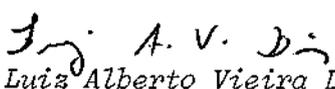
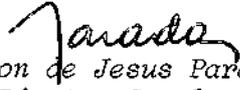


1. Publicação nº <i>INPE-2826-PRE/379</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DIN/DEP</i>	Programa <i>MEDEP/NAS</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>EQUAÇÃO ÍNTEGRO-DIFERENCIAL</i> <i>SOLUÇÃO APROXIMADA</i> <i>RECURSOS NATURAIS</i>			
7. C.D.U.: <i>519.642.2:330.15</i>			
8. Título <i>UM MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO POR APROXIMAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ÍNTEGRO-DIFERENCIAL DE ARGUMENTO AVANÇADO</i>		10. Páginas: <i>28</i>	
		11. Última página: <i>26</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Armando Zeferino Milioni</i> <i>Paulo Renato de Moraes</i>		 <i>Luiz Alberto Vieira Dias</i>	
Assinatura responsável 		 <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas <p><i>O presente trabalho trata do problema de explorar e consumir um recurso natural não-renovável de maneira ótima em presença de incertezas. Deshmukh e Pliska demonstraram que a função objetivo - valor esperado da utilidade do consumo menos os custos de exploração, descontado continuamente ao longo de um horizonte infinito de planejamento - é a única função que satisfaz uma equação integro-diferencial e sua condição inicial. Tal equação possui solução explícita conhecida para alguns casos particulares. O objetivo aqui é propor dois métodos de obtenção da solução numérica aproximada desta equação para casos mais gerais. A partir desta solução aproximada é possível determinar os parâmetros que caracterizam as políticas ótimas de consumo e exploração.</i></p>			
15. Observações <p><i>Trabalho apresentado no 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Poços de Caldas, no período de 14 a 22/07/83.</i></p>			

UM MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO POR APROXIMAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ÍNTEGRO-DIFERENCIAL DE ARGUMENTO AVANÇADO

Armando Zeferino Milioni
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Paulo Renato de Moraes
Instituto de Pesquisas Espaciais
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

RESUMO

O presente trabalho trata do problema de explorar e consumir um recurso natural não-renovável de maneira ótima em presença de incertezas. Deshmukh e Pliska demonstraram que a função objetivo-valor esperado da utilidade do consumo menos os custos de exploração, descontado continuamente ao longo de um horizonte infinito de planejamento - é a única função que satisfaz uma equação íntegro-diferencial e sua condição inicial. Tal equação possui solução explícita conhecida para alguns casos particulares. O objetivo aqui é propor dois métodos de obtenção da solução numérica aproximada desta equação para casos mais gerais. A partir desta solução aproximada é possível determinar os parâmetros que caracterizam as políticas ótimas de consumo e exploração.

ABSTRACT

We are concerned with the problem of optimally exploring and consuming a non-renewable natural resource in the presence of uncertainties. Deshmukh and Pliska proved that the objective function - the expected utility value of consumption minus the exploration costs, discounted over an infinite planning horizon - is the unique function to satisfy an integro-differential equation and its boundary condition. This equation has been solved only for a few particular cases. The goal here is to propose two methods for obtaining an approximate numerical solution to that equation for more general cases. This approximate solution can then be used to obtain the parameters that characterize the optimal consumption and exploration policy.

1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste artigo é apresentar dois métodos de solução aproximada de uma equação ĩntegro-diferencial de argumento avançado, que surge no estudo de Deshmukh e Pliska (1980), relativo ã de terminação de políticas õtimas de consumo e exploração de recursos na turais não-renováveis.

Este trabalho de Deshmukh e Pliska está situado no contexto do tema "Economia de Recursos Naturais Não-Renováveis", que foi introduzido na literatura por Hotelling (1931). Desde então, dada a relevância do assunto, muitos autores vêm se dedicando a ele, usando diferentes métodos de abordagem. Porém, é possível constatar que, em bora exista um consenso sobre a fundamental importância desempenhada pelo aspecto da "incerteza" no problema de administrar dinamicamente um recurso não-renovável, poucos autores têm explicitamente incorporado tal aspecto em suas análises.

Por exemplo, têm-se os trabalhos de Loury (1978) e Gilbert (1979) que se preocuparam com a taxa õtima de consumo quando o estoque total do recurso é desconhecido, mas pode ser avaliado através de prospecção. Dasgupta e Heal (1974) determinaram a política õtima quando há incerteza sobre o instante no qual surgirá um perfeito substituto para o recurso que se está analisando. MacQueen (1961, 1964) estudou o caso em que o nível conhecido de reservas varia em quantidades aleatórias em instantes aleatórios de tempo que fogem ao controle do planejador. Finalmente, Deshmukh e Pliska (1980) estudaram o caso de um recurso natural (tal como petróleo, minério, etc.) que é essencial e pode ser armazenado sem depreciação ao longo do horizonte de planejamento. Apesar do recurso não poder ser reproduzido, sua quantidade disponível pode ser aumentada pela exploração e procura de novas fontes. Segundo estes autores, "o processo de exploração envolve incertezas a respeito do tempo até a descoberta de uma nova jazida, assim como a respeito da quantidade de recursos lã existente. Essa incerteza pode ser controlada parcialmente pela intensidade

