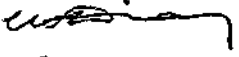
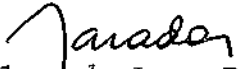



1. Publicação nº <i>INPE-3106-PRE/505</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DIN/DEP</i>	Programa <i>POPES</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>FILA M/G/1</i> <i>PROCESSO DE MARKOV</i> <i>CONTROLE DE FILAS</i> <i>RETORNO MÉDIO POR UNIDADE DE TEMPO</i>			
7. C.D.U.: <i>519.872.7</i>			
8. Título <i>UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO EM CONTROLE DA QUANTIDADE DE TRABALHO ACUMULADO NUMA FILA M/G/1</i>		10. Páginas: <i>15</i>	
		11. Última página: <i>13</i>	
		12. Revisada por  <i>Nivea Teixeira Dias</i>	
9. Autoria <i>Antonio Fernando Branco Costa</i> <i>Paulo Renato de Moraes</i>		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor Geral</i>	
Assinatura responsável 			
14. Resumo/Notas <p><i>Este trabalho considera uma fila M/G/1 com duas taxas de serviço disponíveis e com entrada controlada. Em qualquer instante de tempo, uma decisão deve ser tomada sobre a taxa de serviço a ser empregada e sobre o fechamento ou não do sistema a novas chegadas. Esta decisão é baseada na comparação entre o trabalho acumulado no sistema no instante t, X_t, e os dois valores críticos k_1 e k_2: quando $X_t < k_1$, o acesso ao servidor está aberto e este opera com a menor taxa de serviço; quando $k_1 \leq X_t \leq k_2$, o acesso ao servidor ainda está aberto mas este opera com a maior taxa de serviço; quando $X_t > k_2$, o acesso ao servidor está fechado e este continua operando com a maior taxa de serviço. Existem custos de espera de clientes, de ociosidade do servidor, de troca de taxas de serviço, de perda de clientes e uma recompensa dependente da taxa de serviço empregada. É apresentada a expressão do retorno médio por unidade de tempo, a partir da qual podem ser encontrados os valores críticos ótimos. Resultados numéricos são apresentados para a fila M/M/1, fazendo comparações com modelos que consideram $k_2 = \infty$ (Cohen, 1976) e $k_1 = k_2$ (Marins, 1981).</i></p>			
15. Observações <i>Este trabalho será submetido para apresentação no 6º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística (SINAPE), a ser realizado de 23 a 27/07/84, Rio de Janeiro - RJ.</i>			

ABSTRACT

This paper considers an M/G/1 queue with two available service rates and a controlled input. At each instant of time, a decision has to be made about which service rate to use and whether the entrance to the system should be closed or not for new arrivals. This decision is based upon the residual workload at time t , X_t , compared with two critical numbers k_1 and k_2 : when $X_t < k_1$, the entrance to the system is kept open and the server uses the lowest service rate; when $k_1 \leq X_t \leq k_2$, the entrance is still kept open but the server uses the greatest service rate; when $X_t > k_2$, the entrance is kept closed and the server uses the greatest service rate. The cost structure includes customer's waiting costs, server's idleness costs, service rate switching costs, penalty costs due to lost customers, and rewards dependent upon the service rate being used. An expression for the average return per unit time is given, from which the optimal values of the critical levels can be found. Numerical results are given for the M/M/1 queue, and the results are compared with models considering $k_2 = \infty$ (Cohen, 1976) and $k_1 = k_2$ (Marins, 1981).

UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO EM CONTROLE DA QUANTIDADE DE TRABALHO
ACUMULADO NUMA FILA M/G/1

Antonio Fernando Branco Costa*, Paulo Renato de Moraes**

*Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá/UNESP
12500 - Guaratinguetá - SP - Brasil

**Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515 - 12200 - São José dos Campos - SP - Brasil

1. INTRODUÇÃO

O estudo do projeto e controle de sistemas de filas é uma área de pesquisa recente. No artigo de Crabill et alii (1977) foi feita uma bibliografia com os principais trabalhos e livros que aparecem sobre projeto e controle de filas até aquela data; nos trabalhos de Marins (1981) e Costa (1983) foram feitas revisões dos trabalhos mais recentes.

