1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-3519-RPE/476		*Maio, 1985*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita

4. Origem *DIN/DEP* — Programa *POPES*

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA
CAIXEIRO VIAJANTE
ANÁLISE PROBABILÍSTICA

7. C.D.U.: *519.856.3*

8. Título *INPE-3519-RPE/476*

UMA REVISÃO E OBSERVAÇÕES SOBRE OS TRABALHOS DE KAO [1978] E KARP [1977] SOBRE O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

9. Autoria *Horacio Hideki Yanasse*

Assinatura responsável

10. Páginas: 22

11. Última página: 24

12. Revisada por

Paulo Renato de Morais

13. Autorizada por

Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

Discutem-se os trablhos de Kao e Karp sobre o problema do caixeiro viajante. No trabalho de Kao, observa-se que o algoritmo por ele proposto nem sempre encontra uma solução ótima, ao contrário do que aparentemente era por ele desejado. Propõe-se uma modificação da prova de um dos teoremas demonstrados por Karp (Teorema 7), que diminui pela metade um limitante superior encontrado anteriormente.

15. Observações

ABSTRACT

Kao's and Karp's papers on the travelling salesman problem are discussed. It is observed that Kao's algorithm does not always find an optimal solution, contrary to what apparently was his initial intention. A modification of the proof given in one of Karp's theorems (theorem 7) improves by a factor of two an upper bound previously achieved.

1. INTRODUÇÃO

A tarefa de um vendedor que deve cobrir cada uma das n cidades diferentes de sua região, uma única vez, e retornar para sua cidade sede, é a motivação para o tão conhecido Problema do Caixeiro Viajante (PCV).

O PCV aparece em muitos complexos diferentes. Aplicações típicas podem ser encontradas, por exemplo, na fiação de computadores, no roteamento de veículos, na agregação de dados e na programação da produção. Lenstra e Rinooy Kan (1975) apresentam algumas aplicações que foram baseadas em problemas reais.

Apesar de simples em sua formulação, o PCV é um problema muito difícil de ser resolvido devido ao fato de que, se existem n pontos (cidades) a serem visitados, existem n! possibilidades diferentes de ordenamento destes pontos que precisam ser verificados (admitindo-se um grafo completo). De fato, o PCV é NP-completo (Papadimitriou, 1977), referenciado por Parker e Rardin (1983). Até o presente momento, para problemas NP-completos, não foram encontrados algoritmos polinomiais capazes de resolvê-los exatamente (Veja Garey and Johnson, 1979).

Assim, apesar de alguns algoritmos exatos terem sido desenvolvidos para achar soluções ótimas para o PCV, eles apresentam problemas de armazenamento e tempo de computação para grandes exemplos do problema (diga-se 150 ou mais cidades). Isto motivou o desenvolvimento de algoritmos heurísticos que encontram soluções aproximadas para o PCV com um custo computacional reduzido.

Pesquisadores têm tentado abordagens diferentes para resolver o PCV. Estas incluem para soluções exatas:

(i) programação dinâmica (Veja Bellman, 1962);

(ii) "branch and bound", que permitiu grandes economias de armazenamento no computador e requisitos computacionais (Veja Little et alii, 1963);

(iii) métodos de decomposição e relaxamento para formulações de programação inteira do PCV (Held and Karp, 1970, 1971).

Para as heurísticas, muitas abordagens têm sido sugeridas:

(i) algoritmos de Christofides, um "casamento" de nós de grau ímpar de uma árvore geradora mínima de um grafo (Veja Christofides, 1976; Larson and Odoni, 1981);

(ii) a abordagem de Clarke e Wright, que faz economias combinando sub-rotas, uma de cada vez, até que uma única rota seja encontrada (Veja Clarke and Wright, 1964; Olivo, 1984);

(iii) o vizinho próximo, um procedimento de construção de rotas que adiciona ao nó anterior o nó mais próximo que ainda não esteja no caminho;

(iv) o procedimento de inserção, que insere um nó em uma sub-rota, um de cada vez até que uma rota seja construída;

(v) métodos de partição, que reduzem o tamanho do problema impondo restrições na ordem em que os nós devem ser percorridos (Karp, 1977);

(vi) uma melhoria de rota a rota, que troca arcos de uma rota para obter uma rota melhor (Lin, 1975; Lin and Kernighan, 1973).

Uma revisão de diversos trabalhos sobre o PCV pode ser obtida em Parker e Rardin (1983), Bellmore e Nemhauser (1968), Mole (1979).

Discutem-se aqui os trabalhos de Kao (1978) e Karp (1977). A razão da escolha particular destes trabalhos deve-se ao seu caráter inovador. O trabalho de Kao parece ser um dos pioneiros no tratamento do PCV estocástico. Poucos têm se dado ao luxo de abordar esta complicada versão do PCV. Quanto ao trabalho de Karp, ele é inovador no sentido de particionar o problema do CV em problemas menores e na análise probabilística do algoritmo heurístico proposto. Este trabalho de Karp é considerado de excelente qualidade, sendo parte integrante de um grupo de trabalhos deste mesmo autor, pelo qual lhe foi outorgado o premio Lanchester da ORSA.