de exploração escolhida pelo decisor. Um grande esforço de exploração é mais dispendioso, mas é mais provável que resulte numa descoberta mais rápida de uma grande quantidade de recurso. Além de ser possível aumentar o estoque disponível através da exploração, este estoque pode diminuir devido ao uso. Uma alta taxa de consumo produz maior utilidade social imediata (apesar de a uma taxa decrescente), mas também deixa menor quantidade de recursos para consumo futuro. Assim, a exploração e o consumo atuais afetam não somente as utilidades e os custos imediatos, mas também o estoque futuro, e, conseqüentemente, todas as decisões futuras. A cada instante do tempo, dada a quantidade conhecida de reservas do recurso, o problema do decisor é determinar as taxas ótimas de exploração e consumo, de modo a maximizar o valor esperado descontado da utilidade do consumo menos o custo de exploração sobre um horizonte de planejamento infinito, levando em conta as incertezas envolvidas".

É necessário ressaltar que o modelo formulado por Deshmukh e Pliska (1980) considera algumas hipóteses simplificadoras, as quais o tornam mais facilmente tratável tanto do ponto de vista econômico quanto do matemático. As principais delas são as que se seguem:

- A função benefício social pode ser explicitada como a utilidade proveniente do consumo menos o custo gerado pelo esforço de exploração.
- Não há penalidade alguma para o caso de ocorrer a exaustão das reservas conhecidas.
- Todo o sistema é considerado invariante no tempo.
- A frequência e a magnitude das descobertas dependem apenas do esforço de exploração, sendo desprezados o efeito devido ao aprendizado proveniente das explorações no passado e a crescente dificuldade em conseguir novas descobertas, uma vez que o estoque total é finito.

O método aplicado por Deshmukh e Pliska (1980) para resolver esse problema é baseado em Morais (1977), e consiste em desenvolver um modelo markoviano para o nível de reservas conhecidas e, então, aplicar a teoria de Processos Markovianos de Decisão para obter os controles ótimos.

Sob certas condições estes autores demonstraram que a função que expressa o benefício social líquido esperado, em termos da política de consumo e exploração utilizada e do nível conhecido de reservas, é a única função contínua que satisfaz uma equação integro-diferencial estocástica de argumento avançado e sua condição inicial.

A importância dessa função decorre do fato de que, através dela, é possível encontrar os parâmetros que determinam qual a política ótima dentre aquelas pertencentes a uma certa classe de políticas de consumo e exploração.

Contudo, a equação acima referida só possui solução explícita conhecida para alguns casos particulares. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar dois métodos de obtenção da solução aproximada daquela equação, para casos mais gerais.

Na Seção 2 é apresentada a formulação do modelo. Na Seção 3 são apresentados os casos particulares para os quais a forma funcional exata do retorno esperado descontado é conhecida. Na Seção 4 são apresentados os dois métodos de obtenção aproximada do retorno esperado descontado. Na Seção 5, alguns resultados obtidos pelos métodos aproximados propostos são numericamente comparados com alguns resultados exatos descritos na Seção 3. Finalmente, na Seção 6 são feitos alguns comentários sobre a utilização dos métodos de aproximação propostos.

2 - FORMULAÇÃO DO MODELO

Seja X_t o nível comprovado de reservas de um recurso natural não-renovável, medido em determinado instante de tempo t maior ou igual a 0. Não há distinção entre reservas comprovadas no subsolo e reservas já extraídas e armazenadas.

A cada instante de tempo t um planejador central observa o nível de estoque $X_t = x$ e adota uma política π , que consiste em escolher:

$r(x)$ - taxa de consumo a ser utilizada,

com $r(x) \in C = [0, \bar{r}]$ com $\bar{r} < \infty$ e $r(0)=0$.

$p(x)$ - esforço de exploração a ser despendido,

com $p(x) \in P = [0, \bar{p}]$ com $\bar{p} < \infty$.

Uma política π será chamada admissível se for uma função mensurável de Borel $\pi : R \rightarrow C \times P$, contínua à esquerda.

Seja a medida $\beta(p(x), dy)$ a função que determina a taxa probabilística de descobertas de jazidas de magnitude y , tal que $\beta(p(x), \cdot)$ é uma medida de probabilidade e $\beta(\cdot, dy)$ é uma função contínua em $p(x)$. Por exemplo:

$$\beta(p(x), dy) = \lambda(p(x))F(dy),$$

onde F é a função de distribuição da variável aleatória Y , dimensão de uma jazida descoberta, e $\lambda(p(x))$ é uma função contínua que determina a taxa probabilística de descobertas. Neste exemplo, o esforço de exploração afeta a taxa de descobertas, mas não as suas magnitudes.

Seja ainda $u(r(x))$ a função contínua que determina o benefício social gerado pelo consumo realizado à taxa $r(x)$, e $h(p(x))$ a função contínua que determina o custo ocasionado quando se usa um esforço de exploração $p(x)$.

A cada política π é associada uma função que é chamada retorno esperado descontado $v(z)$, que corresponde ao retorno líquido obtido com a adoção da política π quando $X_0 = z$, continuamente descontado a uma taxa α constante.