Neste trabalho considera-se uma fila M/G/1 com duas taxas de serviço disponíveis e com entrada controlada. Em qualquer instante de tempo, toma-se uma decisão sobre a taxa de serviço a ser empregada e sobre o fechamento ou não do sistema a novas chegadas. Esta decisão baseia-se na comparação entre a quantidade de trabalho acumulado no sistema no instante t , X_t , e dois valores críticos k_1 e k_2 . Quando $X_t < k_1$, mantém-se aberto o acesso ao servidor e este opera com a menor taxa de serviço; quando $k_1 \leq X_t \leq k_2$, mantém-se aberto ao acesso ao servidor, mas este opera com a maior taxa de serviço; quando $X_t > k_2$, fecha-se o acesso ao servidor e este opera com a maior taxa de serviço. A estrutura de custos inclui custos de espera de clientes, de ociosidade do servidor, de troca da taxa de serviço, de perda de clientes e um retorno que depende da taxa de serviço empregada.

A seguir descrevem-se dois trabalhos, de Cohen (1976) e de Marins (1981), que se relacionam com o assunto deste artigo.

Cohen (1976) considera uma fila M/G/1 com duas taxas de serviço disponíveis porém com entrada não controlada. Em qualquer instante de tempo, toma-se uma decisão sobre a taxa de serviço a ser empregada, porém o sistema permanece sempre aberto a novas chegadas.

dás. Esta decisão baseia-se na comparação entre a quantidade de trabalho acumulado no sistema no instante t , X_t , e um valor crítico k . Quando $X_t < k$, o servidor utiliza a menor taxa de serviço; quando $X_t \geq k$, o servidor utiliza a maior taxa de serviço. Neste trabalho consideram-se custos de espera de clientes, de ociosidade do servidor, de troca da taxa de serviço e um custo que depende da taxa de serviço empregada. Cohen mostra como obter o valor de k que minimiza o custo médio por unidade de tempo.

O modelo de controle adotado por Cohen (1976) é um caso particular do modelo de controle adotado neste trabalho, quando $k_2 = \infty$. A sua estrutura de custos, obviamente, não contém o custo de perda de clientes, pois a entrada do sistema está sempre aberta.

Marins (1981) considera uma fila $M/G/1$ com duas taxas de serviço disponíveis e com entrada controlada (veja também Marins e Morais, 1981). Em qualquer instante de tempo, toma-se uma decisão sobre a taxa de serviço a ser empregada e sobre o fechamento ou não do sistema a novas chegadas. Esta decisão baseia-se na comparação entre a quantidade de trabalho acumulado no sistema no instante t , X_t , e um valor crítico k . Quando $X_t < k$, mantém-se aberto o acesso ao servidor e este opera com a menor taxa de serviço; quando $X_t \geq k$, fecha-se o acesso ao servidor e este opera com a maior taxa de serviço. Neste trabalho consideram-se um custo de espera de clientes e um retorno que depende da taxa de serviço empregada. Marins obtém uma equação implícita, cuja única solução positiva é o valor de k que maximiza o retorno médio por unidade de tempo.

O modelo de controle adotado por Marins (1981) é um caso particular do modelo de controle adotado neste trabalho, quando $k_1 = k_2 = k$. A sua estrutura de retornos e custos não contém os custos de ociosidade do servidor, de perda de clientes e de troca da taxa de serviço.