Antes de seguir com a discussão destes trabalhos, apresentam-se algumas notações a serem utilizadas.

Sejam:

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de nós a serem visitados;

T= uma rota que pode ser representada por uma sequência ordenada de nós $(i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1)$, ou por um conjunto de pares ordenados $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots (i_n, i_1)$;

$|T|$= o comprimento da rota.

2. DISCUSSÃO DO TRABALHO DE KAO

Kao (1978) admite na versão estocástica do PCV que os tempos c_{ij} são variáveis aleatórias independentes com função de distribuição F_{ij} definida em $R^+ = [0, \infty)$. Convém lembrar que esta suposição de independência não é sempre apropriada em situações práticas, por exemplo, em redes urbanas de tráfego; se se considerar (um cruzamento) uma interseção como um nó, esta suposição geralmente não é verdadeira.

O problema apresentado por Kao é achar uma rota com a máxima probabilidade de ser completada dentro de um tempo especificado, C. Naturalmente, o critério anterior para o caso determinístico não seria muito adequado, dada a aleatoriedade dos tempos c_{ij}.

A formulação de programação dinâmica apresentado por Kao segue, aparentemente, formulações anteriores do caso determinístico (Veja Bellman, 1962). Definem-se:

(i, S_k)= um estado i do sistema no estágio k,

onde i= a cidade onde presentemente se está, no estágio k, e S_k= o conjunto de k cidades ainda por serem visitadas,

$G_k(i, S_k)$= a função distribuição do tempo total de percurso para uma rota parcial ótima, iniciando na cidade i, passando através das cidades em S_k e finalizando com a cidade 0 (a origem, escolhida a priori),

F_{ij} = função distribuição do tempo associado ao arco i-j na rede.

A equação recursiva regressiva básica toma a forma:

$$G_k(i, S_k) = \underset{j \varepsilon S_k}{\perp} \{F_{ij} * G_{k-1}(j, S_k - \{j\})\}, \tag{1}$$

$i \varepsilon 1, \ldots, n,$

$k = 1, 2, \ldots, n-1,$

onde:

$*$ = operação de convolução

$\perp$ = operador de ordem de preferência.

É aparente a analogia entre esta formulação e o caso determinístico. Tem-se, no lugar da soma, a operação de convolução e ao invés da minimização tem-se uma operação de ordem de preferência. Neste ponto, o leitor poderá observar que o caso de minimizar apenas o valor esperado dos tempos é equivalente ao caso determinístico.

Na função objetiva definida, o operador escolhe a cada estado, em cada estágio, a função distribuição que dá o maior valor avaliado em C, quando feita a convolução com *qualquer* função distribuição definida em R^+. Assim,

$$G_k(i, S_k) = F_{ij}*G_{k-1}(j^0, S_k-\{j^0\})$$

para algum $j^0 \varepsilon S_k$ que satisfaz:

$$[\{F_{ij^0}*G_{k-1}(j^0, S_k-\{j^0\})\}*F](C) \geqslant$$

$$\geqslant [F_{ij}*G_{k-1}(j, S_k-\{j\})* F](C),$$

para todo $j \varepsilon S_k$ e $F \varepsilon D$,

onde:

D = conjunto de todas as funções distribuição definidas em R^+

$[F](C)$ = valor da função distribuição F avalia no ponto C.

Esta definição de operador de ordem de preferência é um ponto chave nesta formulação que garante que a cada estado seleciona-se a escolha ótima. Entretanto, como observado por Kao, nem sempre es tes ordenamentos são bem sucedidos, isto é, não se pode achar j^0 que satisfaz a Relação 2. Nestes casos, o operador $\perp$ não está bem definido e o procedimento falha. Admite-se, portanto, que o operador $\perp$ esteja bem definido, uma hipótese que limita bastante a sua aplicabilidade.

Kao afirma que na aplicação da Equação Recursiva 1, pode-se trocar o conjunto D na Relação 2 por:

$$D^* = \{F_{li}/F_{li} \varepsilon D;\ l \varepsilon S_k^c\},$$

onde:

$$S_k^c = N - \{S_k U\{i\}\},$$

ou seja, apenas levar em consideração as funções distribuição associadas aos arcos que estão diretamente conectados a i e que originam em algum nó ainda não-visitado. Dada a equação recursiva, isto aparentemente parece fazer sentido, pois as funções distribuição a serem consideradas seriam aquelas referentes aos arcos que ligam os nós ainda não-considerados ao nó i, e não a todas as funções distribuição definidas em R^+. Provavelmente este tipo de observação tenha movido Kao a propor esta simplificação, além do fato de que com isto há maiores chances de se ter um operador $\perp$ bem definido. Além das limitações da metodologia para casos onde $\perp$ não é bem definido, tem-se ainda outras limitações práticas:

- limitações quanto à capacidade de armazenamento que restringe a aplicação deste método a problemas de tamanho pequeno, e

- requisitos computacionais, principalmente quando as funções distribuição dos tempos de viagem não são fechadas quanto à convolução, de modo que toda convolução tem de ser calculada.