Então:

$$v(z) \triangleq E \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} [u(r(X_t)) - h(p(X_t))] dt \mid X_0 = z \right\}, \quad z \geq 0. \quad (1)$$

A obtenção da forma funcional explícita de $v(z)$ a partir da Definição 1 constitui normalmente uma difícil tarefa. Assim sendo, uma alternativa possível é a utilização do teorema de Deshmukh e Pliska (1980) que se segue.

TEOREMA 1 - $v(z)$ é a única função limitada, absolutamente contínua em $(0, \infty)$, com derivada à esquerda $v'(z)$ contínua à esquerda e com $v'(z)r(z)$ limitada em $(0, \infty)$ que satisfaz:

$$\alpha v(z) = u(r(z)) - h(p(z)) - v'(z)r(z) + \int_0^{\infty} [v(z+y) - v(y)] \beta(p(z), dy), \quad z > 0, \quad (2)$$

sujeita à condição inicial:

$$\alpha v(0) = -h(p(0)) + \int_0^{\infty} [v(y) - v(0)] \beta(p(0), dy). \quad (3)$$

Uma das principais vantagens desse teorema vem a ser a de que se, devido a algum fundamento, houver motivos para crer que para certas funções $h(\cdot)$, $u(\cdot)$ e $\pi(r(\cdot), p(\cdot))$ o retorno esperado descon

tado $v(z)$ é de uma forma funcional específica, então pode-se verificar se essa suspeita é procedente ou não, testando-a no teorema acima.

Contudo, a Equação 2 vem a ser uma equação íntegro-diferencial estocástica de argumento avançado, para a qual só se conhece solução exata para alguns casos particulares que são apresentados na Seção 3. Assim sendo, o propósito principal deste trabalho é apresentar dois métodos de obtenção da solução aproximada dessa equação para casos mais gerais, o que será feito na Seção 4.

3 - LEVANTAMENTO DOS CASOS RESOLVIDOS

A seguir apresentam-se alguns casos para os quais a forma funcional de $v(z)$ foi obtida explicitamente. É necessário salientar que alguns desses casos são bastante particulares, tendo portanto um potencial pequeno de aplicação em casos reais. Contudo, a finalidade principal da apresentação desses casos será a de possibilitar a comparação com os resultados obtidos pelos métodos de aproximação, que são discutidos na Seção 4.

Para todos os casos abaixo são válidas as seguintes hipóteses:

$$r(0) = 0.$$

$$\beta(p(x), dy) = \lambda(p(x))F(dy).$$

$$F(dy) = \mu \exp(-\mu y) dy, \mu > 0.$$

$$p(x) = p = \text{constante, que implica que}$$

$$\lambda(p(x)) = \lambda = \text{constante} > 0, \text{ e}$$

$$h(p(x)) = h = \text{constante} > 0.$$

$$U[r(x)] = u[r(x)] - h(p(x)) = u[r(x)] - h.$$

A primeira hipótese é bastante razoável, pois implica considerar que não é possível consumir o recurso quando seu estoque

está esgotado. A segunda hipótese já foi comentada na Seção 2. A terceira hipótese diz respeito a considerar a função de distribuição da variável aleatória Y (dimensão de uma jazida descoberta) como sendo exponencial negativa, o que implica que quanto maior for o tamanho da jazida, menor será a probabilidade de encontrá-la. A quarta hipótese, ou seja, considerar que o esforço de exploração desempenhado é constante, implica também considerar constantes os custos envolvidos (h) e a frequência de descobertas (λ). Finalmente, $U[r(x)]$ é definida como a função utilidade líquida, já subtraída dos custos de exploração.

3.1 - CASO $r(x) = r$ (CONSTANTE), SE $x > 0$

Este problema foi resolvido por Morais (1981) que usou dois métodos para obtenção de $v(z)$ quando é adotada uma política $\pi(r(x), p(x))$ sob as hipóteses acima. O primeiro método baseou-se na Definição 1 e no resultado de Çinlar (1975) sobre tempos locais de um processo de armazenagem. O segundo método usou o resultado de Morais e Pliska (1980) sobre controle de sistemas de armazenamento, análogo ao Teorema 1 da Seção 2.

Morais (1981) concluiu então que, para qualquer função $U(r(x))$ contínua e limitada, a forma funcional de $v(z)$ é:

$$v(z) = A + B \exp(-Cz),$$

onde

$$C = \text{raiz positiva de } rw^2 + (r\mu - \lambda - \alpha)w - \alpha\mu = 0,$$

$$B = -(U(r) - U(0))/(rC),$$

$$A = U(r)/\alpha.$$

3.2 - CASO $r(x) = Kx$, SE $x > 0$, e U POLINOMIAL DE GRAU n

$$\text{Se } U[r(x)] = a_0 + a_1 r(x) + a_2 [r(x)]^2 + \dots + a_n [r(x)]^n,$$

então:

$$v(z) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n,$$

onde

$$A_j = [1/(\alpha + jK)] [a_jK^j + \lambda(j+k)! A_{j-1}/(j! \mu^k)],$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

É interessante observar que os resultados acima também satisfazem o Teorema 1, ainda que este sô esteja provado para funções $r(x)$ limitadas em $(0, \infty)$, o que naturalmente não é o caso de $r(x)=Kx$. O mesmo método empregado por Moraes (1981) permitirá, sem maiores dificuldades, a generalização da solução exata para $v(z)$ quando $U[r(x)]$ for um polinômio de qualquer grau n inteiro positivo. Pode-se então observar novamente que os resultados obtidos são idênticos aos expostos acima, obtidos pela utilização do Teorema 1 (Miloni, 1983).