A seguir descreve-se o conteúdo do presente artigo. A Seção 2 contém a descrição detalhada do modelo de controle. A Seção 3 apresenta a expressão do retorno médio por unidade de tempo e, para o caso particular de uma fila $M/M/1$ em que $k_1 = k_2 = k$ ou que $k_2 = \infty$, fornece uma equação implícita, cuja única solução positiva é o valor de k que maximiza o retorno médio por unidade de tempo. A Seção 4 contém aplicações numéricas à fila $M/M/1$ e comparações com os modelos já citados que consideram $k_2 = \infty$ (Cohen, 1976) e $k_1 = k_2$ (Marins, 1981).

2. DESCRIÇÃO DO MODELO DE CONTROLE

Considera-se uma fila M/G/1 em que as chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson a uma taxa $\lambda > 0$. Se o sistema está aberto, os clientes juntam-se à fila; caso contrário, eles são perdidos. Denota-se por $\{Y_n\}$ a sequência formada pelas quantidades de trabalho demandadas por chegadas sucessivas e admite-se que $\{Y_n\}$ é formada por variáveis aleatórias independentes, com a mesma função de distribuição de probabilidades $B(\cdot)$. Considera-se que $B(\cdot)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

- a) $B(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$, com $B(0) = 0$;
- b) $E(Y_n) = \beta < \infty$;
- c) $E(Y_n^2) = \beta_2 < \infty$ e $E(Y_n^3) = \beta_3 < \infty$.

A disciplina de atendimento é de acordo com "Primeiro a Entrar, Primeiro a Ser Atendido". A quantidade de trabalho existente no sistema é processada de acordo com uma taxa de serviço $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2\}$, onde $\sigma_2 > \sigma_1$. Definem-se as intensidades de tráfego como:

$$a_1 = \lambda\beta/\sigma_1 \quad \text{e} \quad a_2 = \lambda\beta/\sigma_2,$$

e admite-se que $a_2 < 1$.

Associado a este modelo de filas existe o processo estocástico $\{X_t; t \geq 0\}$, onde X_t é a quantidade de trabalho acumulado no sistema no instante t . Se $X_t < k_1$, mantém-se o sistema aberto e usa-se σ_1 . Se $k_1 \leq X_t \leq k_2$, mantém-se o sistema aberto e usa-se σ_2 . Finalmente, se $X_t > k_2$, fecha-se o sistema para novas chegadas e usa-se σ_2 .

Admite-se a seguinte estrutura de retornos e custos:

- a) retorno à taxa $r_i > 0$ enquanto estiver em uso a taxa de serviço σ_i ($i=1, 2$);
- b) custo de espera avaliado por $c_1 X_t$ se $X_t < k_1$, por $c_2 X_t$ se $k_1 \leq X_t \leq k_2$ e por $c_3 X_t$ se $X_t > k_2$;
- c) custo de ociosidade $h > 0$ por unidade de tempo, cobrado enquanto o servidor permanecer ocioso;
- d) custo de perda de clientes $p > 0$ por unidade de tempo, cobrado enquanto o acesso à estação de serviços estiver fechado;
- e) custo de troca de taxa de serviço, avaliado por $f_1 > 0$ se a troca for de σ_1 para σ_2 e por $f_2 > 0$ se for de σ_2 para σ_1 .

A função objetivo a ser maximizada é a função retorno médio por unidade de tempo, $G(k_1, k_2)$, definida por:

$$G(k_1, k_2) = R(k_1, k_2) - T(k_1, k_2) - I(k_1, k_2) - P(k_1, k_2) - S(k_1, k_2),$$

onde:

$R(k_1, k_2)$ = ganho médio por unidade de tempo devido ao uso das taxas de serviço;

$T(k_1, k_2)$ = custo médio de espera por unidade de tempo;

$I(k_1, k_2)$ = custo médio de ociosidade por unidade de tempo;

$P(k_1, k_2)$ = custo médio devido ao fechamento do sistema por unidade de tempo;

$S(k_1, k_2)$ = custo médio por unidade de tempo de troca da taxa de serviço de σ_1 para σ_2 e vice-versa.