Por outro lado, para problemas com tempos de viagem independentes e distribuições que são fechadas quanto à convolução, o procedimento de solução reduz-se a uma manipulação recursiva dos parâmetros caracterizantes das distribuições. Mais ainda, se a distribuição for caracterizada por um único parâmetro (do tipo de distribuição de Poisson), então o procedimento é equivalente à versão determinística do PCV. Isto implica que, para estes casos, qualquer algoritmo desenvolvido para o caso determinístico do PCV pode ser aplicado diretamente. A afirmação de Kao baseia-se no fato de que se:

$$[F_i](C) \geqslant [F_j](C),$$

então:

$$[F_i*K](C) \geqslant [F_j*K](C)$$

desde que a distribuição K seja independente de F_i e F_j.

A implementação apresentada no trabalho de Kao é para o caso especial importante, onde os tempos de viagem são variáveis normais independentes. Como distribuições normais independentes são fechadas sob convolução, a Recursão 1 ao invés de carregar a distribuição pode carregar somente dois parâmetros, a média μ e a variância σ^2 que especificam totalmente a função distribuição $(G_k(i,S_k)=(\mu_k,\sigma_k^{\,2}))$. A convolução passa a ser somente uma questão de adição de parâmetros, e o operador de ordem de preferência é simplesmente uma comparação dos valores normalizados $z=\frac{C-\mu}{\sigma}$.

Um esquema de ramificação e limitação é introduzido por Kao para tentar economizar espaço de armazenamento e requisitos de computação, na programação dinâmica, seguindo a mesma idéia utilizada no caso determinístico por Morin and Marsten (1976). O limitante superior para o valor z em cada estado (i, S_k) dá o máximo que se pode esperar para z de uma rota viável que passa através de i e tem mais k cidades a visitar antes de retornar à origem 0. Este limitante superior é avaliado resolvendo um problema de designação duas vezes, para os nós $S_k^c \cup \{0'\}$, onde 0' é um nó artificial tal que:

$$F_{0'\ell} = F_{0\ell} \quad , \quad \forall \ell \in S_k^c,$$

$$F_{\ell 0'} = F_{\ell i} \quad , \quad \forall \ell \in S_k^c,$$

e

$$F_{00'} \sim N(\infty, \infty).$$

O problema de designação é resolvido com as médias como custos; então é resolvido novamente com as variâncias como custos. Isto dá um limitante inferior da média e variância do tempo total de viagem de uma rota parcial iniciando no ponto 0, indo através das cidades em S_k^c e acabando na cidade i. Esta informação, juntamente com $G_k(i, S_k)$, é o que se necessita para avaliar um limitante superior para z. Obviamente, se este limitante superior é inferior a qualquer limitante inferior V já obtido por uma rota viável, o estado (i, S_k) pode ser podado. Se, em algum estado, após resolver os problemas de designação, as soluções forem iguais e a designação for uma rota viável, então o estado é também podado e o valor de V é atualizado se o valor de z obtido neste estado for maior que o valor V disponível. Como pode ser visto, o esquema de ramificação e limitação faz economias em armazenamento podando estados não-lucrativos e, consequentemente, economizando também computações, pois o número de estados a serem veridicados é reduzido.

Um método enumerativo, para o caso das variáveis normais, também é deduzido por Kao. O algoritmo é um procedimento de busca em árvore e emprega duas condições de eliminação:

(i) um limitante - o mesmo usado para o "branch and bound";

(ii) um ordenamento de vetores, possivelmente apenas parcial - o mesmo utilizado para a preferência de ordem no programa dinâmico.

A geração de nós é como se segue: a cada estágio k, (k= 1, 2 ,..., n-2), os nós originários de um nó ainda não-podado, criado no estágio k-1, Q^i_{k-1}, são criados formando a sequência ordenada,

$$Q^j_k = (h,\ Q^i_{k-1}),$$

onde:

$$h \varepsilon N - S^i_{k-1}$$

e

$$S^i_{k-1} = \text{ o conjunto que contém os elementos de } Q^i_{k-1}.$$

O nó $Q^i_k = (i_1, \ldots, i_{k+1})$ representa uma rota parcial $(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}, 0)$. Os esforços computacionais de ambas as abordagens são os mesmos.

Dispondo aparentemente de um procedimento exato que resolve o PCV estocástico, seria o caso de pensar em fazer alguma análise de sensitividade, estudando possíveis variações da solução ótima com respeito ao valor C. Isto porque nem sempre se tem um único valor para C. O mais comum é ter um intervalo I, onde C seria aceitável. É interessante que neste ponto se tenha tal tipo de informação.

