



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/12.04.14.14-TDI

ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA BINÁRIO, SÍNCRONO, COM DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA

Leandro Forne Brejão

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Diogo Merguizo Sanchez, aprovada em 12 de dezembro de 2018.

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3SB856P>

INPE
São José dos Campos
2019

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GBDIR)
Serviço de Informação e Documentação (SESID)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

**COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO
DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):****Presidente:**

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos
Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas
(CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia
Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra
(CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação
(SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Murilo Luiz Silva Gino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/12.04.14.14-TDI

ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA BINÁRIO, SÍNCRONO, COM DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA

Leandro Forne Brejão

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Diogo Merguizo Sanchez, aprovada em 12 de dezembro de 2018.

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3SB856P>

INPE
São José dos Campos
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Brejão, Leandro Forne.

B749a Análise dinâmica de um sistema binário, síncrono, com distribuição não uniforme de massa / Leandro Forne Brejão. – São José dos Campos : INPE, 2019.

xxx + 215 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2018/12.04.14.14-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, e Diogo Merguizo Sanchez.

1. Dipolo de Massa. 2. Pontos de equilíbrio. 3. Curvas de velocidade zero. 4. Trajetórias de veículos espaciais. I.Título.

CDU 629.78:533.6.013



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

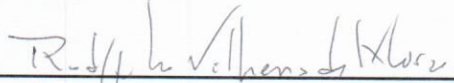
Aluno (a): **Leandro Fome Brejão**

Título: "ANÁLISE DINÂMICA DE UM SISTEMA BINÁRIO, SÍNCRONO, COM DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE MASSA"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Mestre** em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle

Dr. **Rodolpho Vilhena de Moraes**

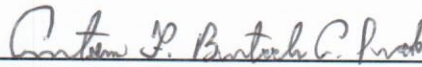


Presidente / INPE / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. **Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado**

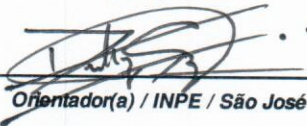


Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. **Diogo Merguizo Sanchez**



Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dra. **Maisa de Oliveira Terra**



Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. **Willer Gomes dos Santos**



Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 12 de dezembro de 2018

“Dai a César o que é de César e a Deus o que é de Deus”.

Mc 12,17

A meus pais

AGRADECIMENTOS

A Deus.

À Virgem Maria.

Agradeço aos meus orientadores, Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Dr. Diogo Merguizo Sanchez, pelo inestimável auxílio, pelos ensinamentos e pela compreensão.

Agradeço ao amigo Leonardo Barbosa Torres dos Santos pela ajuda oferecida.

A meus pais, Silvia Forne Brejão e Antônio Sérgio Brejão pelos valiosos incentivos e pela companhia.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo incentivo financeiro gentilmente concedido à realização deste estudo.

RESUMO

O desenvolvimento de missões espaciais que têm por alvo pequenos corpos celestes, a saber, asteroides e cometas, é relativamente recente no histórico da ciência e engenharia espaciais. Neste estudo desenvolve-se o modelo físico de um sistema de asteroides duplo constituído por um corpo principal, mais massivo e assumido como esférico e homogêneo, e por um corpo menor, irregular e alongado, dotado de rotação em torno de seu eixo de maior momento de inércia. Neste sentido, o corpo mais massivo do sistema é modelado como partícula e assume-se o corpo menos massivo como sendo um dipolo de massa em rotação. Considerou-se que os pontos de massa que compõem o dipolo em rotação apresentam massas diferentes, o que implica em um dipolo assimétrico e assumiu-se sincronia entre o movimento de translação do dipolo em torno do baricentro do sistema com o movimento de rotação do dipolo em torno de seu próprio centro de massa, o que leva à ressonância spin-órbita no movimento do asteroide. O movimento composto deste corpo é confinado ao plano de movimento do corpo principal. Mediante este modelo, determinam-se as posições dos pontos de equilíbrio do sistema e estudam-se as curvas de velocidade zero do mesmo. Para tanto, recorre-se à teoria do Problema Restrito de Três Corpos Clássico. Notou-se que o modelo em estudo preserva a quantidade de pontos de equilíbrio do problema tradicional. Além disso, os pontos de equilíbrio adjacentes ao dipolo são os que sofreram maiores deslocamentos em sua localização quando tais resultados são comparados com o Problema Restrito de Três Corpos Clássico, que é adotado como problema de referência, de modo a se enfatizar a influência do alongamento de um dos corpos sobre a dinâmica do sistema. Por fim, analisou-se diferentes configurações de condições iniciais para o movimento de uma partícula de prova em órbita ao redor do dipolo e no mesmo plano dos corpos do sistema, obtendo-se, com isso, o tempo de permanência dessa partícula no sistema antes que a mesma colida com algum asteroide que o constitui ou sofra ejeção gravitacional desse sistema.

Palavras-chave: Dipolo de Massa. Pontos de Equilíbrio. Curvas de Velocidade Zero. Trajetórias de Veículos Espaciais.

DYNAMIC ANALYSIS OF A SYNCHRONOUS BINARY SYSTEM WITH NON-UNIFORM MASS DISTRIBUTION

ABSTRACT

The development of space missions targeting small celestial bodies, namely asteroids and comets, is relatively recent in the history of space science and engineering. In this study, the physical model of a double asteroid system constituted by a main body, more massive and assumed as spherical and homogeneous, and by a smaller, irregular and elongated body, also having rotation around its axis of greatest moment of inertia is developed. In this sense, the most massive body of the system is modeled as a particle and the less massive body is assumed to be a rotating mass dipole. It was considered that the mass points that make up the rotating dipole have different masses, which implies in an asymmetric dipole. It was also assumed synchronism between the movement of translation of the dipole around the barycenter of the system with the movement of rotation of the dipole around its own center of mass, which leads to the spin-orbit resonance in the motion of the asteroid. The movement of this body is confined to the plane of movement of the main body. Using this model, the positions of the equilibrium points of the system are determined and the zero velocity curves of the system are studied. For that, the theory of the Restricted Problem of Three Classical Bodies is used. It was observed that the model under study preserves the amount of equilibrium points of the traditional problem. In addition, the equilibrium points adjacent to the dipole are those that have suffered the greatest displacements in their location when such results are compared with the Classical Three Body Restricted Problem, which is adopted as a reference problem, in order to emphasize the influence of the elongation of one of the bodies on the dynamics of the system. Finally, different configurations of initial conditions were analyzed for the movement of a test particle in orbit around the dipole and in the same plane of the system bodies, obtaining, therefore, the survival time of this particle in the system before that it collides with some asteroid that constitutes or undergoes gravitational ejection of this system.

Key words: Mass Dipole. Equilibrium Points. Zero Velocity Curves. Trajectory of Spacecrafts.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1: Representação do PRTCC.....	22
Figura 2.2: Pontos de equilíbrio do PRTCC.....	30
Figura 2.3: Pontos de Lagrange do PRTCC e curvas de velocidade zero associadas para $\mu = 0,01$	32
Figura 2.4: Representação artística de um sistema binário de asteroides.....	38
Figura 2.5: Representação artística do Primário II em (a) seu equivalente pelo Modelo de Dipolo de Massa em Rotação em (b).....	40
Figura 2.6: Representação artística de um sistema binário de asteroides com primário II em ressonância spin-órbita.	42
Figura 2.7: Movimento aparente do Sol em relação ao baricentro do sistema binário. .	44
Figura 3.1: Representação dos pontos de massa constituintes do sistema binário considerando-se configuração de ressonância spin-órbita para o dipolo.	57
Figura 3.2: Representação dos parâmetros geométricos característicos do sistema.....	60
Figura 3.3: Representação dos vetores posição relativos da partícula de prova a cada ponto de massa constituinte do sistema.....	63
Figura 3.4: Primário II com polo P_{21} mais massivo.....	99
Figura 3.5: Primário II com polo P_{22} mais massivo.....	100
Figura 3.6: Representação artística do sistema considerando-se a distância entre os centroides dos primários como nova escala geométrica.....	102
Figura 3.7: Variação da margem estática adimensionalizada $\delta^*(f, d^*)$ em função dos parâmetros f e d^*	103
Figura 3.8: Representação artística do sistema binário em seus pontos de massa constituintes, desconsiderando-se efeito da margem estática.....	104
Figura 3.9: Variação de $\mu \left \frac{1}{2} - f \right d^*$ em função dos parâmetros f e μ considerando-se $d^* = 0,1$ em (a) e em função dos parâmetros f e d^* , considerando-se $\mu = 0,1$ em (b).....	105
Figura 4.1: Superfície de variação da intensidade do campo potencial composto dos primários do sistema em função da distância a cada ponto de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , considerando-se o referencial sideral (em $t_0^* = 0$), em (a) e o referencial sinódico, em	

(b), assumindo-se $\mu = 0,01$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$. Em (c), projeção de (a) no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e em (d), projeção de (b) no plano sinódico.	121
Figura 4.2: Mapas de aceleração (alcance gravitacional) dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema, em (a), no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e, em (b), no plano sinódico, considerando-se $\mu = 0,01$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$	123
Figura 4.3: Superfície de variação da intensidade do campo potencial composto dos primários do sistema em função da distância a cada ponto de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , considerando-se o referencial sideral (em $t_0^* = 0$), em (a) e o referencial sinódico, em (b), assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$. Em (c), projeção de (a) no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e em (d), projeção de (b) no plano sinódico.	124
Figura 4.4: Mapas de aceleração (alcance gravitacional) dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema, em (a), no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e, em (b), no plano sinódico, considerando-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$	126
Figura 4.5: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido ao primário mais massivo, em (a) e ao dipolo, em (b), tomando-se $\Delta\mu > 0$ (adotados $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$).	129
Figura 4.6: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo. Em (a), adota-se $d^* = 0,01$ e em (b), adota-se $d^* = 0,1$	131
Figura 4.7: Variação das abscissas sinódicas do ponto de equilíbrio L_3 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo. Em (a), adota-se $d^* = 0,01$ e em (b), adota-se $d^* = 0,1$	133
Figura 4.8: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo, assumindo-se $d^* = 0,1$	134
Figura 4.9: Variação das ordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo, assumindo-se $d^* = 0,1$	135
Figura 4.10: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,01$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$	137
Figura 4.11: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,1$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$	138

Figura 4.12: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,2$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$	139
Figura 4.13: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, tomando-se $\Delta d^* > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $f = 0,5$).....	141
Figura 4.14: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta d^* > 0$ para $\mu = 0,01$ em (a) e para $\mu = 0,1$ em (b).	142
Figura 4.15: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,25$ e $d^* = 0,1$	144
Figura 4.16: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$	145
Figura 4.17: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,75$ e $d^* = 0,1$	146
Figura 4.18: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} , em (a) e P_{22} , em (b), tomando-se $\Delta f > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).	148
Figura 4.19: Sobreposição da variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, tomando-se $\Delta f > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).	149
Figura 4.20: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta f > 0$ para $\mu = 0,001$ em (a) e para $\mu = 0,01$ em (b).	151
Figura 4.21: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta f > 0$ para $\mu = 0,1$ em (a) e para $\mu = 0,3$ em (b).	152
Figura 4.22: Representação da localização dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$).	157
Figura 4.23: Representação da variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC), assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.....	159

Figura 4.24: Representação da localização dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$)......	161
Figura 4.25: Representação da variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC), assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.....	163
Figura 4.26: Representação da variação percentual da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ em relação à referência (PRTCC). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.....	167
Figura 4.27: Representação da variação percentual da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ em relação à referência (PRTCC). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.....	169
Figura 4.28: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_1}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.....	171
Figura 4.29: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_2}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.....	172
Figura 4.30: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_3}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$	173
Figura 4.31: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_{4-5}}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$	173
Figura 4.32: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_1}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.....	174
Figura 4.33: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_2}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.....	175
Figura 4.34: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_3}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$	176
Figura 4.35: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_{4-5}}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$	176
Figura 4.36: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_1}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.....	177

Figura 4.37: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_2}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.	178
Figura 4.38: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_3}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$	179
Figura 4.39: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_{4-5}}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$	179
Figura 4.40: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_1}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.	180
Figura 4.41: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_2}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.	181
Figura 4.42: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_3}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$	182
Figura 4.43: Curvas de velocidade associadas a $C_{L_{4-5}}^*$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$	182
Figura 4.44: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* = 0$ (PRTCC – referência) considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), ausência da pressão da radiação solar e em (b) presença da pressão da radiação solar.	189
Figura 4.45: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* = 0$ (PRTCC – referência) considerando-se os primeiros 50 dias do período de integração. Em (a), ausência da pressão da radiação solar e em (b) presença da pressão da radiação solar.	191
Figura 4.46: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,25$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.	193
Figura 4.47: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,5$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.	194
Figura 4.48: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,75$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.	196
Figura 4.49: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,25$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.	198

Figura 4.50: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,5$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada. 200

Figura 4.51: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,75$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada. 202

LISTA DE TABELAS

Pág.

Tabela 2.1: Comparação entre modelos de potencial gravitacional de asteroides alongados e de sistema binário.	13
Tabela 4.1: Comparação das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f , adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e configuração de referência (PRTCC).	156
Tabela 4.2: Variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC) sobre a nova escala geométrica do sistema, assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$).	158
Tabela 4.3: Comparação das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f , adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ e configuração de referência (PRTCC).	160
Tabela 4.4: Variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC) sobre a nova escala geométrica do sistema, assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).	162
Tabela 4.5: Valores da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e no caso de referência (PRTCC).	166
Tabela 4.6: Variação percentual da constante adimensional de Jacobi em relação à referência (PRTCC) associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$	167
Tabela 4.7: Valores da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ e no caso de referência (PRTCC).	168
Tabela 4.8: Variação percentual da constante adimensional de Jacobi em relação à referência (PRTCC) associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$	168
Tabela 4.9: Parâmetros característicos do sistema 2001SN ₂₆₃	186

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

PRTCC	Problema Restrito de Três Corpos Clássico
PRTCCp	Problema Restrito de Três Corpos Completo
NEAs	<i>Near Earth Asteroids</i>
NEOs	<i>Near Earth Objects</i>
PHAs	<i>Potentially Hazardous Asteroids</i>
IAU	<i>International Astronomical Union</i>
JPL	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
IAG	Instituto de Astronomia e Geofísica

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Baricentro do sistema binário
B_{p1}	Centro de massa do primário I
B_{p2}	Centro de massa do primário II
C_{p1}	Centroide do primário I
C_{p2}	Centroide do primário II
P_1	Ponto de massa representativo do primário I
P_{21}	Ponto de massa representativo do polo 1 do dipolo
P_{22}	Ponto de massa representativo do polo 2 do dipolo
P	Ponto de massa representativo da partícula de prova (terceiro corpo)
S_B	Referencial sideral, com origem no baricentro do sistema
\tilde{S}_B	Referencial sinódico, com origem no baricentro do sistema
S_L	Sistema de coordenadas local ao dipolo
S_{p2}	Sistema de coordenadas do corpo (do dipolo)
m_1	Massa do primário I
m_2	Massa do primário II
m_{21}	Massa do polo 1 do dipolo
m_{22}	Massa do polo 2 do dipolo
M	Massa total do sistema binário
a	Raio orbital do primário I
b	Raio orbital do primário II
l	Distância entre os centros de massa dos primários
d_1	Distância do polo 1 do dipolo ao centro de massa do primário II
d_2	Distância do polo 2 do dipolo ao centro de massa do primário II
d	Distâncias entre os polos do dipolo
n	Movimento médio dos primários
t	Instante de tempo (dimensional)
$x(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana inercial da partícula de prova
$y(t)$	Ordenada paramétrica cartesiana inercial da partícula de prova
$\tilde{x}(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana sinódica da partícula de prova
$\tilde{y}(t)$	Ordenada paramétrica cartesiana sinódica da partícula de prova
$x_1(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana inercial do centro de massa do primário I

$x_{21}(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana inercial do polo 1 do dipolo
$x_{22}(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana inercial do polo 2 do dipolo
$y_1(t)$	Ordenada paramétrica cartesiana inercial do centro de massa do primário I
$y_{21}(t)$	Ordenada paramétrica cartesiana inercial do polo 1 do dipolo
$y_{22}(t)$	Ordenada paramétrica cartesiana inercial do polo 2 do dipolo
$\tilde{x}_1(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana sinódica do centro de massa do primário I
$\tilde{x}_{21}(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana sinódica do polo 1 do dipolo
$\tilde{x}_{22}(t)$	Abscissa paramétrica cartesiana sinódica do polo 2 do dipolo
$v_1(t)$	Anomalia verdadeira do centro de massa do primário I
$v_2(t)$	Anomalia verdadeira do centro de massa do primário II
$v_{21}(t)$	Anomalia verdadeira do polo 1 do dipolo
$v_{22}(t)$	Anomalia verdadeira do polo 2 do dipolo
r	Reta de alinhamento dos pontos-massa - condição síncrona
ϖ	Plano de movimento dos primários
$\vec{\omega}_p$	Vetor velocidade angular de translação dos primários em torno de B
$\vec{\omega}_{p2}$	Vetor velocidade angular de rotação do dipolo em torno de B_{p2}
U	Potencial gravitacional do sistema binário
$\ \vec{r}_1\ $	Norma métrica euclidiana do vetor posição relativo da partícula de prova ao primário I em coordenadas siderais
$\ \vec{r}_{21}\ $	Norma métrica euclidiana do vetor posição relativo da partícula de prova ao polo 1 do dipolo em coordenadas siderais
$\ \vec{r}_{22}\ $	Norma métrica euclidiana do vetor posição relativo da partícula de prova ao polo 2 do dipolo em coordenadas siderais
\mathcal{G}	Constante da gravitação universal
μ	Parâmetro de massa do sistema binário
μ^*	Parâmetro de massa do dipolo
d^*	Parâmetro geométrico (adimensional) do dipolo
t^*	Instante de tempo (adimensional)
$r_1^*(t^*)$	Norma métrica euclidiana do vetor posição da partícula de prova em relação ao primário I em coordenadas adimensionalizadas e no referencial sinódico
$r_{21}^*(t^*)$	Norma métrica euclidiana do vetor posição da partícula de prova em relação ao polo 1 do dipolo em coordenadas adimensionalizadas e no referencial sinódico

$r_{22}^*(t^*)$	Norma métrica euclidiana do vetor posição da partícula de prova em relação ao polo 2 do dipolo em coordenadas adimensionalizadas e no referencial sinódico
$\xi(t^*)$	Abscissa paramétrica cartesiana sideral adimensional da partícula de prova
$\eta(t^*)$	Ordenada paramétrica cartesiana sideral adimensional da partícula de prova
$x^*(t^*)$	Abscissa paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$y^*(t^*)$	Ordenada paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$\dot{x}^*(t^*)$	Primeira derivada ordinária temporal da abscissa paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$\dot{y}^*(t^*)$	Primeira derivada ordinária temporal da ordenada paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$\ddot{x}^*(t^*)$	Segunda derivada ordinária temporal da abscissa paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$\ddot{y}^*(t^*)$	Segunda derivada ordinária temporal da ordenada paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
\tilde{U}_C	Pseudo potencial centrífugo
\tilde{U}_G	Potencial gravitacional composto do sistema em coordenadas sinódicas
\tilde{U}	Potencial efetivo do sistema em coordenadas sinódicas
Ω	Potencial gravitacional composto do sistema adimensionalizado
Ω^*	Potencial efetivo do sistema adimensionalizado
$\Omega^*_{x^*}$	Primeira derivada parcial do potencial efetivo em coordenadas sinódicas adimensionalizadas em relação à abscissa paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
$\Omega^*_{y^*}$	Primeira derivada parcial do potencial efetivo em coordenadas sinódicas adimensionalizadas em relação à ordenada paramétrica cartesiana sinódica adimensional da partícula de prova
\tilde{C}	Constante de Jacobi (dimensional)
$\ \vec{v}(t)\ $	Norma métrica euclidiana do vetor velocidade da partícula de prova no sistema sinódico dimensional
C^*	Constante de Jacobi adimensionalizada
$\ \vec{v}^*(t^*)\ $	Norma métrica euclidiana do vetor velocidade da partícula de prova no

sistema sinódico adimensional

f	Fator de massa do dipolo
L_1	Primeiro Ponto de Lagrange (primeiro ponto de equilíbrio)
L_2	Segundo Ponto de Lagrange (segundo ponto de equilíbrio)
L_3	Terceiro Ponto de Lagrange (terceiro ponto de equilíbrio)
L_4	Quarto Ponto de Lagrange (quarto ponto de equilíbrio)
L_5	Quinto Ponto de Lagrange (quinto ponto de equilíbrio)
x_{L_i}	Abcissa do i -ésimo ponto de Lagrange
y_{L_i}	Ordenada do i -ésimo ponto de Lagrange
$C^*_{L_1}$	Constante de Jacobi adimensional associada a L_1
$C^*_{L_2}$	Constante de Jacobi adimensional associada a L_2
$C^*_{L_3}$	Constante de Jacobi adimensional associada a L_3
$C^*_{L_4-5}$	Constante de Jacobi adimensional associada a L_4 e a L_5
δ	Margem estática
C_r	coeficiente de refletividade da superfície do corpo iluminada pelo Sol
P_s	pressão da radiação solar na órbita terrestre (a 1 au)
$\frac{A}{m}$	razão área-massa do corpo
a_0	semi-eixo maior orbital da órbita kepleriana osculadora inicial
e_0	excentricidade orbital da órbita kepleriana osculadora inicial
i_0	inclinação do plano orbital da órbita kepleriana osculadora inicial com relação ao plano de referência
Θ_0	longitude do nodo ascendente orbital da órbita kepleriana osculadora inicial
ω_0	argumento do pericentro orbital da órbita kepleriana osculadora inicial

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos.....	2
1.2 Justificativas e Motivação	2
1.3 Organização da Dissertação.....	3
2 REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	5
2.1 Aspectos Gerais sobre Asteroides	5
2.2 Revisão da Literatura.....	8
2.3 O Problema Geral de Três Corpos.....	14
2.4 O Problema Restrito de Três Corpos.....	17
2.5 O Problema Planar Restrito de Três Corpos.....	19
2.6 O Problema Planar Circular Restrito de Três Corpos.....	20
2.7 Pontos de Equilíbrio do PRTCC.....	28
2.8 Curvas de Velocidade Zero do PRTCC.....	31
2.9 Forma e Distribuição de Massa dos Primários	38
2.10 Ressonância Spin-órbita no PRTCCp	41
2.11 Efeito da Pressão da Radiação Solar	43
2.12 Determinação das Condições Iniciais ao Movimento da Partícula de Prova	46
3 MODELO FÍSICO DO ESTUDO.....	57
3.1 Aspectos Geométricos do Modelo.....	57
3.2 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sideral.....	61
3.3 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sinódico.....	67
3.4 Adimensionalização das Equações de Movimento da Partícula de Prova	79
3.5 Alteração de Escala do Problema	95
3.6 Pontos de Equilíbrio do Sistema.....	108
3.7 Curvas de Velocidade Zero do Sistema.....	112
3.8 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sideral Considerando-se Pressão da Radiação Solar	115
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	119
4.1 Variação das Coordenadas Sinódicas Adimensionais dos Pontos de Equilíbrio do Sistema	119

4.1.1 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Massa do Sistema Binário	121
4.1.2 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Comprimento do Dipolo	137
4.1.3 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Massa do Dipolo	143
4.2 Análise das Curvas de Velocidade Zero do Sistema	155
4.3 Estudo Qualitativo da Estabilidade do Movimento Orbital da Partícula de Prova	185
5 CONCLUSÕES	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	211

1 INTRODUÇÃO

O interesse do setor espacial na exploração de asteroides e de sistemas constituídos por tais corpos celestes é crescente. Diversas missões espaciais foram concebidas e enviadas a asteroides e, atualmente, missões similares encontram-se em fase de desenvolvimento. O interesse por asteroides não se resume ao campo da Astronomia, com estudos de aspectos do sistema solar primitivo preservados em tais corpos celestes. O risco de colisão não nulo de asteroides com a Terra tem preocupado significativamente as agências espaciais de diversos países. Investigar a dinâmica de asteroides que se aproximam regularmente da Terra é análise obrigatória para o estabelecimento de possíveis missões espaciais de desvio do curso de corpos que possam vir a ser potencialmente perigosos ao planeta. Além disso, observa-se o aumento de interesse econômico sobre asteroides, uma vez que tais corpos, em sua maioria, são constituídos por metais que, um dia, poderão apresentarem-se escassos na Terra. Desta forma, a atividade mineradora de recursos naturais presentes em asteroides é uma alternativa para suprir a demanda das atividades industriais.

