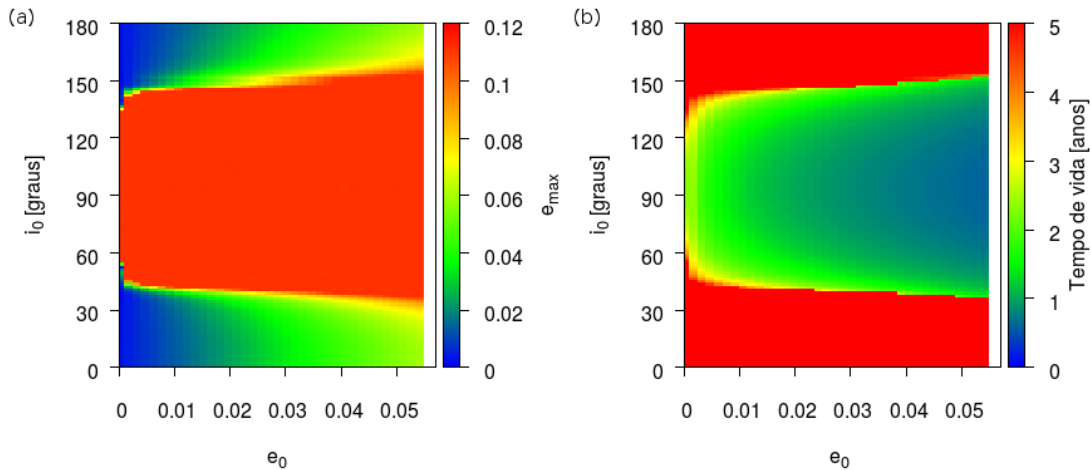
7 Estudo da dinâmica de veículos espaciais orbitando Namaka e Hi'iaka

Neste capítulo avaliamos por meio de mapas da excentricidade máxima (e_{max}) do movimento orbital e do tempo de vida do movimento orbital em função da inclinação inicial (i_0) e da excentricidade inicial (e_0), o comportamento das órbitas dos veículos espaciais orbitando Namaka e Hi'iaka.

7.1 Veículos espaciais orbitando Namaka

A Figura 7.1 mostra a excentricidade máxima (gráfico (a)) e o tempo de vida estável (gráfico (b)) em função inclinação e da excentricidade iniciais para veículos espaciais orbitando Namaka. O valor do semi-eixo maior inicial é de 90 km. O restante dos elementos orbitais iniciais, adotados em todos os mapas deste capítulo, têm os seguintes valores: $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau. Os mapas da figura 7.1 foram construídos com uma grade de 4477 pontos, com incrementos $\Delta i_0 = 1,5$ graus e $\Delta e_0 = 0,0015$. Os resultados mostram que as órbitas são instáveis para a faixa de inclinações iniciais entre aproximadamente 60 e 120 graus para as órbitas circulares, com ampliação da faixa de instabilidade conforme a excentricidade inicial cresce.

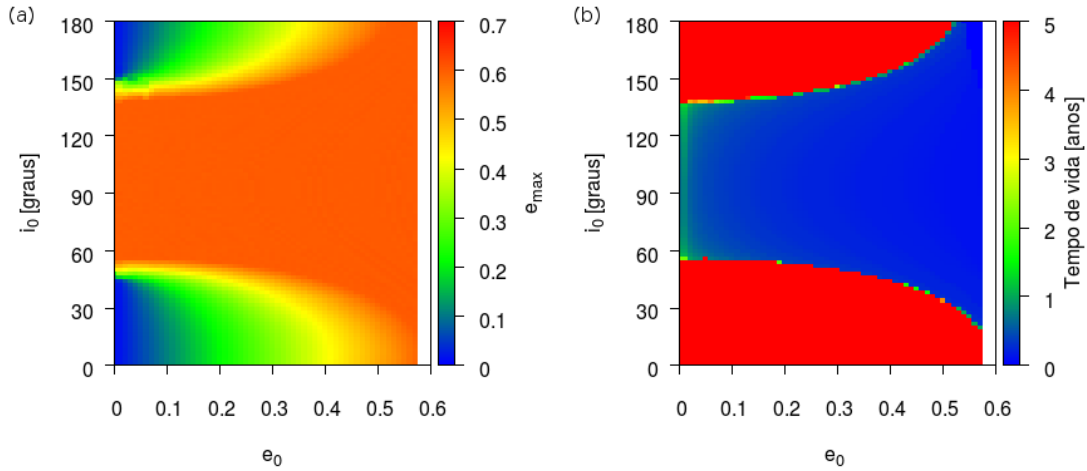
Figura 7.1 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 90 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.



A Figura 7.2 mostra os resultados para o semi-eixo maior inicial de 200 km. Os mapas foram construídos com uma grade de 5278 pontos, com incrementos $\Delta i_0 = 2$ graus e

$\Delta e_0 = 0,01$. Estes resultados mostram uma fronteira mais abrupta entre as regiões estável por cinco anos e instável. Esta característica mostra que a excentricidade varia mais rapidamente na região instável, conforme aumentamos o semi-eixo maior inicial.

Figura 7.2 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 200 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.



As Figuras 7.3 e 7.4 mostram os resultados para os semi-eixos maiores iniciais de 400 km e 500 km, respectivamente. Os mapas foram construídos com incrementos $\Delta i_0 = 2$ graus e $\Delta e_0 = 0,01$, totalizando uma grade de 7189 pontos para os mapas com semi-eixo maior de 400 km e uma grade de 7554 pontos para os mapas com semi-eixo maior de 500 km. Estes resultados mostram um aumento da região instável, abandonando o padrão observado nas duas figuras anteriores. De fato, conforme adotamos o semi-eixo maior inicial cada vez maior, o veículo espacial aproxima-se do raio de Hill de Namaka ($R_{Namaka}^H = 1021\text{km}$), ou seja, aproxima-se do limite da esfera de influência de Namaka.

Figura 7.3 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 400 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.

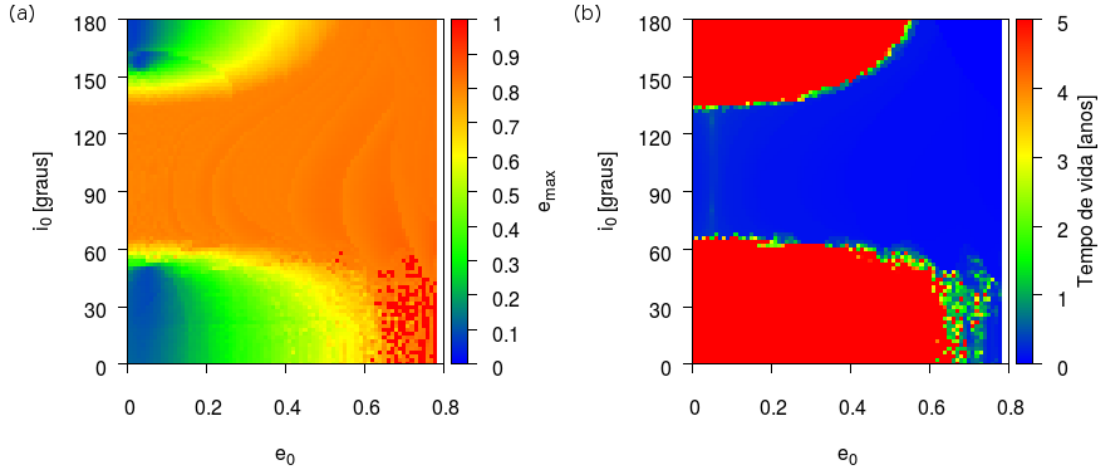
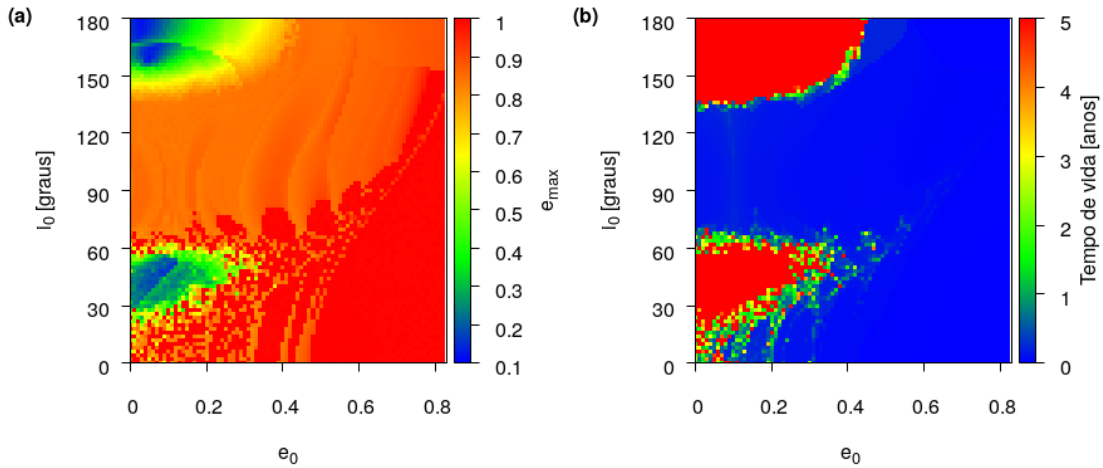


Figura 7.4 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Namaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 500 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida estável do veículo espacial.



As Figuras 7.5 e 7.6 mostram respectivamente a energia da órbita do veículo espacial com relação a Namaka e a situação de cada veículo espacial no término da simulação para o semi-eixo maior inicial de 500 km. Para o diagrama de cores da

Figura 7.6 temos: colisão com Namaka (preto), ainda orbitando Namaka (amarelo) e capturado por Haumea (mesmo que temporariamente) (roxo). Os resultados mostram um grande número de veículos espaciais que saíram da órbita estável entorno de Namaka e entraram temporariamente ou permanentemente sob o domínio do potencial gravitacional de Haumea.

Figura 7.5 - Mapa de energia de órbitas em torno de Namaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 500 km com tempo máximo de integração de 5 anos.

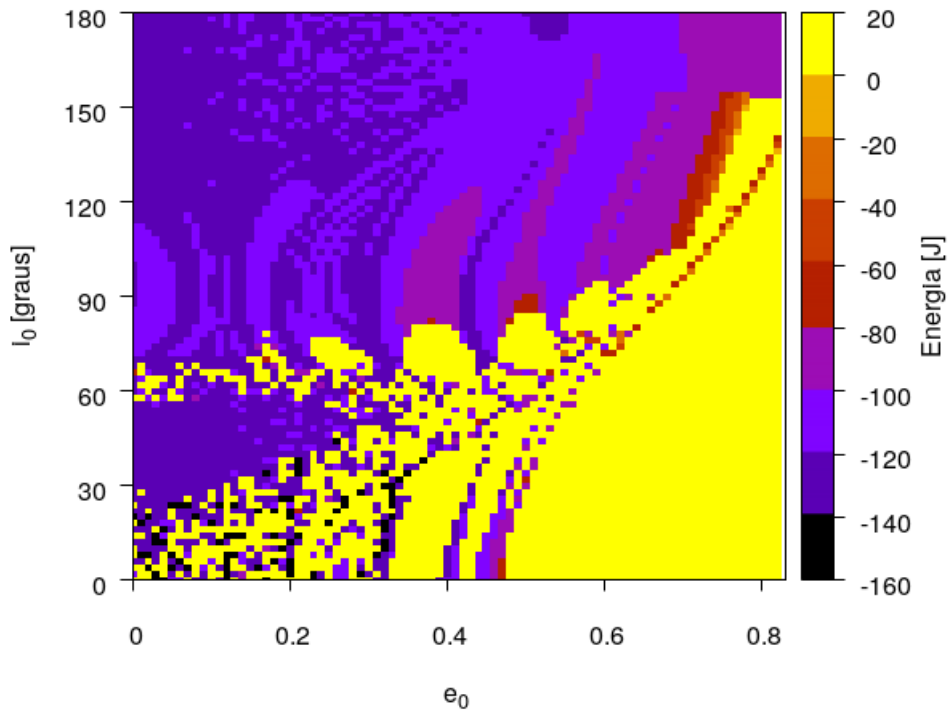
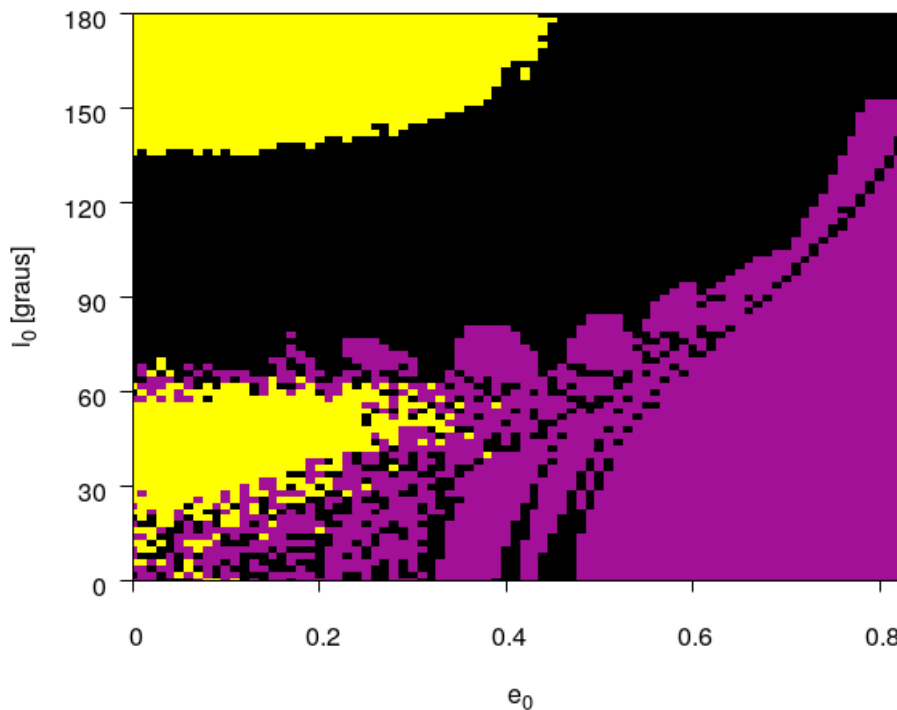


Figura 7.6 - Situação do veículo espacial em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 500 km com tempo máximo de integração de 5 anos. O diagrama de cores indicam: colisão com Namaka (preto), ainda orbitando Namaka (amarelo) e capturado por Haumea (roxo).

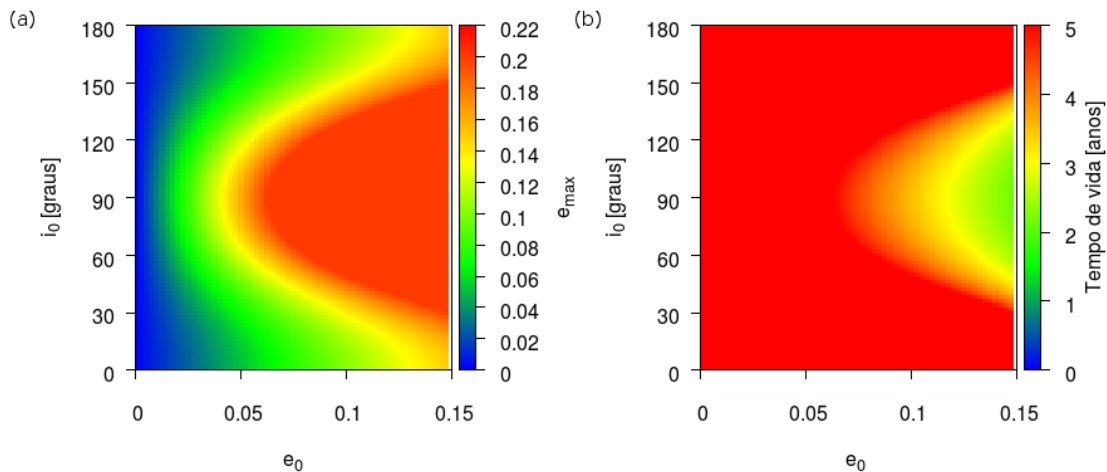


Do total de 7553 corpos de prova utilizados para gerar o mapa dinâmico. Os resultados mostram que, cerca de 47,5% dos veículos espaciais colidiram com Namaka, 34,7% foram capturados por Haumea (mesmo que temporariamente) e 17,8% continuaram orbitando Namaka. Como esperado, Haumea figura como o principal perturbador sobre o veículo espacial que orbita Namaka.

7.2 Veículos espaciais orbitando Hi'iaka

Conduzimos o estudo de veículos orbitando Hi'iaka, da mesma forma que fizemos para Namaka. A Figura 7.7 mostra os resultados para o semi-eixo maior inicial de 200 km. Na parte (a) temos a excentricidade máxima em função da inclinação e da excentricidade iniciais e na parte (b) temos o tempo de vida da órbita para o tempo máximo de simulação de 5 anos. Os mapas desta figura foram construídos com uma grade de 5460 pontos, com incrementos $\Delta i_0 = 2$ graus e $\Delta e_0 = 0,0025$.

Figura 7.7 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 200 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.



Na sequência, são apresentados os resultados para os semi-eixos maiores iniciais de 300 km, 1000 km, e 2500 km, respectivamente, nas Figuras 7.8, 7.9 e 7.10. Os mapas foram construídos com incrementos $\Delta i_0 = 2$ graus e $\Delta e_0 = 0,01$, totalizando uma grade de 4004 pontos para os mapas com semi-eixo maior de 300 km, 7553 pontos para os mapas com semi-eixo maior de 1000 km e 8554 pontos para os mapas com semi-eixo maior de 2500 km. Dos resultados mostrados nestas figuras, podemos observar que, na sequência do crescimento do semi-eixo maior inicial das órbitas, os mapas dinâmicos são semelhantes aos mapas determinados para Namaka. No entanto, a evolução da área instável ocorre de forma mais lenta comparada com a evolução da mostrada por Namaka. De fato, os dois sistemas são semelhantes na configuração geométrica que diferem em escala e intensidade das perturbações, este comportamento é esperado, pois, Hi'iaka tem massa superior à massa de Namaka em uma ordem de grandeza, Haumea o principal corpo perturbador, está mais distante e o raio de Hill de Hi'iaka é maior ($R_{Hi'iaka}^H = 5404\text{km}$).

Figura 7.8 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 300 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.

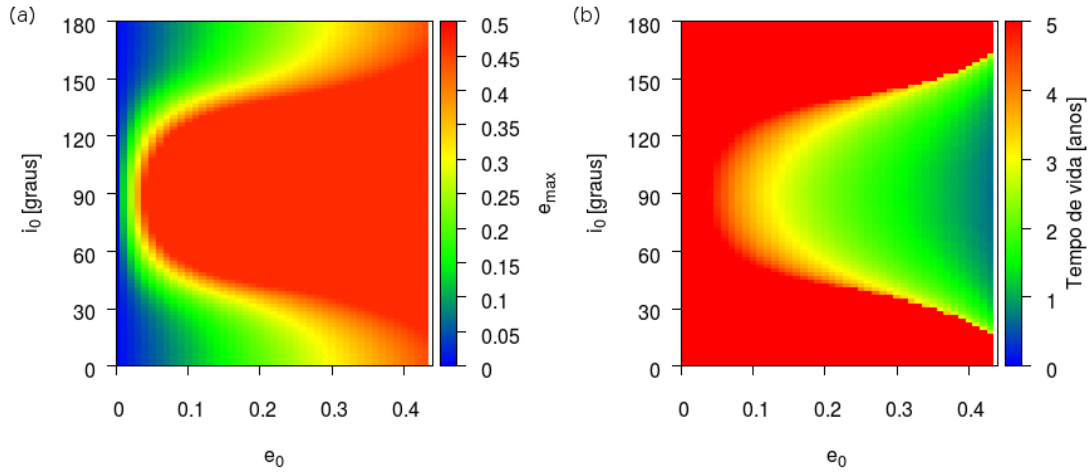


Figura 7.9 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 1000 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.