3. EXPRESSÃO DO RETORNO MÉDIO POR UNIDADE DE TEMPO

A expressão seguinte para o retorno médio por unidade de tempo associado ao modelo de controle considerado neste trabalho foi obtida por Costa (1983, Equação 3.12):

$$G(k_1, k_2) = r_1[V(0)W_1(k_1) - V(0)] + r_2[1 - V(0)W_1(k_1)] -$$

$$- \left[c_1 \int_0^{k_1} x dV(x) + c_2 \int_{k_1}^{k_2} x dV(x) + c_3 \int_{k_2}^{\infty} x dV(x) \right] -$$

$$- hV(0) - p[1 - V(0)W_2(k_2)] - [(f_1 + f_2)\sigma_1]V(0) \frac{dW_1(k_1)}{dk_1}, \quad (1)$$

onde $V(x)$ é a distribuição estacionária do trabalho acumulado no sistema, ou seja, $V(x) = \Pr(X_t \leq x)$, expressa por:

$V(x) = V(0)W_1(x)$ para $0 < x < k_1$, com:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-sx} dW_1(x) = \left[1 - a_1 \left(\frac{1 - B(s)}{\beta s} \right) \right]^{-1};$$

$V(x) = V(0)W_2(x)$ para $k_1 \leq x \leq k_2$, com:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-sx} dW_2(x) = \frac{1 + (1 - a_2/a_1) \int_0^{k_1} e^{-sx} dW_1(x)}{1 - a_2 \left(\frac{1 - B(s)}{\beta s} \right)};$$

$V(x) = V(0)W_3(x)$ para $x > k_2$, com:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dW_3(x) = 1 + a_2 \left(\frac{1-B(s)}{\beta s} \right) + a_2 \left(\frac{1-B(s)}{\beta s} \right) \int_{k_1}^{k_2} e^{-sx} dW_2(x) \\ + \left[1 - a_2/a_1 + a_2 \left(\frac{1-B(s)}{\beta s} \right) \right] \int_0^{k_1} e^{-sx} dW_1(x);$$

e onde $V(0)$ é a porcentagem de tempo em que o servidor permanece ocioso:

$$V(0) = \left[a_2/a_1 + a_2 W_2(k_2) + (1 - a_2/a_1) W_1(k_1) \right]^{-1}.$$

Para o caso particular em $k_2 = \infty$, a Expressão 1 reduz-se a, chamando $k_1 = k$ (Costa, 1983, Apêndice A):

$$G(k) = A + V(0) \left[B W_1(k) + C + D \int_0^k x dW_1(x) + E dW_1(k)/dk \right], \quad (2)$$

onde:

$$V(0) = \left[\frac{a_2}{a_1(1-a_2)} + \frac{1-a_2/a_1}{1-a_2} W_1(k) \right]^{-1};$$

$$A = h_2 - c_2 \frac{a_2}{1-a_2} \left(\frac{\beta_2}{2\beta} \right);$$

$$B = r_1 - r_2;$$

$$C = -(r_1 - h);$$

$$D = - \left[c_1 - c_2 \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{1-a_1}{1-a_2} \right) \right];$$

$$E = - (f_1 + f_2) \sigma_1.$$

A Expressão 2 é idêntica à expressão de custos obtida por Cohen (1976), quando se considera o uso das taxas de serviço como um custo para o sistema. A prova disto encontra-se em Costa (1983, Apêndice A).