A descoberta de que existem sistemas de asteroides constituídos por dois ou três corpos animou a comunidade científica. Estes sistemas binários e triplos, em geral, possuem um corpo mais massivo, denominado primário principal, e por pelo menos outro primário, menor e menos massivo. Este último, devido à sua pequena massa, apresenta gravidade reduzida. Esta característica de asteroides pouco massivos mostra-se como favorável à realização de atividades mineradoras de seus recursos. Por outro lado, a forma assimétrica típica destes corpos, aliada ao movimento de rotação de um asteroide em torno de seu próprio centro de massa, e à presença de outro asteroide nas proximidades do asteroide alvo, além de perturbações inerentes do ambiente espacial, tornam a análise da dinâmica orbital de uma sonda nas vizinhanças de um desses corpos consideravelmente complexa. Devido às perturbações de forma e de corpo sobre um veículo espacial, o mesmo pode vir a colidir com algum dos primários constituintes do sistema ou a ser ejetado gravitacionalmente do mesmo. Conseqüentemente, o entendimento dos aspectos qualitativos e quantitativos da dinâmica e estabilidade orbitais de um veículo espacial num sistema de asteroides e, em particular, nas

proximidades de um de seus primários, é vital para o sucesso de uma missão cujo alvo são asteroides ou sistemas de asteroides.

1.1 Objetivos

O objetivo deste estudo é desenvolver um modelo físico para o campo potencial gravitacional de um sistema binário de asteroides em que o primário mais massivo é assumido homogêneo e esférico e em que primário menos massivo apresenta forma alongada, com distribuição assimétrica de massa ao longo de seu eixo maior. Este primário é dotado de rotação em torno de seu eixo de maior momento de inércia e apresenta ressonância spin-órbita com o primário principal do sistema. Após a obtenção do modelo físico para o campo potencial gravitacional do sistema binário, estudam-se aspectos qualitativos do movimento orbital espontâneo, isto é, não controlado, de uma partícula de prova neste sistema, como a localização de seus pontos de equilíbrio e o traçado de suas curvas de velocidade zero. Também estudam-se configurações para as condições iniciais de movimento da partícula de prova em relação ao centroide do primário menos massivo que permitam o maior tempo de permanência dessa partícula em órbita desse primário antes que a mesma colida com algum dos primários, ou seja, ejetada gravitacionalmente do sistema. Para isto, lança-se mão do modelo matemático do Problema Restrito de Três Corpos Clássico para representação física do sistema binário, tomando-se a partícula de prova como terceiro corpo e faz-se uso do modelo de dipolo de massa em rotação para representação física do primário menos massivo.

1.2 Justificativas e Motivação

Apesar de existirem modelos que representam de forma bastante fiel e particularizada a forma de um asteroide e, conseqüentemente, seu campo potencial gravitacional, como o Método dos Poliedros, existem modelos mais generalistas, como aqueles que permitem representar fisicamente o campo potencial gravitacional de uma classe de corpos celestes com forma e distribuição de massa similares. A utilização de um modelo mais geral se faz necessária quando o asteroide, alvo de uma missão, é pouco conhecido. Além disso, este tipo de modelo fornece informações úteis para o planejamento de

novas missões. Um exemplo, empregado neste estudo, é o modelo de dipolo de massa em rotação, por meio do qual representa-se um corpo alongado e com distribuição assimétrica de massa por dois polos que concentram toda a massa do referido corpo. Por meio da variação dos parâmetros desse modelo, associados à extensão e à distribuição de massa do corpo representado, pode-se estudar a dependência da forma e da intensidade do campo potencial gravitacional do mesmo com tais parâmetros. Desta forma, abrange-se a parametrização e a descrição do campo potencial gravitacional de uma variedade de corpos celestes cuja forma é similar, permitindo-se o estabelecimento de um método para estudo geral da dinâmica e estabilidade do movimento orbital de um veículo espacial num sistema celeste constituído por asteroides similares.

1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação é composta por cinco capítulos. Neste Capítulo 1 apresenta-se a Introdução. No Capítulo 2, Revisão da Literatura e Fundamentação Teórica, empreende-se uma revisão de estudos em que se estabelecem modelos representativos da forma e distribuição de massa de asteroides, bem como de seus campos potenciais gravitacionais, como ponto de partida para análise da dinâmica e estabilidade orbitais de uma partícula de prova nas vizinhanças desses corpos celestes. Em particular, destaca-se o modelo de dipolo de massa em rotação, que é adotado neste estudo. Ainda nesse capítulo, realiza-se uma concisa descrição dos fundamentos teóricos físicos associados ao Problema Restrito de Três Corpos Clássico. Em seguida, no Capítulo 3, Modelo Físico do Estudo, realiza-se a descrição teórica da parametrização de um sistema binário de asteroides em que o primário menos massivo, devido às suas características de forma e distribuição de massa, é representado como dipolo de massa em rotação, dotado de ressonância spin-órbita com o primário principal do sistema celeste. Nesse capítulo, obtém-se um modelo analítico aproximado para o campo potencial gravitacional de cada primário, bem como do sistema binário de asteroides. Na sequência, o Capítulo 4, Resultados e Discussão, é dividido em três seções: na Seção 4.1, apresenta-se a variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio de um sistema binário mediante variação dos parâmetros que compõem o modelo físico do estudo; na Seção 4.2, mostra-se a variação do traçado das curvas de velocidade zero do sistema binário à medida que

tais parâmetros são variados dentro de determinados intervalos. Por fim, na Seção 4.3, apresenta-se as grades de condições iniciais referenciadas ao centroide do dipolo, para o movimento de uma partícula de prova no sistema, analisando-se as configurações paramétricas que aumentam o tempo de permanência da mesma em órbita em torno do primário representado como dipolo. O último capítulo desta dissertação é o Capítulo 5, Conclusão, em que se faz uma síntese deste trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo inicia-se com a apresentação breve das características de asteroides relevantes ao estudo aqui realizado seguida por revisão de trabalhos que abordam a representação do campo potencial gravitacional de asteroides e de aspectos da dinâmica de um corpo em suas vizinhanças. Depois, empreende-se a fundamentação teórica pertinente a este estudo.

2.1 Aspectos Gerais sobre Asteroides

Asteroides são corpos celestes que possuem composição rochosa e/ou metálica, principalmente de níquel e ferro. Tais corpos descrevem órbitas heliocêntricas (*International Astronomical Union – IAU, 2013; Jet Propulsion Laboratory – JPL, 2018*). O maior asteroide já observado é Ceres (ou 1 Ceres na designação de planeta menor pela União Astronômica Internacional), com diâmetro de aproximadamente 948 quilômetros, ao passo que o menor asteroide já observado é o 2015 TC25, com extensão máxima de 2 metros. Tais corpos também apresentam formas diversas que variam de aproximadamente esférica, como é o caso de Ceres, a muito irregulares, como é o caso de 216 Kleopatra, que apresenta forma similar a de um osso.

A forma de um asteroide está relacionada com sua distribuição de massa. Quanto mais massa um corpo de dimensão finita possui, maior será a intensidade da força gravitacional sobre sua própria distribuição de massa, de modo que esta força se opõe às forças de coesão dos materiais constituintes do corpo (*Instituto de Astronomia e Geofísica – IAG/USP, 2015*). Desta forma, asteroides de grande porte e muito massivos apresentam formas arredondadas em decorrência do prevalecimento de sua auto gravitação. Em oposição, pequenos asteroides, por serem pouco massivos, não exibem prevalência da gravitação própria sobre as forças de coesão e, conseqüentemente, apresentam formas consideravelmente destoantes às arredondadas.

Embora alguns asteroides desenvolvam suas órbitas heliocêntricas numa faixa que se inicia internamente à órbita da Terra e estende-se para além da órbita de Saturno, a

maior parte desses corpos celestes localiza-se numa região entre as órbitas de Marte e de Júpiter, denominada Cinturão Principal de Asteroides. Acredita-se que tais corpos sejam remanescentes dos primórdios da formação do sistema solar, há mais de quatro bilhões de anos (JPL, 2018).

Avanços tecnológicos no setor espacial, em particular em missões espaciais de investigação científica do sistema solar, permitiram que se tivesse conhecimento acerca de características dos asteroides que, até então, não eram conhecidas. Em 1993, o sobrevoo da sonda *Galileo* ao redor do asteroide Ida mostrou, pela primeira vez, que tais corpos celestes também podem estar acompanhados de objetos menores, também asteroides, que orbitam o centro de massa do sistema de corpos (WALSH, 2009). Desde então, foram encontrados e catalogados numerosos sistemas binários e alguns sistemas triplos de asteroides. São conhecidos mais de 160 sistemas binários de asteroides, o que equivale de 2% a 3% dos corpos do Cinturão Principal (WALSH, 2009).

Apesar de asteroides se concentrarem entre as órbitas de Marte e Júpiter, vários desses corpos migram do Cinturão Principal em direção ao Sol e, conseqüentemente, acabam por cruzar as órbitas dos planetas interiores do sistema solar. A causa deste fenômeno são as ressonâncias orbitais entre Júpiter e Saturno. Nas regiões onde se dão tais ressonâncias um asteroide passa a ter sua órbita heliocêntrica, originalmente confinada no interior do cinturão, perturbada de tal modo que este corpo passa a adquirir uma nova órbita, também heliocêntrica (DVORAK, 2008). Asteroides que se aproximam periodicamente da Terra são classificados como NEAs (*Near Earth Asteroids*). Os NEAs fazem parte de uma categoria mais ampla de corpos celestes denominada NEOs (*Near Earth Objects*). Tais objetos, além dos asteroides, também incluem cometas. Tecnicamente, NEAs são asteroides cuja distância no periélio é inferior a 1,3 au¹ (JPL, 2018). Sabe-se ainda que existem sistemas binários de asteroides que se aproximam da Terra e, desta forma, são classificados como NEAs. Atualmente são conhecidos mais de 14000 NEAs (JPL, 2018). Cerca de 15% dos asteroides classificados como NEAs são sistemas binários (WALSH, 2009).

¹ 1 au (unidade astronômica) é a distância média Terra-Sol e vale aproximadamente $1,495970 \times 10^8$ km.

Outra importante característica dos asteroides é que, assim como qualquer corpo celeste, tais corpos apresentam movimento de rotação. Asteroides se estabilizam em rotação uniforme sobre o eixo de maior momento de inércia, independentemente de seu estado de rotação inicial (SCHEERES et al., 2000).

Vários asteroides têm se tornado objeto de estudo ou alvo de missões espaciais. As razões que norteiam o interesse por esses corpos celestes são:

- (i) Investigar a composição química desses corpos, com a finalidade de operações mineradoras de seus recursos, em particular metálicos, que possam vir a tornarem-se escassos na Terra futuramente, ou que já sejam escassos no presente. Além disso, os constituintes químicos de asteroides mostram-se como matérias-primas de apoio às atividades de exploração espacial. Em particular, diversos corpos da categoria NEAs podem ser alcançados com relativa facilidade em termos de consumo energético e muitos desses corpos, apresentam gravidade superficial reduzida pelo fato de possuírem pouca massa. Tal configuração reduz o custo de transferência de rochas e materiais pouco aderidos à sua estrutura para as proximidades da Terra (CRAWFORD, 2013).
- (ii) Refinar a compreensão da dinâmica celeste desses corpos, principalmente de asteroides de grande porte, para o desenvolvimento de estratégias de prevenção à possíveis colisões dos mesmos com a Terra. Alguns asteroides, especialmente os da categoria NEAs, representam risco não nulo de impacto com a Terra (CRAWFORD, 2013). Entre os NEAs, existe a subcategoria de asteroides PHAs (*Potentially Hazardous Asteroids*). Tais corpos exibem distância mínima de interseção com a órbita da Terra menor ou igual 0,05 au ou têm diâmetro maior que 150 metros. Estima-se que 1697 asteroides são PHAs para a Terra (JPL, 2018). Para que se desenvolvam manobras de desvio de curso de asteroides da categoria PHAs há a necessidade de missões espaciais em que um veículo deve ser capaz de visitar asteroides em curto prazo. Uma das estratégias de desvio envolve a implantação de

dispositivos propulsivos na superfície desses corpos. Para isto requer-se compreensão detalhada da natureza das superfícies de asteroides para que se possa prever como esses corpos reagirão a tais intervenções (CRAWFORD, 2013).

- (iii) Promover maior conhecimento acerca da origem e formação do sistema solar. Asteroides são constituídos por materiais que não foram incorporados aos planetas quando o sistema solar se formou. Tais corpos exibem informações científicas relacionadas às propriedades dos primórdios do Sol, de processos astrofísicos no disco protoplanetário, entre outros (CRAWFORD, 2013)

2.2 Revisão da Literatura

A Astrodinâmica teve considerável desenvolvimento a partir da concepção e realização de missões espaciais cujos alvos foram e são corpos celestes de pequeno porte, como asteroides. A partir dessas missões começou-se o estudo qualitativo e quantitativo da estabilidade de um veículo espacial nas vizinhanças de corpos celestes com distribuição assimétrica de massa e dotados de rotação, além da análise de navegabilidade orbital de veículos espaciais em torno desses corpos (SCHEERES et al., 2000). Uma vez que não existe um padrão na distribuição de massa, na forma, dimensão e constituição de corpos celestes pouco massivos, como os asteroides, cada um desses objetos apresenta características únicas. Diversas características desses corpos somente são confirmadas ou descobertas quando um veículo espacial se aproxima de seu alvo de missão (SCHEERES et al., 2000). Somado a este fato, como visto, muitos asteroides dispõem-se em sistemas binários e triplos.

Qualquer que seja a finalidade de uma missão espacial que tem por alvo um asteroide, a estimativa do campo potencial gravitacional desse objeto como corpo central é de fundamental importância para o sucesso da mesma. Enquanto um veículo espacial estiver à distância considerável do corpo celeste a ser orbitado, este corpo pode ser considerado como partícula devido às suas dimensões serem muito menores que a

distância deste ao veículo. Consequentemente, sob tais condições, o campo potencial gravitacional do corpo celeste apresenta simetria radial relativamente ao veículo espacial e, desta forma, este campo admite ser representado pelo modelo de potencial gravitacional de partícula. À medida que o veículo espacial se aproxima do corpo alvo, mediante fase de Operação de Curta Aproximação (*Close Proximity Operation*), a forma e a distribuição de massa desse corpo, bem como características de sua dinâmica, como rotação, não mais permitem tal simplificação do modelo de seu campo potencial gravitacional. A forma assimétrica desses corpos combinada com sua rotação em torno de seu centro de massa leva ao acoplamento da variação da intensidade e da distribuição do campo potencial gravitacional do asteroide devido à rotação com seu movimento orbital em relação a um ponto arbitrário do espaço. Desta forma, este campo, além de não ser simétrico no espaço, também varia no tempo, numa escala temporal menor, com a rotação do asteroide e, numa escala temporal maior, com seu movimento orbital. Tal fenômeno induz perturbações de curto e de longo período, respectivamente, ao movimento orbital de um veículo espacial ao redor desse corpo, considerando-se como órbita de referência para o mesmo uma órbita kepleriana. Estas perturbações são tão mais intensas quanto maior for a proximidade do veículo ao corpo central.

Para corpos celestes que apresentam simetria em sua distribuição de massa, características de sua dinâmica, como rotação, não induzem apreciável variação temporal do campo potencial gravitacional em relação a um dado ponto no espaço. Desta forma, as equações que governam o movimento de uma partícula de prova nas vizinhanças de um corpo em tais condições são autônomas no tempo. Contudo, para corpos com distribuição assimétrica de massa, sua rotação implica na variação temporal do campo pontencial gravitacional em relação a determinado ponto do espaço, além deste campo possuir sua intensidade variante com a distância que se toma a partir do corpo. Neste caso, as equações do movimento de uma partícula de prova, nas proximidades de um corpo que apresente tais características, deixam de ser autônomas.

A partir do exposto é imperativo que missões espaciais, cujo alvo é um ambiente gravitacional de grande complexidade e variabilidade, apresentem em seu desenvolvimento flexibilidade sobre os parâmetros de missão associados ao corpo alvo,

com o desenvolvimento de métodos físicos que permitam ajustar convenientemente o modelo de campo potencial gravitacional de um corpo em que algumas de suas características somente serão assessíveis e compreendidas quando o veículo espacial estiver consideravelmente próximo de seu alvo (SCHEERES et al., 2000).

O modelo do campo gravitacional de um corpo é parte indispensável no planejamento e análise do movimento orbital ao seu redor (CUI; QIAO, 2014). A representação qualitativa e quantitativa do campo potencial gravitacional de um corpo extenso recorre à adoção de diversos métodos. Um dos métodos mais recorrentes é o de expressar o campo potencial gravitacional de um corpo extenso de forma aproximadamente esférica por meio de aproximações via funções do tipo harmônicos esféricos. Corpos com pronunciado achatamento são melhor representados considerando-se modelos que recorrem à aproximações via funções do tipo harmônicos elipsoidais (HOBSON, 1955; PICK et al., 1973; CUI; QIAO, 2014). Nos modelos que fazem uso de aproximações via funções harmônicas, o potencial gravitacional de um corpo é expresso via séries de potências da razão entre o semi-eixo característico do corpo de dimensão finita e a distância do centro deste corpo a um ponto arbitrário do espaço, em que se pode considerar um veículo espacial, por exemplo. Tais modelos fornecem expressões analíticas para o campo potencial gravitacional de dado corpo. Contudo, tais expressões não são altamente precisas uma vez que só podem ser contabilizadas mediante o truncamento da série considerada, o que introduz erros de truncamento ao modelo. Em tais modelos verificam-se também problemas no domínio de convergência da série (CUI; QIAO, 2014). Além disso, tais modelos prescindem que o corpo de dimensão finita apresente alguma simetria radial, o que, em geral, não se verifica na maioria dos asteroides, em particular, para os menos massivos.

Corpos celestes que não possuam simetria radial e, portanto, que apresentam massa distribuída ao longo de uma forma assimétrica e dotados de movimento de rotação introduzem considerável complexidade à estimativa de seu campo potencial gravitacional e tem-se, desta forma, grande desafio em elaborar-se um modelo de potencial gravitacional para um corpo central com tais características (ZENG et al., 2015a). Para um veículo espacial nas vizinhanças da superfície de um corpo de formato

assimétrico, como é o caso de asteroides de pequena massa, observa-se que sua extensão e distribuição de massa aliadas à sua rotação em torno de determinado eixo repercutem consideravelmente na dinâmica orbital do veículo ao seu redor (SCHEERES, 2012). O modelo baseado em harmônicos esféricos, por exemplo, ao ser aplicado em tais corpos pode convergir muito lentamente, ou até mesmo divergir próximo à superfície do corpo.

Como alternativa de método para a representação do campo potencial gravitacional de corpos com as características mencionadas, foram concebidas as aproximações tridimensionais, por meio das quais um corpo é representado por formas geométricas convenientes de tal modo a obter-se melhor compreensão da dinâmica de um veículo espacial em suas proximidades (CUI; QIAO, 2014). Destaca-se o Método dos Poliedros, desenvolvido por Werner, em 1994 (WERNER, 1994). Neste método, obtém-se o campo potencial gravitacional de um corpo com alta precisão, embora não exista uma expressão analítica para o mesmo. Devido à alta precisão deste método baseado na forma geométrica do corpo, o mesmo tem sido amplamente empregado em numerosos estudos para descrever o campo potencial gravitacional de diversos asteroides. A desvantagem deste método é que o mesmo baseia-se no conhecimento prévio e detalhado da forma do corpo celeste sob estudo para que se possa discretizar a superfície do mesmo por meio de uma malha geométrica conveniente. Um modelo proveniente deste método só pode ser construído mediante observações de radar. Conseqüentemente, o modelo de campo potencial gravitacional estabelecido especificamente para um dado asteroide via Método dos Poliedros não pode ser aplicado a outro corpo. Além disso, dada a complexidade geométrica do Método dos Poliedros, o mesmo apresenta elevado tempo de processamento computacional.