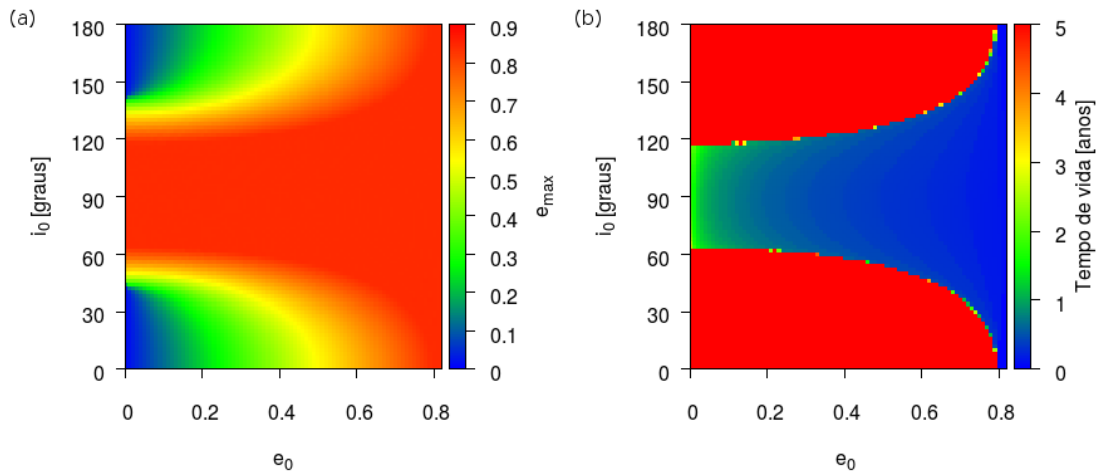
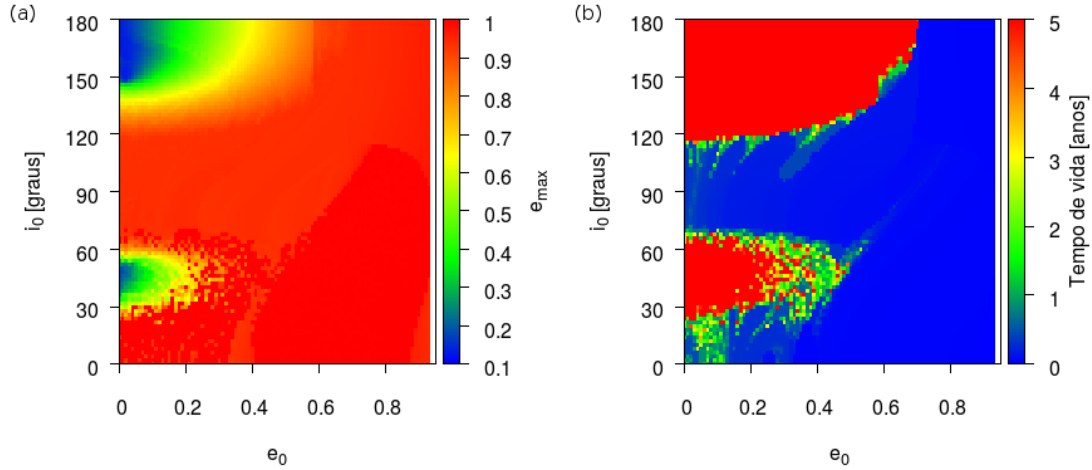


Figura 7.10 - Mapa dinâmico de órbitas em torno de Hi'iaka, (a) Excentricidade máxima (e_{max}) em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior inicial de 2500 km, com tempo de integração de 5 anos. (b) Tempo de vida do veículo espacial.



As Figuras 7.11 e 7.12 apresentam, respectivamente, a energia da órbita e a situação do veículo espacial para a mesma simulação apresentada na Figura 7.10. O diagrama de cores da Figura 7.12 indicam: colisão com Hi'iaka (Preto), ainda orbitando Hi'iaka (amarelo) e capturado por Haumea (mesmo que temporariamente) (azul).

Figura 7.11 - Mapa de energia de órbitas em torno de Hi'iaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 2500 km com tempo máximo de integração de 5 anos.

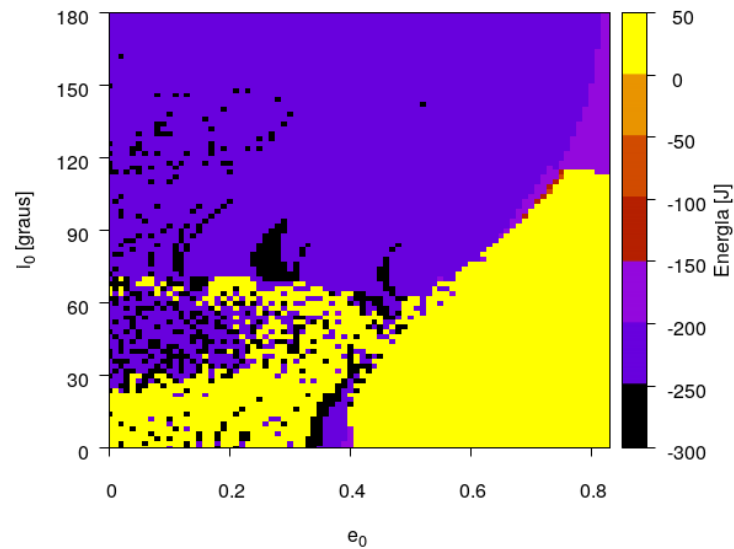
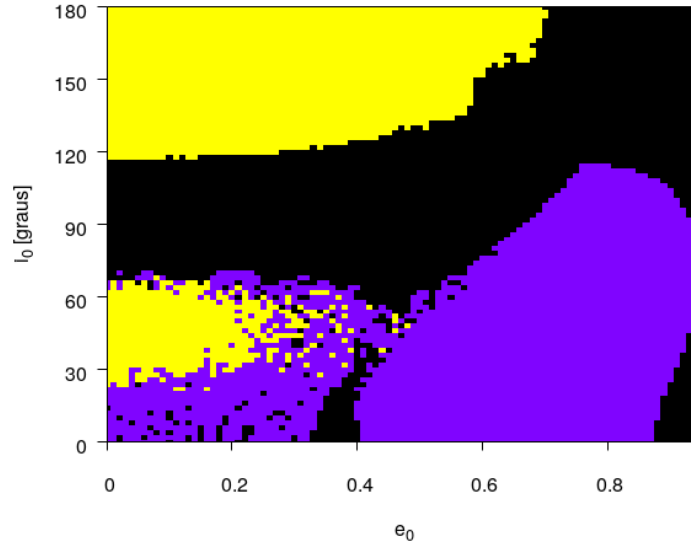


Figura 7.12 - Situação do veículo orbitando Hi'iaka em função da inclinação e da excentricidade iniciais, para o semi-eixo maior de 2500 km com tempo máximo de integração de 5 anos. O diagrama de cores indicam: colisão com Hi'iaka (preto), ainda orbitando Hi'iaka (amarelo) e capturado por Haumea (azul).



Do total de 8554 corpos de prova utilizados para gerar o mapa dinâmico, cerca de 38% colidiram com Hi'iaka, 34,5% foram capturados por Haumea e 27,5% continuaram orbitando Hi'iaka.

Comparando estes resultados com os resultados obtidos para os veículos espaciais orbitando Namaka, Hi'iaka mostrou-se, como esperado, mais eficiente do que Namaka para gerar órbitas estáveis, pois no término de cinco anos de movimento orbital restaram 27,5% dos corpos orbitando Hi'iaka contra 17,8% orbitando Namaka.

8 Flips do plano orbital em sistemas de pequenas massas (Ressonância Kozai)

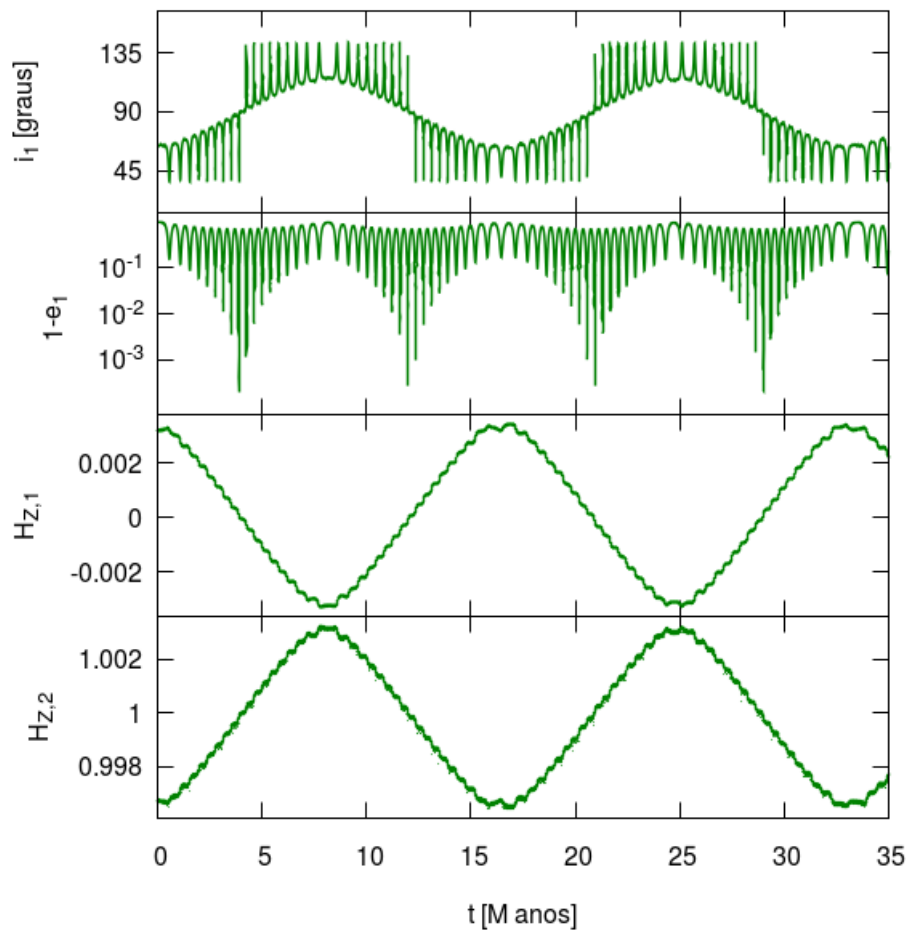
Nesta seção apresentaremos os resultados do mecanismo excêntrico Kozai-Lidov em sistemas de pequenos corpos. Fizemos a validação do modelo aplicando as condições abordadas no artigo publicado por [Naoz et al. \(2011\)](#). Aplicamos o conceito a um sistema triplo de asteroides e analisamos fisicamente como desenvolve-se o mecanismo excêntrico Kozai-Lidov. Verificamos a Ocorrência do mecanismo em um sistema de quatro corpos. Também avaliamos a possibilidade da ocorrência do mecanismo sobre um corpo inserido no sistema de Haumea.

8.1 Validação do modelo

Para validação do modelo, foram utilizados as mesmas condições iniciais utilizadas por [Naoz \(NAOZ et al., 2011\)](#).

Para esta simulação, foi assumido um sistema com o corpo central de massa igual a uma massa Solar ($1M_{\odot}$), um planeta com órbita interna (corpo perturbado) com massa equivalente a uma massa de Júpiter ($1M_J$) e um corpo com órbita externa (perturbador) com massa equivalente a $40M_J$. O planeta de órbita interna tem semi-eixo maior $a_1 = 6UA$, excentricidade $e_1 = 0.001$ e inclinação $i_1 = 64,7^\circ$. O corpo de órbita externa tem $a_2 = 100AU$, excentricidade $e_2 = 0.6$, inclinação $i_2 = 0.3^\circ$ e argumento do pericentro $\omega_2 = 45^\circ$. Quantidades indexadas com valor 1 referem-se ao corpo perturbado (de órbita interna) e as quantidades indexadas com valor 2 referem-se ao corpo perturbador (órbita externa). Os resultados são apresentados por meio dos gráficos da Figura 8.1. Eles são compatíveis com os resultados obtidos por [Naoz \(NAOZ et al., 2011\)](#), para ambos elementos orbitais (i_1 e e_1) e para a variação da projeção do momento angular sobre o eixo do momento angular total. Os resultados mostram que o modelo é capaz de identificar a ocorrência de flips do plano orbital do corpo perturbado.

Figura 8.1 - Resultados de um sistema planetário similar ao adotado por Naoz (NAOZ et al., 2011): O primeiro gráfico mostra a inclinação da órbita do corpo interno (i_1) em função do tempo. O segundo gráfico mostra a excentricidade da órbita do corpo interno (e_1) em função do tempo. Os dois últimos gráficos mostram as projeções do momento angular das órbitas interna e externa sobre o momento angular total, respectivamente.



8.2 Caso 1: Sistema triplo de asteroides

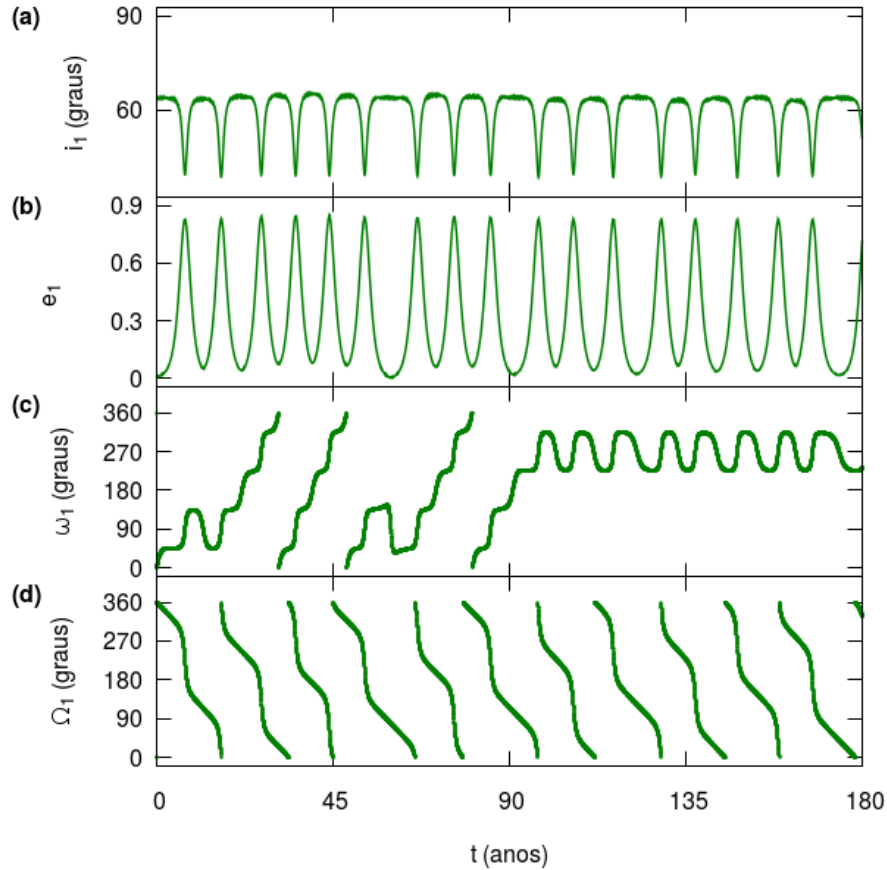
Como ponto de partida para a modelagem de um sistema triplo de pequenos corpos, foram utilizados os dados do sistema triplo de asteroides 2001SN263 (FANG et al., 2011), com algumas modificações para atender às propriedades de um sistema cujo corpo perturbado fica sujeito a flips do plano orbital, onde a massa do corpo central foi mantida ($917,47 \times 10^{10}$)kg. Para o corpo de órbita interna que tinha o conjunto de elementos orbitais $a = 3,804$ km, $e = 0.016$ e inclinação $i = 14$ graus passa a ter os elementos orbitais apresentados na Tabela 8.1. Para o corpo de órbita externa, o conjunto de elementos originais $a = 16,63$ km, $e = 0.015$ e inclinação $i = 0$ grau foi alterado para o conjunto de elementos orbitais também apresentados na Tabela 8.1. A massa do corpo de órbita interna foi mantida e a massa do corpo de órbita externa foi aumentada de $24,04 \times 10^{10}$ kg para $195,0 \times 10^{10}$ kg.

A Figura 8.2 apresenta a propagação do movimento do corpo perturbado para as condições iniciais apresentadas na Tabela 8.1. Os gráficos mostram os resultados típicos da atuação do efeito Kozai padrão. A Figura 8.2-(a) mostra a inclinação com expressiva variação acompanhando a variação da excentricidade mostrada na Figura 8.2-(b). A Figura 8.2-(c) apresenta o comportamento do argumento do pericentro, alternando librações em torno de 90 e 270 graus. E a Figura 8.2-(d) mostra a evolução do argumento do nodo ascendente. Estes resultados mostram que sobre o sistema está atuando o mecanismo Kozai padrão.

Tabela 8.1 - Valores iniciais para a simulação do modelo de três corpos fictício baseado nos dados do sistema triplo de asteroides 2001SN263. Estes dados iniciais geram os resultados que mostram o efeito Kozai padrão sobre o corpo de órbita interna.

Parâmetros	Órbita interna (1)	Órbita externa (2)
a	4,0km	46,0km
e	0,01	0,2
i (graus)	64,0	0,3
ω (graus)	0,0	0,0
Ω (graus)	0,0	0,0
M (graus)	0,0	0,0
Massa (kg)	$9,77 \times 10^{10}$	$195,0 \times 10^{10}$

Figura 8.2 - Resultados da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.1. (a) gráfico da inclinação em função do tempo. (b) gráfico da excentricidade em função do tempo, (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente em função do tempo, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.



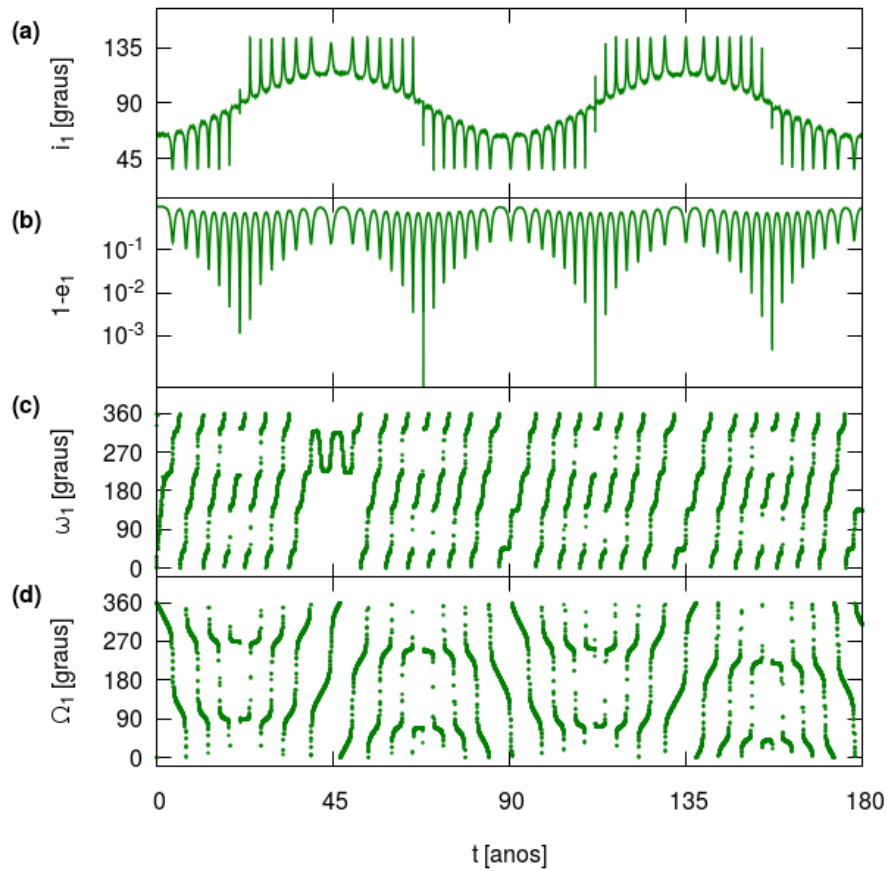
Com o objetivo de verificar a ocorrência de flips do plano orbital do corpo perturbado, foi executada a propagação do movimento para os dados iniciais apresentados na Tabela 8.2, adotando alta excentricidade para o corpo de órbita externa.

Os resultados da propagação do movimento para este cenário, apresentados na Figura 8.3, mostram que o corpo de órbita interna oscila entre órbita direta e retrógrada (8.3-a), acompanhada pela alta excentricidade durante os flips (Figura 8.3-b), apresentando o mecanismo Kozai excêntrico, da mesma forma dos resultados para o sistema planetário proposto por Naoz (NAOZ et al., 2011). Os gráficos 8.3-c e 8.3-d mostram a evolução do argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente, respectivamente, neles podemos ver uma ação típica da perturbação do terceiro corpo.

Tabela 8.2 - Valores iniciais para a simulação do modelo de três corpos fictício baseado nos dados do sistema triplo de asteroides 2001SN263. Estes dados iniciais geram os resultados que mostram os flips do plano orbital do corpo de órbita interna.