3.3 - CASO $r(x) = \text{BANGBANG DE 2 NÍVEIS}$

$$r(x) = \begin{cases} K_1 & 0 < x \leq x^*, \\ K_2 & x^* < x \end{cases} \quad (4)$$

com $x^* < \infty$ e $K_1 < K_2 \leq \bar{r}$.

Baseando-se no resultado exato descrito na Seção 3.1, a seguinte solução para $v(z)$ foi testada quando $r(x)$ é do tipo BANGBANG de 2 níveis, ou seja, conforme definida acima, para qualquer função $U[r(x)]$ contínua e limitada:

$$v(z) = \begin{cases} A_1 + B_1 \exp(-C_1z) & 0 < z \leq x^*, \\ A_2 + B_2 \exp(-C_2z) & x^* < z. \end{cases} \quad (5)$$

Conclui-se então que, se $r(x)$ for como na Expressão 4, então $v(z)$ será como na Expressão 5 apenas se x^* for do tipo:

$$x^* = (-1/C_1) \ln [C_2(A_1 - A_2)(C_2 + \mu) / \mu B_1(C_1 - C_2)].$$

Para qualquer outro valor de x^* a forma funcional de $v(z)$ é diferente daquela descrita na Expressão 5 (Milioni, 1983).

3.4 - CASO $r(x) =$ BANGBANG DE n NÍVEIS

$$r(x) = \begin{cases} K_1 & 0 < x \leq x_1^*, \\ K_2 & x_1^* < x \leq x_2^*, \\ \dots & \dots \\ K_{m-1} & x_{m-2}^* < x \leq x_{m-1}^*, \\ K_m & x_{m-1}^* < x. \end{cases}$$

Baseando-se no resultado obtido na Seção 3.3, foi testada:

$$v(z) = \begin{cases} A_1 + B_1 \exp(-C_1 z) & 0 < z \leq x_1^*, \\ A_2 + B_2 \exp(-C_2 z) & x_1^* < z \leq x_2^*, \\ \dots & \dots \\ A_{m-1} + B_{m-1} \exp(-C_{m-1} z) & x_{m-2}^* < z \leq x_{m-1}^*, \\ A_m + B_m \exp(-C_m z) & x_{m-1}^* < z. \end{cases} \quad (6)$$

Concluiu-se que $v(z)$ será do tipo descrito na Expressão 6 apenas se

$$x_j^* = (-1/C_j) \ln [C_{j+1}(A_j - A_{j+1})(C_{j+1} + \mu) / (\mu B_j(C_j - C_{j+1}))],$$

$j = 1, 2, 3, \dots, m-1$, ou seja, existe e é único o vetor $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_{m-1}^*]$ para o qual $v(z)$ terá a forma funcional descrita na Expressão 6 (Milioni, 1983).

3.5 - CASO $r(x) = \text{RAMPA-PLATAFORMA}$

$$r(x) = \begin{cases} Kx & 0 < x \leq x^*, \\ Kx^* & x^* < x, \end{cases}$$

quando $U[r(x)] = a_0 + a_1 r(x) + a_2 [r(x)]^2$.

Baseando-se nos resultados das Seções 3.1 e 3.2, foi testada:

$$v(z) = \begin{cases} A + Bz + Cz^2 & 0 < z \leq x^*, \\ D + E \exp(-Fz) & x^* < z. \end{cases}$$

Com o auxílio do Teorema 1, verificou-se que essa expressão para $v(z)$ só é válida para um único ponto x^* (Milioni, 1983).

3.6 - CASO $r(x) = \text{EXPONENCIAL}$

Quando $r(x)$ for do tipo:

$$r(x) = b_0 - b_0 \exp(-b_1 x), \quad x > 0$$

e

$$U[r(x)] = a_0 + a_1 x,$$

pode-se verificar que

$$v(z) = A + B e^{-Cz}$$

(Milioni, 1983).

4 - MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

4.1 - PRIMEIRO MÉTODO - APROXIMAÇÃO POR PLATAFORMAS

Como foi visto na seção anterior, é pequeno o número de casos para os quais a forma explícita da função $v(z)$, retorno esperado descontado como função do nível de estoque, é conhecida. Em alguns casos as soluções só existem para funções utilidades particulares, e em todos eles supõe-se que o esforço de exploração é constante.

Nesta seção é proposto um método de obtenção da forma funcional aproximada de $v(z)$ quando as funções $r(x)$ e $p(x)$, descritas na Seção 2, são quaisquer funções contínuas e limitadas, possíveis portanto de ser aproximadas, cada uma delas, por uma função do tipo salto, ou, como doravante serão chamadas, por uma série de plataformas.

Será verificado que, se a medida $\beta(p(x), dy)$ for do tipo:

$$\beta(p(x), dy) = \lambda(p(x)) \mu(\exp(-\mu y)) dy,$$

então $v(z)$ pode ser aproximada por uma série de segmentos de funções do tipo exponencial.

As seguintes hipóteses serão consideradas.