Aspectos gerais acerca da dinâmica de um veículo espacial nas proximidades de um corpo de forma assimétrica podem ser obtidos com a aplicação de modelos geometricamente menos sofisticados em que, por exemplo, o corpo em estudo é representado por múltiplos polos tomados como partículas. Em seguida, aspectos mais refinados da dinâmica de um veículo ao redor desses corpos podem ser obtidos mediante aplicação de métodos mais sofisticados, como o Método dos Poliedros. Como

outros exemplos de métodos para a estimativa inicial do campo potencial gravitacional de asteroides, tem-se os modelos de dipolo de massa rotativo (GOZDZIWSKI; MACIEJEWSKI, 1998) ou ainda, de segmento de reta maciço rotativo (ELIPE; LARA, 2003). Em particular, o modelo de dipolo de massa rotativo é utilizado para representar o campo potencial gravitacional nas proximidades de corpos celestes dotados de forma alongada e assimétrica (ZENG et al., 2015a). Também foram desenvolvidos modelos de dipolo em que consideram-se polos oblatos (ZENG et al., 2015b). Tais modelos, embora sejam conceitualmente mais simples que o Método dos Poliedros, devido a não considerarem com precisão a extensão e a forma dos corpos celestes retratados ou reduzirem esta extensão à formas geométricas convenientes, possuem a vantagem de representarem classes de objetos celestes que apresentam aspectos de forma e de distribuição de massa similares. Como consequência, tais métodos aproximativos permitem a concepção e o estabelecimento de modelos de campos potenciais gravitacionais para considerável variedade de objetos, o que é o oposto à particularização do potencial gravitacional obtido via Método dos Poliedros. Além disso, o modelo de dipolo de massa rotativo, por exemplo, requer pouca disponibilidade de capacidade computacional, sendo praticamente instantâneo em termos de processamento.

O modelo de dipolo de massa rotativo foi proposto por Chermnykh em 1987 (CHERMNYKH, 1987) e adotado para aproximar o campo potencial gravitacional de um corpo com forma de halter com rotação (KOKORIEV; KIRPICHNIKOV, 1988; KIRPICHNIKOV; KOKORIEV, 1988; GOZDZIEWSKI; MACIEJEWSKI, 1998). A utilização deste modelo foi estendida à investigação da estabilidade dos pontos de equilíbrio triangulares do sistema rotativo representado (GOZDZIEWSKI; MACIEJEWSKI, 1999; GOZDZIEWSKI, 2003). O modelo de dipolo de massa em rotação, desta forma, permite que sejam representadas com adequada flexibilidade as principais características de um corpo alongado, com distribuição assimétrica de massa e dotado de rotação. Além disso, este modelo pode ser empregado para compor sistemas de asteroides, como um sistema binário, por exemplo. Tal abordagem foi considerada em estudos em que foi adotado o modelo de dipolo de massa simétrico e com rotação (SANTOS et al., 2017a; SANTOS et al., 2017b; SANTOS, 2017c). Por meio de

parâmetros do modelo de dipolo de massa em rotação compondo um sistema de asteroides, como um sistema binário, é possível representar a fração de massa desse sistema que está encerrada em determinado corpo (primário) que o constitui. Também pode-se tomar a massa do corpo assimétrico e alongado e particioná-la em duas porções, fazendo-se uso do modelo de dipolo de massa. Pode-se, ainda, considerar a dimensão característica do corpo assimétrico, que é sua alongação. Mediante a variação de tais parâmetros, torna-se possível estudar a evolução da dinâmica de uma partícula de prova, que pode representar um veículo espacial, por exemplo, nas proximidades desse sistema e, em particular, nas vizinhanças do corpo assimétrico.

Tabela 2.1: Comparação entre modelos de potencial gravitacional de asteroides alongados e de sistema binário.

Autor (Ano)	Modelo de sistema binário	Modelo de dipolo de massa	Dipolo de massa simétrico	Dipolo de massa assimétrico	Haste	Rotação
Chermnykh (1987)	Não	Sim	-----	-----	Sim (sem massa)	Sim
Gozdziewski; Maciejewski (1998)	Não	Sim	-----	-----	Sim (sem massa)	Sim (uniforme)
Gozdziewski; Maciejewski (1999)	Não	Sim (estendido a polo oblato)	-----	-----	Sim (sem massa)	Sim
Elipe; Lara (2003)	Não	Não	-----	-----	Sim (com massa)	Sim (uniforme)
Zeng et al. (2015a)	Não	Sim	Sim	Sim	Sim (sem massa)	Sim (uniforme)
Zeng et al. (2015b)	Não	Sim	Sim (com polo oblato)	Sim (com polo oblato)	Sim (sem massa)	Sim (uniforme)
Santos et al. (2017a,b,c)	Sim	Sim	Sim	Não	Sim (sem massa)	Sim (uniforme)
Presente estudo	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim (sem massa)	Sim (uniforme)

Fonte: Produção do Autor.

Na Tabela 1 apresentam-se as principais características dos modelos para representação do campo potencial gravitacional de corpos assimétricos e alongados, compondo ou não um sistema binário, apresentados anteriormente. Por meio de comparação é possível notar que neste estudo considera-se o modelo de dipolo de massa em rotação uniforme para a representação de um asteroide alongado e assimétrico (dipolo simétrico é um caso particular também considerado neste estudo). Esse modelo é, além disso, introduzido como parte de um sistema binário de asteroides.

2.3 O Problema Geral de Três Corpos

Considerando uma missão espacial em que o veículo de exploração executa a fase de Operação de Curta Aproximação em relação a um sistema binário de asteroides, tem-se, no total, um sistema físico constituído por três corpos que interagem gravitacionalmente entre si a todo instante. Como primeira abordagem do problema, pode-se considerar cada corpo do sistema como partícula (ponto de massa), admitindo-se como hipótese que as dimensões desses corpos, em particular dos asteroides, são desprezíveis em comparação com a distância média do veículo espacial aos seus respectivos centros de massa. Além disso, impõe-se que o sistema de três corpos é gravitacionalmente isolado em relação ao universo de tal modo que não são consideradas perturbações gravitacionais oriundas de outros corpos alheios ao sistema. Na ausência de forças dissipativas sobre o movimento dos corpos que compõem o sistema binário de asteroides, tem-se que este sistema é conservativo.

Na sequência, realiza-se a descrição formal do Problema Geral de Três Corpos, bem como das hipóteses que conduzem ao Problema Restrito de Três Corpos Clássico (PRTCC) estabelecendo-se sua representação matemática.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um referencial cartesiano ortonormal e dextrogiro, com origem no ponto $O(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. A partir de \mathbb{R}^3 compõe-se $\mathbb{G}_{n,a}^3$, que é o espaço vetorial euclidiano normado de dimensão três e afim. Neste espaço, a norma de um vetor é extraída mediante norma métrica euclidiana. Ao assumir-se que o espaço é afim, admite-se que

qualquer ponto de \mathbb{R}^3 possa ser tomado, por conveniência, como origem. Admite-se que o ponto $O(x_0, y_0, z_0)$ é fixo em \mathbb{R}^3 e que S é um referencial inercial fixo em $\mathfrak{E}_{n,a}^3$.

Considere as $N = 3$ partículas constituintes do sistema físico supracitado, indexadas por $j = 1, 2, 3$. Assume-se que suas massas finitas $m_j > 0$ são invariantes no tempo. Tais partículas ocupam instantaneamente as posições $\vec{r}_{j_O}(t) = x_{j_O}(t)\vec{i} + y_{j_O}(t)\vec{j} + z_{j_O}(t)\vec{k}$ relativamente a $O(x_0, y_0, z_0)$, com $(x_{j_O}(t), y_{j_O}(t), z_{j_O}(t)) \in \mathbb{R}^3$, no instante $t \in \mathbb{R}$ (ou $t \in [t_0, \infty[$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, para sistema causal). Além disso, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Como resultado clássico da Mecânica Celeste, o centro de massa de um sistema de $N \geq 2$ corpos que interagem por meio de forças centrais admite ser tomado como origem de um referencial inercial. Seja $B(x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{R}^3$ o centro de massa do sistema físico de três corpos em consideração cujo vetor posição em relação a $O(x_0, y_0, z_0)$ é denotado por $\vec{r}_{B_O}(t)$. Neste sentido, define-se $S_B \subset \mathbb{R}^3$ um novo referencial cartesiano ortonormal e dextrógiro, com origem em $B(x_B, y_B, z_B)$, admitido, tão logo, como inercial, com o qual realiza-se, doravante, a parametrização de $\mathfrak{E}_{n,a}^3$. Mediante covariância das Transformações de Galileu de S para S_B ($S \rightarrow S_B$) e considerando-se que não exista prevalência em massa de qualquer corpo do sistema, as equações que expressam qualitativamente a dinâmica de cada partícula do sistema físico no referencial S_B são como em S .

Considere $\vec{r}_{j_B}(t) = x_{j_B}(t)\vec{i} + y_{j_B}(t)\vec{j} + z_{j_B}(t)\vec{k}$ o vetor posição da j -ésima partícula do sistema parametrizado a partir de S_B . A força de atração gravitacional exercida pela k -ésima partícula sobre a j -ésima partícula, com $k \neq j$, é dada pela Lei da Gravitação Universal Newtoniana²:

$$\vec{F}_{jk} = \mathcal{G}m_jm_k \frac{\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}}{\|\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}\|^3}. \quad (2.1)$$

² \mathcal{G} denota a Constante da Gravitação Universal e seu valor é aproximadamente $6,67408 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Dadas as posições $\vec{r}_{j_B}(t_0)$ e as velocidades $\dot{\vec{r}}_{j_B}(t_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{r}_{j_B}(t) \right]_{t=t_0}$ das três partículas do sistema num instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}, t_0 \geq 0$, satisfazendo-se a condição de distinguibilidade $\vec{r}_{k_B}(t_0) \neq \vec{r}_{j_B}(t_0)$, se $k \neq j$, a descrição do movimento de cada partícula em S_B é obtida mediante solução do sistema de equações à derivadas ordinárias:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_{j_B}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 \mathcal{G} m_j m_k \frac{\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}}{\|\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}\|^3}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Ou ainda, como se segue:

$$\ddot{\vec{r}}_{j_B}(t) = \mathcal{G} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 m_k \frac{\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}}{\|\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}\|^3}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

sendo:

$$\begin{aligned} & \|\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}\| = \\ & \sqrt{\left[(x_{j_B}(t) - x_{k_B}(t))^2 + (y_{j_B}(t) - y_{k_B}(t))^2 + (z_{j_B}(t) - z_{k_B}(t))^2 \right]}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Considera-se V_s a energia potencial gravitacional do sistema de $N = 3$ partículas. Tem-se $V_s: \mathbb{R}^{3N}/\Delta \rightarrow]-\infty, 0[$, sendo $V_s = -\sum_{1 \leq j < k \leq N} \mathcal{G} \frac{m_k m_j}{\|\vec{r}_{k_B} - \vec{r}_{j_B}\|}$ em que o conjunto singular $\Delta = \cup_{1 \leq j < k \leq N} \Delta_{kj}$, com $\Delta_{kj} = \{(\vec{r}_{1_B}, \dots, \vec{r}_{N_B}) \in \mathbb{R}^{3N} : \vec{r}_{k_B} = \vec{r}_{j_B}\}$. \mathbb{R}^{3N}/Δ é o espaço de configurações do sistema e a função V_s é suave, ou seja, é de classe \mathcal{C}^∞ , além de ser real analítica (VOLCHAN, 2007). Mediante formalismo matemático, o presente arranjo físico requer a solução de um problema de valores iniciais num sistema de

$3N = 9$ equações escalares à derivadas ordinárias de segunda ordem das coordenadas paramétricas de posição de cada partícula com relação ao tempo, não lineares e acopladas (VOLCHAN, 2007). A solução deste sistema de equações oferece a descrição completa da evolução geométrica do sistema no tempo considerando-se o efeito das interações de força central do tipo gravitacional sob cada partícula constituinte. O problema apresenta, de forma geral, $3N = 9$ graus de liberdade em $\mathbb{C}_{n,a}^3$. Além disso, para que o problema seja completamente integrável, requisitam-se conhecidas $2(3N) = 18$ integrais primeiras do movimento das partículas do sistema. A solução deste problema existe e é única, mas não é possível expressá-la analiticamente (VOLCHAN, 2007).

2.4 O Problema Restrito de Três Corpos

Se a massa de uma partícula de prova é adotada arbitrariamente como m_3 , por exemplo, é uma consideração razoável, neste problema, assumir-se que $m_3 \ll m_1$ e $m_3 \ll m_2$. Como consequência, o movimento dos corpos de massas m_1 e m_2 , em relação a S_B , é pouco influenciado pelo movimento da terceira partícula. Sua massa reduzida, em comparação aos demais corpos do sistema, induz sutis acelerações gravitacionais sobre os demais corpos mais massivos. Não obstante, pode-se afirmar que o movimento dos corpos mais massivos do sistema é, a processo de limite para $m_3 \rightarrow 0$ (mas $m_3 \neq 0$), independente do movimento da terceira partícula a ponto de serem auto reguláveis em relação a S_B , como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \lim_{m_3 \rightarrow 0} \ddot{\vec{r}}_{1B}(t) &= \mathcal{G} \lim_{m_3 \rightarrow 0} \left(m_2 \frac{\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}}{\|\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}\|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_{3B} - \vec{r}_{1B}}{\|\vec{r}_{3B} - \vec{r}_{1B}\|^3} \right) \\ &= \mathcal{G} m_2 \frac{\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}}{\|\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}\|^3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{m_3 \rightarrow 0} \ddot{\vec{r}}_{2B}(t) &= \mathcal{G} \lim_{m_3 \rightarrow 0} \left(m_1 \frac{\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}}{\|\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}\|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_{3B} - \vec{r}_{2B}}{\|\vec{r}_{3B} - \vec{r}_{2B}\|^3} \right) \\
&= \mathcal{G} m_1 \frac{\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}}{\|\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}\|^3}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Consequentemente, as equações que descrevem o movimento das partículas do sistema, no referencial S_B do centro de massa, são:

$$\ddot{\vec{r}}_{1B}(t) = \mathcal{G} m_2 \frac{\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}}{\|\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{1B}\|^3}, \tag{2.7}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{2B}(t) = \mathcal{G} m_1 \frac{\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}}{\|\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{2B}\|^3}, \tag{2.8}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{3B}(t) = \mathcal{G} \left(m_1 \frac{\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{3B}}{\|\vec{r}_{1B} - \vec{r}_{3B}\|^3} + m_2 \frac{\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{3B}}{\|\vec{r}_{2B} - \vec{r}_{3B}\|^3} \right). \tag{2.9}$$

As partículas P_1 e P_2 , de massas m_1 e m_2 , respectivamente, em relação a S_B , apresentam como *momenta* angulares:

$$\vec{\mathcal{L}}_{jB} = m_j \left(\vec{r}_{jB}(t) \wedge \dot{\vec{r}}_{jB}(t) \right), j = 1, 2, \tag{2.10}$$

em que $\vec{\mathcal{L}}_{jB}$ é constante para todo $t \in [t_0, \infty[$ a processo de limite para $m_3 \rightarrow 0$. O *momentum* angular total do sistema de três corpos pode ser escrito, então, como:

$$\vec{\mathcal{L}}_B = \vec{\mathcal{L}}_{1B} + \vec{\mathcal{L}}_{2B}. \tag{2.11}$$

A quantidade $\vec{\mathcal{L}}_B$, que consequentemente é constante para todo $t \in [t_0, \infty[$, define um plano ϖ que lhe é ortogonal. O plano $\varpi \subset \mathbb{R}^3$ delimita a região de restrição de $\mathbb{C}_{n,a}^3$ em

que se dá o movimento dos corpos mais massivos do sistema, em relação a S_B . Além disso, tem-se que $B(x_B, y_B, z_B) \in \varpi$.

Seja ϑ o plano definido por $B(x_B, y_B, z_B)$ e pelos eixos \overrightarrow{Bx} e \overrightarrow{By} de S_B . Genericamente, pode-se ter um ângulo α não nulo ente os planos ϑ e ϖ , medido a partir de ϑ . Nesta configuração, pode-se definir um novo referencial inercial S'_B , com origem em $B(x_B, y_B, z_B)$, tal que $\overrightarrow{Bz'}$ é ortogonal a ϖ e define a direção e o sentido de apontamento do vetor $\vec{\mathcal{L}}_B$ do sistema. Novamente, a passagem da descrição mecânica do movimento das partículas de S_B para S'_B ($S_B \rightarrow S'_B$) é covariante por Transformações de Galileu e as equações que representam tal descrição passam a ser:

$$\ddot{\vec{r}}'_{1B}(t) = \mathcal{G}m_2 \frac{\vec{r}'_{2B} - \vec{r}'_{1B}}{\|\vec{r}'_{2B} - \vec{r}'_{1B}\|^3}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{\vec{r}}'_{2B}(t) = \mathcal{G}m_1 \frac{\vec{r}'_{1B} - \vec{r}'_{2B}}{\|\vec{r}'_{1B} - \vec{r}'_{2B}\|^3}, \quad (2.13)$$

$$\ddot{\vec{r}}'_{3B}(t) = \mathcal{G} \left(m_1 \frac{\vec{r}'_{1B} - \vec{r}'_{3B}}{\|\vec{r}'_{1B} - \vec{r}'_{3B}\|^3} + m_2 \frac{\vec{r}'_{2B} - \vec{r}'_{3B}}{\|\vec{r}'_{2B} - \vec{r}'_{3B}\|^3} \right). \quad (2.14)$$

2.5 O Problema Planar Restrito de Três Corpos

A partir das considerações anteriores, pode-se delinear a configuração em que todas as partículas constituintes do sistema movem-se no plano $\varpi \forall t \in [t_0, \infty[$. Para que esta configuração seja fisicamente possível, basta impor as seguintes condições iniciais ao movimento da partícula de menor massa (m_3):

$$z'_{3B}(t_0) = \dot{z}'_{3B}(t_0) = 0. \quad (2.15)$$

Nestas condições, e sabendo-se que para todo $t \in [t_0, \infty[$, as forças de atração gravitacional devidas às interações de m_3 com m_1 e de m_3 com m_2 são coplanares a ϖ , então a trajetória de m_3 relativamente a S'_B é uma curva $c_3 \subset \varpi \forall t \in [t_0, \infty[$.

2.6 O Problema Planar Circular Restrito de Três Corpos

No plano ϖ os corpos mais massivos m_1 e m_2 descrevem trajetórias $c_1 \subset \varpi$ e $c_2 \subset \varpi \forall t \in [t_0, \infty[$, respectivamente. Devido à hipótese de restrição imposta, os corpos mais massivos interagem gravitacionalmente mediante o modelo do Problema de Dois Corpos da Mecânica Celeste. As trajetórias de m_1 e m_2 em relação a S'_B no plano orbital ϖ são órbitas keplerianas, admitidas fechadas. Como pode ser visto em (GEIGES, 2016), o fato de $B(x_B, y_B, z_B)$ ser fixo em $\mathbb{E}_{n,a}^3$ implica no movimento síncrono das partículas mais massivas em relação a este ponto em suas respectivas órbitas. Além disso, c_1 e c_2 se intersectam em dois pontos e têm, devido ao movimento síncrono das partículas, linha das apses comum $s \in \varpi$. Em relação a S'_B prova-se que a partir das Equações 2.12 e 2.13 tais órbitas, em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$, admitem serem expressas analiticamente como:

$$c_1: r'_{1B}(v_1) = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos(v_1)}, \quad (2.16)$$

$$c_2: r'_{2B}(v_2) = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos(v_2)}, \quad (2.17)$$

em que v_1 e v_2 são as anomalias verdadeiras de m_1 e m_2 em relação à linha das apses, respectivamente. Do movimento síncrono entre os corpos mais massivos, pode-se escrever que, dado v_1 , então $v_2 = v_1 + \pi$. Tem-se ainda que a_j e e_j , $j = 1, 2$ são os semi-eixos maiores e as excentricidades de m_1 e m_2 , respectivamente, com $e_j \in [0, 1[$.

Uma particular configuração para a forma de c_1 e c_2 é aquela em que $e_j = 0, j = 1, 2$, implicando no movimento circular uniforme e síncrono de m_1 e m_2 em torno de $B(x_B, y_B, z_B)$. Nesta condição, pode-se escrever que:

$$c_1: r'_{1B} = a_1 \forall v_1 \in [0, 2\pi[, \quad (2.18)$$

$$c_2: r'_{2B} = a_2 \forall v_2 \in [0, 2\pi[. \quad (2.19)$$

Ou ainda, em forma algébrica:

$$c_1: x'_{1B}{}^2 + y'_{1B}{}^2 = a_1^2, \quad (2.20)$$

$$c_2: x'_{2B}{}^2 + y'_{2B}{}^2 = a_2^2. \quad (2.21)$$

Admitindo-se que $m_1 > m_2$, então, em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$, é verdade que $a_1 < a_2$. Nota-se que no caso de c_1 e c_2 serem circunferências concêntricas a $B(x_B, y_B, z_B)$ e considerando-se $a_1 < a_2$, tem-se que $c_1 \cap c_2 = \emptyset$.

Como dito anteriormente, não são consideradas quaisquer perturbações sobre o movimento dos corpos que compõem o sistema binário de asteroides. Segue, como consequência, que não se verifica possibilidade de colisão entre os corpos que o constituem. Como será apresentado mais adiante, neste capítulo e nos Capítulos 3 e 4, sobre o terceiro corpo (partícula de prova) considera-se o efeito da pressão da radiação solar e analisa-se o efeito dessa perturbação no movimento da partícula, como a tendência de sua colisão com os corpos do sistema binário de asteroides.