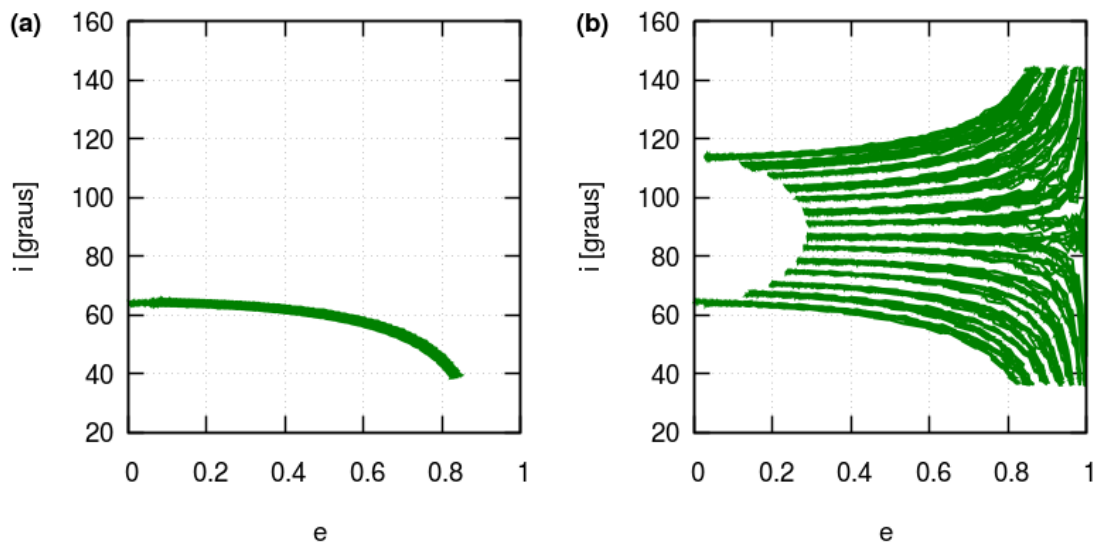
Parâmetros	Órbita interna (1)	Órbita externa (2)
a	4,0km	46,0km
e	0,01	0,6
i (graus)	64,7	0,3
ω (graus)	0,0	0,0
Ω (graus)	0,0	0,0
M (graus)	0,0	0,0
Massa (kg)	$9,77 \times 10^{10}$	$195,0 \times 10^{10}$

Figura 8.3 - Resultados da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.2. (a) gráfico da inclinação em função do tempo. (b) gráfico da excentricidade em função do tempo, (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente em função do tempo, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.



Como esperado, os flips do plano orbital no sistema de pequenos corpos, acontecem numa escala de tempo muito menor comparado com os flips do plano orbital observados na propagação do movimento do sistema planetário. Similarmente ao que ocorre em sistemas de grandes corpos, os flips dependem dos valores da excentricidade da órbita, requerendo altos valores para a ocorrência dos flips. Contextualizando este fato no sistema solar, podemos ver que o ambiente não permite a dinâmica cíclica entre movimento direto e retrógrado para sistemas de pequenos corpos, devido à posição do pericentro encontrar-se dentro do corpo primário durante a alta excentricidade necessária para que ocorra o flip. Esta elevada excentricidade exigiria um semi-eixo maior da órbita do corpo perturbado além da esfera de Hill dos pequenos corpos do sistema solar. E o corpo perturbador teria de estar posicionado com um semi-eixo maior ainda mais elevado. Porém, este mecanismo pode explicar as colisões entre asteroides do sistema com interações mútuas durante sua formação, pois o mecanismo Kozai-Lidov excêntrico ocorre em sistemas de pequenos corpos e antes do flip do plano orbital o corpo perturbado colide com o corpo central.

Figura 8.4 - Curvas Kozai no plano $e - i$ da simulação do sistema triplo de asteroides com as condições iniciais da Tabela 8.1 para o gráfico (a) e com as condições iniciais da Tabela 8.2 para o gráfico (b).

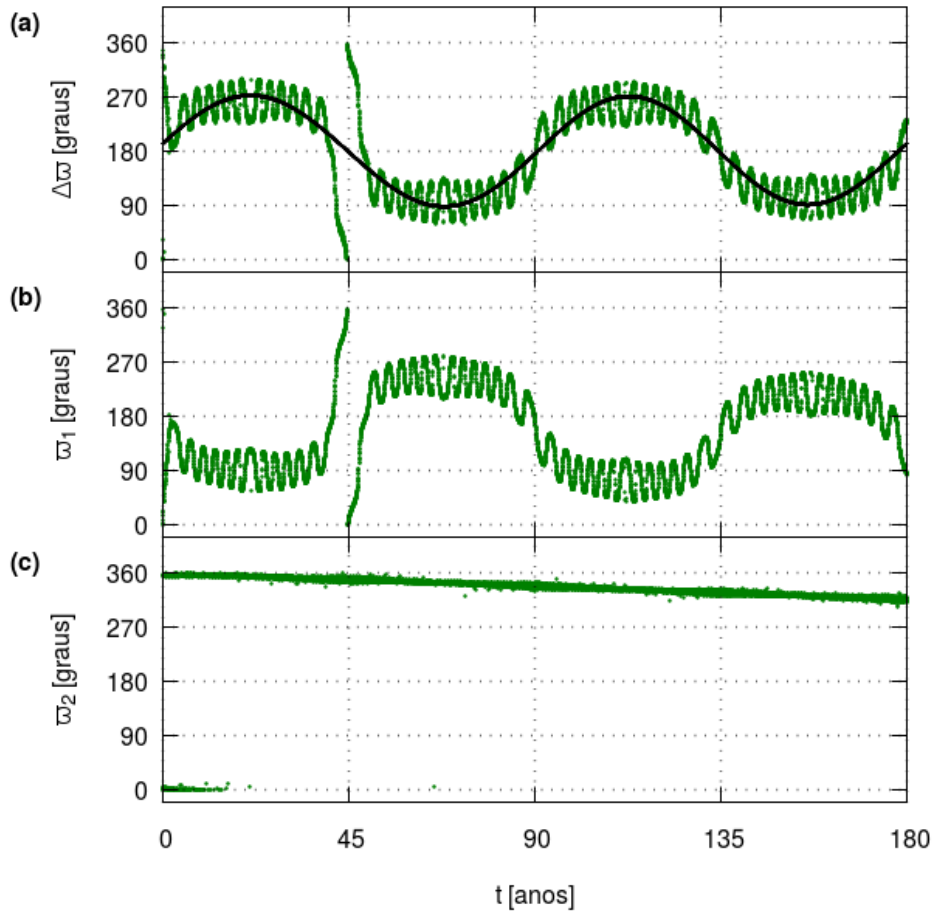


A Figura 8.4-(a) apresenta as curvas Kozai no plano $e - i$, para os dois casos apresentados, respectivamente, 8.4-(a) e 8.4-(b). As curvas mostram o acoplamento entre a inclinação e a excentricidade como esperado para o mecanismo Kozai-Lidov. A Figura 8.4-(a) mostra o resultado típico para o mecanismo Kozai padrão, onde o

plano orbital do corpo perturbado nunca vira. A Figura 8.4-(b) mostra o resultado onde aparece o mecanismo Kozai excêntrico. Ocorrendo os flips quando a excentricidade do corpo perturbado atinge o valor muito próximo de uma unidade. Onde a diferença entre os dois casos, se aplica na excentricidade do corpo perturbador que, para o segundo caso tem valor elevado como nos casos abordados na exploração de flips do plano orbital de exoplanetas.

Analizamos também a evolução temporal da diferença entre as longitudes do pericentro $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$, onde $\varpi = \Omega + \omega$ para órbita direta e $\varpi = \Omega - \omega$ para órbita retrógrada (WHIPPLE; SHELUS, 1993), onde ϖ_1 refere-se à órbita interna e ϖ_2 é denominada para a órbita externa.

Figura 8.5 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra o ângulo $\Delta\varpi$ oscilando em torno de 180 graus (verde) e $\Delta\varpi$ filtrado com filtro FFT passa baixa com a frequência de corte igual a 0.02 ciclos por ano (preto). O gráfico (b) mostra a evolução da longitude do pericentro da órbita interna. E (c) mostra a longitude do pericentro da órbita externa.



A Figura 8.5 mostra a análise das perturbações, secular e de longo período. (a) mostra que $\Delta\varpi$ libra em torno de 270 e 90 graus, caracterizando o ciclo Kozai em torno destes ângulos (pontos em verde). Para analisar o comportamento da perturbação de mais longo período, o argumento $\Delta\varpi$ foi filtrado digitalmente por meio de um filtro FFT com filtro passa baixas incluindo a frequência de corte igual a 0,02 ciclos por ano. Isso elimina perturbações com períodos menores que 50 anos.

Esta frequência de corte foi adotada para pegar a oscilação que permite fazer uma análise mais clara dos flips do plano orbital do corpo perturbado. O resultado é a curva em preto na Figura 8.5-a. Este resultado mostra que, das perturbações de longo período, as com os mais longo período estão alternando as librações Kozai-Lidov entre 90 e 270 graus.

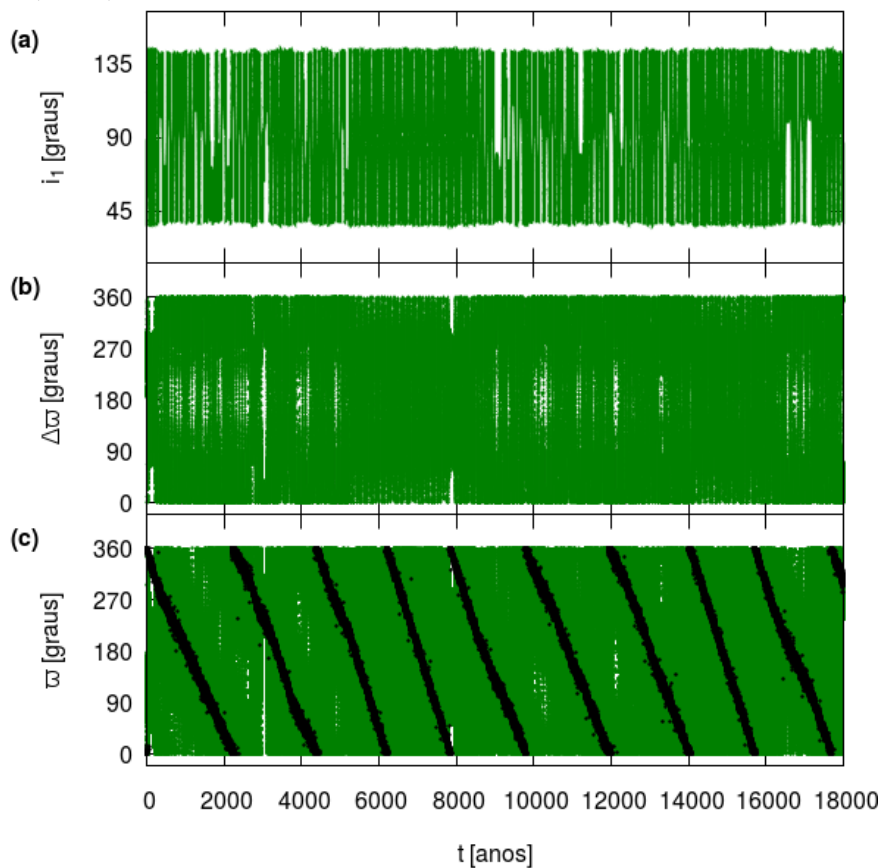
A Figura 8.5-b mostra a longitude do pericentro da órbita interna (ϖ_1). Por meio desta figura, podemos ver que (ϖ_1) tem uma perturbação principal de longo período que é responsável por alternar a libração de $\Delta\varpi$ entre 90 e 270 graus e uma evolução secular retrógrada. A Figura 8.5-c mostra a longitude do pericentro da órbita externa (ϖ_2), também com uma evolução secular retrógrada. Para este cenário, as perturbações seculares em ϖ_1 e ϖ_2 , próximas de uma mesma taxa de variação, contribuem para a alternância regular da libração de $\Delta\varpi$, assim como podemos ver os flips regulares do plano orbital do corpo de órbita interna.

A evolução da excentricidade também depende da diferença entre as longitude do pericentro $\Delta\varpi$. Comparando as Figuras 8.3-a e 8.3-b com $\Delta\varpi$ da Figura 8.5-a, verifica-se que, os mais elevados valores da excentricidade e sua maior taxa de variação ocorrem quando o centro de libração de $\Delta\varpi$ passa por 90 ou 270 graus. Observa-se também que, a excentricidade tem dois máximos principais que se repetem ciclicamente assim como o centro de libração de $\Delta\varpi$ oscila em torno de 180 graus. Estes máximos ocorrem quando i_1 cruza 90 graus na direção crescente e o centro de libração de $\Delta\varpi$ está no ponto máximo do ciclo, e também, quando i_1 cruza 90 graus na direção decrescente e o centro de libração de $\Delta\varpi$ está no ponto mínimo do ciclo. Estas propriedades caracterizam os instantes em que os flips ocorrem. Nestes instantes, a excentricidade excede a excentricidade máxima padrão do ciclo Kozai.

Durante a transição do centro de libração de $\Delta\varpi$, a taxa de variação da excentricidade é mais lenta comparada com a taxa de variação durante os flips, e a excentricidade não excede o valor de 0,9, ficando restrito à excentricidade máxima do ciclo Kozai-Lidov. Nesta situação, para este caso, o apocentro do corpo perturbado, está

transitando a 180 graus da longitude do pericentro do corpo perturbador, gerando interações menos agressivas nos encontros próximos, ou $\Delta\varpi$ circula devido à captura em libração do argumento do pericentro do corpo perturbado (ω_1). Estes resultados mostraram que a captura em libração de ω_1 suprime a máxima excentricidade que induz o flip do plano orbital, pois quando ω_1 é capturado em libração, $\Delta\varpi$ sai da libração e começa a circular. Podemos ver esta característica, notavelmente no caso 3, apresentado na seção 8.3 Figura 8.14.

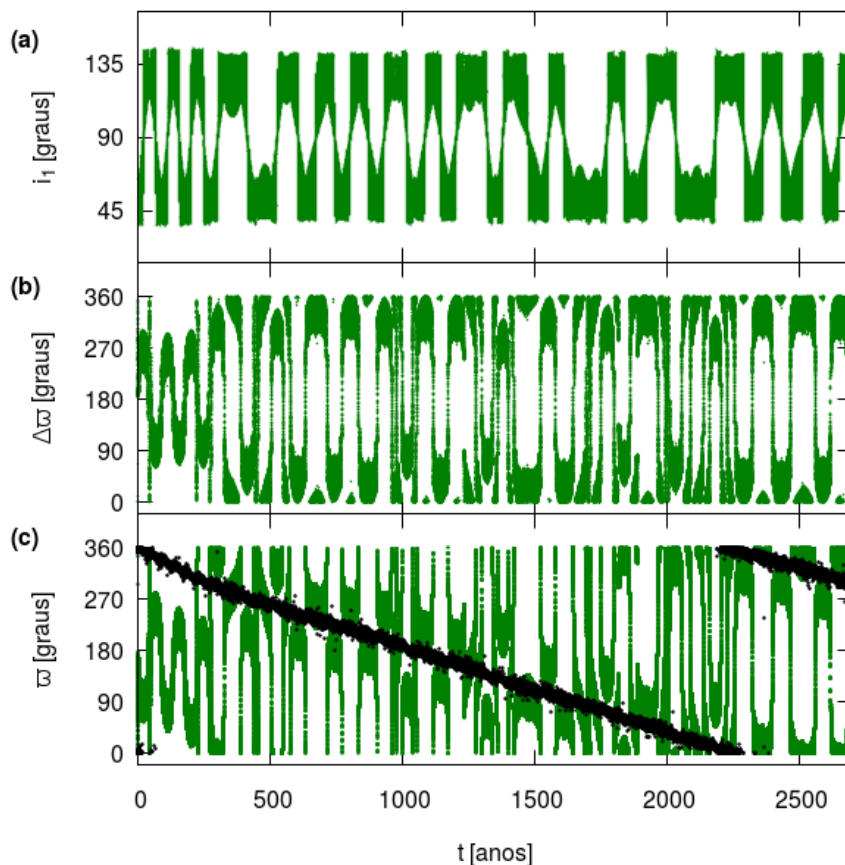
Figura 8.6 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.



Também analisamos o comportamento das órbitas por um longo período de tempo. A Figura 8.6 mostram os resultados para o sistema triplo de asteroides, integrado até 18000 anos. A Figura 8.6-a mostra a inclinação do corpo perturbado em função do tempo. A Figura 8.6-b mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo, e a Figura 8.6-c mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto). Na Figura 8.6-c podemos ver que ϖ_2 encontra-se circulando

durante todo o intervalo de tempo. Por meio desta figura, podemos ver que durante todo tempo de integração temos a presença de flips do plano orbital. Durante este intervalo de tempo, podemos identificar duas características distintas. Temos regiões onde os flips ocorrem de maneira mais regular, ou seja, o período em órbita direta é aproximadamente igual ao período em órbita retrógrada e outras regiões que não apresentam este aspecto.

Figura 8.7 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.



Para distinguir estes dois comportamentos distintos, analisamos alguns detalhes mostrando os resultados do movimento em intervalos de tempo mais curtos. A Figura 8.7 mostra os resultados para o intervalo de tempo de zero a aproximadamente 2700 anos. Esta figura representa a região onde os flips não ocorrem de forma regular. Exceto pelo intervalo inicial começando em zero até por volta de 300 anos. A Figura 8.7-b mostra que, até por volta de 300 anos, o centro de libração de $\Delta\varpi$ oscila em

torno de 180 graus com amplitude de aproximadamente 90 graus. Posteriormente a oscilação tem uma notável amplitude maior, levando o centro de libração para próximo de zero grau em alguns momentos. A partir deste momento, os flips começam a ocorrer de forma irregular, como mostra a Figura 8.7-a. Também, comparando as Figuras 8.7-a e 8.7-b, podemos ver que quando o centro de libração de $\Delta\varpi$ está em movimento, o flip do plano orbital de m_1 não ocorre, fazendo a órbita ficar no modo vigente (direta ou retrógrada). Portanto, a irregularidade na transição do centro de libração de $\Delta\varpi$ está provocando a irregularidade dos flips do plano orbital do corpo perturbado.

A Figura 8.7-c mostra a evolução de ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto). A variação secular destas variáveis permanecem comensuráveis, porém com pequenas flutuações. Esta propriedade mantém o centro de libração de $\Delta\varpi$ oscilando, neste caso, em torno de 180 graus.

A Figura 8.8 mostra os resultados para o intervalo de tempo entre aproximadamente 5300 anos e 8500 anos, onde os flips ocorrem regularmente (Figura 8.8-a). A Figura 8.8-b mostra o centro de libração de $\Delta\varpi$ oscilando em torno de 180 graus com amplitude de aproximadamente 90 graus, apresentando uma pequena circulação durante as transições do centro de libração entre 90 e 270 graus. A Figura 8.8-c mostra claramente que a variação secular de ϖ_1 (verde) e a variação secular ϖ_2 (preto) são comensuráveis para este intervalo de tempo de simulação.

Para uma melhor distinção qualitativa entre órbitas direta e retrógrada, analisamos o comportamento de um período em cada situação sucessiva. A Figura 8.9 mostra um período de flip do plano orbital (a), excentricidade representada por $1 - e$ em escala logarítmica (b) e $\Delta\varpi$ (c), todos em função do tempo. Comparando os gráficos desta figura, vimos que o ângulo $\Delta\varpi$ oscila em órbitas direta e retrógrada, alternadamente entre dois centros de libração. O ângulo crítico começa librando em torno de 90 graus e é levado a librar em torno de 270 graus. Após o flip do plano orbital, $\Delta\varpi$ caminha para librar em torno de 90 graus. Este comportamento acontece periodicamente se o plano orbital do corpo perturbado tem flips regulares. Esta simetria no comportamento das órbitas, sugere um mecanismo similar para explicar a perturbação em ambas situações.

Figura 8.8 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. O gráfico (a) mostra a inclinação (i_1) em função do tempo. O gráfico (b) mostra $\Delta\varpi$ em função do tempo e (c) mostra ϖ_1 (verde) e ϖ_2 (preto) em função do tempo, respectivamente.