A função contínua e limitada $r(x)$ pode ser aproximada por $\hat{r}(x)$ do tipo:

$$\hat{r}(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0^* = 0, \\ r_i & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ r_m & x_{m-1}^* < x \end{cases} \quad (7)$$

que implica aproximar $u[r(x)]$ por $\hat{u}[r(x)]$:

$$\widehat{u}[r(x)] = \begin{cases} u_0 & x = x_0^* = 0, \\ u_i & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ u_m & x_{m-1}^* < x. \end{cases}$$

A função contínua e limitada $p(x)$ pode ser aproximada por $\widehat{p}(x)$ do tipo:

$$\widehat{p}(x) = \begin{cases} p_0 & x = x_0^* = 0, \\ p_i & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ p_m & x_{m-1}^* < x \end{cases} \quad (8)$$

que implica aproximar $\lambda(p(x))$ e $h(p(x))$ por:

$$\widehat{\lambda}(p(x)) = \begin{cases} \lambda_0 & x = x_0^* = 0, \\ \lambda_i & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \lambda_m & x_{m-1}^* < x \end{cases}$$

$$\widehat{h}(p(x)) = \begin{cases} h_0 & x = x_0^* = 0, \\ h_i & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ h_m & x_{m-1}^* < x. \end{cases}$$

Nesse caso, será verificado se a seguinte forma funcional de $v(z)$ pode ser aceita como solução para o retorno esperado des contado:

$$v(z) = \begin{cases} v_i(z) = A_i + B_i \exp(-C_i z) & x_{i-1}^* < z \leq x_i^*, \\ v_m(z) = A_m + B_m \exp(-C_m z) & x_{m-1}^* < z, \end{cases} \quad (9)$$

onde A_i , B_i e C_i , $i=1, 2, \dots, m$ são coeficientes a determinar.

Para fazer tal verificação serão seguidos os seguintes passos:

- a) Verificar se $v(z)$ como na Expressão 9 satisfaz a Equação 2 do Teorema 1.
- b) Verificar se a Condição Inicial 3 do mesmo teorema também é satisfeita.
- c) Verificar a continuidade de $v(z)$.

Tais passos são suficientes, uma vez que as demais condições do Teorema 1 são verificáveis.

Sob as hipóteses formuladas, a Equação 2 do Teorema 1 transforma-se no sistema de equações abaixo:

$$\alpha v_i(z) = u_i - h_i - v_i'(z)r_i + \int_0^{x_i^* - z} [v_i(z+y) - v_i(z)]\beta(p_i, dy)$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{m-1} \int_{x_{j-1}^*}^{x_j^*} [v_j(z+y) - v_i(z)]\beta(p_i, dy) + \int_{x_{m-1}^* - z}^{\infty} [v_m(z+y) - v_i(z)]\beta(p_i, dy)$$

(10)

para $x_{i-1}^* < z \leq x_i^*$ com $x_0^* = 0$ e $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$,

$$\alpha v_m(z) = u_m - h_m - v_m'(z)r_m + \int_0^{\infty} [v_m(z+y) - v_m(z)]\beta(p_m, dy)$$

para $x_{m-1}^* < z$.

Este sistema pode ser resolvido para qualquer medida $\beta(p_i, dy)$.

Entretanto aqui será resolvido sob a hipótese:

$$\beta(p_i, dy) = \lambda_i F(dy) = \lambda_i \mu(\exp(-\mu y)) dy. \quad (11)$$

Incorporando a Hipótese 11 no Sistema 10, as integrais de cada uma de suas m equações podem ser calculadas. Em seguida, se forem calculadas as transformadas de Laplace de cada equação resultante, e forem igualados a zero os coeficientes dos termos de ordem diferente, serão obtidos todos os coeficientes A_i e C_i :

$$C_i = \text{raiz positiva de } r_i w^2 + (r_i \mu - \alpha - \lambda_i) w - \alpha \mu = 0$$

$$A_i = (u_i - h_i) / \alpha$$

com $i = 1, 2, \dots, m$, e mais um sistema de $m-1$ equações:

$$A_i + \mu B_i \exp(-C_i x_i^*) / (C_i + \mu) = A_{i+1} + B_{i+1} \exp(-C_{i+1} x_{i+1}^*) / (C_{i+1} + \mu) \quad (12)$$

com $i = 1, 2, \dots, m-1$.

O Sistema 12 permite relacionar B_{i+1} com B_i na forma:

$$B_{i+1} = [A_i - A_{i+1} + B_i \mu \exp(-C_i x_i^*) / (C_i + \mu)] (C_{i+1} + \mu) / (\mu \exp(-C_{i+1} x_{i+1}^*)).$$

Assim, se o valor de B_1 for obtido, têm-se todos os demais B_i , uma vez que os coeficientes A_i e C_i já se encontram explicitados.

Para calcular B_1 é usada a condição inicial do Teorema 1 sob as hipóteses 7, 8, 9 e 11, a Equação 3 transforma-se em:

$$(\alpha + \lambda_1)(A_1 + B_1) + h_1 = \lambda_1 \sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}^*}^{x_j^*} [A_j + B_j \exp(-C_j y)] \mu \exp(-\mu y) dy,$$

com $x_0^* = 0$ e $x_m^* = \infty$, a qual, resolvidas as integrais e considerando a Equação 12, reduz-se a:

$$B_1 = -u_1/(r_1 C_1).$$

Assim sendo, foram encontrados todos os coeficientes A_i , B_i e C_i , $i=1,2,\dots, m$, que fazem com que $v(z)$, como na Expressão 9, satisfaça as Equações 2 e 3 do Teorema 1.