Contudo, é importante salientar que o procedimento de Kao não é exato, ao contrário do que parece ser sua intenção original. Ao afirmar que D pode ser substituído por $D^* = \{F_{\ell i}/F_{\ell i} \in D,\ \ell \in S_k^c\}$ na Expressão 2, o método de Kao falha em achar a rota ótima, encontrando apenas uma solução aproximada para o PCV estocástico. Isto é ilustrado a seguir com um exemplo numérico. Considere o problema esquematizado na Figura 1. Supõe-se que os tempos de viagem são independentes e normalmente distribuídos com os parâmetros indicados na própria figura.

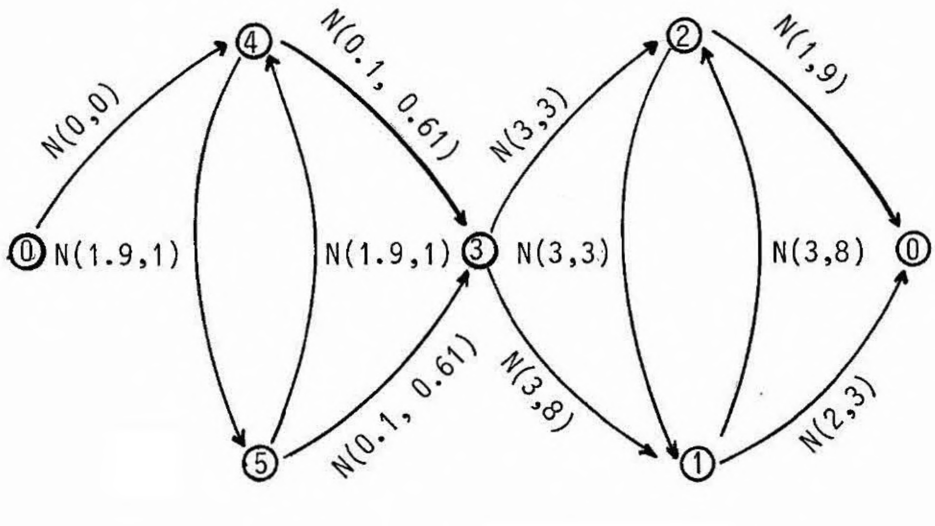

Fig. 1 - Esquema do problema

Admita que se deseja maximizar a possibilidade de ter completo o percurso no tempo C= 10. Resolvendo a Equação Recursiva 1, em algum momento será atingido o estado $(3, S_2)$ e ter-se-á:

$$G_2(3, S_2) = \perp \{N(8, 9), N(7, 25)\},$$

onde:

N(8, 9) corresponde à função distribuição do caminho (3, 2, 1, 0) e N(7, 25) corresponde à função distribuição do caminho (3, 1, 2, 0).

Agora, aplicando 2 com D*, tem-se:

$G_2(3, S_2) = N(8, 9)$, pois:

$$z_1 = 0{,}61 = \frac{10-8-0{,}1}{\sqrt{9+0{,}61}} = \frac{1{,}9}{3{,}1} \geqslant z = 0{,}57 = \frac{10-7-0{,}1}{\sqrt{25+0{,}61}}.$$

Continuando com o procedimento para a solução ótima, será encontrada a rota (0, 4, 5, 3, 2, 1, 0) com uma probabilidade de 0,5 de finalização no tempo 10, pois:

$$z = \frac{10-1{,}9-0{,}1-8}{\sqrt{9+1+0{,}61}} = 0.$$

Mas a rota (0, 4, 5, 3, 1, 2, 0) tem uma probabilidade de finalização maior que 0,5, pois:

$$z = \frac{10-1{,}9-0{,}1-7}{\sqrt{25+1{,}61}} = \frac{1}{\sqrt{26{,}61}} > 0,$$

portanto é melhor que aquele encontrado pelo procedimento de Kao.

Como se vê, ao relaxar D na Relação 2, não se garante mais que a solução obtida seja ótima. Poder-se-ia relaxar D, mas para um D* composto de todas as funções distribuição correspondentes a todas as rotas parciais possíveis de 0 a i através das cidades em S_k^c. Isto é obviamente difícil de ser obtido na prática, a menos que algumas suposições adicionais sejam feitas. Portanto, o procedimento proposto por Kao é de aplicação muito restrita. Além disso, como um método apro ximado, o algoritmo de Kao não apresenta algumas vantagens que normalmente se esperaria de uma boa heurística; principalmente os requisitos de armazenamento e um bom tempo de processamento. Resta sugerir que mais pesquisas sejam feitas no sentido de elaborar um método exato, pois existem ainda poucos trabalhos sobre este tópico.