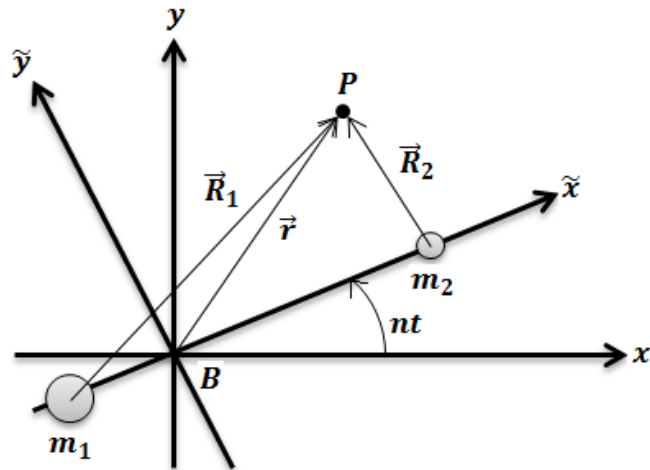
Utilizando-se a terminologia da Mecânica Celeste, refere-se a cada corpo mais massivo do sistema como um primário, sendo o corpo principal, de massa m_1 , o primário I e o corpo de massa m_2 , o primário II. Para simplificar a nomenclatura do problema em estudo, o Problema Planar Restrito Circular de Três Corpos (PPRCTC), de agora em diante, será referido como o Problema Restrito de Três Corpos Clássico (PRTCC). Como nota-se, embora as hipóteses admitidas até aqui e que culminam no problema exposto o tornem bastante particular, o mesmo apresenta vasta aplicação prática (DANTAS; LLIBRE, 2009; DULLIN; WORTHINGTON, 2014). Ao se estudar o

PRTCC pretende-se analisar o movimento de uma terceira partícula sob influência gravitacional dos primários como exposto anteriormente. Em termos de formalismo físico, o terceiro corpo do sistema é tomado como partícula de prova $P_3 \equiv P$ e esta, ao movimentar-se no mesmo plano definido pelo movimento dos primários, não exerce qualquer influência gravitacional sobre esses corpos, devido considerar-se a massa desta partícula desprezível face às massas dos primários. Se $M = m_1 + m_2 + m_3$ é a massa total do sistema, sem perda de generalidade, observa-se que:

$$\lim_{m_3 \rightarrow 0} M = m_1 + m_2. \quad (2.22)$$

Desta forma, a massa total do sistema em estudo restringe-se, a processo de limite acima apresentado, à massa total do subsistema gravitacional de dois corpos composto pelos primários I e II que definem um sistema binário de corpos (SZEBEHELY, 1967; PRADO, 2001; RAMÍREZ; VIDAL, 2013).

Figura 2.1: Representação do PRTCC.



Fonte: Produção do Autor.

A partir de agora, de modo a empregar-se notação mais simples à descrição do problema, considera-se o referencial inercial $S_B: Bxyz$ como o referencial cujo eixo \vec{Bz} é perpendicular ao plano ϖ de movimento dos três corpos do sistema. O referencial

$S_B: Bxyz$, na terminologia da Mecânica Celeste, é denominado referencial sideral, como apresentado na Figura 2.1. Além disso, assume-se $a_1 = a$ e $a_2 = b$. Da condição de movimento síncrono dos primários em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$, tem-se que seus movimentos médios orbitais são $n_1 = n_2 = n$. O potencial gravitacional dos primários expresso no referencial sideral é dado por:

$$U = \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right), \quad (2.23)$$

em que $R_1 = \|\vec{r}_B - \vec{r}_{1B}\|$ e $R_2 = \|\vec{r}_B - \vec{r}_{2B}\|$, sendo $\vec{r}_B = \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o vetor posição sideral de um ponto arbitrário no plano ϖ , que pode ser tomado como a posição instantânea da partícula de prova, como ilustrado na Figura 2.1. Pode-se, ainda, escrever em termos de coordenadas cartesianas siderais que:

$$R_1 = \sqrt{[x(t) + a\cos(nt)]^2 + [y(t) + a\sin(nt)]^2}, \quad (2.24)$$

$$R_2 = \sqrt{[x(t) - b\cos(nt)]^2 + [y(t) - b\sin(nt)]^2}. \quad (2.25)$$

As quantidades $x(t)$ e $y(t)$ expressam as coordenadas cartesianas siderais instantâneas da partícula de prova P . A partir das Equações 2.24 e 2.25, verifica-se que $U = U[x(t), y(t), t]$. Segue que as equações que descrevem o movimento desta partícula devido interação gravitacional com os primários, no referencial sideral S_B são:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{\partial}{\partial x} U[x(t), y(t), t], \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{\partial}{\partial y} U[x(t), y(t), t], \quad (2.27)$$

em que:

$$\frac{\partial}{\partial x} U[x(t), y(t), t] = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[x(t) + a \cos(nt)]}{R_1^3} + \frac{m_2[x(t) - b \cos(nt)]}{R_2^3} \right\}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U[x(t), y(t), t] = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[y(t) + a \sin(nt)]}{R_1^3} + \frac{m_2[y(t) - b \sin(nt)]}{R_2^3} \right\}. \quad (2.29)$$

Nota-se que as Equações 2.28 e 2.29 não são autônomas no tempo. De modo a se descrever o movimento da partícula de prova P em ϖ por meio de equações que não dependam explicitamente do tempo, e sabendo-se que a dependência explícita com o tempo em U deve-se ao movimento periódico dos primários I e II em relação ao referencial sideral, recorre-se à configuração de sincronia em que os primários se mostram permanentemente alinhados sobre a reta $\mathcal{r} \subset \varpi$, que passa por $B(x_B, y_B, z_B) \forall t \in [t_0, \infty[$. Desta forma, adota-se \mathcal{r} como a reta suporte a um dos eixos de um novo sistema de referência $\tilde{S}_B: B\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} \subset \mathbb{R}^3$, ortonormal e dextrogiro, que acompanha o movimento circular uniforme síncrono dos primários e, desta forma, em relação ao qual as coordenadas de posição dos primários I e II sejam invariantes com o tempo. Este novo referencial, dotado de rotação uniforme centrada em $B(x_B, y_B, z_B)$, com velocidade angular n sendo, portanto, não inercial, é denominado referencial sinódico, como apresentado na Figura 2.1. Como pode ser visto em Szebehely (1967), as equações de movimento da partícula de prova neste novo referencial são:

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) - 2n \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = n^2 \tilde{x}(t) - \mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[\tilde{x}(t) + a]}{\tilde{R}_1^3} + \frac{m_2[\tilde{x}(t) - b]}{\tilde{R}_2^3} \right\}, \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + 2n \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = n^2 \tilde{y}(t) - \mathcal{G} \left[\frac{m_1 \tilde{y}(t)}{\tilde{R}_1^3} + \frac{m_2 \tilde{y}(t)}{\tilde{R}_2^3} \right], \quad (2.31)$$

em que $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ são as coordenadas cartesianas sinódicas instantâneas da partícula de prova. Em \tilde{S}_B , devido à ação das forças de Coriolis e centrífuga, que são forças

fictícias, o potencial ao qual a partícula de prova P está sujeita é denominado de potencial efetivo, dado por:

$$\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = \frac{1}{2}n^2[\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2] + \mathcal{G}\left(\frac{m_1}{\tilde{R}_1} + \frac{m_2}{\tilde{R}_2}\right), \quad (2.32)$$

com $\tilde{R}_1 = \|\vec{r}_B - \vec{r}_{1B}\|$ e $\tilde{R}_2 = \|\vec{r}_B - \vec{r}_{2B}\|$, com $\vec{r}_B = \vec{r} = \tilde{x}(t)\vec{i} + \tilde{y}(t)\vec{j}$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, de tal modo que:

$$\tilde{R}_1 = \sqrt{[\tilde{x}(t) + a]^2 + \tilde{y}(t)^2}, \quad (2.33)$$

$$\tilde{R}_2 = \sqrt{[\tilde{x}(t) - b]^2 + \tilde{y}(t)^2}. \quad (2.34)$$

Deve-se enfatizar que $\tilde{R}_1 = R_1$ e $\tilde{R}_2 = R_2$. Como mostrado em Szebehely (1967), o presente problema admite uma relação denominada Integral de Jacobi:

$$\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2 = 2\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] - \tilde{C}. \quad (2.35)$$

Na Equação 2.35, \tilde{C} é a Constante de Jacobi e expressa uma nova integral primeira do movimento da partícula de prova no sistema. Fisicamente, \tilde{C} está associada ao negativo da energia mecânica total específica da partícula de prova no referencial sinódico \tilde{S}_B .

Ainda como feito em Szebehely (1967), é conveniente adimensionalizar a representação matemática da descrição física do movimento da partícula de prova realizada nas equações apresentadas. Seja $M = m_1 + m_2$ a massa total do sistema. Considere:

$$l = a + b, \quad (2.36)$$

a distância entre primários. Tais quantidades são constantes para todo $t \in [t_0, \infty[$. Fazendo-se a análise dinâmica sobre cada primário em movimento circular uniforme em torno de $B(x_B, y_B, z_B)$, no referencial sideral, chega-se a:

$$\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 n^2 a = m_2 n^2 b. \quad (2.37)$$

Destas relações chega-se a:

$$\mathcal{G} m_1 = b n^2 l^2, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{G} m_2 = a n^2 l^2. \quad (2.39)$$

Combinando as Equações 2.38 e 2.39 obtém-se:

$$\mathcal{G} M = n^2 l^3. \quad (2.40)$$

Após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\frac{a}{l} = \frac{m_2}{M}, \quad (2.41)$$

$$\frac{b}{l} = \frac{m_1}{M}. \quad (2.42)$$

Definindo-se $\frac{m_2}{M} = \mu$, tem-se que $\frac{m_1}{M} = 1 - \mu$. O parâmetro adimensional μ é a razão de massa e de distância do sistema e permite, desta forma, que se estabeleça relação entre as escalas de massa e de distância do problema. Dado que fisicamente deve-se verificar que $\mu \in]0,1[$, tal parâmetro é do tipo canônico e estabelece a equivalência de escala de massa e de distância do problema à unidade, isto é, no sistema canônico de unidades do problema em estudo a massa total do sistema, referida à massa total dos primários pela Equação 2.22, é unitária, assim como, mediante Equações 2.36, 2.41 e 2.42, chega-se

que a distância entre os primários também é unitária. Além disso, na descrição do movimento da partícula de prova no referencial sideral, ao se admitir a mudança de variáveis $\frac{x}{l} = \xi$, $\frac{y}{l} = \eta$, $t^* = nt$ e que:

$$\frac{R_1}{l} = \rho_1 = \sqrt{[\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)]^2 + [\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)]^2}, \quad (2.43)$$

$$\frac{R_2}{l} = \rho_2 = \sqrt{[\xi(t^*) - (1 - \mu) \cos(t^*)]^2 + [\eta(t^*) - (1 - \mu) \sin(t^*)]^2}, \quad (2.44)$$

obtem-se:

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} \xi(t^*) = -\mathcal{G} \left\{ \frac{(1 - \mu)[\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)]}{\rho_1^3} + \frac{\mu[\xi(t^*) - (1 - \mu) \cos(t^*)]}{\rho_2^3} \right\}, \quad (2.45)$$

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} \eta(t^*) = -\mathcal{G} \left\{ \frac{(1 - \mu)[\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)]}{\rho_1^3} + \frac{\mu[\eta(t^*) - (1 - \mu) \sin(t^*)]}{\rho_2^3} \right\}. \quad (2.46)$$

Analogamente, pode-se empreender a representação adimensionalizada das equações de movimento da partícula de prova no referencial sinódico. Adota-se a mudança de variáveis em que $\frac{\tilde{x}}{l} = x^*$, $\frac{\tilde{y}}{l} = y^*$, $t^* = nt$ e:

$$\frac{\tilde{R}_1}{l} = \varrho_1 = \sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\tilde{R}_2}{l} = \varrho_2 = \sqrt{[x^* - (1 - \mu)]^2 + y^{*2}}. \quad (2.48)$$

Então:

$$\ddot{x}^* - 2\dot{y}^* = \Omega_{x^*}^*(x^*, y^*), \quad (2.49)$$

$$\dot{y}^* + 2\dot{x}^* = \Omega_{y^*}^*(x^*, y^*), \quad (2.50)$$

onde $\Omega_{x^*}^*(x^*, y^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} \Omega^*(x^*, y^*)$ e $\Omega_{y^*}^*(x^*, y^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \Omega^*(x^*, y^*)$, com:

$$\begin{aligned} \Omega^*(x^*, y^*) &= \frac{1}{(nl)^2} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \\ &= \frac{1}{2} (x^{*2} + y^{*2}) + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}} \\ &\quad + \frac{\mu}{\sqrt{[x^* - (1 - \mu)]^2 + y^{*2}}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Após este processo de adimensionalização das equações de movimento da partícula de prova expressas nos referenciais sideral e sinódico, chega-se à forma adimensional da Integral de Jacobi:

$$\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} = 2\Omega^*(x^*, y^*) - C^*, \quad (2.52)$$

em que $C^* = \frac{\tilde{c}}{(nl)^2}$ é a constante adimensional de Jacobi.

2.7 Pontos de Equilíbrio do PRTCC

No referencial sinódico \tilde{S}_B , adotando-se a adimensionalização de coordenadas estabelecida na seção anterior, definem-se pontos de equilíbrio do PRTCC os pontos $P_i(x_i^*, y_i^*) \in \varpi$ que, matematicamente, são pontos críticos da função de potencial efetivo $\Omega^*(x^*, y^*)$. Desta forma, tem-se que:

$$\Omega_{x^*}^*(x_i^*, y_i^*) = \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \Omega^*(x^*, y^*) \right]_{\substack{x^*=x_i^* \\ y^*=y_i^*}} = 0, \quad (2.53)$$

$$\Omega_{y^*}^*(x_i^*, y_i^*) = \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \Omega^*(x^*, y^*) \right]_{\substack{x^*=x_i^* \\ y^*=y_i^*}} = 0. \quad (2.54)$$

Fisicamente, em $P_i(x_i^*, y_i^*)$ a resultante das forças gravitacionais devida aos primários é compensada pela pseudo força centrífuga. Deve-se enfatizar que o campo de força gravitacional exercido por um primário em $\varpi \subset \mathbb{E}_{n,a}^3$ decai em intensidade com o quadrado da distância tomada em relação ao próprio corpo, ao passo que o campo de pseudo força centrífuga tem sua intensidade incrementada com a distância tomada a partir da origem $B(x_B, y_B, z_B)$ do referencial sinódico \tilde{S}_B . No referencial sideral S_B , para primários de massas diferentes, não se verificam pontos de equilíbrio devido ao fato de, neste referencial, os pontos de $\varpi \subset \mathbb{E}_{n,a}^3$ estarem sujeitos apenas à sobreposição dos campos de forças gravitacionais devidos aos primários, não havendo, assim, compensação dinâmica por outro campo de força alheio aos gravitacionais. Do fato de $P_i(x_i^*, y_i^*) \in \varpi$ ser um ponto de equilíbrio, uma partícula de prova P ao ocupar tal posição num dado instante estará sujeita a aceleração efetiva nula em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$ neste instante. Além disso, se a velocidade inicial da partícula de prova disposta num ponto de equilíbrio for nula, a partícula de prova permanecerá indefinidamente em tal ponto. Em decorrência deste fato, os pontos de equilíbrio são também denominados de pontos estacionários (PRADO; KUGA, 2001).

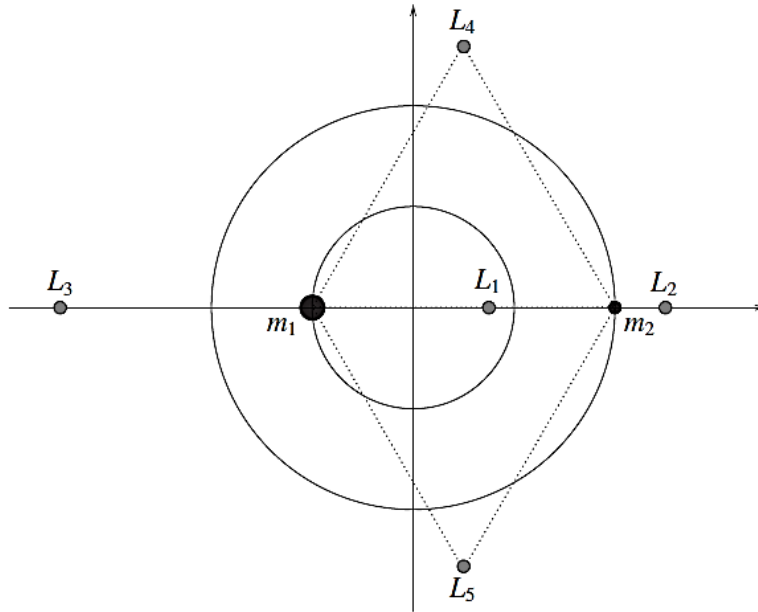
Explicitando os termos das Equações 2.53 e 2.54, tem-se o sistema algébrico não linear seguinte:

$$x_i^* = \frac{(1 - \mu)(x_i^* + \mu)}{[(x_i^* + \mu)^2 + y_i^{*2}]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu[x_i^* - (1 - \mu)]}{\{[x_i^* - (1 - \mu)]^2 + y_i^{*2}\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.55)$$

$$y_i^* = \frac{(1 - \mu)y_i^*}{[(x_i^* + \mu)^2 + y_i^{*2}]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu y_i^*}{\{[x_i^* - (1 - \mu)]^2 + y_i^{*2}\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.56)$$

Por inspeção, constata-se que $y_i^* = 0$ verifica identicamente a Equação 2.56. Desta forma, existem pontos de equilíbrio da forma $P_i(x_i^*, 0)$.

Figura 2.2: Pontos de equilíbrio do PRTCC.



Fonte: Geiges (2016).

Empregando-se métodos numéricos, como, por exemplo, o método da bissecção, encontram-se três valores reais de x_i^* para os quais $y_i^* = 0$ e que correspondem a três pontos de equilíbrio, a saber, $L_1(x_{L_1}^*, 0)$, com $0 < x_{L_1}^* < 1 - \mu$, $L_2(x_{L_2}^*, 0)$, com $x_{L_2}^* > 1 - \mu$ e $L_3(x_{L_3}^*, 0)$, com $x_{L_3}^* < -\mu$, como apresentado na Figura 2.2. Do fato de tais pontos terem ordenada sinódica nula, e por estarem localizados ao longo das abscissas sinódicas, admitem também serem denominados como pontos de equilíbrio colineares do sistema.

O PRTCC ainda possui mais dois pontos de equilíbrio associados a outras duas soluções reais do sistema algébrico não linear das Equações 2.55 e 2.56. Para $y_i^* \neq 0$, estas equações são satisfeitas se, e somente se, $q_1 = q_2 = 1$, isto é, se a partícula de prova ocupar uma posição equidistante dos primários e que seja igual à escala geométrica do problema (MURRAY; DERMOTT, 1999). Nota-se que este arranjo ocorre simetricamente ao eixo das abscissas sinódicas, dados que os campos de forças gravitacionais e centrífugo são simétricos a este eixo. Logo, haverá os pontos de equilíbrio $L_4(x_{L_4}^*, y_{L_4}^*)$ e $L_5(x_{L_5}^*, y_{L_5}^*)$, com $x_{L_4}^* = x_{L_5}^*$ e $y_{L_4}^* = -y_{L_5}^*$.

Analicamente, pode ser verificado que $x_{L4}^* = x_{L5}^* = \frac{1}{2} - \mu$ e que $y_{L4}^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y_{L5}^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Estes pontos são dispostos nos vértices opostos pela base definida como o segmento de reta ao longo das abscissas sinódicas entre os primários de um par de triângulos equiláteros, como é mostrado na Figura 2.2 e, por esta razão, também são denominados de pontos de equilíbrio triangulares. (MURRAY; DERMOTT, 1999). Os pontos de equilíbrio colineares e triangulares também admitem serem denominados de pontos de Lagrange.

2.8 Curvas de Velocidade Zero do PRTCC

Considerando-se a Equação 2.52, pode-se notar que a velocidade da partícula de prova é uma função de sua posição no plano $\varpi \subset \mathbb{C}_{n,a}^3$. O valor da constante Adimensional de Jacobi C^* pode então ser determinado mediante o conhecimento de condições de posição $x^* = \hat{x}^*$, $y^* = \hat{y}^*$ e de velocidade $\dot{x}^* = \hat{\dot{x}}^*$, $\dot{y}^* = \hat{\dot{y}}^*$ do movimento da partícula em ϖ . (MCCUSKEY, 1963; SZEBEHELY, 1967). Matematicamente, $-\frac{C^*}{2} = -\frac{C^*}{2}(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{\dot{x}}^*, \hat{\dot{y}}^*)$ estabelece patamares para o traçado das curvas de nível da função de energia mecânica total específica adimensionalizada da partícula de prova no referencial sinódico:

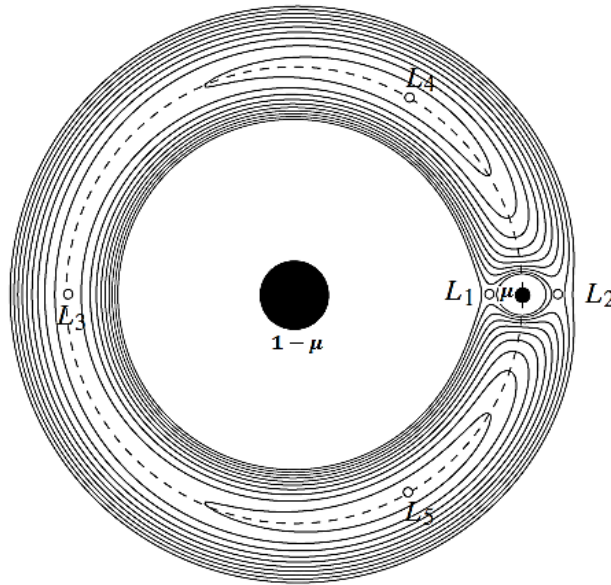
$$-\frac{C^*}{2} = \frac{1}{2}(\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}) - \frac{1}{2}(x^{*2} + y^{*2}) - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}} - \frac{\mu}{\sqrt{[x^* - (1 - \mu)]^2 + y^{*2}}}. \quad (2.57)$$

Fisicamente, $-\frac{C^*}{2}$ determina o nível de energia mecânica total específica admissível à partícula de prova associado às condições $(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{\dot{x}}^*, \hat{\dot{y}}^*)$. Por meio da determinação de C^* mediante tais condições, a Equação 2.52 passa a oferecer um mapa de distribuição de velocidade para a partícula de prova em ϖ associado ao valor C^* no referencial sinódico \tilde{S}_B em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$. Desta forma, é possível determinar as componentes sinódicas de velocidade da partícula numa dada posição $P(x^*, y^*) \in \varpi$. De outra forma,

por meio desta constante, para componentes de velocidade sinódica dadas, pode-se determinar o conjunto de pontos em que permite-se o deslocamento da partícula de prova quando esta apresentar tal velocidade para um dado nível de energia mecânica específica $-\frac{C^*}{2}(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{x}^*, \hat{y}^*)$. Formalmente, tal conjunto de pontos é denominado de curva de velocidade Γ associada às condições de posição e velocidade dadas, isto é:

$$\Gamma := \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid \hat{x}^{*2} + \hat{y}^{*2} = 2\Omega^*(x^*, y^*) - C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{x}^*, \hat{y}^*)\}. \quad (2.58)$$

Figura 2.3: Pontos de Lagrange do PRTCC e curvas de velocidade zero associadas para $\mu = 0,01$.