Entretanto, resta verificar a continuidade de $v(z)$ no ponto x_i^* , ou seja, verificar se:

$$A_i + B_i \exp(-C_i x_i^*) = A_{i+1} + B_{i+1} \exp(-C_{i+1} x_i^*),$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Esta análise será dividida em duas partes:

a) Quando $r_i \mu > \alpha + \lambda_i$:

Da expressão 12 fica claro que a continuidade de $v(z)$ é verificada se:

$$1 \cong \mu/(C_i + \mu), \quad \text{ou} \quad \mu \gg C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Mas

$$C_i = (\sqrt{w^2 + 4\alpha\mu r_i} - w)/(2r_i)$$

onde

$$w = (\mu r_i - \alpha - \lambda_i) > 0 \quad (\text{pela hipótese}).$$

Então

$$C_j \leq \sqrt{\alpha\mu/r_j}, \quad \text{e } \mu \text{ será } \gg C_j \text{ se } \mu \gg \sqrt{\alpha\mu/r_j},$$

ou seja,

$$r_j \mu \gg \alpha.$$

Portanto, quando $r_j \mu > \alpha + \lambda_j$, a continuidade é aproximadamente verificada se:

$$r_j \mu \gg \alpha.$$

b) Quando $\mu r_j < \alpha + \lambda_j$:

Nessas circunstâncias, torna-se difícil a verificação analítica da continuidade aproximada de $v(z)$, devendo ser feita uma análise numérica de cada caso estudado.

Neste ponto pode-se concluir que $v(z)$, como na Expressão 9, não é a solução correta para o problema definido sob as Hipóteses 7 e 8, uma vez que não foi possível constatar exatamente a continuidade de $v(z)$. Contudo, tal solução aproxima-se da solução verdadeira, partindo dessa constatação da comparação numérica com resultados exatos descritos na Seção 3.

Faz-se útil, porém, um outro método de obtenção de soluções aproximadas, pois isso tornará possível comparar numericamente os resultados obtidos em cada um dos métodos de aproximação, o que poderá ser útil nos casos em que a forma funcional exata de $v(z)$ não é conhecida.

4.2 - SEGUNDO MÉTODO - APROXIMAÇÃO POR SEGMENTOS DE RETAS

Nesta seção, é proposto um novo método de obtenção da forma funcional aproximada de $v(z)$ quando as funções $r(x)$ e $p(x)$ são contínuas e limitadas. Neste segundo método, $p(x)$ é novamente aproximada por uma série de plataformas, mas $r(x)$ é aproximada por uma série de segmentos de reta do tipo $K_i x$.

Se a medida $\beta(p(x), dy)$ for do tipo:

$$\beta(p(x), dy) = \lambda(p(x)) \mu (\exp(-\mu y)) dy$$

e se $U[r(x)]$ for uma função polinomial de qualquer grau n inteiro positivo, então $v(z)$ poderá ser aproximada por uma série de segmentos de polinomiais do mesmo grau.

As seguintes hipóteses serão consideradas.

A função contínua e limitada $r(x)$ pode ser aproximada por $\tilde{r}(x)$ do tipo:

$$\tilde{r}(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0^* = 0, \\ K_i x & x_{i-1}^* < x \leq x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ K_m x & x_{m-1}^* < x. \end{cases} \quad (13)$$

As funções $p(x)$, $\lambda(p(x))$ e $h(p(x))$ são consideradas como na Hipótese 8, e supõe-se que a função utilidade é da forma:

$$u[r(x)] = a_0 + a_1 r(x) + a_2 [r(x)]^2 + \dots + a_n [r(x)]^n. \quad (14)$$

Então, $v(z)$ será testada como abaixo:

$$v(z) = \begin{cases} v_i(z) = A_{i,0} + A_{i,1} z + \dots + A_{i,n} z^n, & x_{i-1}^* < z \leq x_i^*, \\ v_m(z) = A_{m,0} + A_{m,1} z + \dots + A_{m,n} z^n, & x_{m-1}^* < z, \end{cases} \quad (15)$$

onde $A_{i,j}$, $i=1,2,\dots, m$ e $j=0,1,2,\dots, n$ são coeficientes a determinar.

A verificação da Hipótese 15 segue exatamente os mesmos três passos descritos na Seção 4.1.

Por raciocínio análogo, conclui-se que as Equações 2 e 3 do Teorema 1 são satisfeitas com as hipóteses acima, desde que os coeficientes $A_{i,j}$ sejam do tipo:

$$A_{i,j} = (1/\alpha + jK_i) [a_j K_i^j + \sum_{\theta=1}^{n-j} A_{i,j+\theta} \lambda_i^{j+\theta} / (\mu^\theta j!)],$$

$$j = 0,1,\dots, n \quad \text{e} \quad i = 1,2,\dots, m$$

com a continuidade sendo verificada por aproximação desde que:

$$\begin{aligned} K_i &\cong K_{i+1}, \\ \text{e} \\ \lambda_i &\cong \lambda_{i+1}, \end{aligned}$$

$$i = 1,2,\dots, m-1.$$

Isto posto conclui-se, como na Seção 4.1, que a solução proposta na Expressão 15 não é solução para o problema definido pelas Hipóteses 13 e 14, novamente pelo fato de a continuidade de $v(z)$ não ter sido observada, a não ser por aproximação. Contudo, tal solução também se aproxima da solução verdadeira, partindo dessa constatação da comparação numérica com resultados exatos descritos na Seção 3.

