1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2272-PRE/052		*Nov., 1981*	☐ Interna ☒ Externa
4. Origem *DSE*	Programa *DIN*		☐ Restrita

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

MÉTODOS NUMÉRICOS
DISPERSÃO E ESTABILIDADE DE ESQUEMAS MULTIPASSOS

7. C.D.U.: *519.63*

8. Título *INPE-2272-PRE/052*

SOLUÇÃO E ANÁLISE DE EQUAÇÕES DO TIPO $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v}{R_e}\frac{\partial u}{\partial x}$ *+ "OUTROS TERMOS" = 0 ONDE OS OUTROS TERMOS CONTÊM DERIVADAS EM* x *E* y

10. Páginas: *06*

11. Última página: *05*

12. Revisada por

Luiz Alberto V. Dias

9. Autoria *Antonio Eduardo Costa Pereira*

Assinatura responsável Antonio Eduardo Costa Pereira

13. Autorizada por

Parada

Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

Discute-se o método de Petrov para a geração de esquemas multipassos que permitem o tratamento numérico dos termos de advecção que aparecem em equações de ventos termosféricos. Experimentos numéricos mostram que tais esquemas permitem conservar comprimentos de onda pequenos sem incorrer em instabilidade, sofrendo, porém, dispersão.

15. Observações *Submetido para apresentação no Seminário INPE-LCC, a se realizar entre 25 e 27 de novembro de 1981, Rio de Janeiro, RJ.*

SOLUÇÃO E ANÁLISE DE EQUAÇÕES DO TIPO $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v}{R_e}\frac{\partial u}{\partial x}$ + "OUTROS TERMOS" = 0 ONDE OS OUTROS TERMOS CONTÊM DERIVADAS EM x E z

Antonio Eduardo Costa Pereira

Instituto de Pesquisas Espaciais
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Caixa Postal 515 - 12200 - São José dos Campos, SP

INTRODUÇÃO

Descreve-se um programa para resolver um sistema de equações, usado em geofísica, qual seja:

Equação da termodinâmica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{g\ e^{z}}{P_0 c_p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K_T}{H}\frac{\partial T}{\partial z}\right) - aT - \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(T_0 + T) -$$

$$- \omega\left[\frac{\partial}{\partial z}(T_0 + T) + \frac{R(T_0 + T)}{mc_p}\right] + \frac{Q}{c_p} \tag{1}$$

Equação de momento na direção este:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ge^{z}}{P_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K_m}{H}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + (f - \lambda_{xy})\,v - \lambda_{xx}u - \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} -$$

$$- \omega\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uv}{r}\tan\theta + F_x \tag{2}$$

Equação de momento na direção norte:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{ge^{z}}{P_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K_m}{H}\frac{\partial v}{\partial z}\right) - (f - \lambda_{xy})\,u - \lambda_{yy}v - \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} -$$

$$- \omega\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2}{r}\tan\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + F_y \tag{3}$$

Equação da hidrostática:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{m} \tag{4}$$

Equação da continuidade:

$$\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\cos\theta) + e^{z}\frac{\partial}{\partial z}(e^{-z}\omega) = 0 \tag{5}$$

Nestas equações, as variáveis independentes são t, $z = \ln(p_0/p)$ e latitude θ. As variáveis dependentes são Φ, T, u, v, ω. Φ e T são mudanças do geopotencial e da temperatura em relação a seus valores iniciais Φ_0 e T_0, e u, v e ω são dados pelas expressões:

$$u = r\cos\theta\,\frac{d\phi}{dt}$$

$$v = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{dz}{dt}$$

onde r é o raio da terra;

ϕ é a longitude;

z é a altura;

Q é a soma do aquecimento Joule e do aquecimento viscoso, isto é:

$$Q = \frac{\sigma_p}{\rho}(\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B})^2 + \frac{1}{\rho}\frac{K_m}{H^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]$$

F_x e F_y são as componentes de $\underline{L}$ (aceleração de Lorentz), soma das às acelerações devido a gradientes de pressão, isto é:

$$\underline{F} = \left[\frac{1}{\rho}\,\underline{J} \times \underline{B} - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\theta}\right] = [F_x,\ F_y]$$

$$\underline{J} = \sigma_p\,(\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}) - \sigma_H\,(\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}) \times (\underline{B}/B)$$

onde $\underline{B}$ e B são o vetor campo magnético e seu módulo, respectivamente; $\underline{E}$ é o *campo elétrico*; σ_p e σ_H são as condutividades Pederson e Hall, respectivamente; e ρ é a densidade do meio.