Fonte: Murray; Dermott (1999), modificado.

Em particular, destaca-se o conjunto de pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ para o qual tem-se as curvas de velocidade zero $\Gamma = \Gamma_0$ do sistema desde que $\hat{x}^{*2} + \hat{y}^{*2} = 0$, como mostrado na Figura 2.3. Desta forma:

$$\Gamma_0 := \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid 2\Omega^*(x^*, y^*) - C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{x}^*, \hat{y}^*) = 0\}. \quad (2.59)$$

Equivalentemente, para dado $C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)$, Γ_0 pode ser definida como:

$$\Gamma_0: 2\Omega^*(x^*, y^*) = C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*). \quad (2.60)$$

Do fato da Equação 2.60 admitir ser reescrita como $\Omega^*(x^*, y^*) = \frac{C^*}{2}(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)$, as curvas Γ_0 também podem ser chamadas de curvas equipotenciais, isto é, são o conjunto de pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ em que se verifica a identidade $\vec{\nabla}\Omega^*(x^*, y^*) = \vec{0}$, dado que $\frac{C^*}{2}(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)$ é constante. Estas curvas particulares são também referenciadas como curvas de Hill. Explicitando-se os termos da Equação 2.60, tem-se:

$$\begin{aligned} x^{*2} + y^{*2} + 2 \left[\frac{1 - \mu}{\sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}} + \frac{\mu}{\sqrt{[x^* - (1 - \mu)]^2 + y^{*2}}} \right] \\ = C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Observa-se que o movimento da partícula de prova sobre $P(x^*, y^*) \in \varpi$ para dado $C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)$ é limitado pela relação apresentada na Equação 2.60, uma vez que tal movimento deve verificar que $\dot{\hat{x}}^{*2} + \dot{\hat{y}}^{*2} \geq 0$, necessariamente, ou equivalentemente que:

$$2\Omega^*(x^*, y^*) \geq C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*), \quad (2.62)$$

caso contrário, estar-se-ia permitindo à partícula de prova que o quadrado da norma métrica euclidiana de seu vetor velocidade sinódico seja negativo. Assim, o conjunto de pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ admissíveis fisicamente ao movimento da partícula, influenciado pelos campos de força gravitacionais dos primários e pelo campo da pseudo força centrífuga, em \tilde{S}_B , em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$ compõem a região:

$$\Lambda := \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid 2\Omega^*(x^*, y^*) \geq C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)\}. \quad (2.63)$$

A região plana confinada no interior de Γ_0 , denotada por Λ^- , é aquela em que os pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ apenas verificam $2\Omega^*(x^*, y^*) > C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)$, ou mais formalmente:

$$\Lambda^- := \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid 2\Omega^*(x^*, y^*) > C^*(\hat{x}^*, \hat{y}^*, \dot{\hat{x}}^*, \dot{\hat{y}}^*)\}. \quad (2.64)$$

Tais regiões também são denominadas de regiões de Hill (DUTT; SHARMA, 2011). Nota-se que as regiões de Hill são limitadas pelas curvas de Hill (MCCUSKEY, 1963). É fundamental salientar, no entanto, que Λ é a região permitida ao movimento espontâneo da partícula de prova. Ao se lançar mão de uma partícula que possa desenvolver velocidade diferente da que possui devido o sistema físico em estudo, como é o caso de um veículo espacial dotado de propulsão, a região permitida a seu movimento passa a abranger todo o plano ϖ .

Em termos da descrição feita acima, observa-se que não se obtém qualquer informação acerca da trajetória da partícula de prova no sistema. Tal descrição permite um estudo qualitativo de seu movimento, conhecendo-se as regiões permitidas ao movimento espontâneo da partícula e seu limite estabelecido pelas curvas de contorno equipotenciais (MCCUSKEY, 1963).

Conhecidas as coordenadas sinódicas dos pontos de Lagrange $L_i, i = 1, 2, \dots, 5$ do sistema e impondo-se a condição de velocidade nula para a partícula de prova, pode-se determinar o valor da constante Adimensional de Jacobi associada a cada ponto de equilíbrio, denotada por $C^*_i(\hat{x}^* = x_i^*, \hat{y}^* = y_i^*, \dot{\hat{x}}^* = 0, \dot{\hat{y}}^* = 0), i = 1, 2, \dots, 5$ e que estabelece uma curva de velocidade zero que contém o dado ponto de equilíbrio:

$$C^*_i(\hat{x}^* = x_i^*, \hat{y}^* = y_i^*, \dot{\hat{x}}^* = 0, \dot{\hat{y}}^* = 0) = 2\Omega^*(x_i^*, y_i^*). \quad (2.65)$$

A partir de C^*_i , fazendo-se novamente recurso da Integral de Jacobi, pode-se determinar o conjunto de pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ que, assim como L_i , compõem a curva de velocidade zero associada à constante determinada:

$$\Gamma_{0L_i} := \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \Omega^*(x_i^*, y_i^*) = 0\}. \quad (2.66)$$

Como visto, $-\frac{C^*}{2}$ é a energia mecânica total específica adimensionalizada da partícula de prova, parametrizada no referencial sinódico \tilde{S}_B . Quanto menor C^* , maior é a energia mecânica específica da partícula em seu movimento em ϖ . Para valores altos de C^* , o quadrado da velocidade da partícula no sistema sinódico será não negativo desde que a partícula esteja à grande distância do centro de massa $B(x_B, y_B, z_B)$ do sistema em comparação à sua distância ao primário I e ao primário II, ou se a partícula estiver muito próxima dos primários, isto é, para $\|\vec{r}^*\| = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \gg \varrho_1 = \sqrt{(x^* + \mu)^2 + y^{*2}}$ e $\|\vec{r}^*\| = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \gg \varrho_2 = \sqrt{[x^* - (1 - \mu)]^2 + y^{*2}}$ ou se ϱ_1 ou ϱ_2 forem pequenos. Assumindo que a partícula de prova esteja à grande distância de $B(x_B, y_B, z_B)$, a Equação 2.52 admite ser escrita como:

$$\dot{x}^{*2} + \dot{y}^2 = x^{*2} + y^{*2} + \varepsilon(x^*, y^*) - C^*, \quad (2.67)$$

em que:

$$\varepsilon(x^*, y^*) = 2 \left(\frac{1 - \mu}{\varrho_1} + \frac{\mu}{\varrho_2} \right), \quad (2.68)$$

é um pequeno parâmetro se são verificadas as condições de desigualdade acima apresentadas (MCCUSKEY, 1963). Em particular, considerando-se curvas de velocidade zero ($\|\vec{v}^*\|^2 = 0$), a Equação 2.67 passa a ser:

$$x^{*2} + y^{*2} = C^* - \varepsilon(x^*, y^*), \quad (2.69)$$

que é aproximadamente a equação de uma circunferência de raio $\sqrt{C^* - \varepsilon(x^*, y^*)}$ (MOLTON, 1960). Tal curva, que é uma curva de Hill, é o limite de uma região oval que contém ambos os primários. Nesta configuração cinética sinódica, a partícula de prova só pode mover-se espontaneamente à distância dos primários. Sua aproximação aos primários é cineticamente proibida espontaneamente, a menos que se faça uso de

propulsão, no caso de um veículo espacial. Em contrapartida, para um alto valor de C^* e considerando-se a configuração geométrica em que a partícula está muito próxima do primário I (ϱ_1 pequeno), os termos da Integral de Jacobi associados ao pseudo potencial centrífugo e ao potencial gravitacional do primário II tornam-se desprezíveis. Na condição de velocidade zero, esta configuração resulta em uma oval ao redor do primário I e a partícula é necessariamente encontrada em seu interior próxima desse primário. Analogamente, para um alto valor de C^* e considerando-se a configuração geométrica em que a partícula está muito próxima do primário II (ϱ_2 pequeno), os termos da Integral de Jacobi associados ao pseudo potencial centrífugo e ao potencial gravitacional do primário I tornam-se desprezíveis. Verificando-se a condição de velocidade zero, esta configuração resulta em uma oval ao redor do primário II e tem-se que a partícula de prova é necessariamente encontrada em seu interior nas vizinhanças desse primário. Mesmo que se assumam na análise acima estabelecida ϱ_1 e ϱ_2 de mesma ordem de grandeza, as ovals de cada primário serão tão maiores quanto maior for a massa do corpo associado (PRADO, 2001; DUTT; ANILKUMAR, 2014). No problema em estudo, dado que $m_1 > m_2$, tem-se que a oval do primário I é maior que a do primário II. Desta forma, a partícula de prova apresenta uma maior região em ϖ circundante ao primário I, permitida espontaneamente a seu movimento, do que em comparação com a região circundante ao primário II. Verificadas pela partícula de prova qualquer uma das duas últimas configurações geométricas apresentadas, a mesma permanecerá próxima ao primário vizinho, mantendo-se no interior da oval correspondente, não havendo espontaneidade cinética de transferência para a oval do outro primário. Isto ocorre devido à existência de uma barreira de energia entreposta aos primários. Além disso, também verifica-se a barreira de energia para a partícula em relação a seu escape do primário vizinho para regiões mais afastadas do sistema binário assim como tal barreira é presente para uma partícula inicialmente afastada do sistema binário em relação à sua aproximação a um de seus primários constituintes. Tais barreiras, no entanto, podem ser transpostas fazendo-se uso de propulsão, por exemplo, no caso de um veículo espacial.

Diminuindo-se o valor de C^* , as regiões ovais circundantes aos primários se expandem a tal ponto que $\|\vec{v}^*\|^2 \geq 0$, mesmo para ϱ_1 e ϱ_2 maiores e, conseqüentemente, atenuam-

se as contribuições dos termos gravitacionais na Equação 2.69. Além disso, verifica-se a retração da oval externa e o tangenciamento entre as ovas dos primários. O ponto de tangência é aquele em que se verifica a mínima energia (maior valor de C^*) ao longo do segmento de reta entre os primários. Tal ponto é o ponto de Lagrange L_1 que, devido a sua relação com as ovas dos primários, é também denominado de primeiro ponto de contato entre as mesmas (SZEBEHELY, 1967). Deve-se observar ainda que, sendo L_1 a primeira intersecção entre as ovas, que tem seus limites na forma de curvas de Hill, uma partícula ao migrar de uma oval de um primário para outra alcançará este ponto de equilíbrio com velocidade sinódica nula. Além disso, ao estar sobre este ponto, a partícula passará a ter aceleração efetiva também nula (SZEBEHELY, 1967; PRADO, 2001).

Prosseguindo-se com a redução de C^* , verifica-se o tangenciamento da oval externa dos primários com as ovas dos primários I e II. Os pontos de tangenciamento correspondem aos pontos de equilíbrio L_2 , entre a oval externa e a oval do primário II e L_3 , entre a oval externa e a oval do primário I. Logo, L_2 e L_3 também são primeiros pontos de contato (e pontos de libração), mas não para o mesmo valor de C^* . De fato, $C^*_{L_2} > C^*_{L_3}$, o que implica que pode ocorrer a libração de uma partícula de prova entre a oval do primário II e o exterior do sistema binário mais facilmente em termos de energia (energia menor) do que para o primário I e o exterior. Isto se deve ao fato de que, dado que o primário II é menos massivo em comparação ao primário I, a partícula de prova está sujeita à atração gravitacional menos intensa àquele primário pelo critério de massa. Em termos práticos, um veículo espacial pode se aproximar ou deixar o sistema binário mais facilmente, em termos de energia, por L_2 do que por L_3 (SZEBEHELY, 1967).

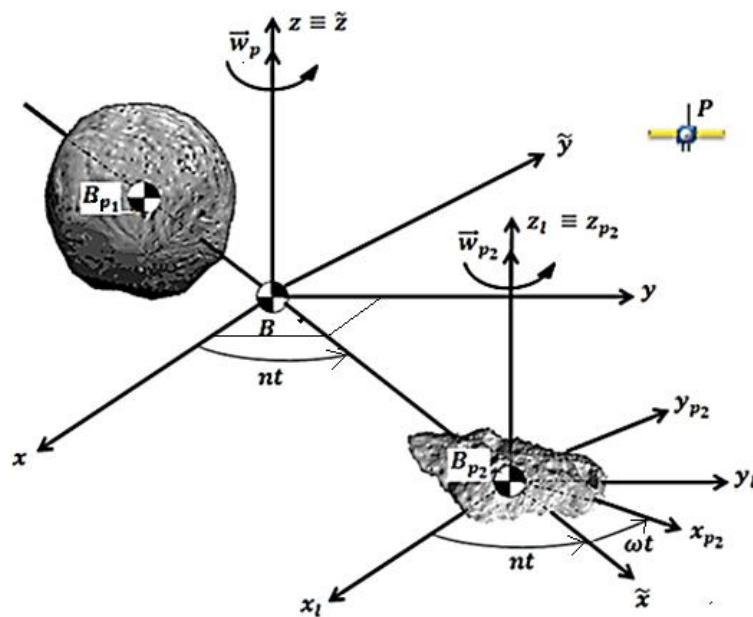
Valores ainda menores de C^* implicam no fato de a energia mecânica total específica da partícula de prova, no referencial sinódico, assumir valores mais elevados. Consequentemente, o movimento espontâneo da mesma se estende por uma região no plano ϖ muito maior. As ovas dos primários se conectam entre si e com a oval externa não mais apenas pelos pontos de equilíbrio L_1 , L_2 e L_3 , respectivamente. Isto significa que a libração entre tais ovas é menos custosa cineticamente. Contudo, quando C^*

assume valores próximos ou iguais a $C^*_{L_4} = C^*_{L_5}$, surgem novas regiões de restrição ao movimento da partícula de prova, desta vez associadas aos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 (SZEBEHELY, 1967).

2.9 Forma e Distribuição de Massa dos Primários

Assume-se que os primários têm massas finitas. O primário I, de massa m_1 , por hipótese de modelo, é mais massivo e apresenta forma aproximadamente esférica. O primário II, de massa m_2 , apresenta formato irregular. A forma irregular do primário II é explicada, em boa medida, pelo fato de $m_2 < m_1$, como apresentado anteriormente.

Figura 2.4: Representação artística de um sistema binário de asteroides.



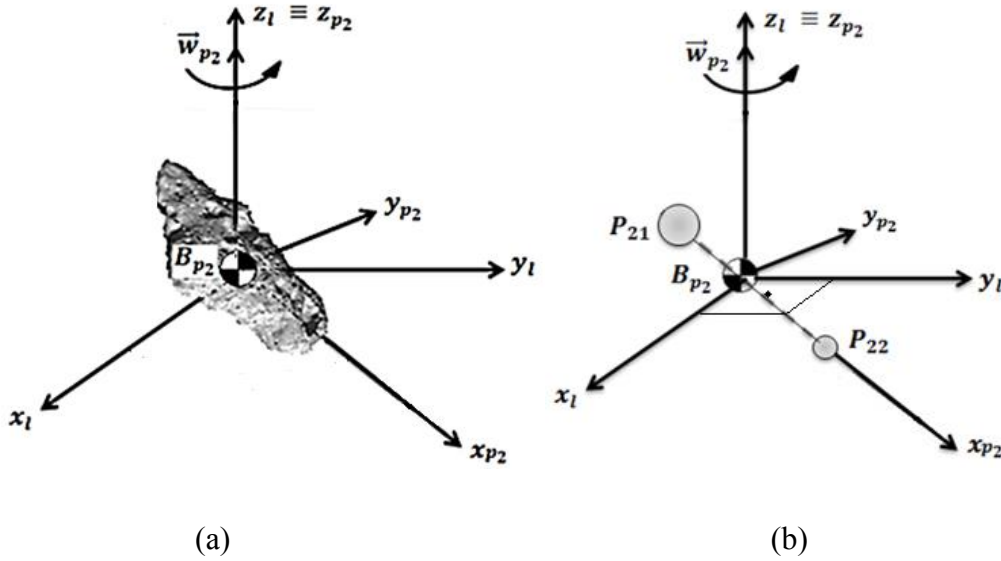
Fonte: Produção do Autor³.

³As ilustrações de asteroides presentes na Figura 2.4, Figura 2.5 e na Figura 2.6 foram extraídas de:
<http://photobucket.com/gifs/spinning%20asteroid%20transparent%20animated%20gif%20rock>
<https://www.generation-nt.com/terre-quasi-satellite-asteroide-actualite-1930094.html>

Por se tratarem de corpos extensos, isto é, providos de estrutura interna, denota-se por B_{p1} o centro de massa do primário I e, analogamente, por B_{p2} o centro de massa do primário II. Observa-se ainda que seus respectivos centros de massa estão localizados no interior do espaço ocupado por cada um dos primários, como representado na Figura 2.4. Na figura, $\vec{\omega}_p$ denota a velocidade angular associada ao movimento orbital dos primários em torno de $B(x_B, y_B, z_B)$ no referencial sideral S_B . Além disso, os primários possuem rotação em torno de seus respectivos centros de massa. Devido ao formato esférico do primário I, sua rotação não introduz aspectos relevantes a este estudo. Quanto ao primário II, devido sua forma assimétrica, deve-se considerar sua rotação. Para parametrização angular da rotação deste primário, consideram-se o sistema de referência local $S_L: B_{p2}x_ly_lz_l$, que é não inercial transladante e que não acompanha a rotação do primário II e o sistema de referência do corpo do primário II $S_{p2}: B_{p2}x_{p2}y_{p2}z_{p2}$, que é não inercial girante e que por ser fixo ao corpo deste primário, acompanha-lhe o movimento de rotação. Observa-se que os referenciais S_L e S_{p2} têm origem comum em B_{p2} e que $B_{p2}z_l \equiv B_{p2}z_{p2}$ a todo instante, como mostrado na Figura 2.4. Esta congruência se sobrepõe, convenientemente, ao eixo de maior momento de inércia do primário II, que é o próprio eixo de rotação do mesmo. O primário II possui velocidade angular de rotação $\vec{\omega}_{p2}$, que é assumida constante no tempo.

O primário I, devido apresentar forma esférica, por hipótese, e assumindo-se que seja homogêneo e isotrópico em sua estrutura interna, admite ser correspondido a um ponto de massa, denotado por P_1 , que é coincidente com o centro de massa B_{p1} deste corpo. Este modelo para o primário I é resultado do Princípio da Correspondência de Campo Potencial Gravitacional estabelecido entre o campo potencial gravitacional de um corpo com distribuição radial e simétrica de massa e o campo potencial gravitacional de uma partícula. Neste estudo não são considerados termos de harmônicos esféricos para expressar-se, matematicamente, o campo potencial gravitacional do primário I.

Figura 2.5: Representação artística do Primário II em (a) seu equivalente pelo Modelo de Dipolo de Massa em Rotação em (b).



Fonte: Produção do Autor.

Devido à forma irregular e alongada do primário II, este não admite ser correspondido a uma partícula (ponto de massa) que coincida com seu centro de massa, mesmo que se considere que este corpo seja, em sua estrutura interna, homogêneo e isotrópico. Por esta razão, adota-se o modelo de dipolo de massa em rotação, em que um corpo desprovido de qualquer simetria e que, em particular, tenha sua massa aproximadamente distribuída ao longo de um eixo característico do corpo, pode ser modelado como dois pontos de massa, a denotar, P_{21} e P_{22} , de massas m_{21} e m_{22} , respectivamente, tal que:

$$m_{21} + m_{22} = m_2, \quad (2.70)$$

como mostra a Figura 2.5. Neste modelo aproxima-se o campo potencial gravitacional de um corpo irregular e alongado com rotação em torno do eixo perpendicular à sua alongação (eixo de momento de inércia dominante) ao campo potencial gravitacional de um par de pontos de massa vinculadas entre si por uma haste ideal (rígida e sem massa), com rotação em torno de um eixo perpendicular a ela. O comprimento desta haste é a

distância característica entre os dois pontos de massa, isto é, trata-se do comprimento do asteroide a ser considerado, que é assumido constante no tempo.

Ao se considerar a dimensão, forma e distribuição de massa dos primários, passa-se a considerar o Problema Restrito de Três Corpos Completo (PRTCCp). De fato, o problema já admite ser tomado como completo quando a distribuição de massa e a dimensão de pelo menos um dos primários são consideradas.

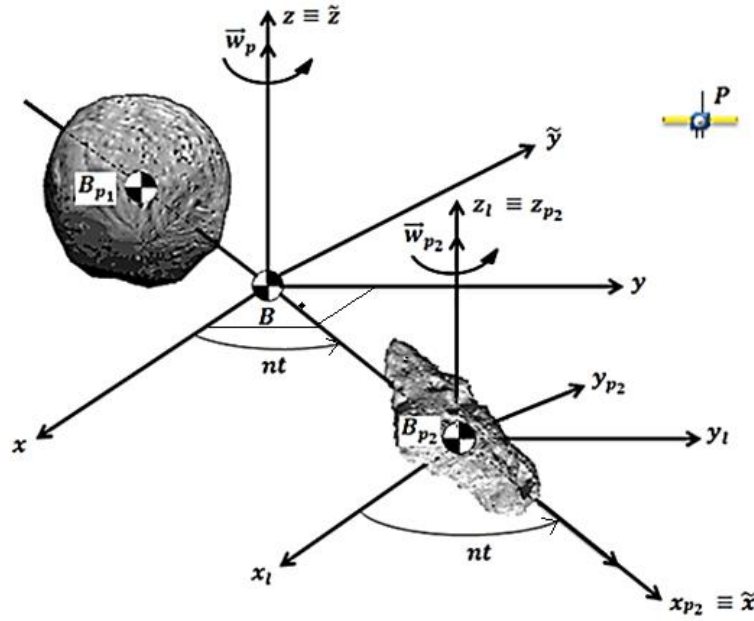
2.10 Ressonância Spin-órbita no PRTCCp

Em Mecânica Celeste, define-se estrutura ressonante o sistema dinâmico constituído por um corpo perturbador e por um corpo perturbado. O corpo perturbado sofre a influência de uma força externa periódica que pode ser de origem gravitacional ou de maré devidas ao corpo perturbador. Neste sentido, ressonância é a comensurabilidade entre duas ou mais frequências associadas aos modos dinâmicos da estrutura ressonante (ROIG, 2006). O sistema binário em consideração compõe uma estrutura ressonante.