É possível observar também que este segundo método pode ser aplicado em alguns casos de funções $r(x)$ descontínuas, como é o caso de $r(x) = \text{BANGBANG}$. Entretanto, para que a aproximação possa ser feita com sucesso, é necessário que não haja uma abrupta variação no valor de $K_i x$ ao longo de todo o domínio de $r(x)$ que estiver sendo es

tudado. Isso implica, por exemplo, a impossibilidade de aproximar funções cujo módulo da diferença entre o seu valor à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade seja suficientemente elevado, de maneira a fazer com que os valores de K_i imediatamente à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade sejam muito diferentes.

Resta dizer que outros métodos de aproximação de $v(z)$ foram tentados, e o mais promissor parecia ser aquele baseado na aproximação de $r(x)$ por uma série de segmentos de reta do tipo $K_{0,i} + K_{1,i}x$. Entretanto, a utilização do Teorema 1 leva a equações que mostram que tal aproximação só é válida quando $K_{0,i} = 0$, o que resulta no caso que foi analisado nesta seção.

5 - COMPARAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são comparados alguns resultados numéricos obtidos pelos métodos de aproximação descritos nas Seções 4.1 e 4.2 com os resultados exatos para os casos particulares descritos na Seção 3.

As comparações podem ser feitas para qualquer valor do estoque inicial z ; assim, serão feitas arbitrariamente para o conjunto de valores $z = 10, 20, 30, \dots, 100$, usando um conjunto de valores diferentes para as constantes λ , μ e α em cada caso. Nas tabelas a seguir é mostrada somente a parte inteira dos resultados obtidos, para facilidade de apresentação.

É importante dizer que aqui são feitas apenas algumas comparações. Um estudo mais detalhado desse mesmo tipo pode ser encontrado em Milioni (1983).

5.1 - COMPARAÇÃO COM O CASO $r(x) = Kx$

Nesse caso é usado o primeiro método de aproximação em que $r(x)$ é aproximada por uma série de plataformas.

a) Dados utilizados:

$$U[r(x)] = 27 + 26r(x) - [r(x)]^2,$$

$$K = 1, \lambda = 2,4, \mu = 8, \alpha = 0,17. .$$

b) Partição:

$$\delta = x_i - x_{i-1} = 2 \text{ para } i=1,2,3,\dots,100, .$$

$$r_i = (r(x_i) + r(x_{i+1}))/2.$$

c) Resultados:

z nível inicial	v(z) valor exato	v(z) valor aproximado	desvio %
10	371	372	0
20	453	455	0
30	442	445	1
40	340	344	1
50	145	150	4
60	-142	-136	4
70	-522	-514	1
80	-993	-984	1
90	-1557	-1547	1
100	-2212	-2202	0

5.2 - COMPARAÇÃO COM O CASO $r(x) = r$ (CONSTANTE)

Nesse caso é usado o segundo método de aproximação em que $r(x)$ é aproximada por uma série de segmentos de retas do tipo $K_i x$.

a) Dados utilizados:

$$U[r(x)] = 10 + 3r(x),$$

$$r = 10, \lambda=4, \mu=1,8, \alpha=0,07.$$

b) Partição (20 segmentos de reta do tipo $K_i x$):

$$K_1 = 0,1, \text{ passo} = 0,05, K_{20} = 1,1.$$

c) Resultados:

z nível inicial	v(z) valor exato	v(z) valor aproximado	desvio %
10	266	264	1
20	293	290	1
30	317	280	8
40	338	302	11
50	358	325	9
60	377	347	8
70	393	369	6
80	409	391	4
90	423	413	2
100	436	436	0

5.3 - COMPARAÇÃO COM O CASO $r(x) = b_0 - b_0 (\exp(-b_1 x))$

Nesse caso são utilizados os dois métodos de aproximação propostos, para fins de comparação.

a) Dados utilizados:

$$U[r(x)] = -12 + 1,8r(x), b_0 = 100, b_1 = 0,05,$$

$$\lambda = 1,8, \mu=4, \alpha = 0,07.$$

b) Partição (aproximação por plataformas):

$$\delta = x_i - x_{i-1} = 2 \text{ para } i=1,2,3,\dots, 100,$$

$$r_i = (r(x_i)+r(x_{i+1}))/2.$$

c) Partição (aproximação por segmentos de retas):

10 segmentos de reta do tipo $K_i x$,

$$K_1 = 0,2, \text{ passo} = 2, K_{10} = 20,2.$$

d) Resultados:

z nível inicial	v(z) valor exato	v(z) valor aproximado por plataformas	v(z) valor aproximado por retas	desvio da aproxima ção por plã taformas(%)	desvio da aproxi mação por retas (%)
10	-107	-107	-107	0	0
20	-89	-89	-89	0	0
30	-72	-72	-72	0	1
40	-55	-54	-56	1	1
50	-38	-37	-38	2	1
60	-21	-20	-21	5	1
70	-5	-3	-4	28	19
80	12	14	14	13	13
90	28	30	31	6	9
100	45	47	48	5	8