$$\lambda_{xx} = \left(\frac{\sigma_p B^2}{\rho}\right) = \lambda_{yy}/\mathrm{sen}^2 I$$

$$\lambda_{xy} = \lambda_{yx} = \left(\frac{\rho_H B^2}{\rho}\right) \mathrm{sen}\ I$$

c_p é o calor específico à pressão constante;
K_m é o coeficiente de viscosidade;
K_T é o coeficiente de condução de calor;
f é o fator de Coriolis;
g é a constante gravitacional;
I é a inclinação do campo magnético;
H é o "gradus scalae";
m é a massa molecular média.

MÉTODO DE SOLUÇÃO

O procedimento numérico para resolver as Equações 1 a 5 é uma modificação do método usado por Dickinson et alii (1975). A modificação está no tratamento da diferenciação horizontal. Dickinson et alii (1975) realizaram esta diferenciação usando diferenças finitas explícitas. Isto leva a uma instabilidade na solução, que só pode ser controlada filtrando os comprimentos de onda menores ou introduzindo uma viscosidade artificial. No programa dos autores acima citados, os dois recursos foram usados. Os usuários deste programa queriam conservar esses comprimentos de onda e, por isto, o seguinte esquema de solução foi utilizado.

Realizam-se as discretizações das derivadas primeiras (espaciais horizontais e temporais), usando-se o clássico método de Petrov-Galerkin, isto é, as discretizações geradas a partir da expressão

$$(u', \omega_j) = (1, \omega_j),$$

onde

$$\omega_j = N_j + \alpha\sigma_2 \left(\frac{X}{h} - j\right) = N_j + \alpha\sigma_2(x)$$

$$x = \frac{X}{h} - j$$

$$\sigma_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad |x| > 1 \\ -3\ x\ (1-x) & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\sigma_2(-x) & \text{para} \quad -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

N_j é a função interpoladora (neste caso, linear) e σ_2 é uma função perturbadora.

Usou-se $\alpha = 0$ para o tempo e para o espaço a fim de desenvolver as equações no tempo, nos nós da grade, isto é, para calcular $u(x_0,t_{+1})$, conhecido $u(x_0,t_{-1})$. O problema é que o tipo de discretização usada gera necessidade de conhecer $u(x_{1/2}, t_0)$ e $u(x_{-1/2},t_0)$ (ou seja, precisa-se do valor das funções nos entre-nós e no entre-tempo. Os valores das funções nos entre-nós, no infra-tempo, podem ser estimados, simplesmente mudando-se a sua fase por meio de um filtro de convolução g:

$$u(x_{1/2},t_{-1}) = (u * g) = \sum_{i=0}^{j-1} g_i\ u_{j-i-1}$$

Por exemplo, caso se use: $g_0 = 1/2$, $g_1 = 0$, $g_2 = 1/2$, $g_{i,i>2} = 0$, obtêm-se, para os entre-nós no infra-tempo, a seguinte aproximação:

$$\frac{1}{2}\ (u(x_{+1},t_{-1}) + u(x_0,t_{-1})).$$

Para calcular o valor das funções nos entre-nós e no entre-tempo, usa-se o esquema já descrito, com $\alpha = 1$ para o tempo e $\alpha = 0$ para o espaço.

RESULTADOS

Testes com o modelo indicam que as instabilidades são bem controladas, mantendo-se o número de Courant menor que 1. Apesar de estável, o sistema ainda pode sofrer dispersão numérica. Argumentos para um sistema de equações muito mais simples indicam que a velocidade de fase de ondas de gravidade modificada por um fator $\frac{\text{sen } 2k\Delta x}{2k\Delta x}$ devido à natureza discreta do modelo. Aqui, k é o número de onda das ondas reais, e Δx é a distância entre os nós. Para ondas curtas excitadas por fortes gradientes, o fator acima pode diferir significantemente da unida de. Porém, verificou-se que este problema pode ser minimizado, usando-se valores de Δx suficientemente pequenos.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

DICKINSON, R.E.; RIDLEY, E.C.; ROBLE, R.G. Meridional circulation in the thermosphere, I, Equinox conditions. J. Atmosph. Sci., 32(9): 1737-1742, Sept. 1975.