Neste estudo, considera-se a ressonância associada à comensurabilidade do movimento orbital (modo dinâmico de translação) e do movimento de rotação (modo dinâmico de rotação) sobre o primário II, assumido como corpo perturbado, pelo primário I que é seu corpo perturbador. A tal ressonância denomina-se ressonância spin-órbita. Ela surge devido à distribuição assimétrica de massa de um corpo com movimento de rotação (spin) em torno de outro corpo ou do centro de massa do sistema. Em decorrência da assimetria de massa e à sua rotação, o corpo perturbado exhibe variações periódicas de seu campo potencial gravitacional que se acoplam ao seu movimento orbital. O campo potencial gravitacional oscilante periodicamente em relação ao corpo perturbador leva à aplicação, por parte deste corpo, de forças de maré sobre o corpo perturbado. Tais forças são responsáveis pela transferência de energia de rotação do corpo perturbado, associada a seu *momentum* angular de spin e, desta forma, a seu modo dinâmico de rotação, para seu modo dinâmico de translação, alterando-lhe a energia e, conseqüentemente, o *momentum* angular orbital (ROIG, 2006). Este processo se dá em

regime transiente até que seja alcançada pelo corpo perturbado a comensurabilidade de frequências entre seus modos dinâmicos.

Figura 2.6: Representação artística de um sistema binário de asteroides com primário II em ressonância spin-órbita.



Fonte: Produção do Autor.

Observando-se a Figura 2.6 e, como denotado anteriormente, se \vec{w}_p é a velocidade angular do modo dinâmico de translação (orbital) dos primários em relação a $B(x_B, y_B, z_B)$ no referencial sideral S_B , e se \vec{w}_{p2} é a velocidade angular do modo dinâmico de rotação (spin) do primário II em relação a seu centro de massa B_{p2} , então, pela condição de ressonância spin-órbita, segue que:

$$\vec{w}_{p2} = \vec{w}_p. \quad (2.71)$$

Como $\|\vec{w}_p\| = n$, em que n é o movimento médio dos primários em S_B , é imediato que:

$$\|\vec{w}_{p2}\| = \|\vec{w}_p\| = n. \quad (2.72)$$

Desta forma, para o primário II existe comensurabilidade 1 : 1 entre as frequências de movimento orbital e de rotação devido à ressonância spin-órbita.

2.11 Efeito da Pressão da Radiação Solar

Um corpo que se apresenta iluminado pelo Sol, em sua trajetória em determinado sistema gravitacional, estará sujeito à aceleração induzida pela pressão da radiação solar (MONTEBRUCK; GILL, 2000; BEUTLER, 2005; MASSAGO, 2016). A aceleração decorrente da pressão devida à radiação solar sobre um corpo é causada pela transferência da quantidade de *momentum* linear dos fótons solares para a sua superfície externa irradiada. A quantidade de *momentum* linear associada a cada fóton depende da energia do próprio fóton e, portanto, a intensidade da força aplicada pelo Sol sobre o corpo depende da energia irradiada pelo Sol. Desta forma, tal força será tão mais significativa quanto maior a proximidade do corpo ao Sol (KUGA et al., 2011).

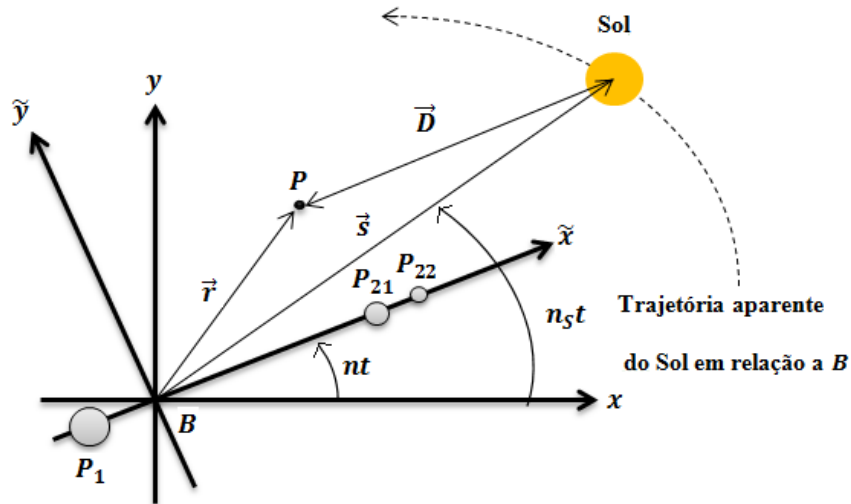
A aceleração induzida pela pressão da radiação solar sobre um corpo, no referencial sideral, pode ser expressa como:

$$\vec{a}_p = C_r \frac{A}{m} P_s \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 \hat{D}, \quad (2.73)$$

em que C_r é o coeficiente de reflexão e depende da refletividade da superfície do corpo iluminada pelo Sol, $C_r \in [1,2]$: 1 denota absorção total da energia irradiada pelo Sol e 2 denota reflexão total dessa energia pela superfície do corpo iluminada. Recorda-se que quanto mais escura for esta superfície, maior será a absorção da radiação solar e, conseqüentemente, menor sua refletividade. Dada uma absorção maior da radiação solar, mais significativa será a transferência de *momentum* linear dos fótons para o corpo. O valor de C_r adotado neste estudo é apresentado no Capítulo 3. Denota-se por P_s a pressão da radiação solar na órbita terrestre (a 1 au), aproximadamente constante, de valor $4,55 \cdot 10^{-6}$ N/m². O termo R_0 é a distância média Terra-Sol (1 au) e $D = \|\vec{D}\| = \sqrt{[x(t) - x_s(t)]^2 + [y(t) - y_s(t)]^2}$ é a distância instantânea do corpo ao Sol, sendo $x(t)$ e $y(t)$ as coordenadas siderais do corpo e $x_s(t)$ e $y_s(t)$ as coordenadas siderais do

Sol, com $\hat{D} = \frac{\vec{D}}{D}$. Assume-se, por hipótese, que o movimento aparente do Sol em relação ao baricentro B do sistema binário se dá no mesmo plano de movimento dos primários desse sistema. O termo A denota a área do corpo exposta à luminosidade solar e m é a massa desse corpo. Desta forma, a quantidade $\frac{A}{m}$ é denominada razão área-massa do corpo. A órbita de um corpo cuja razão área-massa é muito grande pode sofrer perturbações significativas devido à força de pressão da radiação solar (KUGA et al., 2011).

Figura 2.7: Movimento aparente do Sol em relação ao baricentro do sistema binário.



Fonte: Produção do Autor.

Na Figura 2.7 apresenta-se o movimento aparente do Sol em relação ao baricentro B do sistema binário. Denota-se por \vec{r} o vetor posição de um corpo em relação ao baricentro B , no referencial sideral, que interage gravitacionalmente com os primários do sistema (nas interações gravitacionais, em relação aos primários, este corpo admite ser representado como partícula de prova P). A quantidade \vec{s} representa o vetor posição relativo do Sol a B e \vec{D} é o vetor posição do corpo relativamente ao Sol, ambos no referencial sideral. Dado que $\|\vec{r}\| \ll \|\vec{D}\|$ a todo instante de tempo t , segue que $\vec{s} \cong -\vec{D}$ se, e somente se, $\|\vec{s}\| \cong \|\vec{D}\|$ e se $\hat{s} \cong -\hat{D}$, em que \hat{s} e \hat{D} são os vetores unitários

associados a \vec{s} e a \vec{D} , respectivamente. Das relações geométricas acima apresentadas e a partir da Equação 2.73, vem que:

$$\vec{a}_p \cong C_r \frac{A}{m} P_s \left(\frac{R_0}{D} \right)^2 (-\hat{s}) \quad (2.74)$$

Seja ν_S a anomalia verdadeira do baricentro B do sistema binário em relação ao Sol. Nota-se que ν_S admite ser também entendida como a anomalia verdadeira aparente do Sol em relação a B . Por meio de ν_S pode-se escrever que $\hat{s} = \cos \nu_S \vec{i} + \sin \nu_S \vec{j}$, no referencial sideral. Dado que em relação ao Sol o sistema binário admite ser representado como um ponto de massa coincidente com seu baricentro B , a interação gravitacional entre este sistema e o Sol, no referencial sideral, pelo modelo do Problema Restrito de Dois Corpos resulta em:

$$s(\nu_S) = \|\vec{s}\| = \frac{a_s(1 - e_s^2)}{1 + e_s \cos \nu_S} \quad (2.75)$$

em que a_s é o semi-eixo maior da órbita heliocêntrica de B , no referencial sideral, e e_s é sua excentricidade. É imediato que $x_S(t) = s(\nu_S) \cos \nu_S$ e $y_S(t) = s(\nu_S) \sin \nu_S$. Em particular, se a órbita do baricentro B do sistema binário em torno do Sol apresenta $e_s \cong 0$, pode-se aproximar a órbita aparente do Sol em relação a B para uma órbita circular. Seja n_S o movimento médio do baricentro B do sistema binário em relação ao Sol. Nota-se que n_S admite ser também entendido como o movimento médio aparente do Sol em relação a B , de tal modo que $\nu_S \cong n_S t$, como ilustra a Figura 2.7. Por meio de n_S pode-se escrever que $\hat{s} \cong \cos(n_S t) \vec{i} + \sin(n_S t) \vec{j}$. Além disso, pode-se considerar, por aproximação, que $s(\nu_S) \cong a_s$ para todo $\nu_S \in [0, 2\pi[$. Logo, denotando-se a aceleração sobre o corpo devido à pressão da radiação solar, de forma adimensionalizada, por $\vec{a}_p^* = \frac{1}{n^2 l} \vec{a}_p$, tem-se:

$$\vec{a}_p^* \cong - \frac{\frac{1}{n^2 l} C_r \frac{A}{m} P_s \left(\frac{R_0}{l} \right)^2}{[\xi(t^*) - \xi_S(t^*)]^2 + [\eta(t^*) - \eta_S(t^*)]^2} \left[\cos \left(\frac{n_S}{n} t^* \right) \vec{i} + \sin \left(\frac{n_S}{n} t^* \right) \vec{j} \right] \quad (2.76)$$

em que, como apresentado anteriormente, n é o movimento médio dos primários em torno de B , l é a distância entre os primários, $\frac{x}{l} = \xi$ e $\frac{y}{l} = \eta$. Observa-se ainda que $\frac{x_S}{l} = \xi_S \cong \frac{a_S}{l} \cos\left(\frac{n_S}{n} t^*\right)$ e $\frac{y_S}{l} = \eta_S \cong \frac{a_S}{l} \sin\left(\frac{n_S}{n} t^*\right)$. Verifica-se que $n_S t = \frac{n_S}{n} t^*$ pois $t^* = nt$, como definido anteriormente.

A justificativa para se considerar o efeito da pressão da radiação solar neste estudo é o fato de que, a depender da posição instantânea do corpo (veículo espacial) em relação a seu centro de movimento orbital (como, por exemplo, o centro de massa do primário assimétrico) tal efeito tende a empurrá-lo contra este primário do sistema, fazendo com que o corpo colida com o asteroide.

2.12 Determinação das Condições Iniciais ao Movimento da Partícula de Prova

Para que se determine o movimento da partícula de prova sujeita ao campo potencial gravitacional devido ao sistema binário em estudo, é necessário conhecer as condições iniciais de posição e velocidade da partícula relativamente a dado referencial, escolhido convenientemente.

Considere o referencial $S_L: B_{p2}x_ly_lz_l$, com origem no centro de massa B_{p2} do primário II, tratado como dipolo de massa em ressonância spin-órbita com o primário I, como mostrado na Figura 2.6. As condições cinemáticas iniciais de movimento da partícula de prova são determinadas considerando-se que, por hipótese, no instante inicial t_0 , a partícula interage gravitacionalmente apenas com o primário II, assumido como ponto de massa coincidente com seu centro de massa B_{p2} . Desta forma, ao se desconsiderar a influência gravitacional do primário I, bem como os efeitos de perturbação decorrentes da forma do primário II e, portanto, do dipolo, pode-se considerar, no instante mencionado, que o par primário II – partícula compõe um subsistema gravitacional de dois corpos e, conseqüentemente, o movimento da partícula de prova em torno de B_{p2} é kepleriano. Tais considerações sobre o sistema físico em estudo são tomadas de modo a ser admitida a existência de uma órbita osculadora inicial para a partícula de prova em t_0 em torno de B_{p2} , isto é, uma órbita que, no referido instante, tangencia a órbita real

da partícula de prova, em determinado ponto, ao redor do dipolo. Os elementos orbitais osculadores permitem, desta forma, a descrição da órbita que seria desenvolvida pela partícula de prova em torno de B_{p2} se não existissem a ação gravitacional do primário I e as perturbações gravitacionais de forma do primário II.

Sejam $a_0, e_0, i_0, \Theta_0, \omega_0$ os elementos orbitais da órbita kepleriana osculadora inicial, em t_0 , da partícula de prova em torno de B_{p2} , sendo a_0 seu semi-eixo maior orbital, e_0 sua excentricidade orbital, i_0 a inclinação do plano orbital da partícula de prova com relação ao plano de referência definido por $B_{p2}x_l y_l$, Θ_0 a longitude do nodo ascendente orbital, medida a partir da direção de referência definida por $B_{p2}x_l$ e ω_0 o argumento do pericentro orbital, medido a partir da linha nodal osculadora.

Considere o referencial perifocal $S_p: B_{p2}x_p y_p z_p$, com origem também em B_{p2} de tal modo que $B_{p2}x_p y_p$ define o plano orbital osculador da partícula de prova. Sejam, neste referencial $x_{p0}, y_{p0}, z_{p0}, \dot{x}_{p0}, \dot{y}_{p0}$ e \dot{z}_{p0} as condições cinemáticas iniciais de posição e velocidade da partícula de prova. Para a passagem destas condições ao referencial S_L empreende-se, então, a seguinte transformação de coordenadas por meio de três rotações sucessivas, como se segue (KUGA et al., 2012):

:

$$\begin{pmatrix} x_{l0} \\ y_{l0} \\ z_{l0} \end{pmatrix} = \mathcal{T}(\Theta_0, i_0, \omega_0) \begin{pmatrix} x_{p0} \\ y_{p0} \\ z_{p0} \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{l0} \\ \dot{y}_{l0} \\ \dot{z}_{l0} \end{pmatrix} = \mathcal{T}(\Theta_0, i_0, \omega_0) \begin{pmatrix} \dot{x}_{p0} \\ \dot{y}_{p0} \\ \dot{z}_{p0} \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

em que $\mathcal{T}(\Theta_0, i_0, \omega_0)$ é a matriz de transformação de coordenadas de S_p para S_L :

$$\mathcal{T}(\Theta_0, i_0, \omega_0) = \mathfrak{R}_3(-\Theta_0)\mathfrak{R}_1(-i_0)\mathfrak{R}_3(-\omega_0), \quad (2.79)$$

com:

$$\mathfrak{N}_3(-\Theta_0) = \begin{bmatrix} \cos\Theta_0 & -\sin\Theta_0 & 0 \\ \sin\Theta_0 & \cos\Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

$$\mathfrak{N}_1(-i_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_0 & -\sin i_0 \\ 0 & \sin i_0 & \cos i_0 \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

$$\mathfrak{N}_3(-\omega_0) = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & -\sin\omega_0 & 0 \\ \sin\omega_0 & \cos\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Em particular, considera-se que a órbita osculadora inicial da partícula de prova, da condição de coplanaridade dos três corpos do sistema, apresentada nas seções precedentes, possui $i_0 = 0$ (órbita direta) ou $i_0 = \pi$ (órbita retrógrada). Como consequência imediata, não é possível determinar a linha nodal osculadora e, desta forma, tem-se que Θ_0 é indefinido. Para contornar tal singularidade, por convenção, considera-se uma linha nodal osculadora coincidente com a direção definida por $B_{p2}x_t$, o que permite, assim, admitir $\Theta_0 = 0$. Além disso, neste estudo, por conveniência, impõe-se à órbita osculadora que a linha das apses osculadora coincide com a linha nodal osculadora. É imediato, então, constatar que $\omega_0 = 0$.

No referencial perifocal, do Problema Restrito de Dois Corpos e considerando-se coplanaridade da partícula de prova com os primários, tem-se que (KUGA et al., 2012):

$$x_{p0} = a_0(\cos u_0 - e_0), \quad (2.83)$$

$$y_{p0} = a_0\sqrt{1 - e_0^2}\sin u_0, \quad (2.84)$$

$$z_{p0} = 0, \quad (2.85)$$

$$\dot{x}_{p0} = -n_0 \frac{a_0^2}{r_0} \sin u_0, \quad (2.86)$$

$$\dot{y}_{p0} = n_0 \frac{a_0^2}{r_0} \sqrt{1 - e_0^2} \cos u_0, \quad (2.87)$$

$$\dot{z}_{p0} = 0, \quad (2.88)$$

onde n_0 é o movimento médio orbital osculador da partícula, u_0 é a anomalia excêntrica osculadora, medida a partir da linha das apses osculadora e r_0 é a distância da partícula de prova ao centro de massa do dipolo em t_0 . É sabido que:

$$r(\nu_0) = r_0 = \frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos \nu_0}, \quad (2.89)$$

em que ν_0 é a anomalia verdadeira da partícula em t_0 . Tal quantidade é medida a partir de $B_{p2}x_p$. No instante considerado, supõe-se que a partícula esteja sobre a direção definida por $B_{p2}x_p$, o que permite assumir que $\nu_0 = 0$ e, conseqüentemente, tem-se que:

$$r_0 = a_0(1 - e_0). \quad (2.90)$$

que é o raio do pericentro da órbita da partícula. Pode-se relacionar a anomalia verdadeira da partícula de prova com sua anomalia excêntrica por meio da equação:

$$\tan\left(\frac{u_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - e_0}{1 + e_0}} \tan\left(\frac{\nu_0}{2}\right). \quad (2.91)$$

Para $\nu_0 = 0$ e, como dito acima, sabendo-se que a anomalia excêntrica é medida também a partir de $B_{p2}x_p$, tem-se que $u_0 = 0$, qualquer que seja e_0 . Logo:

$$x_{p0} = a_0(1 - e_0), \quad (2.92)$$

$$y_{p0} = 0, \quad (2.93)$$

$$\dot{x}_{p0} = 0, \quad (2.94)$$

$$\dot{y}_{p0} = n_0 \frac{a_0}{1 - e_0} \sqrt{1 - e_0^2}. \quad (2.95)$$

Recorda-se, ainda que, em decorrência dos valores de inclinação do plano orbital osculador considerados, tem-se que $z_{l0} = z_{p0} = 0$ e $\dot{z}_{l0} = \dot{z}_{p0} = 0$, tanto para órbitas diretas quanto para órbitas retrógradas. Então, para uma órbita direta:

$$\begin{Bmatrix} x_{l0} \\ y_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p0} \\ y_{p0} \end{Bmatrix}, \quad (2.96)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{l0} \\ \dot{y}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{p0} \\ \dot{y}_{p0} \end{Bmatrix}. \quad (2.97)$$

E, para uma órbita retrógrada:

$$\begin{Bmatrix} x_{l0} \\ y_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{p0} \\ y_{p0} \end{Bmatrix}, \quad (2.98)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{l0} \\ \dot{y}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{p0} \\ \dot{y}_{p0} \end{Bmatrix}. \quad (2.99)$$

Por conveniência, pode-se passar as condições iniciais cinemáticas da partícula de prova para o referencial sideral S_B . Recordar-se que o referencial S_L é não inercial, pois por estar fixo ao centro de massa do primário II, acompanha-lhe em seu movimento orbital. No entanto, a todo instante, verifica-se que $Bx \parallel B_{p2}x_l$. Desta forma, por transformação de coordenadas mediante translação, tem-se que:

$$x_0 = x(t)_{t=t_0} = b \cos(nt)_{t=t_0} + x_{l0}, \quad (2.100)$$

$$y_0 = y(t)_{t=t_0} = b \sin(nt)_{t=t_0} + y_{l0}, \quad (2.101)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t)_{t=t_0} = -nb \sin(nt)_{t=t_0} + \dot{x}_{l0}, \quad (2.102)$$

$$\dot{y}_0 = \dot{y}(t)_{t=t_0} = nb \cos(nt)_{t=t_0} + \dot{y}_{l0}. \quad (2.103)$$

Considerando as quantidades $\xi_0 = \frac{x_0}{l}, \eta_0 = \frac{y_0}{l}, \dot{\xi}_0 = \frac{\dot{x}_0}{nl}, \dot{\eta}_0 = \frac{\dot{y}_0}{nl}, \tilde{x}_{l0} = \frac{x_{l0}}{l}, \tilde{y}_{l0} = \frac{y_{l0}}{l}, \dot{\tilde{x}}_{l0} = \frac{\dot{x}_{l0}}{nl}, \dot{\tilde{y}}_{l0} = \frac{\dot{y}_{l0}}{nl}$ e $nt_0 = t_0^*$, vem que:

$$\xi_0 = (1 - \mu) \cos(t_0^*) + \tilde{x}_{l0}, \quad (2.104)$$

$$\eta_0 = (1 - \mu) \sin(t_0^*) + \tilde{y}_{l0}, \quad (2.105)$$

$$\dot{\xi}_0 = -(1 - \mu) \sin(t_0^*) + \dot{\tilde{x}}_{l0}, \quad (2.106)$$

$$\dot{\eta}_0 = (1 - \mu) \cos(t_0^*) + \dot{\tilde{y}}_{l0}. \quad (2.107)$$

Analogamente, fazendo-se $\tilde{x}_{p0} = \frac{x_{p0}}{l}, \tilde{y}_{p0} = \frac{y_{p0}}{l}, \dot{\tilde{x}}_{p0} = \frac{\dot{x}_{p0}}{nl}, \dot{\tilde{y}}_{p0} = \frac{\dot{y}_{p0}}{nl}$, e definindo-se:

$$\tilde{a}_0 = \frac{a_0}{l}, \quad (2.108)$$

tem-se que:

$$\tilde{x}_{p0} = \tilde{a}_0(1 - e_0), \quad (2.109)$$

$$\tilde{y}_{p0} = 0, \quad (2.110)$$

$$\dot{\tilde{x}}_{p0} = 0, \quad (2.111)$$

$$\dot{\tilde{y}}_{p0} = \frac{n_0}{n} \frac{\tilde{a}_0}{1 - e_0} \sqrt{1 - e_0^2}, \quad (2.112)$$