Na análise de $G(k)$ dada pela Expressão 2, o termo que envolve o custo de troca da taxa de serviço exige uma investigação da derivada segunda de $W_1(k)$, que nem sempre existe e, quando existe, pode ter um comportamento razoavelmente irregular (Cohen, 1976). Porém, para o caso particular de uma fila M/M/1, que é a fila considerada nas aplicações numéricas da Seção 4, a derivada segunda de $W_1(k)$ existe e tem um comportamento regular. A expressão de $W_1(k)$ para a fila M/M/1 pode ser facilmente obtida, uma vez que, para este caso, a função de distribuição de probabilidades da quantidade de trabalho demandada por chegada, $B(\cdot)$, é:

$$B(x) = 1 - \exp(-x/\beta), \quad x \geq 0;$$

portanto:

$$B(s) = 1/(1+\beta s)$$

e

$$W_1(x) = \frac{1}{1-a_1} [1 - a_1 \exp(-(1-a_1)x/\beta)]. \quad (3)$$

O valor de k , k^* , que maximiza o retorno médio por unidade de tempo dado pela Expressão 2, para a fila M/M/1 e para $D < 0$ e $Ba_2 - C(a_1 - a_2) + Ea_1(a_2 - 1)/\beta > 0$, pode ser obtido a partir da seguinte expressão (Costa, 1983, Apêndice A):

$$k^* + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_2}\right) \int_0^{k^*} W_1(x) dx = -\frac{B}{D} + \frac{C}{D} \left(\frac{a_1 - a_2}{a_2}\right) - \frac{E}{D} \left[\frac{a_1(a_2 - 1)}{a_2\beta}\right]. \quad (4)$$

A Expressão 4 será utilizada nas aplicações numéricas da Seção 4.

Para o caso particular em que $k_1 = k_2 = k$, a Expressão 1 reduz-se a (Costa, 1983, Equação 3.18):

$$G(k) = A + V(0) \left[B \int_0^k x dW_1(x) + CW_1(x) + D + E \frac{dW_1(k)}{dk} \right], \quad (5)$$

onde:

$$V(0) = [a_2/a_1 + (1 + a_2 - a_2/a_1)W_1(k)];$$

$$A = r_2 - p;$$

$$B = -[c_1 + c_2(a_2 - a_2/a_1)];$$

$$C = r_1 - r_2 + p - c_2 a_2 \left(\frac{\beta_2}{2\beta}\right);$$

$$D = -(r_1 + h);$$

$$E = -(f_1 + f_2)\sigma_1.$$

A expressão 5 é idêntica à expressão do retorno obtida por Marins (1981), quando se consideram apenas os retornos pelo uso das taxas de serviço e o custo de espera, não se considerando, portanto, os custos de ociosidade, de perda de clientes e de troca da taxa de serviço. A prova disto encontra-se em Costa (1983, Apêndice B).

Na análise de $G(k)$ dada pela Expressão 5, novamente o termo que envolve o custo de troca da taxa de serviço exige uma investigação da derivada segunda de $W_1(k)$, que, como já foi mencionado,

nem sempre existe e, quando existe, pode ter um comportamento razoavelmente irregular. Nas aplicações numéricas da Seção 4 será analisada a fila M/M/1, para a qual se utiliza a Expressão 3 que fornece $W_1(x)$.

O valor de k , k^* , que maximiza o retorno médio por unidade de tempo dado pela Expressão 5, para a fila M/M/1 e para $B < 0$ e $C(a_2/a_1) - D(1+a_2-a_2/a_1) - E/B > 0$, pode ser obtido a partir da seguinte expressão (Costa, 1983, Equação 3.26):

$$k^* + (a_1/a_2 + a_1 - 1) \int_0^{k^*} W_1(x) dx = -\left(\frac{C}{B}\right) + \left(\frac{D}{B}\right)(a_1/a_2 + a_1 - 1) + \left(\frac{E}{B}\right)\left(\frac{a_1}{a_2 B}\right) \quad (6)$$

A Expressão 6 será utilizada nas aplicações numéricas da Seção 4.

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS PARA A FILA M/M/1

Para efeito de comparação numérica, consideram-se a seguir três tipos diferentes de controle que atuam em uma fila M/M/1, a saber:

Controle A: é um controle de um único nível crítico k , que atua sobre a estação de serviços da seguinte maneira: se $X_t < k$, mantém-se o seu acesso aberto e utiliza-se a menor taxa de serviço; se $X_t \geq k$, mantém-se o seu acesso aberto e utiliza-se a maior taxa de serviço. Este tipo de controle é o adotado por Cohen (1976).