Neste momento é interessante citar a origem desse resultado, que é um dos mais importantes entre os expostos neste trabalho. A suposição de que o retorno esperado descontado $v(z)$ poderia ser expresso como uma função do tipo exponencial, caso a taxa de consumo $r(x)$ fosse do tipo exponencial que sai da origem e a função utilidade fosse polinomial do primeiro grau, nasceu da observação dos gráficos da função $v(z)$ obtida pelos métodos de aproximação. A importância desse resultado decorre do fato de que foi possível, através da observação gráfica de $v(z)$ obtida por aproximação, conjecturar qual seria a forma funcional exata de $v(z)$. Testada no Teorema 1, essa conjectura mostrou-se verdadeira. Assim, os métodos de aproximação desenvolvidos proporcionaram uma nova solução exata para o problema, ainda que em condições particulares. Foi possível constatar também que se $r(x)$ for do tipo exponencial que não passe pela origem, $v(z)$ deixa de ser uma função exponencial. Tal constatação pode ser feita tanto por comparação numérica quanto pela utilização do Teorema 1.

6 - CONCLUSÕES

Como visto, foram desenvolvidos dois métodos de obtenção da solução aproximada para a função $v(z)$ que expressa o benefício social líquido esperado em termos das taxas de consumo e exploração, respectivamente $r(x)$ e $p(x)$, e do nível inicial comprovado de reservas z de um recurso natural não-renovável.

Desta forma, é possível agora encontrar os parâmetros que determinam qual a política ótima entre aquelas pertencentes a uma certa classe.

Por exemplo, se for estudada certa classe de políticas π_1 do tipo:

$$r(x) = \begin{cases} r_1 x^2 & 0 < x \leq x^* \\ r_2 x^{*2} & x^* < x \end{cases} \quad \text{com } r_2 x^{*2} \leq \bar{r},$$

$$p(x) = p = \text{constante}$$

então, utilizando os métodos de aproximação propostos, visto que o resultado exato não é conhecido nesse caso, é possível determinar por análise numérica os parâmetros r_1 , r_2 e x^* que maximizam $v(z)$ sob π_1 , ou seja que determinam $\text{Max}_{\pi_1} [v(z)]$.

Mais ainda, é possível comparar diferentes classes de políticas. Assim, se for considerada uma outra classe, por exemplo π_2 , para a qual:

$$r(x) = \begin{cases} r_3 x^{1/2} & 0 < x \leq x^* \\ r_4 x^{*1/2} & x^* < x \end{cases} \quad \text{com } r_4 x^{*1/2} \leq \bar{r}_1$$

$$p(x) = p = \text{constante}$$

então é possível da mesma forma determinar os parâmetros que maximizam $v(z)$ sob π_2 , ou seja, que determinam $\text{Max}_{\pi_2} [v(z)]$.

Portanto, para um certo valor z é possível escolher a melhor entre as classes de políticas π_1 e π_2 , ou seja, aquela que fornece o maior valor para $\text{Max}_{\pi_i} [v(z)]$, $i=1,2$.

Deve-se ressaltar que o ideal seria se se pudesse encontrar a forma funcional exata de $v(z)$ para qualquer política $\pi[r(x), p(x)]$. Entretanto, métodos de resolução de equações integro-diferenciais de argumento avançado ainda são raros na literatura, por tratar-se de teoria relativamente recente. Em particular, ainda não foi obtida a solução geral das Equações 2 e 3.

Com este trabalho espera-se ter despertado mais interesse por esse problema, pois sua solução tem aplicações potenciais na área de modelagem do consumo e exploração de recursos naturais não-renováveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÇINLAR, E. A local time for a storage process. *Annals of Probability*, 3:920-950, 1975.
- DASGUPTA, P.; HEAL, G.M. The optimal depletion of exhaustible resources. *The Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, 41:3-29, 1974.
- DESHMUKH, S.D.; PLISKA, S.R. Optimal consumption and exploration of nonrenewable resources under uncertainty. *Econometrica*, 49(1):177-200, 1980.
- GILBERT, R. Optimal depletion of an uncertain stock. *The Review of Economic Studies*, 46:47-57, 1979.
- HOTELLING, H. The economics of exhaustible resources. *Journal of Political Economy*, 39:135-175, 1931.
- LOURY, G.C. The optimal exploration of an unknown reserve. *The Review of Economic Studies*, 45:621-636, 1978.
- MACQUEEN, J.B. A problem in survival. *Annals of Mathematical Statistics*, 32:605-609, 1961.
- MACQUEEN, J.B. A problem in making resources last. *Management Science*, 11:341-347, 1964.
- MILIONI, A.Z. *Resolução numérica de um modelo estocástico para otimização do consumo e exploração de um recurso não-renovável*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, ITA, 1983.
- MORAIS, P.R. *Optimal control of a storage system*. Ph.D. Thesis. Evanston, Northwestern University, 1977.

MORAIS, P.R. *Optimization on dams with a constant release rate.* São José dos Campos, INPE, May 1981 (INPE-2049-RPE/298).

MORAIS, P.R.; PLISKA, S.R. Controlled storage processes. In: Bensoussan, A.; Kleindorfer, P.; Tapiero, C.S., ed. *Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science.* Amsterdam, North-Holland, 1980. cap. 6, p. 181-202.