Deve-se notar que, na Equação 2.109, \tilde{x}_{p0} é o próprio raio do pericentro orbital adimensionalizado da partícula de prova em relação ao primário representado como dipolo. Segue que:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_{l0} \\ \tilde{y}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_{p0} \\ \tilde{y}_{p0} \end{Bmatrix}, \quad (2.113)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{l0} \\ \dot{\tilde{y}}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{p0} \\ \dot{\tilde{y}}_{p0} \end{Bmatrix}, \quad (2.114)$$

e:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_{l0} \\ \tilde{y}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_{p0} \\ \tilde{y}_{p0} \end{Bmatrix}, \quad (2.115)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{l0} \\ \dot{\tilde{y}}_{l0} \end{Bmatrix}_{i_0=\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{p0} \\ \dot{\tilde{y}}_{p0} \end{Bmatrix}. \quad (2.116)$$

Considerando-se a Terceira Lei de Kepler para a partícula de prova em sua órbita osculadora, vem que:

$$\mathcal{G}m_2 = n_0^2 a_0^3. \quad (2.117)$$

Recordando-se, ainda, a Equação 2.40, obtém-se que:

$$\frac{n_0}{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0^3}}. \quad (2.118)$$

Conseqüentemente:

$$\dot{\tilde{y}}_{p0} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0} \left(\frac{1+e_0}{1-e_0} \right)}. \quad (2.119)$$

Na equação 2.119 a quantidade $\dot{\tilde{y}}_{p0}$ denota a velocidade adimensional da partícula de prova no pericentro orbital ao redor do dipolo. Assim, a partir das Equações 2.104 a 2.119, apresentam-se, em particular, as condições iniciais para o movimento da partícula de prova no pericentro orbital ao redor do dipolo e expressas no referencial sideral, para o instante inicial t_0^* . No caso de órbita direta, tem-se:

$$\xi_0 = (1 - \mu)\cos(t_0^*) + \tilde{a}_0(1 - e_0), \quad (2.120)$$

$$\eta_0 = (1 - \mu)\sin(t_0^*), \quad (2.121)$$

$$\dot{\xi}_0 = -(1 - \mu)\sin(t_0^*), \quad (2.122)$$

$$\dot{\eta}_0 = (1 - \mu)\cos(t_0^*) + \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0} \left(\frac{1 + e_0}{1 - e_0} \right)}, \quad (2.123)$$

e, no caso de órbita retrógrada, tem-se:

$$\xi_0 = (1 - \mu)\cos(t_0^*) + \tilde{a}_0(1 - e_0), \quad (2.124)$$

$$\eta_0 = (1 - \mu)\sin(t_0^*), \quad (2.125)$$

$$\dot{\xi}_0 = -(1 - \mu)\sin(t_0^*), \quad (2.126)$$

$$\dot{\eta}_0 = (1 - \mu)\cos(t_0^*) - \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0} \left(\frac{1 + e_0}{1 - e_0} \right)}. \quad (2.127)$$

Assumindo-se $t_0^* = 0$ (sistema físico causal), para órbita osculadora inicial direta e considerando-se seu pericentro, segue que:

$$\xi_0 = 1 - \mu + \tilde{a}_0(1 - e_0), \quad (2.128)$$

$$\eta_0 = 0, \quad (2.129)$$

$$\dot{\xi}_0 = 0, \quad (2.130)$$

$$\dot{\eta}_0 = 1 - \mu + \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0} \left(\frac{1 + e_0}{1 - e_0} \right)}, \quad (2.131)$$

e, para órbita osculadora inicial retrógrada e considerando-se seu pericentro, tem-se:

$$\xi_0 = 1 - \mu + \tilde{a}_0(1 - e_0), \quad (2.132)$$

$$\eta_0 = 0, \quad (2.133)$$

$$\dot{\xi}_0 = 0, \quad (2.134)$$

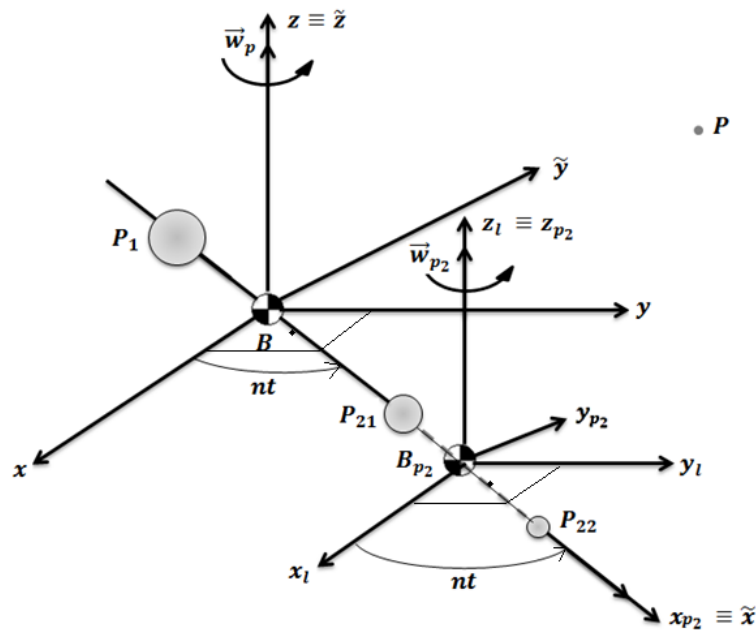
$$\dot{\eta}_0 = 1 - \mu - \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{a}_0} \left(\frac{1 + e_0}{1 - e_0} \right)}. \quad (2.135)$$

3 MODELO FÍSICO DO ESTUDO

3.1 Aspectos Geométricos do Modelo

Neste capítulo, empreende-se a construção do modelo físico de um sistema binário de asteroides em que o primário I, mais massivo, é assumido com forma esférica e o primário II, considerado de formato alongado e com distribuição assimétrica de massa é representado mediante modelo de dipolo de massa em rotação. O sistema é considerado em ressonância spin-órbita. Por meio deste modelo analítico, estabelecem-se as equações de governo do movimento de uma partícula de prova em relação ao centro de massa (baricentro) do sistema binário. Neste capítulo recorre-se à descrição física e matemática realizada no Capítulo 2 para o PRTCC.

Figura 3.1: Representação dos pontos de massa constituintes do sistema binário considerando-se configuração de ressonância spin-órbita para o dipolo.



Fonte: Produção do Autor.

Como visto no Capítulo 2, o primário I admite ser correspondido a um ponto de massa, denotado por $P_1 \equiv B_{p1}$, em que B_{p1} é o centro de massa deste corpo. O dipolo é composto por dois pontos de massa (polos), P_{21} e P_{22} , de massas m_{21} e m_{22} , respectivamente, tal que a soma das massas dos polos resulta na massa total do primário II. O centro de massa do dipolo, B_{p2} , é ponto virtual, isto é, não concentra massa. Da Figura 3.1 pode-se verificar que, como consequência da configuração de ressonância spin-órbita sobre o primário II, os pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} permanecem alinhados ao baricentro B do sistema binário. A direção de alinhamento é convenientemente escolhida para a definição do referencial sinódico \tilde{S}_B que apresenta rotação uniforme de intensidade n (movimento médio orbital dos primários) em relação ao referencial sideral S_B no plano ϖ de movimento dos primários. A partícula de prova é representada por P . A massa total do sistema binário é dada por:

$$M = m_1 + m_{21} + m_{22}, \quad (3.1)$$

em que m_1 é a massa do primário I.

Os raios das trajetórias dos centros de massa dos primários I e II são dados, respectivamente, por:

$$a = d(B_{p1}, B) = d(B, B_{p1}), \quad (3.2)$$

e

$$b = d(B_{p2}, B) = d(B, B_{p2}). \quad (3.3)$$

Dado que $m_1 > m_2$, por hipótese, segue que $a < b$. Define-se:

$$l = d(B_{p1}, B) + d(B_{p2}, B) = a + b, \quad (3.4)$$

o parâmetro geométrico característico do sistema, isto é, a distância entre os centros de massa dos primários. Uma vez que a partícula de prova (terceiro corpo) não induz aceleração gravitacional sobre os primários e que as órbitas dos primários em torno de seu baricentro B são circunferências, a quantidade l é invariante no tempo. A velocidade angular do modo dinâmico de translação de B_{p1} e de B_{p2} (movimento médio dos primários) é denotada por $\vec{\omega}_p$ e sua intensidade é definida como $\|\vec{\omega}_p\| = n$. Considera-se que o primário II apresenta movimento de rotação no plano ϖ , em torno de seu centro de massa B_{p2} . Como visto no Capítulo 2, para parametrização angular da rotação do primário II, consideram-se o sistema de referência local $S_L: B_{p2}x_ly_lz_l$, o qual é não inercial transladante e que não acompanha a rotação do primário II e o sistema de referência do corpo do primário II $S_{p2}: B_{p2}x_{p2}y_{p2}z_{p2}$, o qual é não inercial por rotação e que por ser fixo ao corpo deste primário acompanha-lhe o movimento de rotação. Observa-se que os referenciais S_L e S_{p2} têm origem comum em B_{p2} e que $B_{p2}z_l \equiv B_{p2}z_{p2}$, a todo instante, o qual é o eixo de maior momento de inércia do primário II e eixo de rotação do mesmo, como pode ser visto na Figura 3.1. O primário II possui velocidade angular $\vec{\omega}_{p2}$ de norma métrica euclidiana constante no tempo.

Sejam d_1 e d_2 as distâncias de P_{21} e P_{22} a B_{p2} , respectivamente:

$$d_1 = d(P_{21}, B_{p2}) = d(B_{p2}, P_{21}), \quad (3.5)$$

e

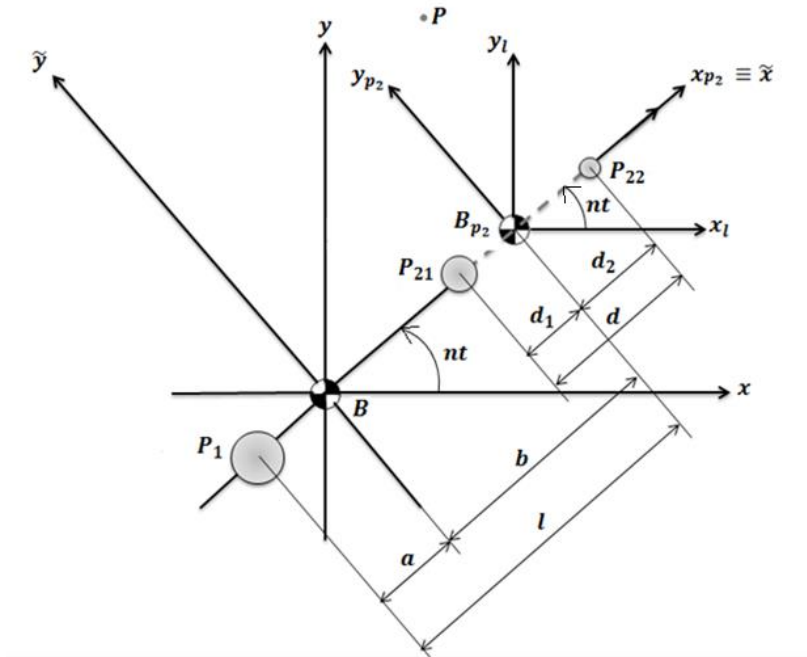
$$d_2 = d(P_{22}, B_{p2}) = d(B_{p2}, P_{22}). \quad (3.6)$$

Define-se, então, que:

$$d = d(P_{21}, P_{22}) = d(P_{22}, P_{21}) = d_1 + d_2. \quad (3.7)$$

A quantidade d é referida como o parâmetro geométrico característico do dipolo de massa, isto é, seu comprimento, que é assumido constante no tempo.

Figura 3.2: Representação dos parâmetros geométricos característicos do sistema.



Fonte: Produção do Autor.

Como os pontos de massa $P_1 \equiv B_{p_1}$, P_{21} e P_{22} se mostram permanentemente alinhados sobre o eixo das abscissas sinódicas, as trajetórias de P_1 , P_{21} e P_{22} são circunferências concêntricas a B e, respectivamente, de raios:

$$d(B, P_1) = a, \quad (3.8)$$

$$d(B, P_{21}) = b - d_1, \quad (3.9)$$

$$d(B, P_{22}) = b + d_2. \quad (3.10)$$

A Figura 3.2 ilustra o arranjo geométrico do sistema em estudo.

3.2 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sideral

Considere a partícula de prova (terceiro corpo), representada por P , de massa $m_3 \ll m_1$ e $m_3 \ll m_2$ cujo movimento está, por hipótese, restrito ao plano ϖ de movimento dos primários. Para descrever o movimento desta partícula no plano ϖ em relação ao referencial sideral S_B é necessário levar em consideração a força resultante sobre a mesma, que é a causa de seu movimento. Admitindo-se que o problema em estudo é conservativo, isto é, que todas as forças que regem os movimentos dos primários e da partícula são associadas a potenciais e, que, em particular, estes potenciais são devidos às massas dos corpos do sistema, isto é, são potenciais gravitacionais, pode-se definir o potencial gravitacional de cada primário do sistema, com os quais a partícula P interage. Seja $U_1(\|\vec{r}_1\|)$ o potencial gravitacional do primário I. Tem-se que:

$$U_1(\|\vec{r}_1\|) = \mathcal{G} \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|}, \quad (3.11)$$

sendo \mathcal{G} a constante da gravitação universal e $\|\vec{r}_1\| = r_1$ a norma métrica euclidiana do vetor posição relativo da partícula de prova P ao ponto de massa $P_1 \equiv B_{p1}$. Analogamente, considerando-se o modelo de dipolo de massa para o primário II, assume-se que o potencial gravitacional deste primário é a superposição linear dos potenciais gravitacionais dos pontos de massa (polos) P_{21} e P_{22} . Sendo $U_D(\|\vec{r}_{21}\|, \|\vec{r}_{22}\|)$ o potencial gravitacional do dipolo, tem-se que:

$$U_D(\|\vec{r}_{21}\|, \|\vec{r}_{22}\|) = U_{21}(\|\vec{r}_{21}\|) + U_{22}(\|\vec{r}_{22}\|), \quad (3.12)$$

com $U_{21}(\|\vec{r}_{21}\|)$ e $U_{22}(\|\vec{r}_{22}\|)$ os potenciais gravitacionais dos pontos de massa P_{21} e P_{22} do dipolo, respectivamente e $\|\vec{r}_{21}\| = r_{21}$ e $\|\vec{r}_{22}\| = r_{22}$ as normas métricas euclidianas dos vetores posição relativos da partícula de prova P aos polos P_{21} e P_{22} ,

respectivamente. É importante salientar que a forma com a qual se compõe o potencial gravitacional do dipolo de massa, como feito acima, assume que os pontos de massa P_{21} e P_{22} são corpos puntiformes individuais, isto é, mediante recorrência ao modelo de dipolo de massa, o primário II, que é corpo extenso, passa ser representado por dois corpos puntiformes tais que a soma das massas dos mesmos seja a massa do corpo original. Expressando-se os potenciais gravitacionais de cada polo do dipolo, tem-se que:

$$U_{21}(\|\vec{r}_{21}\|) = \mathcal{G} \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|}, \quad (3.13)$$

e

$$U_{22}(\|\vec{r}_{22}\|) = \mathcal{G} \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|}. \quad (3.14)$$

Desta forma, é imediato que:

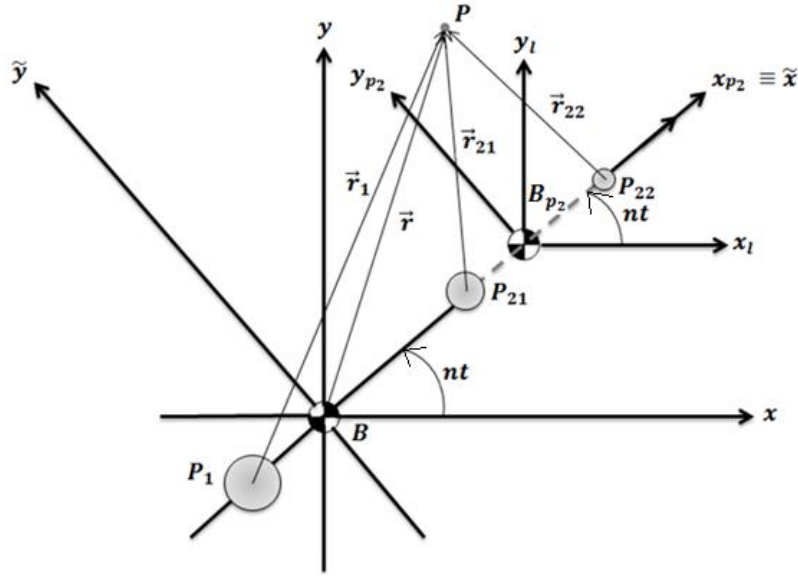
$$U_D(\|\vec{r}_{21}\|, \|\vec{r}_{22}\|) = \mathcal{G} \left(\frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|} \right). \quad (3.15)$$

Nota-se que, neste modelo, devido cada polo ser um corpo, P_{21} e P_{22} não possuem vínculo material entre si. No entanto, deve ressaltar que existe vínculo geométrico entre os polos que é o parâmetro geométrico d característico do dipolo de massa.

Definindo-se U como o potencial gravitacional composto do sistema no referencial sideral S_B , isto é, o potencial gravitacional decorrente da superposição dos potenciais gravitacionais de cada ponto de massa constituinte dos primários, ao qual está sujeita a partícula de prova, chega-se a:

$$\begin{aligned}
U &= U(\|\vec{r}_1\|, \|\vec{r}_{21}\|, \|\vec{r}_{22}\|) = U_1(\|\vec{r}_1\|) + U_D(\|\vec{r}_{21}\|, \|\vec{r}_{22}\|) \\
&= \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|} \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Figura 3.3: Representação dos vetores posição relativos da partícula de prova a cada ponto de massa constituinte do sistema.



Fonte: Produção do Autor.

Os vetores posição relativos $\vec{r}_1, \vec{r}_{21}, \vec{r}_{22}$ de P aos pontos de massa que compõem os primários são mostrados na Figura 3.3. Tais vetores são elementos de $\mathfrak{E}_B^2 \subset \mathfrak{E}_{n,a}^3$, em que \mathfrak{E}_B^2 é o espaço vetorial euclidiano normado de dimensão dois com origem em B e que define o plano ϖ de movimento dos primários. Dado que estes vetores são de posição relativa, tendo seu afixo em $P(x(t), y(t))$ e sua origem em $P_1 \equiv B_{p1}(x_1(t), y_1(t)), P_{21}(x_{21}(t), y_{21}(t)), P_{22}(x_{22}(t), y_{22}(t))$, tem-se, no referencial sideral S_B que:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1[x(t), y(t), x_1(t), y_1(t)] = [x(t) - x_1(t)]\vec{i} + [y(t) - y_1(t)]\vec{j}, \tag{3.17}$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_{21}[x(t), y(t), x_{21}(t), y_{21}(t)] = [x(t) - x_{21}(t)]\vec{i} + [y(t) - y_{21}(t)]\vec{j}, \tag{3.18}$$

$$\vec{r}_{22} = \vec{r}_{22}[x(t), y(t), x_{22}(t), y_{22}(t)] = [x(t) - x_{22}(t)]\vec{i} + [y(t) - y_{22}(t)]\vec{j}. \quad (3.19)$$

Desta forma, segue que:

$$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{[x(t) - x_1(t)]^2 + [y(t) - y_1(t)]^2}, \quad (3.20)$$

$$\|\vec{r}_{21}\| = \sqrt{[x(t) - x_{21}(t)]^2 + [y(t) - y_{21}(t)]^2}, \quad (3.21)$$

$$\|\vec{r}_{22}\| = \sqrt{[x(t) - x_{22}(t)]^2 + [y(t) - y_{22}(t)]^2}. \quad (3.22)$$

Desta forma, pode-se reescrever o potencial composto do sistema, ao qual está sujeita a partícula de prova, como:

$$\begin{aligned} U &= U[x(t), y(t), x_1(t), y_1(t), x_{21}(t), y_{21}(t), x_{22}(t), y_{22}(t)] \\ &= \mathcal{G} \sum_{j=1,21,22} \frac{m_j}{\sqrt{[x(t) - x_j(t)]^2 + [y(t) - y_j(t)]^2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Devido o movimento orbital dos primários ser circular e uniforme e considerando-se a configuração de ressonância spin-órbita sobre o dipolo de massa, tem-se que as anomalias verdadeiras de P_1 , P_{21} e P_{22} , a saber, $v_1(t)$, $v_{21}(t)$ e $v_{22}(t)$, respectivamente, são tais que:

$$v_1(t) = nt + \pi, \quad (3.24)$$

$$v_{21}(t) = v_{22}(t) = nt, \quad (3.25)$$

como pode ser visto na Figura 3.3. Escrevendo-se as coordenadas cartesianas siderais de P_1 , P_{21} e P_{22} em termos dos parâmetros geométricos característicos do sistema e do dipolo de massa e em função das anomalias verdadeiras de cada ponto de massa que compõe o sistema, tem-se que:

$$x_1(t) = a \cos[v_1(t)] = a \cos(nt + \pi) = -a \cos(nt), \quad (3.26)$$

$$y_1(t) = a \sin[v_1(t)] = a \sin(nt + \pi) = -a \sin(nt), \quad (3.27)$$

$$x_{21}(t) = (b - d_1) \cos[v_{21}(t)] = (b - d_1) \cos(nt), \quad (3.28)$$

$$y_{21}(t) = (b - d_1) \sin[v_{21}(t)] = (b - d_1) \sin(nt), \quad (3.29)$$

$$x_{22}(t) = (b + d_2) \cos[v_{22}(t)] = (b + d_2) \cos(nt), \quad (3.30)$$

$$y_{22}(t) = (b + d_2) \sin[v_{22}(t)] = (b + d_2) \sin(nt). \quad (3.31)$$

Pelas Equações 3.17 a 3.19 e 3.26 a 3.31, o potencial gravitacional composto do sistema pode ser expresso na forma:

$$U = U[x(t), y(t), t]. \quad (3.32)$$

Desta forma, nota-se que o potencial gravitacional composto do sistema, se parametrizado no referencial sideral, com origem em B , depende explicitamente do tempo e também implicitamente com o mesmo nas quantidades $x(t)$ e $y(t)$. Isto posto,

segue que, neste referencial, a equação de governo do movimento da partícula de prova é:

$$\begin{aligned}
& m_3 \left[\vec{i} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \vec{j} \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right] \\
&= \vec{\nabla} \{ m_3 U[x(t), y(t), t] \} \\
&= m_3 \left\{ \vec{i} \frac{\partial}{\partial x(t)} U[x(t), y(t), t] + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y(t)} U[x(t), y(t), t] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Separando-se as componentes cartesianas da Equação 3.33, obtém-se:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{\partial}{\partial x(t)} U[x(t), y(t), t], \tag{3.34}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{\partial}{\partial y(t)} U[x(t), y(t), t]. \tag{3.35}$$

A partir das Equação 3.23, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x(t)} U[x(t), y(t), t] \\
&= -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1 [x(t) + a \cos(nt)]}{\|\vec{r}_1\|^3} + \frac{m_{21} [x(t) - (b - d_1) \cos(nt)]}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_{22} [x(t) - (b + d_2) \cos(nt)]}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \right\},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y(t)} U[x(t), y(t), t] \\
= -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[y(t) + a \sin(nt)]}{\|\vec{r}_1\|^3} + \frac{m_{21}[y(t) - (b - d_1) \sin(nt)]}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \right. \\
\left. + \frac{m_{22}[y(t) - (b + d_2) \sin(nt)]}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \right\}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Logo, das Equações 3.34 a 3.37, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[x(t) + a \cos(nt)]}{\|\vec{r}_1\|^3} + \frac{m_{21}[x(t) - (b - d_1) \cos(nt)]}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \right. \\
\left. + \frac{m_{22}[x(t) - (b + d_2) \cos(nt)]}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \right\}, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1[y(t) + a \sin(nt)]}{\|\vec{r}_1\|^3} + \frac{m_{21}[y(t) - (b - d_1) \sin(nt)]}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \right. \\
\left. + \frac{m_{22}[y(t) - (b + d_2) \sin(nt)]}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \right\}. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

3.3 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sinódico

De modo a estabelecer a análise do movimento da partícula de prova P em relação ao baricentro B dos sistema, independentemente da variação temporal explícita do potencial gravitacional composto dos primários, adota-se, como visto no Capítulo 2, um novo sistema de referência em que o potencial gravitacional composto do sistema não é explicitamente dependente do tempo. Este referencial, também com origem em B , é o referencial sinódico $\tilde{\mathcal{S}}_B$, definido a partir da direção de alinhamento dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} dos primários.