3. DISCUSSÃO DO TRABALHO DE KARP

Os algoritmos de partição de Karp (1977) foram desenvolvidos com a intenção de resolver problemas do CV no plano de grandes dimensões. A idéia básica por detrás desses algoritmos é bem simples. Particiona-se uma região X em sub-regiões pequenas. Constrói-se uma rota ótima dentro de cada sub-região e combinam-se estas sub-rotas de modo a fornecer uma rota através de todas as cidades. Heurísticas podem ser usadas para achar as rotas de cada subproblema ao invés de um método exato. Esta combinação torna possível achar soluções próximas das ótimas para problemas com milhares de cidades.

Um dos principais problemas relativos à aplicação desta idéia é decidir como o esquema de partição deve ser realizado. A sugestão de Karp para um esquema de partição é a seguinte: suponha que se tenham n cidades em uma região retangular X do plano. Não existe perda de generalidade em admitir que X é retangular. Sejam:

t = um parâmetro que servirá como um limitante superior do tamanho dos subproblemas;

$k(n) = \lceil \log_2 \frac{n-1}{t-1} \rceil$;

$\lceil x \rceil$ = teto de x (o menor inteiro maior ou igual a x);

Y = um retângulo com m cidades;

c = $[m/2]^{\text{ésima}}$ cidade mais próxima de um dos lados menores de y;

DIV(Y) = operação que faz um corte em Y, passando por c; corte este paralelo aos lados menores de Y. Isto dividirá Y em 2 retângulos $\ell(Y)$ e $r(Y)$, tendo c na borda comum.

O esquema de partição é somente uma aplicação sucessiva de DIV(·) até que $m \leq t$. Assim, DIV(·) será aplicado $2^{k(n)}-1$ vezes, e o retângulo original X será dividido em $2^{k(n)}$ sub-retângulos.

Fica claro agora o que o algoritmo deve fazer. Após particionar X, tem-se $2^{k(n)}$ problemas do CV menores, cada um deles tendo no máximo t cidades. Após resolvê-los, um caminho gerador (spanning walk), denotado por W, para o problema original é obtido devido ao esquema de partição usado onde sub-retângulos adjacentes têm ao menos uma cidade em comum. W é uma solução aproximada para o PCV original. Ele pode ser melhorado usando a propriedade de desigualdade triangular, pois está se lidando com distâncias Euclidianas. Karp sugeriu duas operações que podem ser realizadas a fim de obter uma rota T de um caminho gerador W, tal que $|T| \leq |W|$. Elas são as operações LOOP e PASS. A operação LOOP remove apenas um "loop" do caminho gerador, se é que existe algum. A operação PASS remove arcos $\{(t_i, t_j), (t_j, t_k)\}$ (um nó em comum) de W, e troca-os por $\{(t_i, t_k)\}$. Sua aplicação é restrita a pares de arcos $\{(t_i, t_j), (t_j, t_k)\}$ em W, tal que sua remoção não reduz W a dois grafos distintos. Aplicações repetidas destas operações fornecerão uma rota.

Presumivelmente, estas operações serão realizadas por uma sub-rotina computacional que não levará em consideração configurações topológicas do caminho gerador. Provavelmente terminar-se-á com rotas subótimas que poderão ser facilmente melhoradas. Uma sugestão que poderia ser adicionada ao procedimento de Karp é incorporar algum tipo de interação homem/máquina.

Admitindo que um subproblema de tamanho t requer um tempo menor do que Dd^t para ser resolvido, o algoritmo de Karp opera dentro de um tempo de $2^{k(n)}Dd^t+O(n \log n)$, onde $O(n \log n)$ é a ordem de tempo requerido para o esquema de partição.

O próximo passo é a derivação de um limitante superior para a diferença entre $|W|$ e $|T^*|$, onde:

T^* = solução ótima para o problema.

Esta derivação além de muito interessante é baseada em duas observações:

1) $|T(Y)| - |T^* \cap Y| \leq \frac{3}{2}$ per (Y),

ou seja, o comprimento da rota ótima em qualquer sub-retângulo Y difere do comprimento total da rota ótima para todo o problema dentro do sub-retângulo Y de não mais do que $\frac{3}{2}$ do perímetro de Y.

2) Seguindo a estratégia de subdividir os retângulos por cortes paralelos ao lado mais curto, a soma de todos os perímetros de todos os retângulos é $O(\sqrt{n/t'})$.