Controle B: é um controle de um único nível crítico k , que atua sobre a estação de serviços da seguinte maneira: se $X_t < k$, mantém-se o seu acesso aberto e utiliza-se a menor taxa de serviço; se $X_t \geq k$, mantém-se o seu acesso fechado e utiliza-se a maior taxa de serviço. Este tipo de controle é o adotado por Marins (1981).

Controle C: é um controle de dois níveis críticos k_1 e k_2 , que atua sobre a estação de serviços da seguinte maneira: se $X_t < k_1$, mantém-se o seu acesso aberto e utiliza-se a menor taxa de serviço; se $k_1 \leq X_t \leq k_2$, mantém-se o seu acesso aberto e utiliza-se a maior taxa de serviço; se $X_t > k_2$, mantém-se o seu acesso fechado e utiliza-se a maior taxa de serviço.

O valor de k , k^* , que maximiza o retorno médio por unidade de tempo quando está em uso a política de controle A, é obtido a par

tir da Expressão 4, e quando está em uso a política de controle B é obtido a partir da Expressão 6. Quando está em uso a política de controle C, os valores de k_1 e k_2 , k_1^* e k_2^* , que maximizam o retorno médio por unidade de tempo, são obtidos a partir da Expressão 1 com o auxílio de métodos de programação não-linear (Luenberger, 1973), após uma verificação numérica da convexidade da função na região que contém o ponto ótimo. Para a escolha da direção de busca utiliza-se o método de Fletcher-Powell, e para a busca unidirecional utiliza-se o método de Newton-Raphson.

Consideram-se nestas aplicações numéricas três problemas, para os quais se fixam os seguintes valores dos parâmetros das distribuições envolvidas:

$$\lambda = 12,0 \text{ chegadas/u.t.}; \beta = 1/3 \text{ u.s./chegada,}$$

onde u.t. significa unidade de tempo e u.s. significa unidade de serviço.

Para os três problemas os custos são fixos, porém os ganhos pelo uso das taxas de atendimento são fornecidos pela seguinte expressão:

$$r_i = -0,1 \sigma_i^2 + 2,0 \sigma_i \text{ (u.m./u.t.)}, i=1,2, \quad (7)$$

onde u.m. significa unidade monetária.

O significado da Expressão 7 é o seguinte: à medida que aumenta a taxa de serviço obtém-se um maior ganho pelo seu uso, até um valor máximo que ocorre para $\sigma_1 = 10,0$; a partir deste valor um aumento da taxa do serviço reduz o ganho.

Nas aplicações numéricas fixa-se o valor da menor taxa de serviço em $\sigma_1 = 5,0$ e varia-se o valor da maior taxa de serviço. Desta forma, determina-se não só o valor ótimo do nível crítico k , ou os valores ótimos dos níveis críticos k_1 e k_2 , como também a melhor relação entre as taxas de serviço $A_0 = \sigma_2/\sigma_1$, $A_0 \geq 1$, de forma a maximizar o retorno médio por unidade de tempo.

Problema 1: Comparação entre os resultados obtidos com o controle A e os obtidos com o controle B.

Este problema está dividido em duas partes:

Parte I:

Nesta primeira parte fixam-se os valores dos seguintes custos:

$$c_1 = c_2 = 8,0 \text{ u.m./ (u.s., u.t.)};$$

$$h = 1,0 \text{ u.m./u.t.};$$

$$(f_1 + f_2) = 0,5 \text{ u.m./troca de taxa.}$$

Para a fila submetida ao controle A, os resultados encontram-se na primeira linha da Tabela 4.1; para a fila submetida ao controle B, os resultados encontram-se na segunda, terceira e quarta linhas desta tabela.