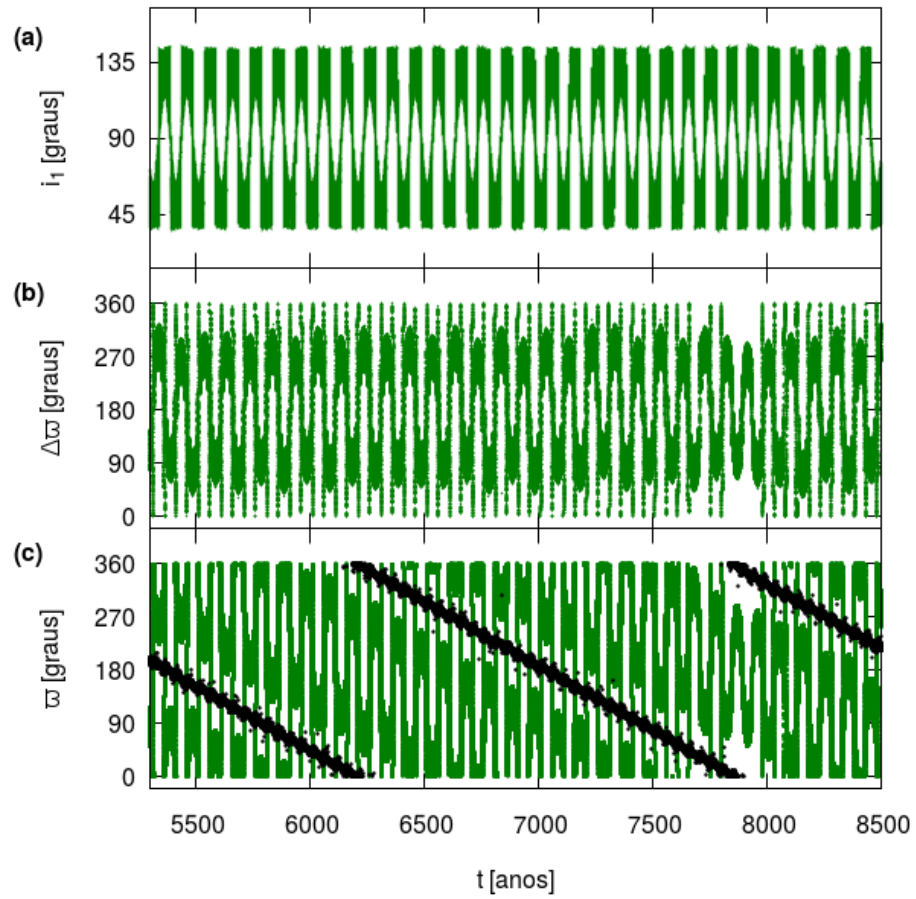
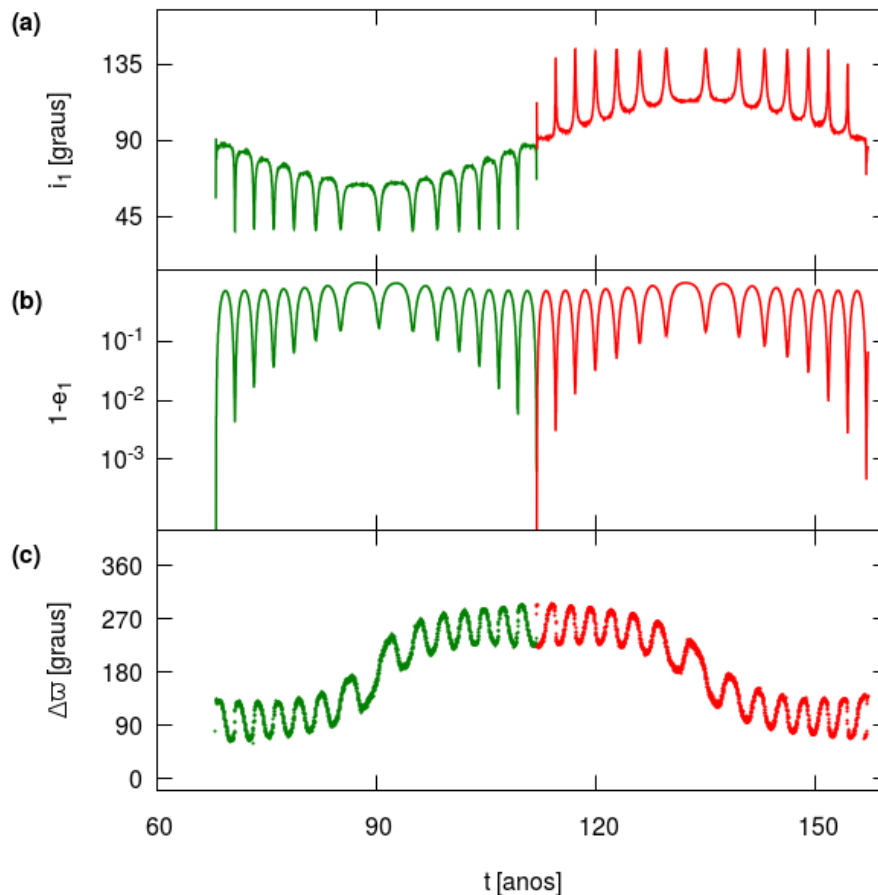


Figura 8.9 - Análise da distinção qualitativa entre órbita direta e retrógrada: Nesta figura, temos a inclinação do plano orbital em função do tempo, mostrando órbitas diretas (verde) e órbitas retrógradadas (vermelho) (a); excentricidade representada por $1 - e_1$ (b) e $\Delta\varpi$ (c).

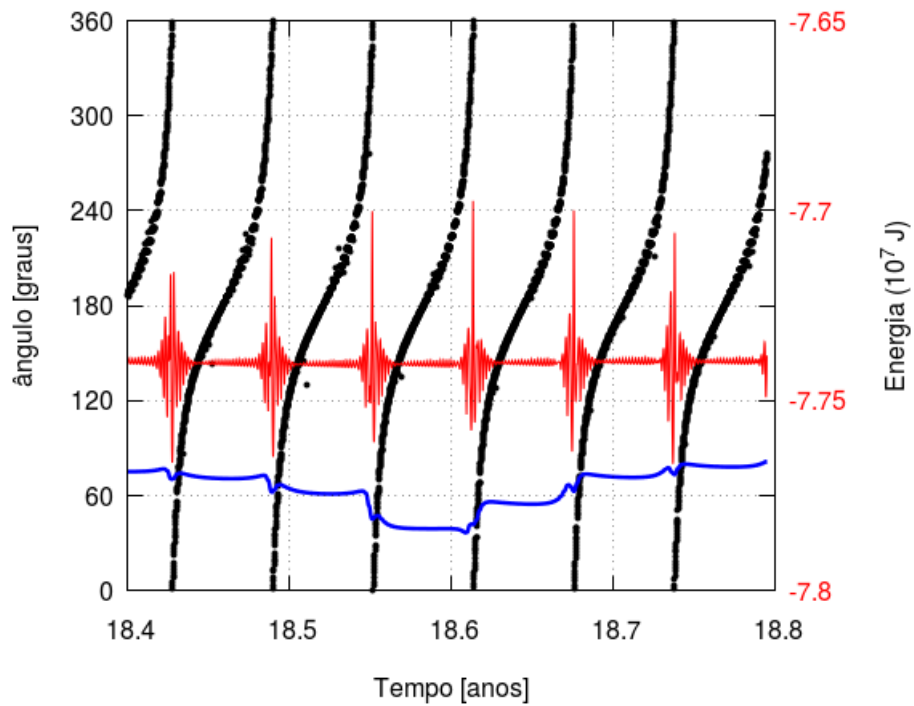


Em ambos casos, é notável a ocorrência de picos nos valores da excentricidade e da inclinação. A dinâmica dos elementos orbitais ω_1 e Ω_1 do corpo perturbado, promove condições, tais que, a interação entre M_1 e M_2 seja mais intensa, gerando esses picos nos valores de e_1 e i_1 . Neste caso, sugerimos o efeito de sucessivos encontros próximos entre os corpos perturbado e perturbador, por definição esta é a situação de máxima aproximação entre os corpos M_1 e M_2 . Configurando uma dinâmica de sucessivos "quasi-swing-by".

A Figura 8.10 mostra a evolução de um pico de variação da inclinação do plano orbital do corpo perturbado (azul). Por meio deste gráfico, podemos ver que, quando a anomalia verdadeira do corpo perturbador (preto) aproxima-se de 270 graus aparece uma variação na energia orbital do corpo perturbado (vermelho). Este comporta-

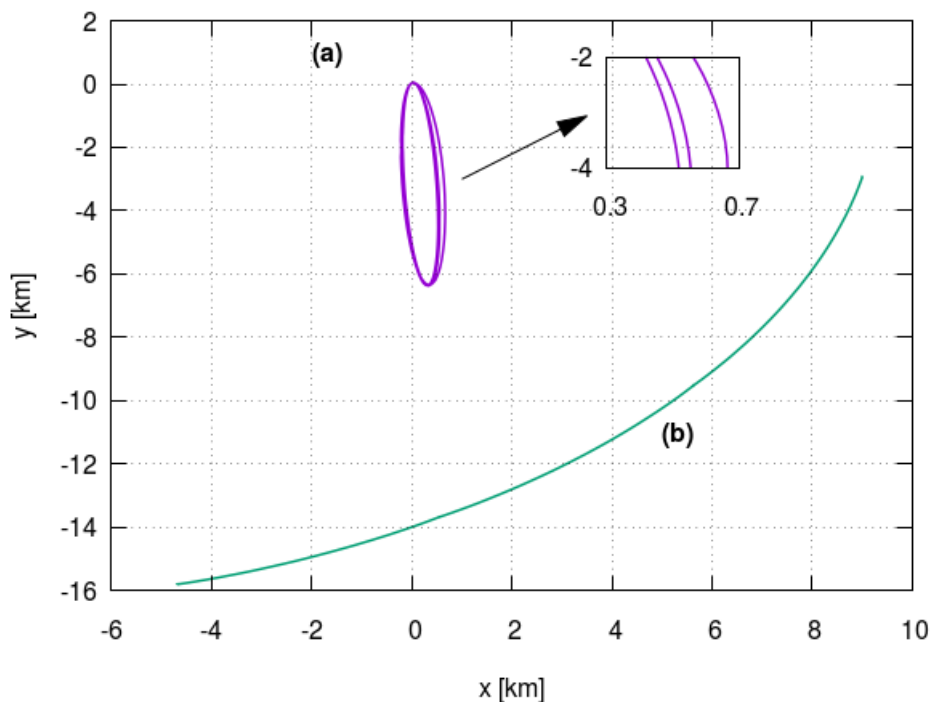
mento indica que a energia cinética e a energia potencial do corpo perturbado sofrem variações durante as aproximações, que sugerem alteração na geometria da órbita do corpo perturbado.

Figura 8.10 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. Anomalia verdadeira do corpo perturbador (preto), inclinação do corpo perturbado (azul) e a energia do corpo perturbado (vermelho) durante a evolução de um pico no valor da inclinação do corpo perturbado.



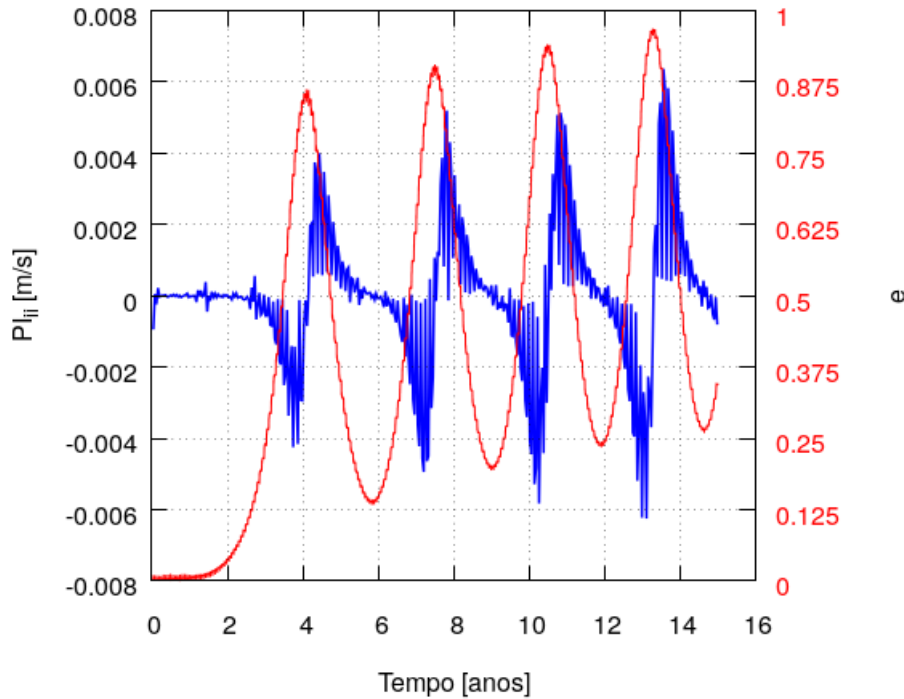
A Figura 8.11 mostra a aproximação do corpo de órbita externa (b) em relação à órbita do corpo de órbita interna (a). No zoom da órbita interna, podemos ver o deslocamento de sua trajetória devido aos encontros próximos dos dois corpos. Nesta figura, as coordenadas do corpo de órbita externa foi dividido por um fator 2, para melhor visualização das trajetórias.

Figura 8.11 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2. Projeção das órbitas no plano xy , do corpo perturbado (a) e do corpo perturbador dividido por um fator 2 (b).



A Figura 8.12 mostra a integral da força perturbadora de M_2 sobre M_1 utilizando o método (PI_{ii}) em função do tempo, calculada com intervalos de tempo de 20 períodos orbitais do corpo perturbado (curva azul) e a excentricidade em função do tempo (vermelho). Por meio deste método obtemos a variação total da velocidade na direção do movimento a cada 20 períodos orbitais do corpo perturbado. Comparando a curva da PI com a curva da excentricidade podemos ver que na fase de aumento da excentricidade a variação total da velocidade tem sentido oposto ao movimento do corpo perturbado, ou seja, o aumento da excentricidade é consequência da diminuição da velocidade. O efeito inverso ocorre durante o decréscimo da excentricidade, onde variação total da velocidade tem o mesmo sentido do movimento do corpo perturbado. Já que a maior contribuição da perturbação ocorre quando o corpo perturbado movimenta-se próximo ao apocentro se sua órbita, podemos dizer que a variação da excentricidade é principalmente conduzida pela variação da velocidade no apocentro.

Figura 8.12 - Integral da perturbação (modelo PI_{ii}) em função do tempo, calculada com intervalos de tempo de 20 períodos orbitais do corpo perturbado (azul), excentricidade em função do tempo (vermelho).



A Figura 8.13 mostra o comportamento da excentricidade, inclinação e do tempo de vida da órbita, como função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais, para o tempo máximo de dez mil anos de integração.

A Figura 8.13-(A) apresenta a excentricidade máxima registrada. Podemos ver órbitas diretas mais estáveis até o limite do ângulo Kozai $i_1 < 40^\circ$, e até o limite de semi-eixo maior, $a_1 \approx 5.5$ km, que é equivalente a um limite tomado pela proporção dos semi-eixos maiores $a_1/a_2 \approx 0.12$. Esta figura também mostra a região estável para órbitas retrógradas que varia de 180 graus até o limite do ângulo Kozai $i_1 > 140^\circ$ com limite de a_1 por volta de 8 km ou pela proporção dos semi-eixos maiores $a_1/a_2 \approx 0.174$. Nesta região podemos descrever o comportamento das órbitas por meio do mecanismo Kozai padrão.

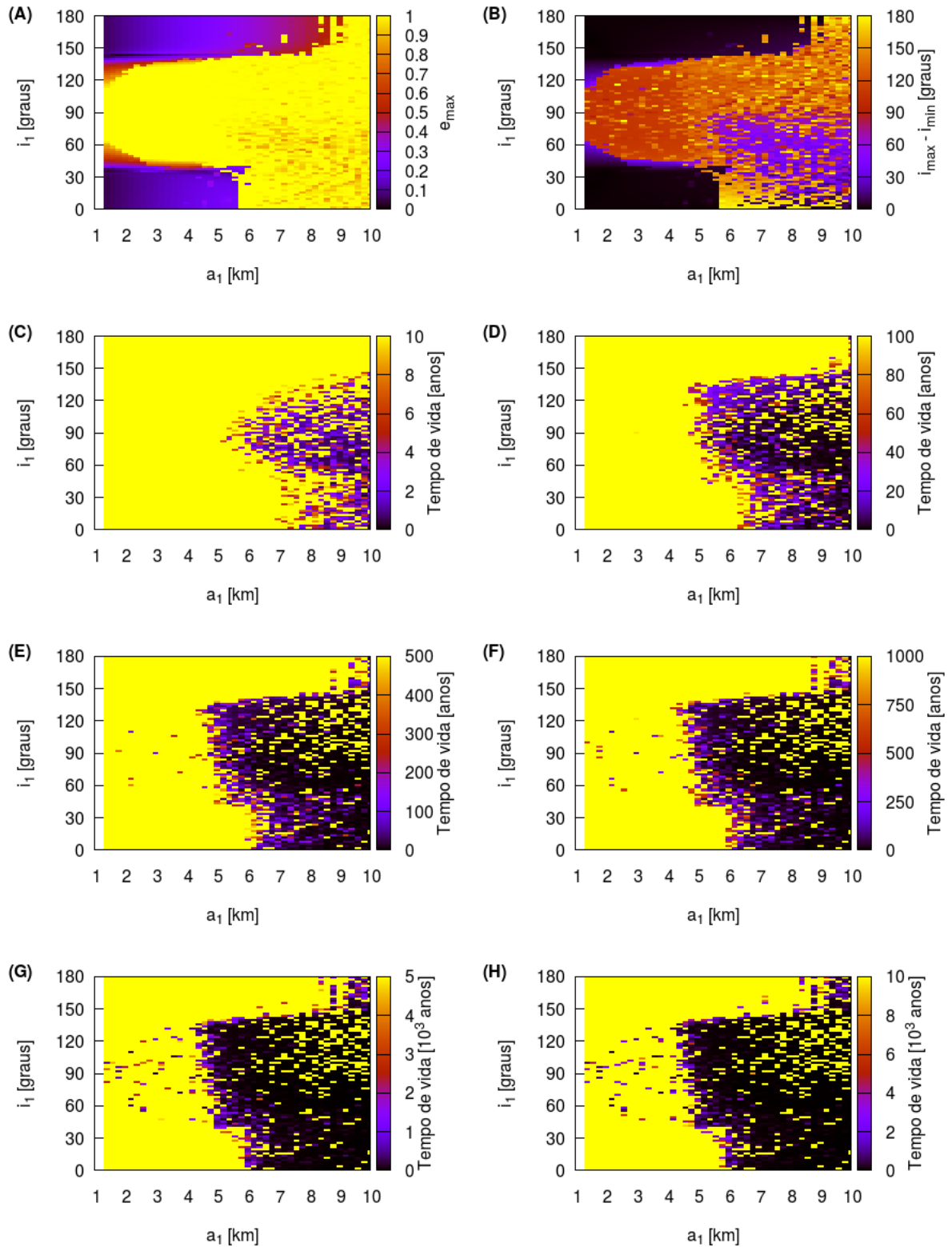
Entre os ângulos Kozai, a excentricidade máxima aproxima-se do valor de uma unidade. Nesta região ocorrem os flips do plano orbital do corpo perturbado, como mostra a Figura 8.13-(B), onde a diferença entre a máxima e mínima inclinações fica em torno de 100 graus até o semi-eixo maior de $a_1 \approx 5.5$ km.

Por ser esta região mais instável, o tempo de vida das órbitas do corpo perturbado pode ser muito curta, acabando em colisão ou o corpo perturbado pode escapar do sistema.

A região do semi-eixo maior acima de $a_1 \approx 5.5$ km, mesmo para órbitas abaixo do ângulo Kozai, também mostra instabilidade com maior intensidade, em relação à região anterior, devido à menor distância entre os corpos, gerando interações mais agressivas.

As Figuras 8.13-(C, D, E, F, G e H) mostram o tempo de vida das órbitas para os tempos de integração de 10, 100, 500, 1000, 5000 e 10000 anos, respectivamente. A região em amarelo, mostra que o tempo de vida foi superior ao limite de integração. Por meio desta sequência de figuras, podemos notar que, para o sistema triplo de pequenos corpos, na região restrita ao mecanismo Kozai excêntrico, pode ocorrer o flip do plano orbital da órbita interna para várias condições iniciais e as órbitas podem durar mais ou não.

Figura 8.13 - Resultados para um sistema triplo de asteroides para os dados de entrada da Tabela 8.2, definindo o mapa da excentricidade máxima (e_{max}) (A), variação da inclinação ($i_{max} - i_{min}$), e o tempo de vida da órbita do corpo perturbado (C,D,E,F,G e H), todo em função de a_1 e i_1 .



8.3 Caso 2: Adicionando um quarto corpo ao sistema

Aqui, adicionamos um quarto corpo ao sistema. Agora o sistema fica mais realista com a presença do Sol como um elemento perturbador adicional. Esta simulação foi realizada com o sistema de referência centrado no corpo primário do sistema triplo de asteroides. Os dados de entrada para a propagação do movimento do Sol estão na Tabela 8.3. Os dados de entrada do sistema triplo de asteroides são os mesmos adotados para o primeiro caso. Os parâmetros para o movimento do sistema em torno do Sol são os dados do asteroide 2001SN263.