A primeira observação é derivada do seguinte: pode-se construir um caminho gerador utilizando os lados de Y e $T^* \cap Y$ que têm um comprimento total limitado por $|T^* \cap Y| + \frac{3}{2}$ per(Y). Como T(Y) é a rota ótima que passa pelas cidades de Y, então:

$$T(Y) \leq |T^* \cap Y| + \frac{3}{2} \text{ per } (Y).$$

A segunda observação é derivada a partir de um jogo que envolve a subdivisão do retângulo X em sub-retângulos. Têm-se 2 joga dores, MIN e MAX, que jogam um contra o outro. O movimento de MIN consiste em decidir para qual lado do retângulo o corte deve ser paralelo. O movimento de MAX consiste em escolher a localização do corte. A cada rodada ℓ, cada um dos retângulos X_i produzidos na rodada $\ell-1$ tem de ser subdividido. Eles jogam um jogo de k rodadas e no fim destas k rodadas, MIN paga a MAX uma quantidade igual à soma dos perímetros dos 2^k retângulos produzidos. Karp prova que a estratégica CURTO é otima para MIN e a estratégia BISECÇÃO é ótima para MAX, onde por estratégia CURTO entende-se a política de escolher a direção paralela aos lados mais curtos e por estratégia BISECÇÃO, a política de alocar cada corte de modo a dividir o retângulo em metades iguais. O valor para MAX para um jogo de corte de k rodadas, em um retângulo (axb), é:

$$F_k(a, b) = \underset{\substack{s \text{ inteiro} \\ \ell+s=k}}{\text{Min}}\ 2(2^\ell a+2^s b) \leq 2(2^{k/2}a+2^{k/2}b) = 2^{\frac{k}{2}+1}(a+b).$$

Assim, para a e b fixos,

$$\sup_k \frac{F_k(a,b)}{2^{k/2}} \leq \frac{2^{\frac{k}{2}+1}(a+b)}{2^{k/2}} = 2(a+b)$$

$$\therefore\ F_k(a,b) \sim O(2^{k/2}).$$

Portanto, se $k = k(n)$, então $F_k(a,b) \sim O(\sqrt{n/t'})$.

Esse algoritmo produz $2^{k(n)}$ sub-retângulos $\{Y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k(n)}$, e o esquema de partição pode ser visto como um jogo de corte de $k(n)$ rodadas em X. Em cada um dos Y_i tem-se:

$$|T(Y_i)| \leq |T^* \cap Y_i| + \frac{3}{2} \text{ per } (Y_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^{k(n)}.$$

Adicionando-os todos, membro a membro, tem-se:

$$|W| = \sum_{i=1}^{2^{k(n)}} |T(Y_i)| \leq \sum_{i=1}^{2^{k(n)}} \{|T^* \cap Y_i| + \frac{3}{2} \text{ per } (Y_i)\} =$$

$$= |T^*| + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{2^{k(n)}} \text{per } (Y_i) \leq |T^*| + \frac{3}{2} F_k(a, b),$$

pois:

$$\sum_{i=1}^{2^{k(n)}} \text{per } (Y_i) \leq F_k(a, b)$$

visto que o esquema de partição usa a estratégica CURTO, que é ótima. Assim, $|W| \leq |T^*| + \frac{3}{2} F_k(a,b) \Rightarrow |W| - |T^*| = O(\sqrt{n/t})$, i.e., o erro no pior caso é $O(\sqrt{n/t})$. Esta informação é somente de interesse teórico. Na prática ela não ajuda a explicar em termos numéricos quão próximo a solução encontrada está do ótimo.

Em adição, supondo que as cidades estão aleatoriamente distribuídas em um retângulo, uma análise probabilística é realizada por Karp. Aproveitando os resultados de Beardwood et alii (1959), referenciado por Karp, (1977), o qual conclui que seu algoritmo produz um caminho gerador com um erro relativo de $O(t^{-1/2})$, pois a rota mais curta que passa por pontos aleatoriamente distribuídos sobre uma região X no plano tende a crescer com a raiz quadrada do número de cidades. De fato,

$$\frac{T_n(X)}{\sqrt{nV(x)}} \longrightarrow \beta \text{ com probabilidade 1, onde:}$$

$T_n(x)$ = o comprimento de uma rota mais curta através das cidades em X, admitindo que o conjunto de cidades está distribuído de acordo com uma distribuição de Poisson bidimensional $\pi_n(X)$ com densidade n;

e

$V(x)$ = área de X.

Um esquema probabilístico de aproximação ε é estabelecido para a solução do PCV no plano, usando este resultado e os limitantes derivados para o algoritmo. Impondo restrições no tamanho de t, ε pode ser feito arbitrariamente pequeno, e o algoritmo é capaz de construir uma rota de comprimento menor que $(1+\varepsilon)$ vezes o comprimento de uma rota ótima, com probabilidade 1. Estes resultados são apenas teóricos. Eles não têm nenhuma aplicabilidade prática, pois é ainda desconhecida uma maneira de resolver um PCV de qualquer tamanho dentro de um tempo de processamento viável.

Um novo esquema de particionamento é considerado por Karp para cidades distribuídas aleatoriamente sobre o retângulo X. O retângulo original é particionado em sub-retângulos iguais, usando as estratégias CURTO e BISECÇÃO, de modo que em cada sub-retângulo o número esperado de cidades seja t. Um novo algoritmo é considerado, denotado algoritmo 2, que é simplesmente uma variante do primeiro algoritmo. Ele inclui uma estratégica de ajuntamento, a fim de formar um caminho gerador para o problema global das rotas dos subproblemas. Este ajuntamento é realizado utilizando 2 vezes o segmento de linha mais curto que une duas cidades pertencentes a sub-retângulos adjacentes.