TABELA 4.1

RESULTADOS DO PROBLEMA 1 - PARTE 1

CONTROLE		A_o^*	k^* (u.s.)	$G(k^*)$ (u.m./u.t.)
A		2,4	0,8593	0,7069
B	$p=0$ (u.m./u.t.)	2,0	0,8512	0,8938
	$p=1,0$ (u.m./u.t.)	2,2	0,8911	0,8144
	$p=3,0$ (u.m./u.t.)	2,4	0,9469	0,6732

Pela Tabela 4.1 nota-se que, para valores moderados de p , o uso do modelo de controle B leva a maiores retornos que os obtidos com o modelo de controle A. Porém, para valores maiores de p , o uso do modelo de controle A torna-se mais interessante.

No intuito de procurar alguma situação em que o uso do modelo de controle A possa levar a maiores retornos do que os do modelo de controle B, mesmo para $p=0$, na parte II reduz-se o custo de espera e eleva-se o custo de ociosidade, pois estas mudanças não são interessantes para o modelo de controle B, que admite a possibilidade de fechar o acesso de clientes ao sistema.

Parte II:

Nesta segunda parte do Problema 1, fixam-se os valores dos seguintes custos:

$$c_1 = c_2 = 1,0 \text{ u.m.}/(\text{u.s.,u.t.});$$

$$h = 12,0 \text{ u.m./u.t.};$$

$$(f_1 + f_2) = 0,1 \text{ u.m./troca de taxa};$$

$$p = 0.$$

Para a fila submetida ao controle A, os resultados encontram-se na primeira linha da Tabela 4.2; para a fila submetida ao controle B, os resultados encontram-se na segunda linha desta tabela.

TABELA 4.2
RESULTADOS DO PROBLEMA 1 - PARTE II

CONTROLE	A^*_o	k^* (u.s.)	$G(k^*)$ (u.m./u.t.)
A	1,6	4,5342	2,3325
B	1,8	5,0468	2,3240

Pela Tabela 4.2 pode-se verificar que o uso do modelo de controle A leva a um maior retorno que o obtido com o modelo de controle B. Portanto, mesmo para $p=0$ nem sempre o uso do modelo de controle B leva a maiores retornos do que os do modelo de controle A.

No próximo problema, verifica-se o que acontece na situação descrita no Problema 1, Parte II, quando se utiliza o modelo de controle C.

Problema 2: Comparação entre os resultados obtidos com o controle A e os obtidos com o controle C.

Para o Problema 2, adotam-se para os parâmetros do modelo, aqui apresentado, os mesmos valores utilizados no Problema 1, Parte II, ou seja:

$$c_1=c_2=c_3= 1,0 \text{ u.m./}(u.t., \text{ u.s.});$$

$$h= 12,0 \text{ u.m./u.t.};$$

$$(f_1+f_2)=0,1 \text{ u.m./troca de taxa};$$

$$p=0.$$

Para a fila submetida ao controle A, os resultados encontram-se na primeira linha da Tabela 4.3; para a fila submetida ao controle C, os resultados encontram-se na segunda linha desta tabela.

TABELA 4.3

RESULTADOS DO PROBLEMA 2

CONTROLE	A_0^*	k^* (u.s.)		$G(k^*)$ (u.m./u.t.)
A	1,6	4,5342		2,3325
CONTROLE	A_0^*	k_1^* (u.s.)	k_2^* (u.s.)	$G(k_1^*, k_2^*)$ (u.m./u.t.)
C	1,6	4,5308	6,0190	2,3325

Nota-se pela Tabela 4.3 que o nível crítico k_1^* está próximo do nível crítico k^* , enquanto k_2^* se afasta bastante do nível k^* . Isto confirma a conclusão do Problema 1, Parte II, ou seja, na situação em que o custo de espera é pequeno em comparação com o custo de ociosidade, não é interessante fechar o acesso de clientes ao sistema.

No próximo problema, comparam-se os resultados obtidos quando se utiliza o modelo de controle B com os obtidos quando se utiliza o modelo de controle C.