Tabela 8.3 - Valores iniciais para a simulação do quarto corpo (Sol) inserido no sistema triplo de asteroides baseados nos dados do sistema 2001SN263.

Magnitude	Sol
a	$1,99UA$
e	$0,48$
i (<i>graus</i>)	$7,0$
ω (<i>graus</i>)	$0,0$
Ω (<i>graus</i>)	$0,0$
M (<i>graus</i>)	$0,0$
$Massa$ (<i>kg</i>)	$1,9884 \times 10^{30}$

A Figura 8.14 mostra a evolução no tempo da inclinação (a), excentricidade (b), argumento do pericentro (c) e do argumento do nodo ascendente (d) do corpo de órbita interna do sistema triplo de asteroides. A diferença qualitativa entre este e o primeiro caso, é a presença do quarto corpo no sistema (o Sol), para o mesmo conjunto de dados de entrada no sistema triplo de asteroides. Comparando o gráfico (a) com o gráfico (b) ainda podemos notar a atuação do mecanismo Kozai (acoplamento $i-e$). O gráfico (c) mostra o argumento do pericentro inicialmente circulando até aproximadamente 50 anos, então ele é capturado em libração em torno de 90 graus no intervalo de tempo de 50 a 100 anos e depois volta a circular até aproximadamente 230 anos. O gráfico (d) apresenta o argumento do nodo ascendente circulando durante toda simulação. A combinação destes dois movimentos, a longitude do pericentro (ϖ_1) é apresentada na Figura 8.15-(b), comparando este gráfico com o gráfico da Figura 8.14-(c) verifica-se que, quando ω_1 circula, ϖ_1 é capturado em libração, porém, como ϖ_2 circula rápido o centro de libração de $\Delta\varpi$ também circula (Figura 8.15-(a)), impedindo que a excentricidade aumente até um valor que permita a ocorrência do flip do plano orbital.

Figura 8.14 - Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3. O primeiro gráfico (a) mostra a inclinação em função do tempo. O segundo gráfico (b) mostra a excentricidade em função do tempo. (c) e (d) mostram o argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente, respectivamente. Todos para o corpo perturbado.

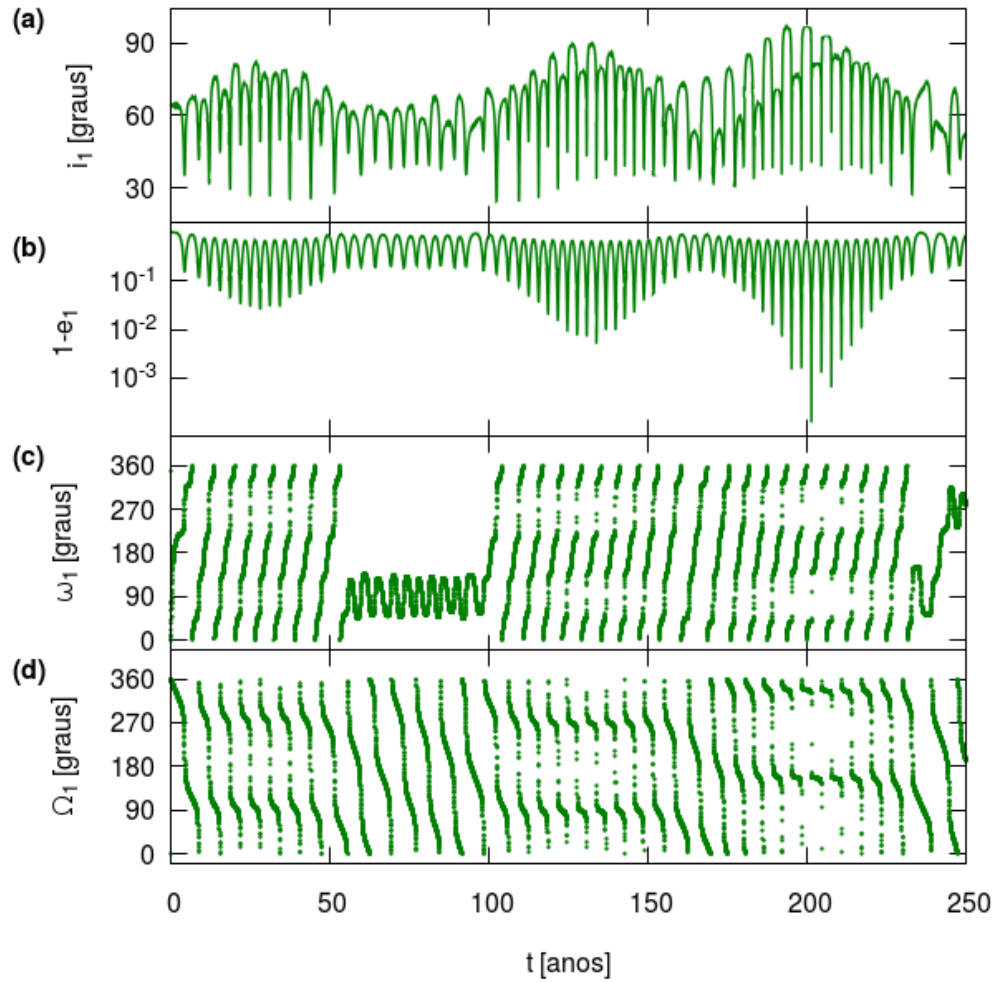
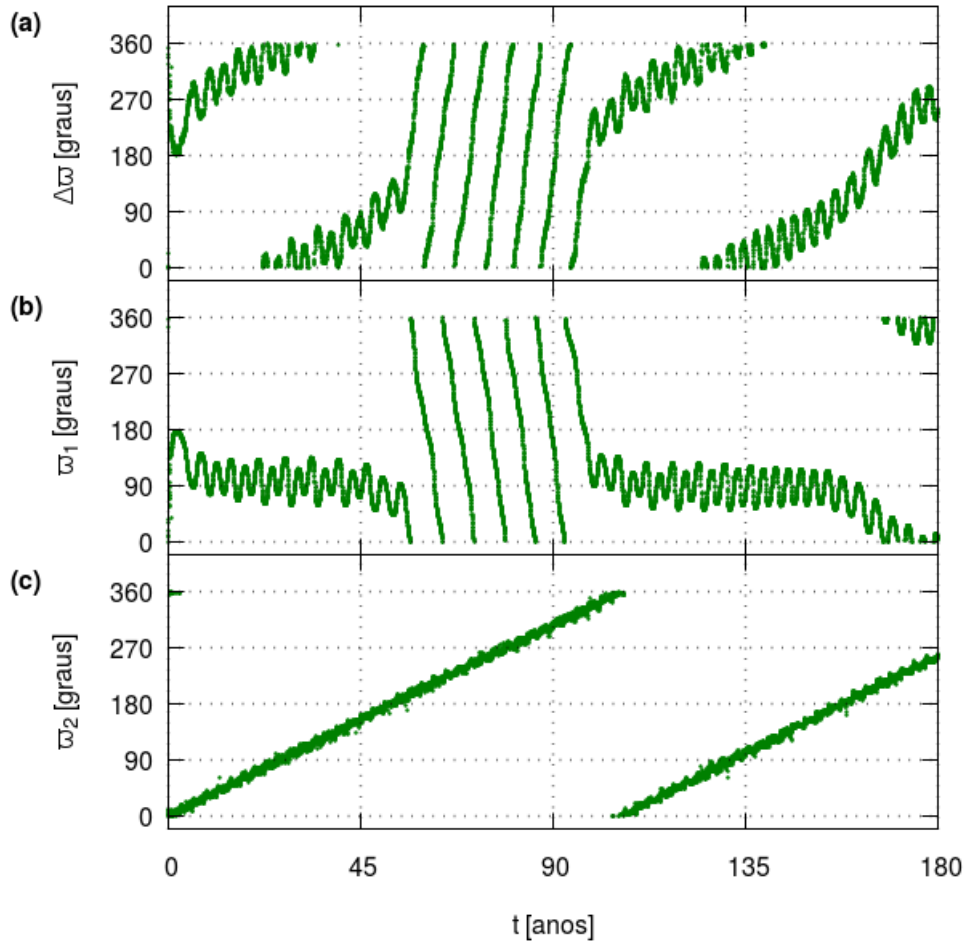
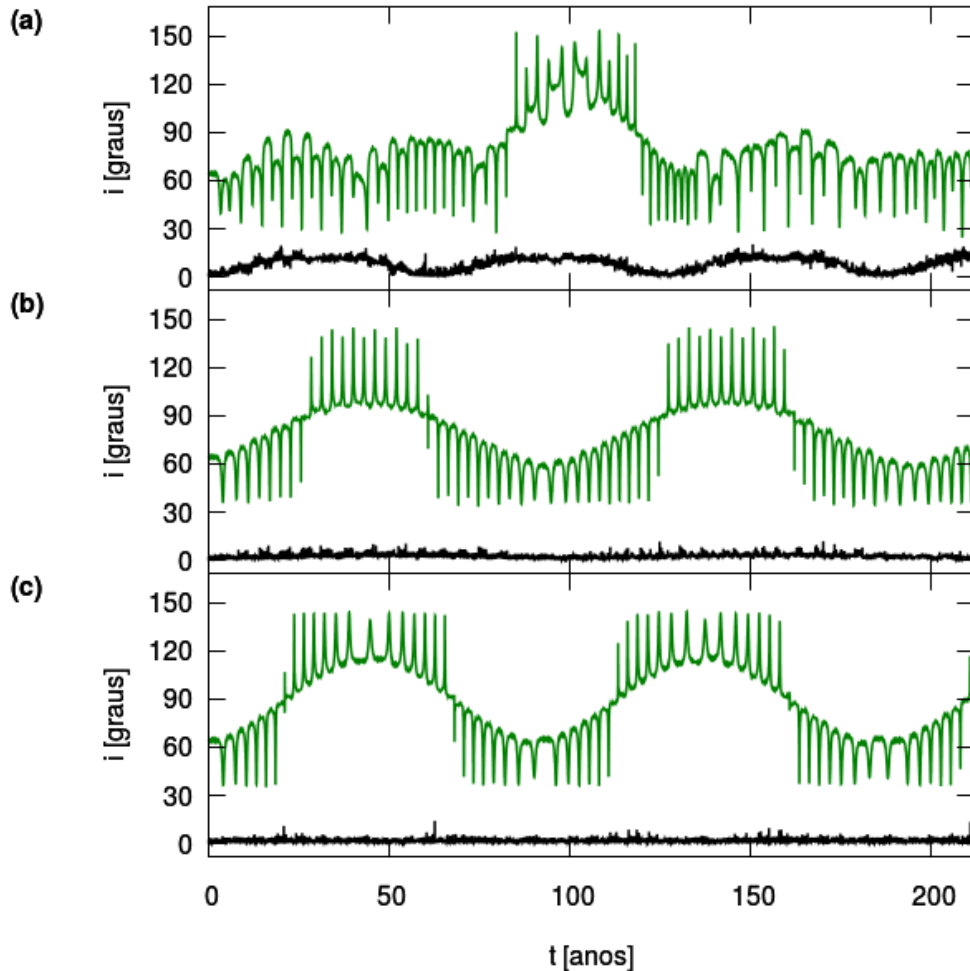


Figura 8.15 - Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3. O gráfico (a) mostra o ângulo $\Delta\varpi$. (b) mostra a evolução da longitude do pericentro do corpo de órbita interna. (c) mostra a longitude do pericentro do corpo de órbita externa.



Ao alterar as condições iniciais do quarto corpo do sistema, para a propagação do movimento, é possível analisar a influência do quarto corpo no sistema triplo de pequenos corpos. A Figura 8.16-(a) mostra uma nova simulação do sistema usando $\omega_{\odot} = 90^{\circ}$. A curva verde representa i_1 e a curva preta é i_2 . Com estas condições iniciais, temos um considerável flip do plano orbital de M_1 e uma considerável variação de i_2 . Esta perturbação notável do quarto corpo sobre o corpo M_2 é responsável pela irregularidade dos flips, comparado com os casos anteriores, como mostram as Figuras 8.16-(b) e 8.16-(c).

Figura 8.16 - Resultados para o sistema triplo de asteroides orbitando o Sol (este é o modelo de quatro corpos) com os valores de entrada das Tabelas 8.2 e 8.3 com algumas alterações: (a) $\omega_{\odot} = 90^{\circ}$, (b) ($e_{\odot} = 0.1$ e $i_{\odot} = 2^{\circ}$), (c) usamos o mesmo conjunto de dados do primeiro caso do sistema de quatro corpos, porém, a perturbação do quarto corpo não tem efeito sobre o corpo M_2 .



A Figura 8.16-(b) mostra o resultado do sistema com a órbita do quarto corpo menos excêntrica, e com baixa inclinação ($e_{\odot} = 0.1, i_{\odot} = 2^{\circ}$). Neste resultado, podemos observar uma menor variação na inclinação de M_2 e o reaparecimento da regularidade dos flips.

A Figura 8.16-(c) apresenta os resultados de um modelo fictício, aqui usamos o mesmo conjunto de dados do primeiro caso do sistema de quatro corpos, porém, a perturbação do quarto corpo não afeta a órbita de M_2 . Neste caso, temos um resultado similar comparado ao resultado obtido no problema de três corpos, isso significa que a perturbação gravitacional do Sol sobre M_1 é insignificante em com-

paração com a perturbação de M_2 sobre M_1 . O conjunto de resultados apresentados na Figura 8.16 mostrou que a ocorrência regular dos flips do plano orbital de M_1 depende da estabilidade da órbita de M_2 .

8.4 Aplicação no sistema de Haumea

Nesta seção, analisamos a hipótese da ocorrência de flips do plano orbital de um veículo espacial inserido numa órbita em torno de Haumea. A sequência para a avaliação da hipótese segue da seguinte forma. Primeiro avaliamos um sistema de três corpos contendo Haumea (o corpo central), Namaka (o corpo perturbador) e o veículo espacial. Na sequência, adicionamos o quarto corpo ao sistema, ou seja, nesta avaliação é considerada a perturbação de Hi'iaka, o segundo satélite natural de Haumea. No terceiro modelo, adicionamos o efeito da perturbação devido ao corpo central. Ou seja, é empregado o modelo do potencial perturbador do corpo central dado pela equação 3.4, nesta abordagem temos aplicada a situação mais realista.

A Figura 8.17 mostra o resultado modelado para o sistema de três corpos. As condições iniciais da órbita do veículo espacial para a propagação do movimento são: semi-eixo maior $a = 10000$ km, excentricidade $e = 0.4$, inclinação $i = 83$ graus e para o restante dos elementos orbitais, usamos para todas as propagações desta seção os valores $\omega = \Omega = M = 0$. Podemos ver no gráfico (a) desta figura os flips do plano orbital do veículo espacial, e no gráfico (b) o comportamento da excentricidade, que atinge os maiores valores durante os flips do plano orbital. O gráfico (c) apresenta o argumento do pericentro e o gráfico (d) mostra o nodo ascendente.

A Figura 8.18 apresenta a evolução de $\Delta\varpi$, da longitude do pericentro da órbita do veículo espacial (ϖ_1) e da longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2), respectivamente nos gráficos (a), (b) e (c). Os resultados mostram que ϖ_1 varia oscilando em torno de 0 grau, sem aparente variação secular, enquanto ϖ_2 apresenta um valor constante e visivelmente sem variação secular, como esperado, dado que a massa do veículo espacial é desprezível.

A Figura 8.19 mostra o resultado da propagação do movimento do veículo espacial incluindo o segundo satélite natural de Haumea (Hi'iaka). As condições iniciais são as mesmas adotadas para o caso anterior. Os resultados mostram que, mesmo com a adição do quarto corpo ao modelo, podemos ter a ocorrência de flips do plano orbital, porém, houve uma quebra da regularidade dos flips. A Figura 8.19-(a) mostra uma expressiva variação do semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, que foi expulso do sistema em aproximadamente 12 mil anos.

Figura 8.17 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra a inclinação da órbita, (b) apresenta a excentricidade, (c) o argumento do pericentro e (d) o argumento do nodo ascendente.

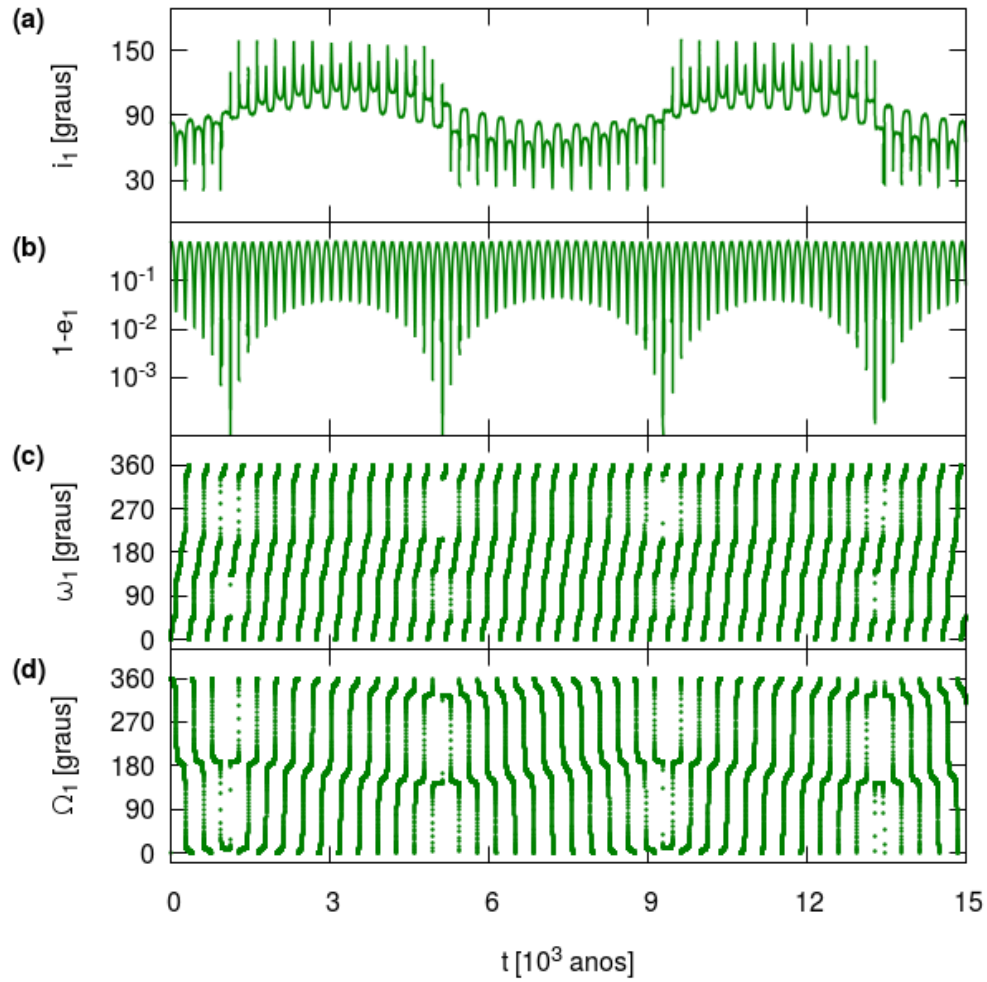


Figura 8.18 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra $\Delta\varpi$, (b) apresenta a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial (ϖ_1) e (c) a longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2).