O desempenho esperado do algoritmo 2 também foi derivado. O comprimento esperado do caminho gerador W_2, dado pelo algoritmo 2, é limitado por:

$$\frac{E(|W_2|)}{n} \leq \beta_X(t) + O(t^{-7/6}),$$

onde:

$$\beta_X(t) = \frac{E(T_t(X))}{\sqrt{t}}.$$

A idéia usada para chegar à relação acima foi baseada na observação de que o comprimento $|W_2|$ é composto de duas contribuições:

(i) a soma dos comprimentos das rotas mais curtas dentro dos retângulos; e

(ii) duas vezes a soma dos comprimentos dos arcos que ligam estas rotas.

A primeira contribuição leva ao termo $\sqrt{n}\,\beta_X(t)$ e a segunda, ao termo $O(\sqrt{n}\ t^{-7/6})$.

O tempo de execução esperado do algoritmo 2 é limitado por $2C(n/t)$ e $^{(c-1)t}+O(n \log^2 n)$, onde é admitido que o tempo esperado para construir uma sub-rota através de s pontos aleatoriamente distribuídos no sub-retângulo é menor que Cc^s. O termo $O(n \log^2 n)$ vem do tempo dispendido em determinar as ligações que unem as rotas.

Um limitante para o valor esperado de $|W_2|-|T^*|$ é dado por Karp, derivado dos limitantes no valor esperado de $|W_2|$. Tem-se que o valor esperado $|W_2|-|T^*| \leq \sqrt{n}\,(\beta_X(t)-\beta+O(t^{-7/6})$. Isto motivou Karp a achar um limitante para $\beta_X(t)-\beta$. Dos resultados derivados de Beardwood et alii (1959), ele primeiro conclui que $\beta_X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \beta\sqrt{V(X)}$.

Então ele deriva, para todo t, que:

$$\beta_X(t) - \beta \leq \frac{6(a+b)}{\sqrt{t}},$$

onde a e b são as dimensões do retângulo X, e admite-se que $V(X)= 1$ $(ab= 1)$. Assim, $\beta_X(t)-\beta= O(t^{-1/2})$ e, portanto, quanto à questão de taxa de crescimento não existe melhora do algoritmo 2 sobre o primeiro algoritmo. A única vantagem mencionada por Karp ao apresentar o algoritmo 2 em detalhes diz respeito ao erro esperado, que é dado explicitamente em termos de $\beta_X(t)$. Karp especula que na prática $\beta_X(t)-\beta$ seja proporcional a $t^{-1/2}$, mas com uma constante de proporcionalidade bem menor do que os 6(a+b) que ele obteve. De fato, sugere-se aqui uma pequena modificação na prova apresentada por Karp que produz uma redução de um fator de 2 neste limitante superior. Isto é apresentado na seguinte proporção:

PROPOSIÇÃO: $\beta_X(t) - \beta \leq \dfrac{3(a+b)}{\sqrt{t}}$.

PROVA: Considere um exemplo do problema tomado de $\pi_{4^k t}(X)$. Seja T^* uma rota ótima. Subdivida X em 4^k, $(\frac{a}{2^k} \times \frac{b}{2^k})$ retângulos, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{4^k}$. Seja $|T(Y_i)|$ o comprimento de uma rota ótima através das cidades em Y_i. Tem-se que:

$$|T(Y_i)| \leq |T^* \cap Y_i| + \frac{3}{2}\,\text{per}\ Y_i,$$

portanto:

$$\sum_{i=1}^{4^k} |T(Y_i)| \leq |T^*| + \frac{3}{2} [2(\frac{a}{2^k} + \frac{b}{2^k})] \, 4^k.$$

Mas,

$$E(T^*) = \beta_X(4^k t) \sqrt{4^k t} \text{ e}$$

$$E(|T(Y_i)|) = \frac{1}{2^k} \beta_X(t) \sqrt{t},$$

pois o conjunto de cidades em Y_i está distribuído como se tivessem si_ do tirados de $\pi_t(X)$ e então realizou-se um reescalonamento das dimen_ sões do problema por um fator de $\frac{1}{2^k}$,

portanto,

$$4^k(\frac{1}{2^k} \beta_X(t) \sqrt{t}) \leq \beta_X(4^k t) \sqrt{4^k t} + 3(a+b)2^k,$$

ou:

$$\beta_X(t) \leq \beta_X(4^k t) + \frac{3(a+b)}{\sqrt{t}}.$$

Isto é verdade para todo k= 1, 2,... Como $\beta(4^k t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \beta$,

tem-se:

$$\beta_X(t) \leq \beta + \frac{3(a+b)}{\sqrt{t}}.$$

Nenhum resultado experimental é dado com os algoritmos, de modo que são desconhecidos seus comportamentos na prática.