Problema 3: Comparação entre os resultados obtidos com o controle B e os obtidos com o controle C.

Para o Problema 3, fixam-se os valores dos seguintes custos:
 $c_1=c_2=c_3= 8,0$ u.m./(u.t., u.s.);

$h= 1,0$ u.m./u.t.;

$(f_1+f_2)= 0,5$ u.m./troca de taxa.

Para a fila submetida ao controle B, os resultados encontram-se nas quatro primeiras linhas da Tabela 4.4; para a fila submetida ao controle C, os resultados encontram-se nas quatro últimas linhas desta tabela.

Pela Tabela 4.4 pode-se observar que, à medida que se reduz o valor de p , os dois níveis críticos k_1^* e k_2^* aproximam-se do nível crítico k^* (é interessante observar que o nível crítico k^* está sempre entre os dois níveis críticos k_1^* e k_2^*) e, portanto, o valor de $G(k^*)$ aproxima-se do valor de $G(k_1^*, k_2^*)$ (é interessante observar que sempre $G(k_1^*, k_2^*) \geq G(k^*)$).

TABELA 4.4

RESULTADOS DO PROBLEMA 3

CONTROLE	P (u.m./u.t.)	A_0^*	k^* (u.s.)	$G(k^*)$ (u.m./u.t.)	
B	3,0	2,4	0,9469	0,6732	
	1,5	2,2	0,9020	0,7775	
	0,33	2,1	0,8678	0,8671	
	0	2,0	[*] 0,8512	0,8938	
CONTROLE	P (u.m./u.t.)	A_0^*	k_1^* (u.s.)	k_2^* (u.s.)	$G(k_1^*, k_2^*)$ (u.m./u.t.)
C	3,0	2,3	0,8569	1,4909	0,7471
	1,5	2,2	0,8594	1,1221	0,7954
	0,33	2,1	0,8677	0,8702	0,8671
	0	2,0	0,8512	0,8512	0,8938

5. CONCLUSÕES

Neste artigo considerou-se uma fila M/G/1 submetida a um modo de controle de dois níveis críticos, k_1 e k_2 , o qual atua tanto no processo de serviços quanto no de chegadas.

Das aplicações numéricas da Seção 4 pode-se verificar que o uso do modelo de controle C, adotado neste trabalho, sempre leva a retornos maiores ou, no mínimo, iguais aos obtidos com o modelo de controle A, e esta última situação ocorre quando o valor de $k_2 \rightarrow \infty$. Além disso, pode-se verificar também que o uso do modelo de controle C sempre leva a retornos maiores ou, no mínimo, iguais aos obtidos com o modelo de controle B, e esta última situação ocorre quando os valores de k_1 e k_2 aproximam-se do valor de k . Quanto aos modelos de controle A e B, a vantagem, em termos de retorno, de utilizar um ou outro dependerá dos valores dos parâmetros do modelo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COHEN, J.W. (1976) On the optimal switching level for an M/G/1 queueing system. *Stochastic Processes and Their Applications*, 4:297-316, 1976.

- COSTA, A.F.B. (1983) *Um problema de otimização em controle da quantidade de trabalho acumulado numa fila M/G/1*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- CRABILL, T.B.; GROSS, D.; MAGAZINE, M.J. (1977) A classified bibliography of research on optimal design and control of queues. *Operations Research*, 25(2):219-232.
- LUENBERGER, D.G. (1973) *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Reading, Addison-Wesley.
- MARINS, F.A.S. (1981) *Controle ótimo do processo de chegadas e da taxa de atendimento de um sistema de filas M/G/1*. Tese de Mestrado em Pesquisa Operacional. São José dos Campos, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- MARINS, F.A.S.; MORAIS, P.R. (1981) Controle ótimo de uma fila M/G/1. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, XIV, Vitória, 1981. *Anais*. Vitória, Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. v. I, p. 201-211.