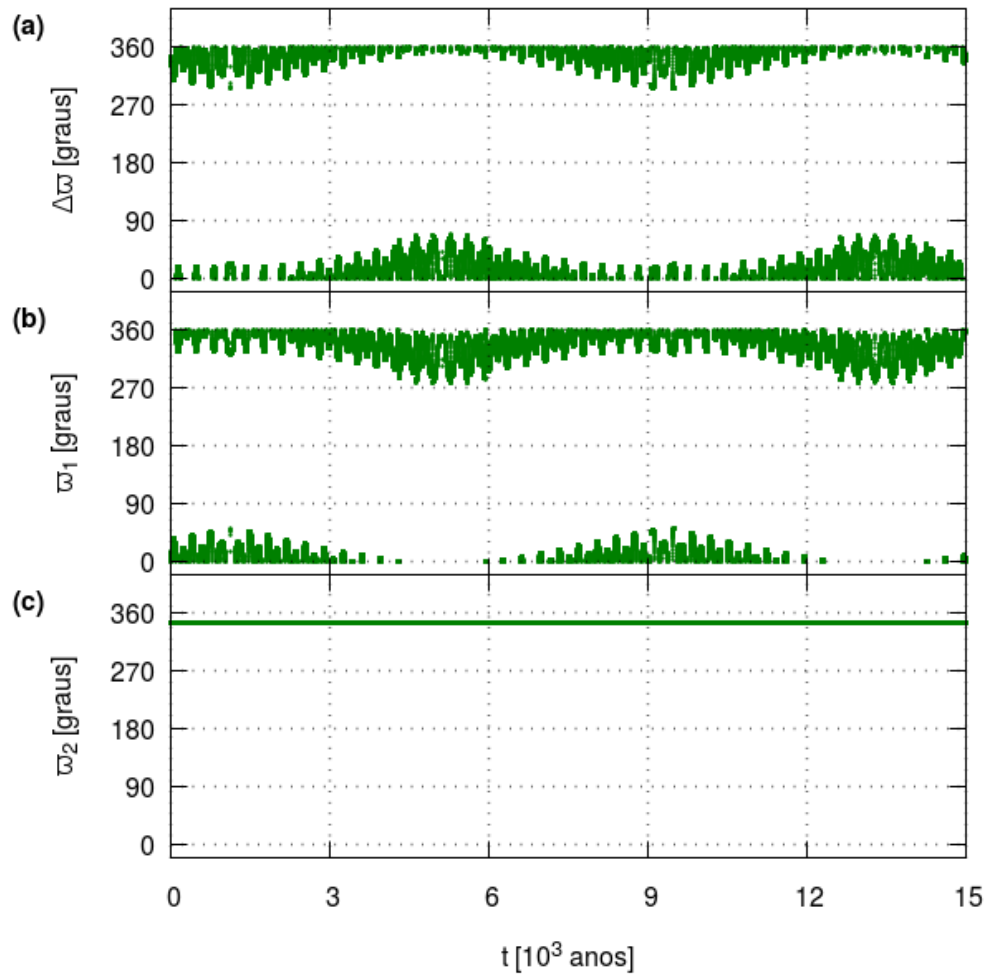
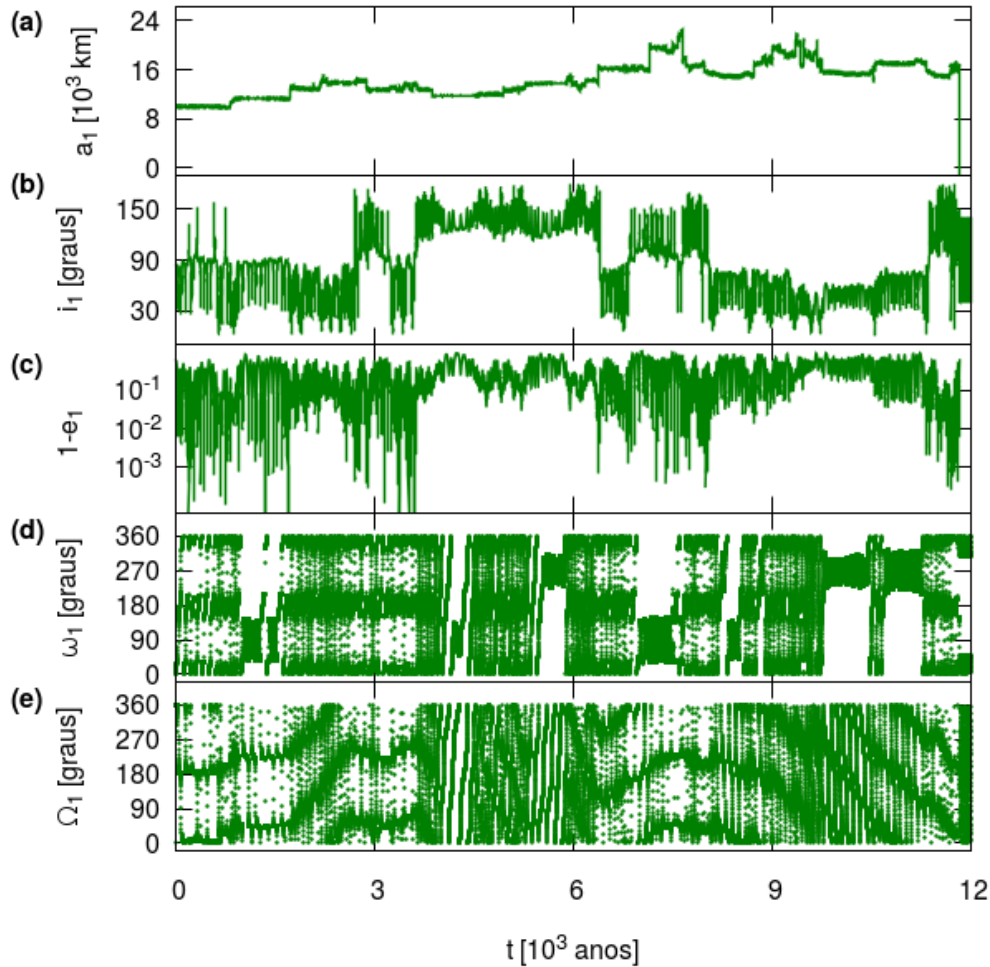
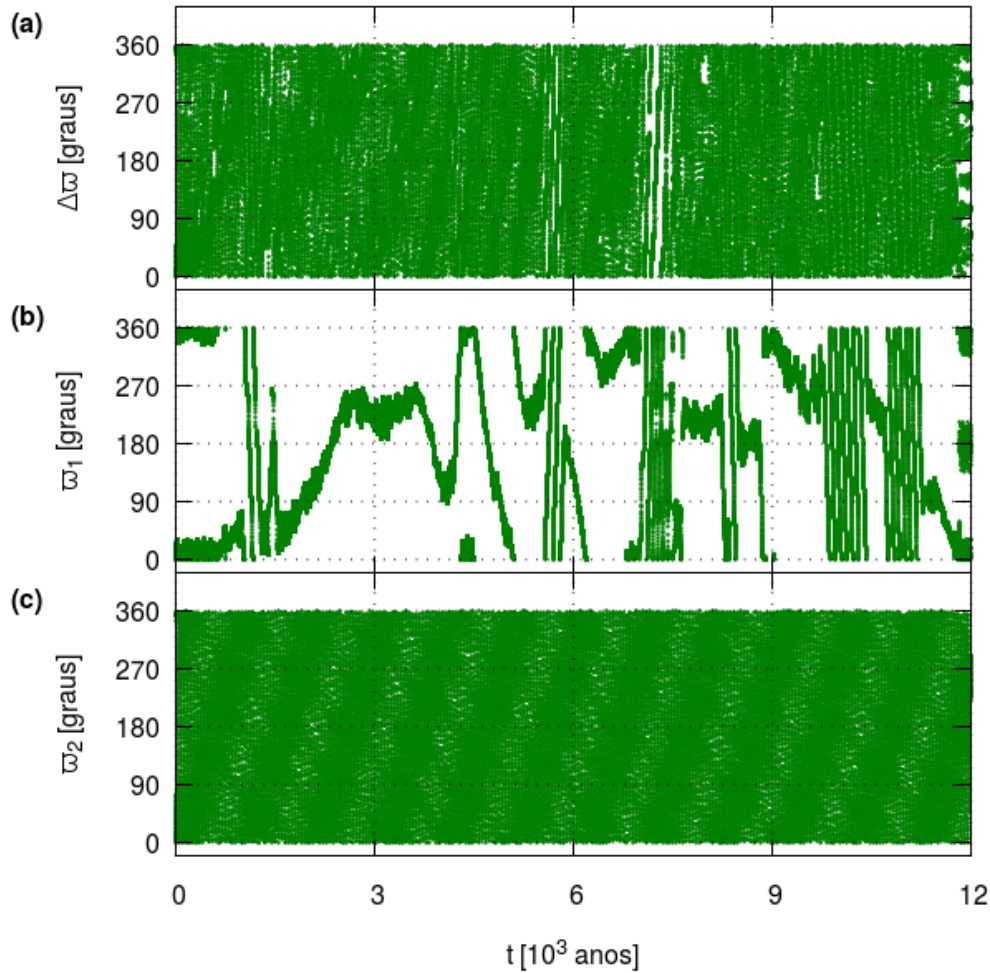


Figura 8.19 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka e Hi'iaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) temos o semi-eixo maior da órbita do veículo espacial, (b) mostra a inclinação da órbita, (c) apresenta a excentricidade, (d) o argumento do pericentro e (e) o argumento do nodo ascendente.



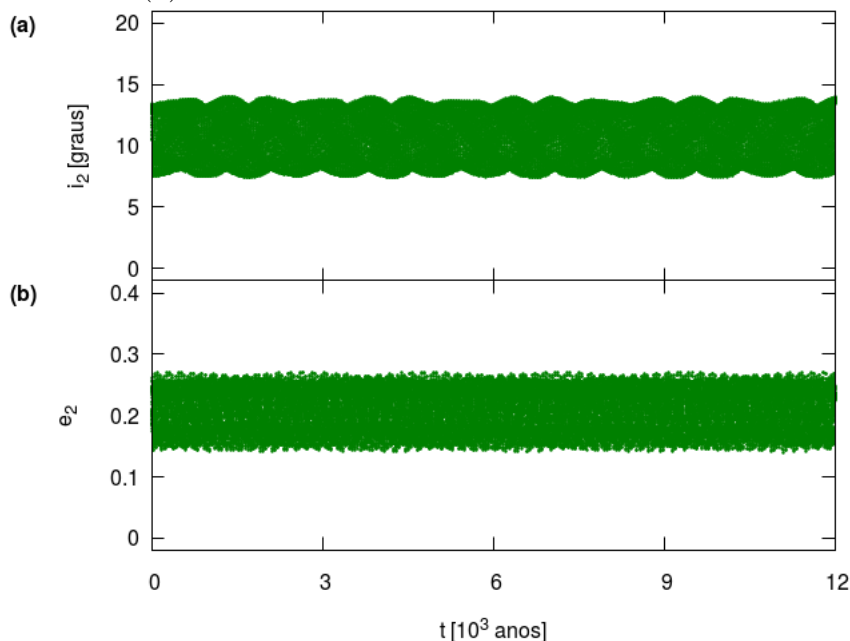
Os resultados da Figura 8.20 mostram: $\Delta\varpi$, a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial (ϖ_1) e a longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2), respectivamente, nos gráficos (a), (b) e (c). O gráfico (a) mostra $\Delta\varpi$ circulando decorrente da circulação de (ϖ_2) apresentado no gráfico (c). O gráfico (b) apresenta a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial apresentado librações e circulação durante o tempo de propagação do movimento.

Figura 8.20 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka e Hi'iaka. Neste caso não é considerada a perturbação de Haumea. Em (a) mostra $\Delta\varpi$, (b) apresenta a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial (ϖ_1) e (c) a longitude do pericentro de Namaka (ϖ_2).



A Figura 8.21 apresenta a variação da inclinação e da excentricidade de Namaka, respectivamente, os gráficos (a) e (b). De forma geral, os resultados mostram que a perturbação de Hi'iaka sobre Namaka, que causa variações expressivas na excentricidade, inclinação, longitude do pericentro, quebra a sincronia dos encontros próximos entre o veículo espacial e Namaka, e como consequência vem a quebra da regularidade dos flips do plano orbital do veículo espacial.

Figura 8.21 - Resultado da perturbação de Hi'iaka sobre Namaka. (a) inclinação de Namaka e (b) excentricidade de Namaka.



Ainda considerando o sistema de quatro corpos sem os efeitos da distribuição de massa do corpo central, a Figura 8.22 mostra a diferença entre a inclinação máxima e a inclinação mínima ($\Delta i = i_{max} - i_{min}$) e a Figura 8.23 mostra diferença entre a excentricidade máxima e a excentricidade mínima ($\Delta e = e_{max} - e_{min}$), respectivamente, em função da inclinação (i_0) inicial e do semi-eixo maior inicial (a_0). Para estes mapas, a excentricidade inicial foi de $e_0 = 0,4$. O argumento do pericentro, argumento do nodo ascendente e a anomalia média tiveram os valores iniciais dados por $\omega_0 = \Omega_0 = M_0 = 0$ grau. O tempo máximo para a propagação do movimento foi fixado em 3000 anos. Nesta figura podemos ver regiões onde as condições iniciais geram uma variação da inclinação que supera o valor de 100 graus, que comparada com a Figura 8.23 podemos verificar as condições iniciais que também geram elevados valores para Δe . Da combinação dos valores de Δi com os valores onde $\Delta e \simeq 1$ temos as condições iniciais geradoras dos flips do plano orbital do veículo espacial. Ainda nestas duas figuras, podemos notar algumas regiões verticais, que representam um pequeno intervalo nos valores do semi-eixo maior inicial (a_0), com maior variação tanto de Δi quanto de Δe . Os valores mais proeminentes para a variação da inclinação estão em torno de $a_0 \simeq 10200$ km e $a_0 \simeq 8800$ km, observados nas Figuras 8.22 e 8.23. Correspondendo, respectivamente, às ressonâncias de movimentos médios (MMR) 4 : 1 e 5 : 1 entre o veículo espacial e Namaka. Analisando o gráfico

8.23, além destes semi-eixos ressonantes, aparecem com intensidade menor, porém perceptível, a variação da excentricidade para o semi-eixo $a_0 \simeq 7780$ km, compatível com a ressonância de movimentos médios 6 : 1, e para o semi-eixo $a_0 \simeq 9400$ km referente à ressonância de movimentos médios 9 : 2. Resultados semelhantes foram encontrados em estudos de disco de detritos e formação planetária em sistemas estelares triplo, onde foi mostrado que na ressonância de movimentos médios, o efeito da perturbação de um terceiro corpo com órbita inclinada causa uma rápida elevação da excentricidade dos detritos (DOMINGOS et al., 2012). Outras ressonâncias importantes não apareceram de forma destacada nestes mapas, como por exemplo a MMR 3:1 ($a = 12334,6$ km) que está na região onde a variação da excentricidade é alta para a excentricidade inicial $e_0 = 0,4$. Esta e outras ressonâncias (2:1 e 5:2) serão retomadas em outro trabalho, pois poderão apresentar efeitos significativos em órbitas com excentricidade inicial menor.

A Figura 8.24 mostra o tempo de vida do veículo espacial em função da inclinação inicial e do semi-eixo maior inicial, para o tempo máximo de propagação do movimento igual a 3000 anos. O resultado mostra que as órbitas instáveis aparecem a partir do semi-eixo maior inicial de aproximadamente 10000 km. Sendo a região de órbitas retrógradadas mais estável comparada à região de órbitas diretas.

Figura 8.22 - Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Variação da inclinação ($\Delta i = i_{max} - i_{min}$) em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0,4$.

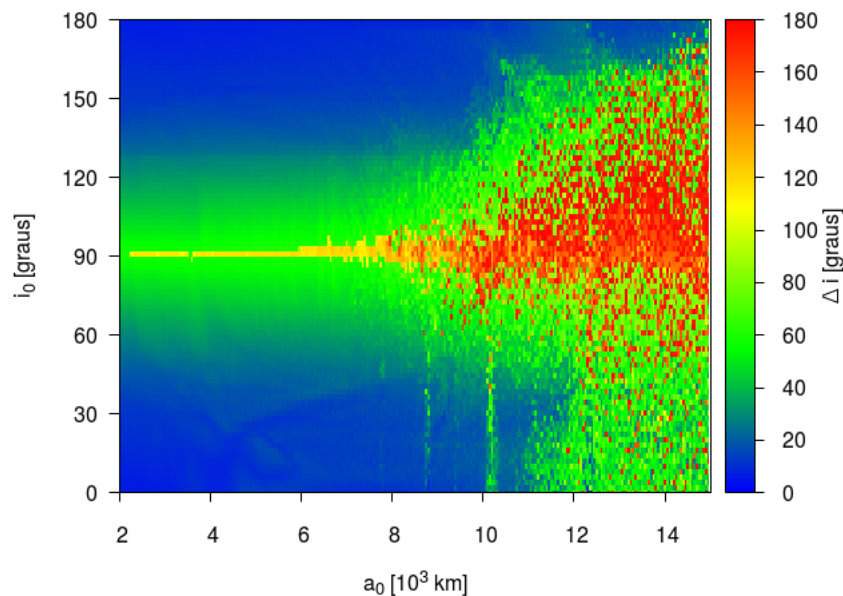


Figura 8.23 - Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Variação da excentricidade ($\Delta e = e_{max} - e_{min}$) em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0,4$.

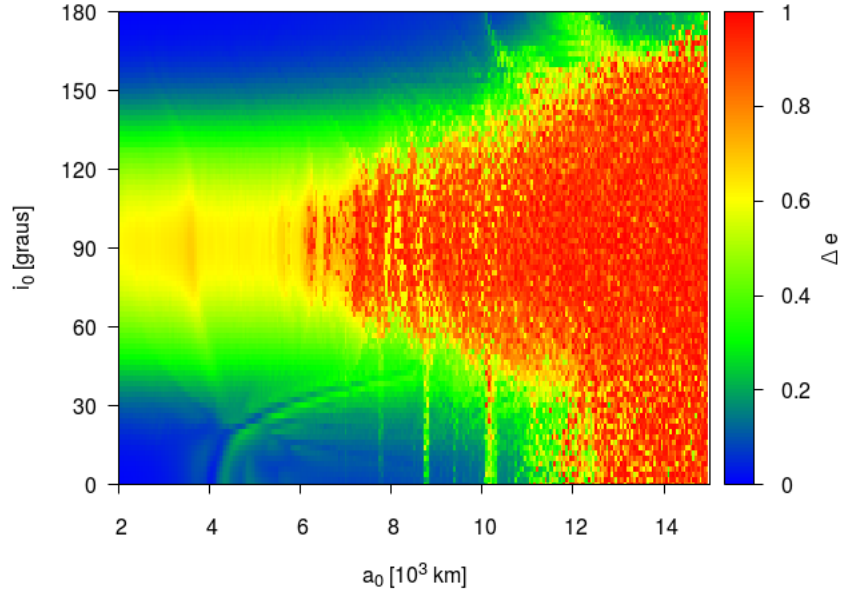
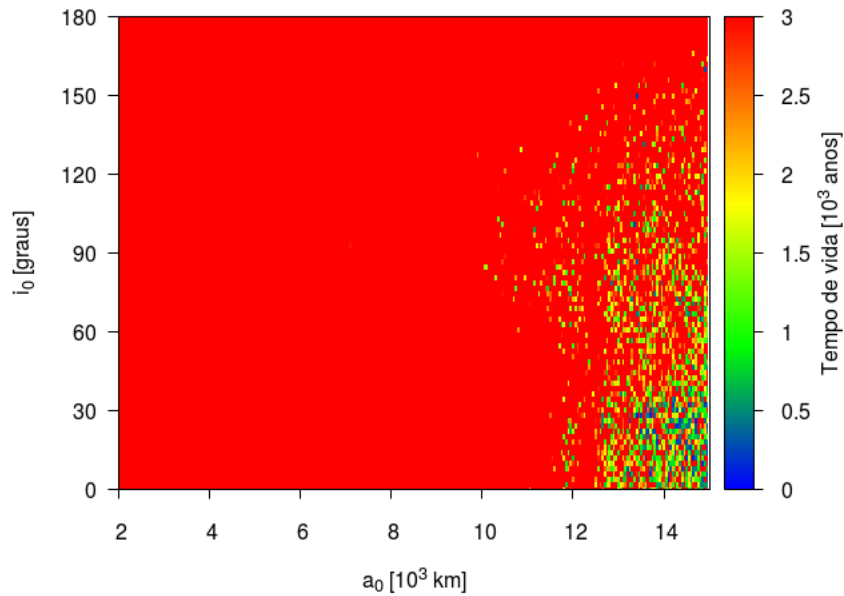
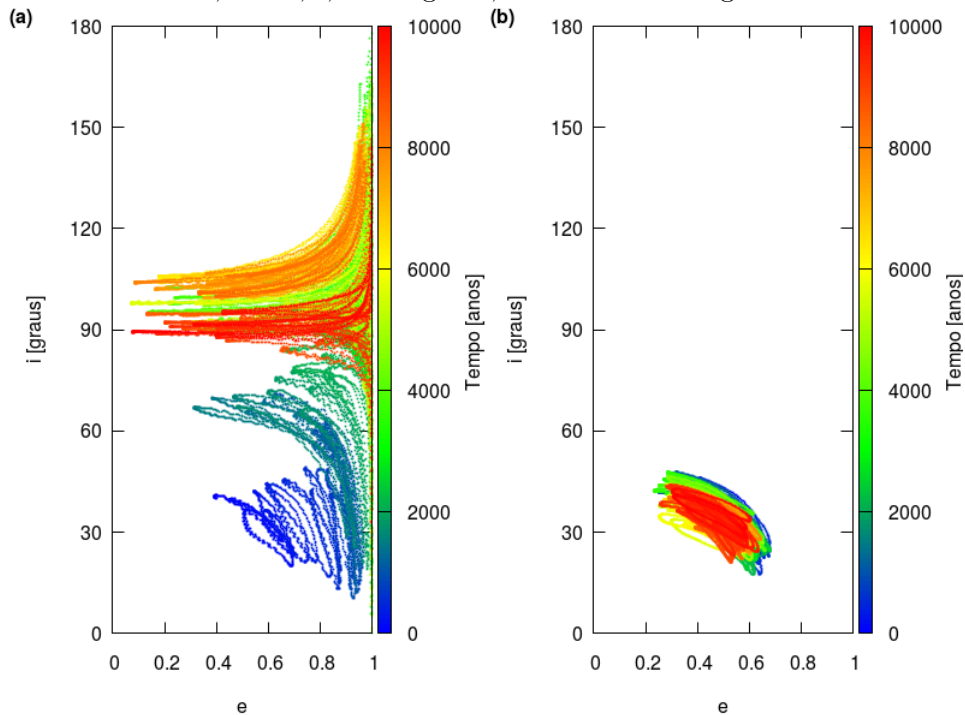


Figura 8.24 - Mapa dinâmico das órbitas do veículo espacial no sistema de Haumea. Tempo de vida em função da inclinação inicial (i_0) e do semi-eixo maior da órbita inicial (a_0), com excentricidade inicial $e_0 = 0,4$.