Algumas generalizações sugeridas por Karp incluem:

- uma métrica retilínea ou L_∞ ao invés da métrica euclidiana;
- dimensão d, ao invés de 2 dimensões ($d \geq 2$);
- funções de distribuição bidimensionais arbitrárias;
- X ser qualquer conjunto conectado mensurável (no sentido de Lebesgue).

Ele também observa que a idéia de métodos de partição e sua análise podem ser modificadas de uma maneira direta, de modo a serem aplicáveis a muitos outros problemas de otimização de natureza geométrica.

As análises do trabalho de Karp são teoricamente muito interessantes, mas para propósitos práticos são bem questionáveis. De fato, uma vez obtida uma rota pelo algoritmo de particionamento de Karp, seus resultados teóricos não permitem dizer quão longe do ótimo esta solução está. A única quantidade que provavelmente seria interessante comparar é o valor $\beta\sqrt{nV(x)}$. A questão seguinte que apareceria fatalmente é saber para que valor de n esta é uma boa aproximação.

4. SUMÁRIO E COMENTÁRIOS FINAIS

O trabalho de Kao é uma adaptação de idéias retiradas de outros trabalhos anteriores sobre o PCV. Ele estendeu a formulação de programação dinâmica do caso determinístico para o caso mais geral, onde os tempos de viagem são de natureza estocástica. Seu procedimento é limitado a problemas onde um operador de ordem de preferência está bem definido, o que aparentemente não ocorre com muita frequência na prática.

Foi identificado e ilustrado através de um exemplo que o procedimento sugerido por Kao é apenas aproximado, se for utilizada a simplificação por ele sugerida. Por outro lado, sem tal simplificação, o procedimento parece ser de aplicação muito restrita, talvez apenas aos casos determinísticos.

Os algoritmos de particionamento de Karp são de interesse para grandes problemas do CV no plano. Matematicamente, o trabalho de Karp é de excelente qualidade. Entretanto, alguns resultados derivados são de uso bem limitado para propósitos práticos. Sugeriu-se uma modificação da prova de um dos teoremas estabelecidos por Karp, o que provocou uma melhoria em um limitante superior por ele determinado. Também foi sugerida uma interação homem-máquina durante a transformação de um caminho gerador em uma rota.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEARDWOOD, J.; HALTON, J.H.; HAMMERSLEY, J.M. The shortert path through many points. *Proc. Philos. Soc.*, 55:299-327, 1959.

BELLMAN, R. Dynamic programming treatment of the traveling salesman problem. *J. Assoc. Comput. Machinery*, 9:61-63, 1962.

BELLMORE, M.; NEMHAUSER, G.L. The traveling salesman problem: a survey. *Operations Research*, 16:538-558, 1969.

CHRISTOFIDES, N. *Worst case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem.* Carnegie-Mellon University Management Sciences Research Report 388, Pittsburgh, Pa, Feb. 1976.

CLARKE, G.; WRIGHT, J.W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 12:568-581, 1964.

GAREY, M.; JOHNSON, D.S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness.* San Francisco, Freeman, 1979.

HELD, M.; KARP, R.M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18(6):1138-1162, 1970.

HELD, M.; KARP, R.M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: Part II. *Mathematical Programming*, 1:6-25, 1971.

KAO, E.P.C. A preference order dynamic program for a stochastic traveling salesman problem. *Operations Research*, 26(6):1033-1045, 1978.

KARP, R.M. Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the traveling salesman problem in the plane. *Mathematics of operations research*, 2(3):209-224, 1977.

LARSON, R.C.; ODONI, A.R. *Urban operations research*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1981.

LENSTRA, J.; RINNOOY KAN, A. Some simple applications of the traveling salesman problem. *Operational Research Quarterly*, 26(4):717-733, 1975.

LIN, S. Computer solutions of the TSP. *Bell Systems Techincal Journal*, 44:2245-2269, 1975.

LIN, S.; KERNIGHAN, B.W. An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 21(2):498-516, 1973.

LITTLE, J.D.C.; MURTY, K.; SWEENEY, D.W.; CAREL, C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*, 11:972-989, 1963.

MOLE, R.H. A survey of local vehicle routing methodology. *Journal of Operational Research Society*, 30(3):245-252, 1979.

MORIN, T.L.; MARSTEN, R.E. Branch-and-bound strategies for dynamic programming. *Operations Research*, 24:611-627, 1976.

OLIVO, A.A. *Uma heurística para o problema de distribuição de cargas perecíveis*. Dissertação de Mestrado em Análise de Sistemas e Aplicações. São José dos Campos, INPE, jun. 1984.

PAPADIMITRIOU, C.H. The Euclidean traveling salesman is NP-complete. *Theoretical Computer Science*, 4:237-244, 1977.

PARKER, R.G.; RARDIN, R.L. The traveling salesman problem: an update of research. *Naval Research Logistics Quarterly*, 30:69-96, 1983.