A ressonância (4 : 1), mostrou-se mais acentuada na variação da inclinação e da excentricidade. Nesta condição, verifica-se que, pode ocorrer flips do plano orbital do veículo espacial, mesmo com a inclinação relativa a Namaka inferior a 40 graus. Para verificar esta hipótese, comparamos os resultados entre duas órbitas com os posicionamentos dos planos orbitais iguais diferindo apenas pelo semi-eixo maior da órbita, sendo uma das órbitas com semi-eixo maior ressonante $a = 10150$ km e a outra órbita com o semi-eixo maior um pouco afastado da primeira com $a = 10000$ km. Os elementos orbitais comuns aos dois casos são: $e = 0,4$, $i = 40$ graus, $\omega = \Omega = M = 0$ grau.

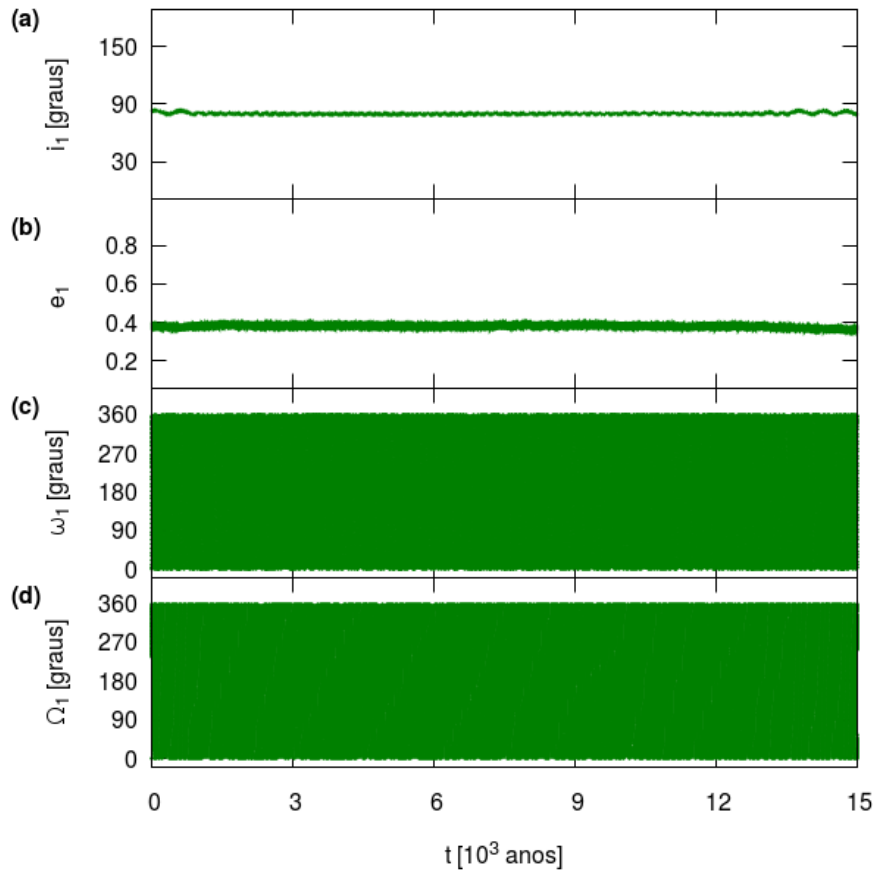
Figura 8.25 - Curvas Kozai para duas órbitas distintas. (a) Ressonância 4:1 entre o veículo espacial e Namaka ($a = 10150$ km). (b) Órbita com $a = 10000$ km. Para os dois casos, $e = 0,4$, $i = 40$ graus, $\omega = \Omega = M = 0$ grau.



A Figura 8.25 apresenta as curvas Kozai para os dois casos. Em 8.25-(a) temos as curvas Kozai para o semi-eixo maior ressonante $a_0 = 10150$ km. Os resultados mostram que a ressonância proporcionou o aparecimento do mecanismo Kozai-Lidov excêntrico. O gráfico mostra que, inicialmente, a evolução da curva tem a característica do mecanismo Kozai padrão, porém, os efeitos da ressonância empurra a curva no sentido crescente da excentricidade até atingir a excentricidade que evolui para o

mecanismo Kozai excêntrico. Em 8.25-(b) mostra as curvas Kozai para o semi-eixo maior $a_0 = 10000$ km, mostrando o comportamento característico do acoplamento entre a excentricidade e a inclinação segundo o mecanismo Kozai-Lidov padrão.

Figura 8.26 - Resultados da propagação do movimento do veículo espacial orbitando Haumea e perturbado por Namaka, Hi'iaka e pelo potencial perturbador de Haumea. Em (a) mostra a inclinação da órbita, (b) apresenta a excentricidade, (c) o argumento do pericentro e (d) o argumento do nodo ascendente.



A Figura 8.26 mostra os resultados contemplando também os efeitos do potencial perturbador do corpo central. Os gráficos (a) e (b) mostram, respectivamente, a inclinação e a excentricidade da órbita do veículo espacial. Os gráficos (c) e (d) mostram, respectivamente, o argumento do pericentro e o argumento do nodo ascendente, ambos circulando rapidamente e nenhuma captura momentânea do argumento do pericentro. Neste caso, $\Delta\varpi$, ϖ_1 e ϖ_2 também circularam sem a ocorrência de capturas em libração.

Comparando estes resultados com os resultados dos casos anteriores, podemos ver o

domínio da perturbação do corpo central sobre as perturbações das luas. A perturbação do corpo central eliminou o mecanismo Kozai potencializado pela perturbação devida ao corpo de órbita externa. Esta propriedade foi verificada pela primeira vez no estudo da dinâmica de uma espaçonave em torno de pontos Lagrangianos no sistema Netuno-Tritão (STUCHI et al., 2008). Esta propriedade também foi observada em simulações do movimento de planetas e partículas em sistemas multi-estelares formados por um binário central e uma estrela perturbadora de órbita externa (VERRIER; EVANS, 2009; DOMINGOS et al., 2015). Neste caso, a distância relativa entre os corpos que formam o binário simula, de forma rudimentar, um corpo achatado e alongado perturbando os outros corpos do sistema.

8.5 Discussão geral do capítulo

De forma geral, investigamos por meio de simulações numéricas, a possibilidade da ocorrência de flips do plano orbital em sistemas de pequenas massas e sobre um veículo espacial orbitando Haumea, da mesma forma que acontece em exoplanetas. O ambiente propício para o aparecimento dos flips requer uma perturbação devida a um corpo de grande massa, comparada à massa do corpo perturbado, de órbita externa e excêntrica. Pelos resultados da propagação do movimento, identificamos que os flips se dão quando ϖ do corpo perturbado está em libração.

A condição necessária para os flip do plano orbital requer alta excentricidade, próxima de uma unidade. Este resultado indica que não é esperado encontrar sistemas triplo de asteroides no qual um tenha órbita retrógrada alcançada por este mecanismo, pois, neste caso, o corpo perturbado colide com o corpo central em um curto período de tempo.

Também foi identificado que as elevadas variações da excentricidade e da inclinação, decorrem dos encontros próximos com o corpo perturbador.

Obtemos resultados os quais mostraram que num sistema de quatro corpos pode ocorrer o flip da órbita perturbada. Os resultados mostraram que quanto mais perturbada for a órbita do corpo perturbador capaz de induzir o flip do corpo perturbado, menor será a regularidade dos flips, e facilmente chega-se à condição em que nenhum flip é produzido.

Desenvolvemos também a possibilidade de flips nas órbitas de veículos espaciais orbitando Haumea. Iniciamos o estudo considerando um sistema de três corpos onde o veículo espacial é perturbado somente por Namaka. Neste caso, o movimento evoluiu

para órbita retrógrada e direta de forma periódica como esperado para tal sistema. Numa análise seguinte adicionamos a perturbação devida a Hi'iaka. Ficamos com um sistema de quatro corpos cujo o comportamento foi compatível com o sistema de quatro corpos para asteroides, podendo ocorrer flips em determinadas condições iniciais identificadas em mapas de propagação do movimento. Por ultimo, adicionamos a perturbação devida à distribuição de massa de Haumea. Neste caso, os resultados mostraram que esta perturbação quebra o mecanismo responsável pelo flip do plano orbital do veículo espacial.

9 CONCLUSÕES

Para este trabalho, propusemos o estudo do comportamento orbital de veículos espaciais no sistema de Haumea. Analisamos os efeitos da perturbação devida a Haumea e seus satélites naturais Namaka e Hi'iaka, estabelecendo as condições de estabilidade dos veículos espaciais no sistema e em ressonâncias.

Inicialmente analisamos a dinâmica orbital do veículo espacial onde Haumea domina as perturbações. Quanto ao potencial gravitacional de Haumea (potencial perturbador) mostramos que, o modelo desenvolvido até o quarto grau e quarta ordem, permite avaliar a estabilidade da órbita do veículo espacial pelo período de 5 anos da mesma forma que podemos avaliar com o modelo desenvolvido até o sexto grau e sexta ordem. O modelo de grau e ordem dois tem resultados satisfatórios para determinar a estabilidade quando os veículos espaciais têm o semi-eixo maior superior a aproximadamente 5000 km e o modelo que considera somente o achatamento nos polos de Haumea não é capaz de avaliar a estabilidade.

Por meio da avaliação do mapa que registrou a excentricidade máxima da órbita em função da inclinação e do semi-eixo maior iniciais, identificamos as regiões de condições iniciais interessantes para explorar a estabilidade do veículo espacial. Mostramos dois casos de ressonância de movimentos médios selecionados por meio do mapa dinâmico, com distinção qualitativa do efeito produzido sobre a órbita do veículo espacial. No primeiro caso, mostramos que a ressonância 1:1 com Hi'iaka fornece uma larga região de órbitas diretas estáveis até a excentricidade de aproximadamente 0,3, onde o centro de maior estabilidade está localizado na posição em que a longitude do pericentro da órbita do veículo espacial seja defasado de aproximadamente 60 graus com relação à longitude do pericentro de Hi'iaka, onde estas duas posições são os pontos Lagrangianos L_4 e L_5 do problema restrito de três corpos. Vimos também que no caso de órbitas retrógradas, temos órbitas estáveis com elevada excentricidade. No segundo caso, avaliamos a ressonância 3:1 veículo-Namaka. Para descrever esta ressonância, utilizamos o método da integral das acelerações, que mostrou de forma categórica que a ressonância 3:1 é a causa da destacada variação da excentricidade dos veículos espaciais desta região.

Ao explorar a estabilidade de veículos espaciais orbitando Namaka ou Hi'iaka, mostramos que, nos dois casos a estabilidade tem formato semelhante, porém, Hi'iaka consegue produzir mais órbitas estáveis, possibilitadas pela localização de Hi'iaka no sistema e por Hi'iaka ter massa de uma ordem de grandeza superior à massa de Namaka.

Explorando a ressonância Kozai, mostramos que, nos sistemas de pequenos corpos pode ocorrer flips do plano orbital do corpo perturbado, gerados pelo mecanismo Kozai-Lidov excêntrico. Entretanto, o flip surge quando a excentricidade aproxima-se de uma unidade. Portanto, nestes sistemas não existe órbitas retrógrada originadas pelo mecanismo Kozai-Lidov excêntrico, pois a elevada excentricidade exigiria um semi-eixo maior da órbita do corpo perturbado além da esfera de Hill. Contudo, aprofundamos o estudo da ressonância Kozai para descrever seus efeitos sobre veículos espaciais em sistemas de pequenos corpos e no sistema de Haumea. Aplicando o conceito no sistema de Haumea, mostramos que, na ausência da perturbação devida ao potencial gravitacional do corpo central, o sistema pode gerar o flip do plano orbital do veículo espacial se aplicado o modelo padrão de condições iniciais, tal como em (NAOZ et al., 2011). Ao explorar os mapas da variação da inclinação e da variação da excentricidade em função da inclinação e do semi-eixo maior para este sistema, encontramos algumas ressonâncias de movimentos médios, para as quais o veículo espacial experimenta altas variações na excentricidade e na inclinação. Neste contexto, propagamos o movimento do veículo espacial na MMR 4:1, a qual mostrou-se capaz de fazer o mecanismo Kozai-Lidov padrão evoluir para o mecanismo Kozai-Lidov excêntrico, independentemente da inclinação relativa entre as órbitas ser maior que 40 graus. Entretanto, com a adição da perturbação referente ao corpo central, ocorreu a quebra do mecanismo Kozai-Lidov, antes presente no sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 60, n. 3, p. 331–364, 1994. 11, 13
- BROWN, M. E.; BOUCHEZ, A. H.; RABINOWITZ, D.; SARI, R.; TRUJILLO, C. A.; DAM, M. van; CAMPBELL, R.; CHIN, J.; HARTMAN, S.; JOHANSSON, E.; LAFON, R.; MIGNANT, D. L.; STOMSKI, P.; SUMMERS, D.; WIZINOWICH, P. Keck observatory laser guide star adaptive optics discovery and characterization of a satellite to the large kuiper belt object 2003 el61. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 632, n. 1, p. L45, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/632/i=1/a=L45>>. 1
- BROWN, M. E.; TRUJILLO, C. A.; RABINOWITZ, D. L. Discovery of a planetary-sized object in the scattered kuiper belt. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 635, n. 1, p. L97, 2005. 1
- CARVALHO, J. P. S.; MORAES, R. V. de; PRADO, A. F. B. A.; WINTER, O. C. Analysis of the secular problem for triple star systems. **Journal of Physics**, v. 465, 2013. 8
- CARVALHO, J. P. S.; MORAES, R. V. de; PRADO, A. F. B. A.; MOURÃO, D. C.; WINTER, O. C. Analysis of the orbital evolution of exoplanets. **Computational & Applied Mathematics**, v. 35, p. 847–863, 2015. 8
- CARVALHO, J. P. S.; MOURÃO, D. C.; MORAES, R. V. de; PRADO, A. F. B. A.; WINTER, O. C. Exoplanets in binary star systems: on the switch from prograde to retrograde orbits. **Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy**, v. 124, p. 73–96, 2015. 8
- CUK, M.; RAGOZZINE, D.; NESVORNÝ, D. On the dynamics and origin of haumea’s moons. **The Astronomical Journal**, v. 146, n. 4, p. 89, 2013. 5, 6, 21
- CURTIS, H. D. **Orbital mechanics for engineering students**. 3. ed. Boston: Butterworth-Heinemann, 2014. 6
- DOMINGOS, R. C.; WINTER, O. C.; CARRUBA, V. Mean motion resonances and the stability of a circumbinary disk in a triple stellar system. **Astronomy & Astrophysics**, v. 544, p. A63, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219067>>. 115

DOMINGOS, R. C.; WINTER, O. C.; IZIDORO, A. Planet formation in a triple stellar system: implications of the third star's orbital inclination. **International Journal of Astrobiology**, v. 14, n. 2, p. 153–163, 2015. 119

DUMAS, C.; CARRY, B.; HESTROFFER, D.; MERLIN, F. High-contrast observations of (136108) haumea - a crystalline water-ice multiple system. **Astronomy & Astrophysics**, v. 528, 2011. 5

EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacing, dynamics of comets: their origin and evolution. **Astrophysics and Space Science Library**, v. 115, p. 185–202, 1985. 20

FANG, J.; MARGOT, J. L.; BROZOVIC, M.; AL. et. Orbits of near-earth asteroid triples 2001 sn263 and 1994 cc: properties, origin, and evolution. **The Astronomical Journal**, 2011. 89

FORD, E. B.; KOZINSKY, B.; RASIO, F. A. Secular evolution of hierarchical triple star systems. **The Astrophysical Journal**, v. 535, p. 385, 2000. 7, 19

GEYLING, F. T.; WESTERMAN, H. R. **Introduction to orbital mechanics**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1971. 11

HOLMAN, M.; TOUMA, J.; TREMAINE, S. Chaotic variations in the eccentricity of the planet orbiting 16 cygni b. **Nature**, v. 386, p. 254 EP –, Mar 1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/386254a0>>. 19

IAU. **Resolution B5., definition of a planet in the solar system**. 2006. Relatório técnico. Disponível em: <https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf>. Acesso em: 06 maio 2016. 1

_____. **Resolution B6., definition of a planet in the solar system**. 2006. Relatório técnico. Disponível em: <https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf>. Acesso em: 06 maio 2016. 1

KONDRATYEV, B. P. The near-equilibrium figure of the dwarf planet haumea and possible mechanism of origin of its satellites. **Astrophysics and Space Science**, v. 361, n. 5, p. 169, Apr. 2016. ISSN 1572-946X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10509-016-2741-0>>. 1, 5

KOZAI, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. **The Astronomical Journal**, v. 67, p. 591–598, 1962. 7

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; RAO, K. R. **Satélites artificiais - movimento orbital**. [S.l.]: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2011. 12

LEMAÎTRE, A. Resonances: models and captures. In: _____. **Dynamics of small solar system bodies and exoplanets**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. p. 1–62. 18

LI, G.; NAOZ, S.; KOCSIS, B.; LOEB, A. Eccentricity growth and orbit flip in near-coplanar hierarchical three-body systems. **The Astrophysical Journal**, v. 785, n. 2, p. 116, 2014. 8

LIDOV, M. L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. **Planetary and Space Science**, v. 9, p. 719–759, 1962. 7

LITHWICK, Y.; NAOZ, S. The eccentric kozai mechanism for a test particle. **The Astrophysical Journal**, v. 742, p. 94, 2011. 8, 19

LOCKWOOD, A. C.; BROWN, M. E.; STANSBERRY, J. The size and shape of the oblong dwarf planet haumea. **Earth, Moon, and Planets**, v. 111, n. 3, p. 127–137, 2014. 5, 15, 21

MORAES, R. V. de; CARVALHO, J. P. S.; PRADO, A. F. B. A.; WINTER, O. C.; MOURÃO, D. C. Orbital evolution of planet around a binary star. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 153, p. 1220–1227, 2015. 8

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. 7, 11, 18

NAOZ, S.; FARR, W. M.; LITHWICK, Y.; RASIO, F. A.; TEYSSANDIER, J. Hot jupiters from secular planet-planet interactions. **Nature**, v. 473, p. 187–189, 2011. xx, 8, 87, 88, 90, 122

NAOZ, S.; KOCSIS, B.; LOEB, A.; YUNES, N. Resonant post-newtonian eccentricity excitation in hierarchical three-body systems. **The Astrophysical Journal**, v. 773, n. 2, p. 187, 2013. 8

ORTIZ, J. L.; SANTOS-SANZ, P.; SICARDY, B.; BENEDETTI-ROSSI, G.; BÂ©RARD, D.; MORALES, N.; DUFFARD, R.; BRAGA-RIBAS, F.; HOPP, U.; RIES, C.; NASCIMBENI, V.; MARZARI, F.; GRANATA, V.; PÁ;L, A.; KISS, C.; PRIBULLA, T.; KOMÁ;K, R.; HORNOCH, K.; PRAVEC, P.; BACCI, P.; MAESTRIPIERI, M.; NERLI, L.; MAZZEI, L.; BACHINI, M.; MARTINELLI, F.;

SUCCI, G.; CIABATTARI, F.; MIKUZ, H.; CARBOGNANI, A.; GAEHRKEN, B.; MOTTOLA, S.; HELLMICH, S.; ROMMEL, F. L.; FERNÁNDEZ-VALENZUELA, E.; BAGATIN, A. C.; CIKOTA, S.; CIKOTA, A.; LECACHEUX, J.; VIEIRA-MARTINS, R.; CAMARGO, J. I. B.; ASSAFIN, M.; COLAS, F.; BEHREND, R.; DESMARS, J.; MEZA, E.; ALVAREZ-CANDAL, A.; BEISKER, W.; GOMES-JUNIOR, A. R.; MORGADO, B. E.; ROQUES, F.; VACHIER, F.; BERTHIER, J.; MUELLER, T. G.; MADIEDO, J. M.; UNSALAN, O.; SONBAS, E.; KARAMAN, N.; ERECE, O.; KOSEOGLU, D. T.; OZISIK, T.; KALKAN, S.; GUNEY, Y.; NIAEI, M. S.; SATIR, O.; YESILYAPRAK, C.; PUSKULLU, C.; KABAS, A.; DEMIRCAN, O.; ALIKAKOS, J.; CHARMANDARIS, V.; LETO, G.; OHLERT, J.; CHRISTILLE, J. M.; SZAKÁTS, R.; FARKAS, A. T.; VARGA-VEREBÁLYI, E.; MARTON, G.; MARCINIAK, A.; BARTCZAK, P.; SANTANA-ROS, T.; BUTKIEWICZ-BĄK, M.; DUDZIĄSKI, G.; ALÁ-LAGOVA, V.; GAZEAS, K.; TZOUGANATOS, L.; PASCHALIS, N.; TSAMIS, V.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A.; PÁREZ-HOYOS, S.; HUESO, R.; GUIRADO, J. C.; PERIS, V.; IGLESIAS-MARZOA, R. The size, shape, density and ring of the dwarf planet haumea from a stellar occultation. *Nature*, v. 550, p. 219 EP –, Oct. 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature24051>>. 5

PINES, S. Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives. *AIAA Journal*, v. 11, n. 11, p. 1508–1511, 1973. 12

PRADO, A. F. Mapping orbits around the asteroid 2001sn263. *Advances in Space Research*, v. 53, n. 5, p. 877–889, 2014. 16, 17

PRADO, A. F. B. A. Searching for orbits with minimum fuel consumption for station-keeping maneuvers: an application to lunisolar perturbations. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2013, p. 11, 2013. 16, 17

RABINOWITZ, D. L.; BARKUME, K.; BROWN, M. E.; ROE, H.; SCHWARTZ, M.; TOURTELLOTTE, S.; TRUJILLO, C. Photometric observations constraining the size, shape, and albedo of 2003 el61, a rapidly rotating, pluto-sized object in the kuiper belt. *The Astrophysical Journal*, v. 639, n. 2, p. 1238, 2006. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/639/i=2/a=1238>>. 5, 13

RAGOZZINE, D.; BROWN, M. E. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet haumea (2003 el61). *The Astronomical Journal*, v. 137, n. 6, p. 4766, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/137/i=6/a=4766>>. 5

ROSSI, A.; MARZARI, F.; FARINELLA, P. Orbital evolution around irregular bodies. **Earth, Planets and Space**, v. 51, n. 11, p. 1173–1180, 1999. 11, 15

ROY, A. E. **The foundations of astrodynamics**. [S.l.]: The Macmillan Company, 1965. 11

_____. **Orbital motion**. [S.l.]: IOP Publishing, 2005. 11

SANCHEZ, D.; PRADO, A. On the use of mean motion resonances to explore the haumea system. **AAS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALIST CONFERENCE, 2017**, Columbia River George, Steverson, WA, Proceedings..., 2017. 7, 16, 17

SANCHEZ, D.; PRADO, A. F.; SUKHANOV, A.; YOKOYAMA, T. Optimal transfer trajectories to the haumea system. In: _____. **INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE OPERATIONS, 13.**, 2014. Pasadena, CA. Proceedings.. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2014-1639>>. 5

SANCHEZ, D. M. **Estudo de captura gravitacional e custos de manutenção orbital em dinâmicas não keplerianas**. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2015. 5, 6

SANCHEZ, D. M.; PRADO, A. F.; YOKOYAMA, T. On the effects of each term of the geopotential perturbation along the time i: quasi-circular orbits. **Advances in Space Research**, v. 54, n. 6, p. 1008 – 1018, 2014. ISSN 0273-1177. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117714003457>>. 17

SANCHEZ, D. M.; YOKOYAMA, T.; BRASIL, P. I. d. O.; CORDEIRO, R. R. Some initial conditions for disposed satellites of the systems gps and galileo constellations. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1155/2009/510759>>. 46

SCHLICHTING, H. E.; SARI, R. The creation of haumea's collisional family. **The Astrophysical Journal**, v. 700, n. 2, p. 1242, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/700/i=2/a=1242>>. 5

STUCHI, T.; YOKOYAMA, T.; CORRÊA, A.; SOLÓRZANO, R.; SANCHEZ, D.; WINTER, S.; WINTER, O. Dynamics of a spacecraft and normalization around lagrangian points in the neptune?triton system. **Advances in Space Research**,

v. 42, n. 10, p. 1715 – 1722, 2008. ISSN 0273-1177. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117707003389>>. 119

TAKEDA, G.; RASIO, F. A. High orbital eccentricities of extrasolar planets induced by the kozai mechanism. **The Astrophysical Journal**, v. 627, n. 2, p. 1001, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/627/i=2/a=1001>>. 19

THIROUIN, A.; SHEPPARD, S. S.; NOLL, K. S.; MOSKOVITZ, N. A.; ORTIZ, J.-L.; DORESSOUNDIRAM, A. Rotational properties of the haumea family members and candidates: short-term variability. **Earth and Planetary Astrophysics**, 2016. 5

VALLADO, D. A. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1997. (College Custom Series). 6, 7, 11, 12, 13

VENDITTI, F. C. F.; PRADO, A. F. B. A. Mapping orbits regarding perturbations due to the gravitational field of a cube. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2015, p. 11, 2015. 17

VERRIER, P. E.; EVANS, N. W. High-inclination planets and asteroids in multistellar systems. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 394, n. 4, p. 1721–1726, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14446.x>>. 119

VINTI, J. P. Representation of the earth's gravitational potential. **Celestial mechanics**, v. 4, n. 3, p. 348–367, Dec 1971. ISSN 1572-9478. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01231397>>. 13

WHIPPLE, A. L.; SHELUS, P. J. A secular resonance between jupiter and its eighth satellite? **Icarus**, v. 101, n. 2, p. 265–271, 1993. 93

YOKOYAMA, T.; SANTOS, M. T.; CARDIN, G.; WINTER, O. C. On the orbits of the outer satellites of jupiter. **Astronomy & Astrophysics**, v. 401, n. 2, p. 763–772, 2003. 8, 19

APÊNDICE A - Resultados Extras das Simulações

Este capítulo contém resultados extras que não foram adicionados no capítulo de resultados para melhor acomodação das figuras e apresentação dos resultados.

A.1 Mapas de e_{max} e Tempo de Vida em função de i_0 e a_0

Nesta seção apresentamos um conjunto complementar de mapas da excentricidade máxima e tempo de vida em função da inclinação inicial e semi-eixo maior inicial. Da figura A.1 até a figura A.9 temos, respectivamente, as excentricidades iniciais de $e_0 = 0,1$ até $e_0 = 0,9$.

Figura A.1 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,1$.

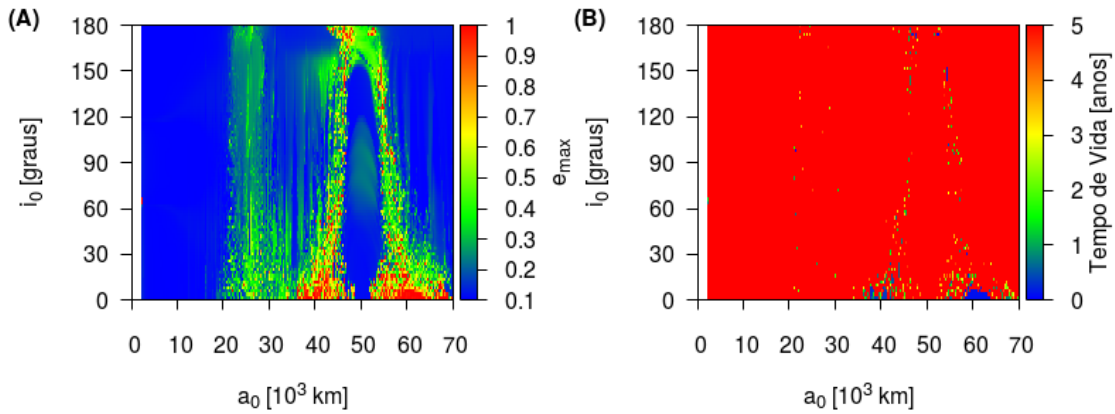


Figura A.2 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,2$.

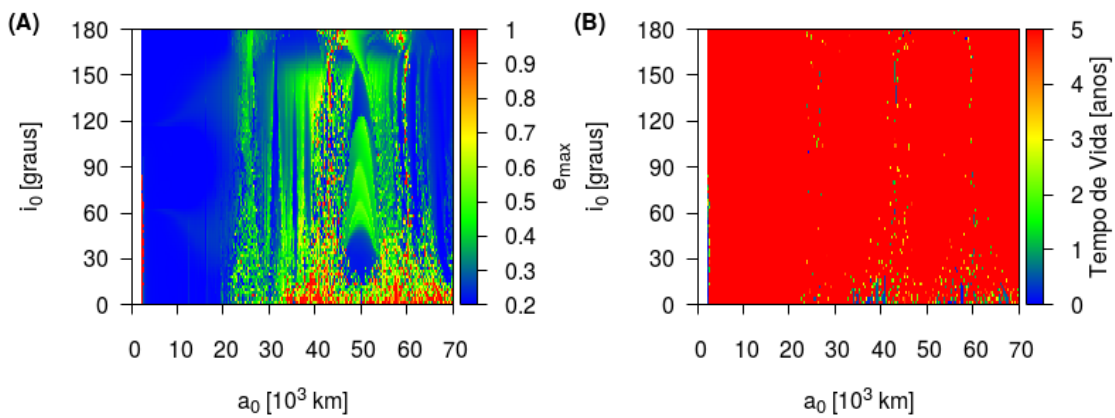


Figura A.3 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,3$.

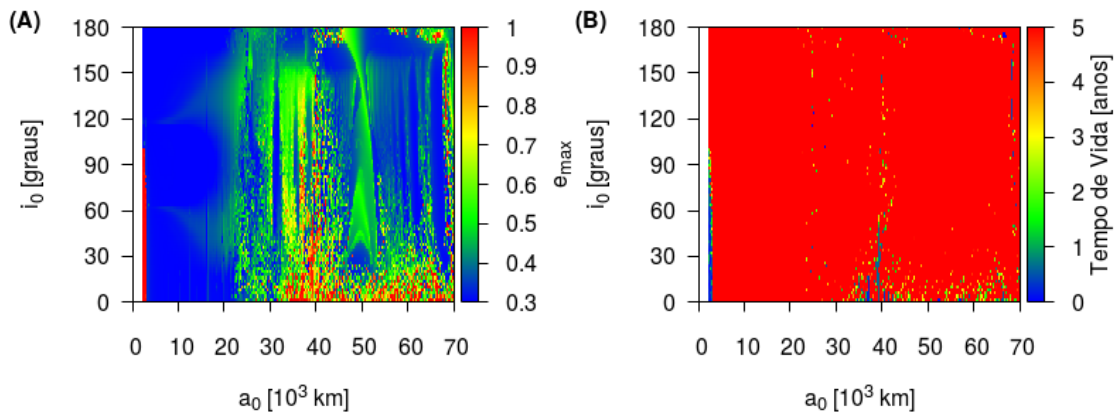


Figura A.4 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,4$.

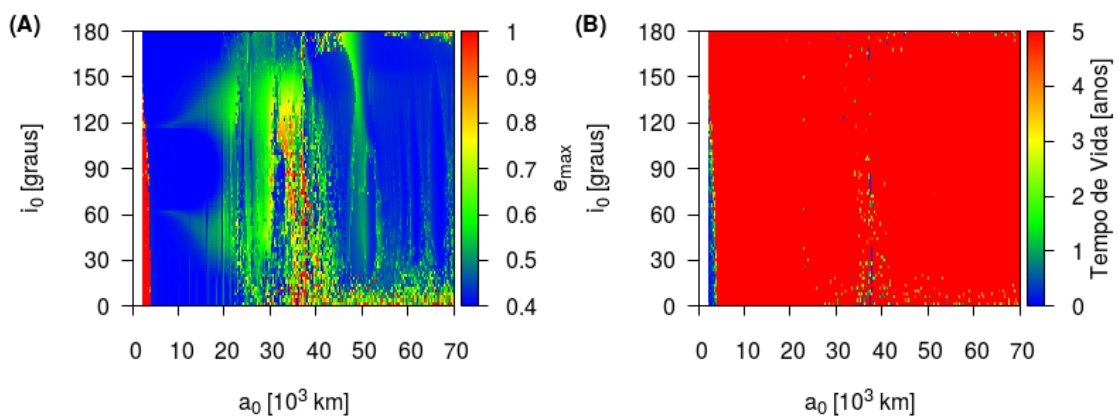


Figura A.5 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,5$.

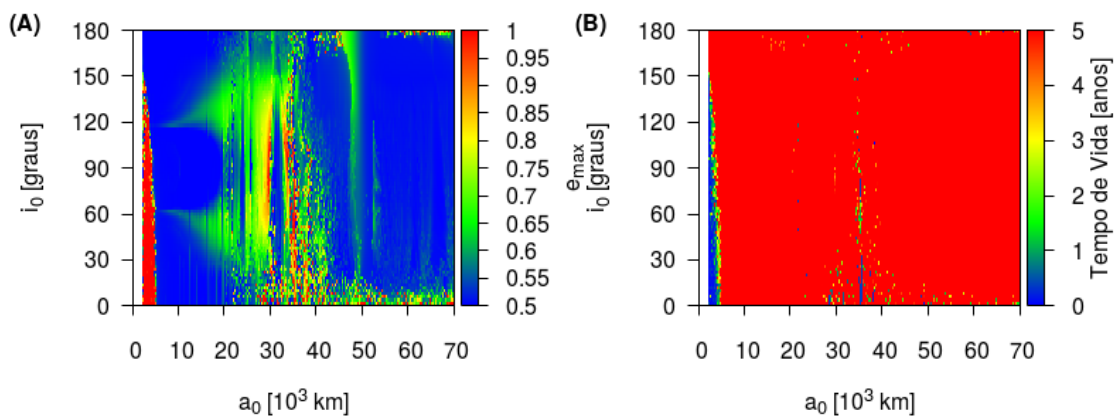


Figura A.6 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,6$.

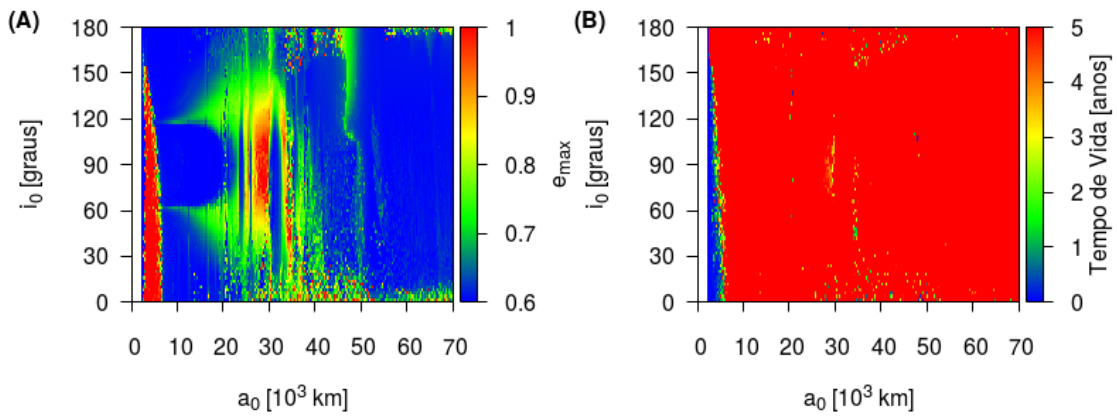


Figura A.7 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,7$.

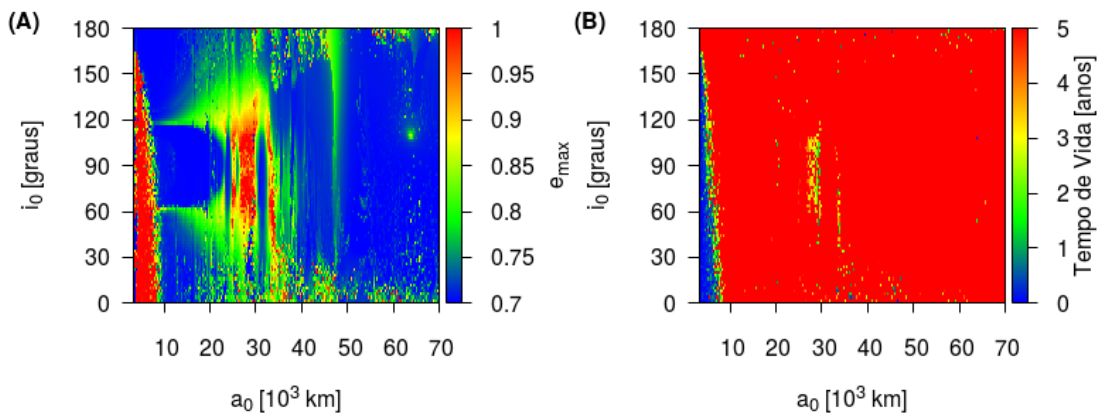


Figura A.8 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,8$.

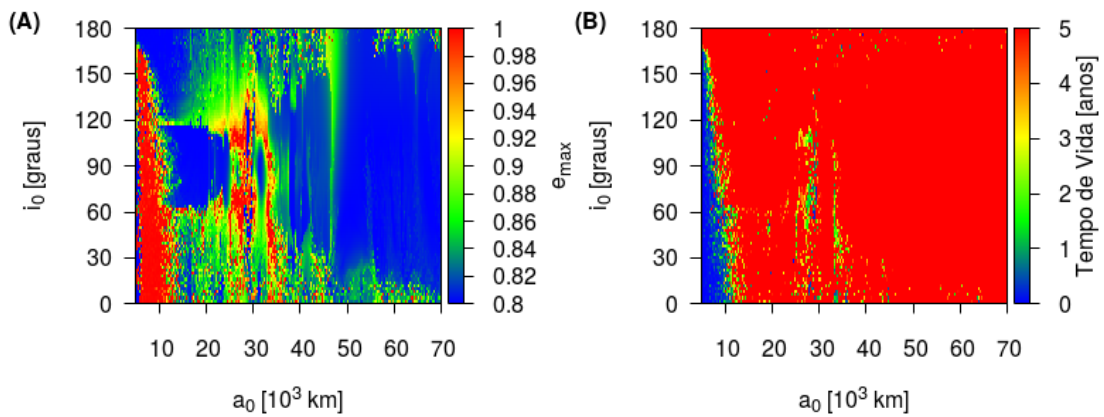
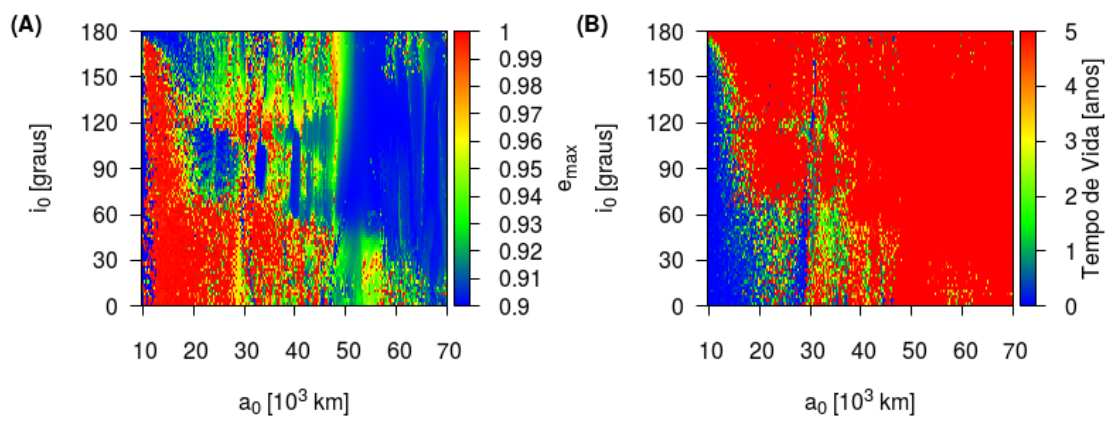


Figura A.9 - Resultados da excentricidade máxima (A) e tempo de vida (B) para $e_0 = 0,9$.



PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.