Sejam $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$ as coordenadas paramétricas de posição de P , dependentes do tempo, no referencial sinódico \tilde{S}_B . As relações de transformação de coordenadas paramétricas de S_B para \tilde{S}_B são:

$$x(t) = \tilde{x}(t) \cos(nt) - \tilde{y}(t) \sin(nt), \quad (3.40)$$

$$y(t) = \tilde{x}(t) \sin(nt) + \tilde{y}(t) \cos(nt). \quad (3.41)$$

Introduzindo-se a correspondência $\{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), (x(t), y(t))\} \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \{z(t), Z(t)\} \subset \mathbb{C}$, definem-se os vetores posição de P em \tilde{S}_B e em S_B , respectivamente, em relação a B por:

$$z(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t), \quad (3.42)$$

$$Z(t) = x(t) + iy(t) = z(t)e^{int}. \quad (3.43)$$

em que $i = \sqrt{-1}$.

Sejam, ainda, pela mesma correspondência, os vetores posição em S_B dos pontos de massa P_1, P_{21} e P_{22} :

$$Z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) = ae^{i(nt+\pi)} = -ae^{int}, \quad (3.44)$$

$$Z_{21}(t) = x_{21}(t) + iy_{21}(t) = (b - d_1)e^{int}, \quad (3.45)$$

$$Z_{22}(t) = x_{22}(t) + iy_{22}(t) = (b + d_2)e^{int}. \quad (3.46)$$

Segue-se então as normas métricas euclidianas dos vetores posição relativos de P a P_1 , P_{21} e P_{22} expressas no referencial sideral:

$$\|\vec{r}_1\| = r_1 = \|Z(t) - Z_1(t)\| = \sqrt{[x(t) - x_1(t)]^2 + [y(t) - y_1(t)]^2}, \quad (3.47)$$

$$\|\vec{r}_{21}\| = r_{21} = \|Z(t) - Z_{21}(t)\| = \sqrt{[x(t) - x_{21}(t)]^2 + [y(t) - y_{21}(t)]^2}, \quad (3.48)$$

$$\|\vec{r}_{22}\| = r_{22} = \|Z(t) - Z_{22}(t)\| = \sqrt{[x(t) - x_{22}(t)]^2 + [y(t) - y_{22}(t)]^2}. \quad (3.49)$$

Das Equações 3.43 a 3.49, segue que:

$$\|Z(t) - Z_1(t)\| = \|z(t) + a\| \|e^{int}\| = \|z(t) + a\|, \quad (3.50)$$

$$\|Z(t) - Z_{21}(t)\| = \|z(t) - (b - d_1)\| \|e^{int}\| = \|z(t) - (b - d_1)\|, \quad (3.51)$$

$$\|Z(t) - Z_{22}(t)\| = \|z(t) - (b + d_2)\| \|e^{int}\| = \|z(t) - (b + d_2)\|. \quad (3.52)$$

pois, pela Identidade de Euler:

$$\|e^{int}\| = \|\cos(nt) + i\sin(nt)\| = [\cos^2(nt) + \sin^2(nt)]^{1/2} = 1. \quad (3.53)$$

Expressando-se as normas métricas euclidianas dos vetores posição relativos de P a P_1 , P_{21} e P_{22} expressas em \tilde{S}_B , tem-se que:

$$\|\vec{r}_1\| = r_1 = \|z(t) + a\| = \sqrt{[\tilde{x}(t) + a]^2 + [\tilde{y}(t)]^2}, \quad (3.54)$$

$$\|\vec{r}_{21}\| = r_{21} = \|z(t) - (b - d_1)\| = \sqrt{[\tilde{x}(t) - (b - d_1)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2}, \quad (3.55)$$

$$\|\vec{r}_{22}\| = r_{22} = \|z(t) - (b + d_2)\| = \sqrt{[\tilde{x}(t) - (b + d_2)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2}. \quad (3.56)$$

Observa-se que as normas métricas euclidianas dos vetores posição \vec{r}_1 , \vec{r}_{21} e \vec{r}_{22} de P nos sistemas S_B e \tilde{S}_B devem, necessariamente, serem as mesmas, uma vez que tais quantidades são escalares e, portanto, invariantes com o sistema de referência adotado.

Da Equação 3.43, tem-se que:

$$\frac{d^2}{dt^2}Z(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + i\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \left[\frac{d^2}{dt^2}z(t) + i2n\frac{d}{dt}z(t) - n^2z(t) \right] e^{int}, \quad (3.57)$$

Recorrendo-se às Equações 3.38 e 3.39, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}x(t) + i\frac{d^2}{dt^2}y(t) \\ &= -G \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} \{[x(t) + a\cos(nt)] + i[y(t) + a\sin(nt)]\} \right. \\ &+ \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \{[x(t) - (b - d_1)\cos(nt)] \\ &+ i[y(t) - (b - d_1)\sin(nt)]\} \\ &+ \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \{[x(t) - (b + d_2)\cos(nt)] \\ &\left. + i[y(t) - (b + d_2)\sin(nt)]\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Mas, é sabido que:

$$[x(t) + a\cos(nt)] + i[y(t) + a\sin(nt)] = [z(t) + a]e^{int} = \vec{r}_1, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} [x(t) - (b - d_1)\cos(nt)] + i[y(t) - (b - d_1)\sin(nt)] \\ = [z(t) - (b - d_1)]e^{int} = \vec{r}_{21}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} [x(t) - (b + d_2)\cos(nt)] + i[y(t) - (b + d_2)\sin(nt)] \\ = [z(t) - (b + d_2)]e^{int} = \vec{r}_{22}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Tão logo, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + i\frac{d^2}{dt^2}y(t) \\ = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} [z(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} [z(t) - (b - d_1)] \right. \\ \left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} [z(t) - (b + d_2)] \right\} e^{int}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Observa-se que a equação acima é o vetor aceleração da partícula de prova parametrizado no referencial sideral. Das Equações 3.57 e 3.62, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}z(t) + i2n\frac{d}{dt}z(t) - n^2z(t) = \\ = -\mathcal{G} \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} [z(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} [z(t) - (b - d_1)] \right. \\ \left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} [z(t) - (b + d_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

que é o vetor aceleração da partícula de prova no referencial sinódico.

Mas, da Equação 3.42, segue imediatamente que:

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + i\frac{d}{dt}\tilde{y}(t). \quad (3.64)$$

Logo, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}z(t) + i2n\frac{d}{dt}z(t) - n^2z(t) \\ = \frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t) - 2n\frac{d}{dt}\tilde{y}(t) - n^2\tilde{x}(t) \\ + i\left[\frac{d^2}{dt^2}\tilde{y}(t) + 2n\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) - n^2\tilde{y}(t)\right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Então, vem que:

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}\left\{\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3}[z(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3}[z(t) - (b - d_1)] + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3}[z(t) - (b + d_2)]\right\} \\ = -\mathcal{G}\left\{\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3}\{[\tilde{x}(t) + a] + i\tilde{y}(t)\} + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3}\{[\tilde{x}(t) - (b - d_1)] + i\tilde{y}(t)\} \right. \\ \left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3}\{[\tilde{x}(t) - (b + d_2)] + i\tilde{y}(t)\}\right\} \\ = -\mathcal{G}\left\{\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3}[\tilde{x}(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3}[\tilde{x}(t) - (b - d_1)] \right. \\ \left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3}[\tilde{x}(t) - (b + d_2)] \right. \\ \left. + i\left[\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3}\tilde{y}(t) + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3}\tilde{y}(t) + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3}\tilde{y}(t)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Assim, por inspeção, separando-se a parte real da parte imaginária da equação acima, chega-se ao seguinte sistema de equações à derivadas ordinárias de segunda ordem não lineares, com coeficientes constantes e acopladas:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) - 2n \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) - n^2 \tilde{x}(t) \\
= -G \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} [\tilde{x}(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b - d_1)] \right. \\
\left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b + d_2)] \right\}, \tag{3.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + 2n \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) - n^2 \tilde{y}(t) \\
= -G \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \tilde{y}(t) \right\}. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

As Equações 3.67 e 3.68 são as componentes escalares do vetor aceleração da partícula de prova P no referencial sinódico. É de fundamental importância a interpretação física de cada um dos termos das equações acima. O fato de o movimento da partícula de prova ser considerado, agora, no referencial sinódico, que é não inercial, implica que este movimento é associado à pseudo acelerações que são consequência de pseudo forças presentes neste referencial, dado que a Primeira e a Segunda Leis da Mecânica não são covariantes por Transformação de Galileu do referencial sideral (inercial) para o referencial sinódico. Neste sentido, de modo a se garantir uma representação da equação de movimento da partícula também em referencial não inercial, vale-se do recurso de compor-se o análogo à Segunda Lei da Mecânica neste referencial, fazendo-se necessária, para isto, a introdução de forças fictícias, também denominadas de pseudo forças. Uma vez que os referenciais sideral e sinódico têm a mesma origem no baricentro dos primários, a saber, o ponto B , e que, em particular, o movimento de rotação do sistema sinódico em relação ao sistema sideral dá-se com velocidade angular constante, identificam-se, imediatamente, duas pseudo forças (forças fictícias) sobre a partícula de prova além da força gravitacional resultante devido os primários. Tais forças fictícias são, a saber, a força corioliana e a força centrífuga, das quais, as acelerações correspondentes são, respectivamente, apresentadas na sequência:

$$\vec{a}(t)_{\text{corioliana}} = 2n \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \vec{i} - \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \vec{j} \right], \quad (3.69)$$

$$\vec{a}(t)_{\text{centrífuga}} = n^2 [\tilde{x}(t) \vec{i} + \tilde{y}(t) \vec{j}], \quad (3.70)$$

sendo \vec{i} e \vec{j} os vetores unitários da base ortonormal dextrógira do referencial sinódico. Observa-se que a pseudo aceleração corioliana é função das velocidades da partícula de prova no referencial sinódico, ao passo que a pseudo aceleração centrífuga é função das coordenadas cartesianas de posição da mesma neste referencial, sendo esta segunda aceleração, portanto, uma aceleração de posição, tal qual a aceleração gravitacional. Não obstante, assim como se associa à aceleração gravitacional um potencial, do mesmo modo, à pseudo aceleração centrífuga associa-se também um potencial denominado de pseudo potencial centrífugo. Deve-se notar que as equações do movimento da partícula (Equações 3.67 e 3.68) são acopladas nas componentes cartesianas da aceleração corioliana, tornando o sistema de equações acima não separável.

A aceleração:

$$\vec{a}(t)_e = \frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) \vec{i} + \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) \vec{j}, \quad (3.71)$$

é denominada de aceleração efetiva, em alusão a seu equivalente no sistema sideral de referência e:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t)_g = -\mathcal{G} & \left\{ \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} [\tilde{x}(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b - d_1)] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b + d_2)] \right\} \vec{i} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|^3} \tilde{y}(t) \right\} \vec{j} \right\}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

é a aceleração gravitacional composta, que é, como sabido, também presente na parametrização do movimento da partícula de prova no referencial sideral. A onipresença das forças gravitacionais deve-se ao fato de tal espécie de força ser de interação. Assim, o sistema de Equações 3.67 e 3.68 pode ser reescrito, de forma compacta e na forma vetorial, como se segue:

$$\vec{a}(t)_e = \vec{a}(t)_{\text{corioliana}} + \vec{a}(t)_{\text{centrifuga}} + \vec{a}(t)_g. \quad (3.73)$$

A Equação 3.73 admite ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t)_e - \vec{a}(t)_{\text{corioliana}} &= \vec{\nabla} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \\ &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] + \vec{j} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)], \end{aligned} \quad (3.74)$$

em que $\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]$ é potencial efetivo ao qual a partícula de prova está sujeita no referencial sinódico. Observa-se que o potencial efetivo não depende explicitamente do tempo. Segue então que:

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) - 2n \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)], \quad (3.75)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + 2n \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]. \quad (3.76)$$

Por inspeção nas Equações 3.67 e 3.68, é imediato que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] &= n^2 \tilde{x}(t) \\
&- \mathcal{G} \left\{ \frac{m_1}{\|\tilde{r}_1\|^3} [\tilde{x}(t) + a] + \frac{m_{21}}{\|\tilde{r}_{21}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b - d_1)] \right. \\
&\left. + \frac{m_{22}}{\|\tilde{r}_{22}\|^3} [\tilde{x}(t) - (b + d_2)] \right\}, \tag{3.77}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = n^2 \tilde{y}(t) - \mathcal{G} \left\{ \frac{m_1}{\|\tilde{r}_1\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{21}}{\|\tilde{r}_{21}\|^3} \tilde{y}(t) + \frac{m_{22}}{\|\tilde{r}_{22}\|^3} \tilde{y}(t) \right\}. \tag{3.78}$$

Das Equações 3.77 e 3.78, pode-se constatar que o potencial efetivo $\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]$ apresenta duas componentes, a saber, o pseudo potencial centrífugo e o potencial gravitacional composto do sistema, respectivamente dados por:

$$\tilde{U}_C[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = \frac{n^2}{2} \{[\tilde{x}(t)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2\}, \tag{3.79}$$

$$\tilde{U}_G[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\tilde{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\tilde{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\tilde{r}_{22}\|} \right). \tag{3.80}$$

Tão logo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] &= \tilde{U}_C[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] + \tilde{U}_G[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \\
&= \frac{n^2}{2} \{[\tilde{x}(t)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2\} + \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\tilde{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\tilde{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\tilde{r}_{22}\|} \right). \tag{3.81}
\end{aligned}$$

O sistema de Equações 3.67 e 3.68 possui integral conhecida. Observa-se que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) - 2n \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)], \tag{3.82}$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) + 2n \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]. \quad (3.83)$$

Somando-se os termos correspondentes das Equações 3.82 e 3.83, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) \\ = \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Tomando-se a primitiva temporal da igualdade de funções acima, segue que:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) \right] dt \\ = \int \left\{ \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Mas, nota-se que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 \right] \right\}, \quad (3.86)$$

e, além disso, vê-se que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] + \frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}(t)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = \frac{d}{dt} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]. \quad (3.87)$$

Logo:

$$\int \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 \right\} \right\} dt = \int \frac{d}{dt} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] dt. \quad (3.88)$$

E, desta forma, segue que:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 \right\} = \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] - \frac{\tilde{C}}{2}, \quad (3.89)$$

em que $-\frac{\tilde{C}}{2}$ é uma constante de integração convenientemente escolhida. Então, pode-se escrever que:

$$\left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 = 2\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] - \tilde{C}. \quad (3.90)$$

Observa-se que:

$$\left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 = \|\vec{\tilde{v}}(t)\|^2, \quad (3.91)$$

que é a norma métrica euclidiana do vetor velocidade da partícula de prova P em relação ao referencial sinódico \tilde{S}_B . Assim, verifica-se que:

$$\|\vec{\tilde{v}}(t)\|^2 = 2\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] - \tilde{C}. \quad (3.92)$$

Ou ainda, de forma expandida:

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = 2 \left\{ \frac{n^2}{2} \{[\tilde{x}(t)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2\} + \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|} \right) \right\} - \tilde{C}. \quad (3.93)$$

Tal equação é a Integral de Jacobi e a constante de integração \tilde{C} é a Constante de Jacobi, como apresentado no Capítulo 2. Recorda-se que \tilde{C} é uma nova integral primeira do movimento do sistema em estudo.

Como $[\tilde{x}(t)]^2 + [\tilde{y}(t)]^2 = \|\vec{r}(t)\|^2$, em que $\|\vec{r}(t)\|$ é a norma métrica euclidiana do vetor posição de P em \tilde{S}_B , pode-se também expressar-se a Integral de Jacobi como:

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = n^2 \|\vec{r}(t)\|^2 + 2\mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|} \right) - \tilde{C}, \quad (3.94)$$

Como sabido, a Integral de Jacobi possui interpretação física: trata-se da equação que relaciona as componentes da energia mecânica total específica da partícula de prova considerando-se o referencial sinódico. Nota-se que a metade da Constante de Jacobi é o inverso aditivo dessa energia específica. Ou seja:

$$\frac{1}{2} \|\vec{v}(t)\|^2 - \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = -\frac{\tilde{C}}{2}. \quad (3.95)$$

A parcela $\frac{1}{2} \|\vec{v}(t)\|^2$ é a energia cinética específica e a parcela $-\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]$ é a energia potencial específica da partícula de prova no referencial sinódico.

3.4 Adimensionalização das Equações de Movimento da Partícula de Prova

Considerando o sistema binário e representando a interação gravitacional entre os primários como a interação gravitacional entre seus centros de massa B_{p1} e B_{p2} , podem-se obter relações algébricas entre as escalas de massa e geométrica entre os primários.

Da igualdade entre forças gravitacionais e centrípetas sobre cada primário, no referencial inercial S_B , tem-se que:

$$m_1 a n^2 = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (3.96)$$

$$m_2 b n^2 = \mathcal{G} \frac{m_2 m_1}{l^2}. \quad (3.97)$$

Logo, tem-se que:

$$\mathcal{G} m_2 = a l^2 n^2, \quad (3.98)$$

$$\mathcal{G} m_1 = b l^2 n^2. \quad (3.99)$$

Somando-se os termos correspondentes das Equações 3.98 e 3.99, chega-se a:

$$\mathcal{G}(m_1 + m_2) = n^2 l^2 (a + b). \quad (3.100)$$

Mas, como sabido, $m_1 + m_2 = M$ e $a + b = l$. Logo:

$$n^2 l^3 = \mathcal{G} M. \quad (3.101)$$

Fazendo-se o quociente entre os membros das Equações 3.98 e 3.101 e das Equações 3.99 e 3.101, obtém-se:

$$\frac{m_2}{M} = \frac{a}{l}, \quad (3.102)$$

e

$$\frac{m_1}{M} = \frac{b}{l}. \quad (3.103)$$

Analogamente, como feito entre os centros de massa dos primários, é possível estabelecer relações algébricas entre as escalas de massa e geométrica internas ao dipolo, como se segue:

$$m_{21}d_1n^2 = \mathcal{G} \frac{m_{21}m_{22}}{d^2}, \quad (3.104)$$

$$m_{22}d_2n^2 = \mathcal{G} \frac{m_{22}m_{21}}{d^2}, \quad (3.105)$$

de onde obtém-se que:

$$\mathcal{G}m_{22} = n^2d^2d_1, \quad (3.106)$$

$$\mathcal{G}m_{21} = n^2d^2d_2. \quad (3.107)$$

Somando-se os termos das Equações 3.106 e 3.107, tem-se:

$$\mathcal{G}(m_{21} + m_{22}) = n^2d^2(d_1 + d_2). \quad (3.108)$$

Mas, como sabido, $m_{21} + m_{22} = m_2$ e $d_1 + d_2 = d$. Logo:

$$n^2d^3 = \mathcal{G}m_2. \quad (3.109)$$

Fazendo-se o quociente entre os membros das Equações 3.107 e 2.109 e das Equações 3.108 e 3.109 chega-se a:

$$\frac{m_{22}}{m_2} = \frac{d_1}{d}, \quad (3.110)$$

e

$$\frac{m_{21}}{m_2} = \frac{d_2}{d}. \quad (3.111)$$

Por conveniência, introduz-se agora o processo de adimensionalização dos parâmetros mássicos e geométricos característicos do sistema binário e do dipolo de massa. Define-se o parâmetro mássico característico do sistema binário (fator de massa do sistema binário) como:

$$\frac{m_2}{M} = \mu. \quad (3.112)$$

Consequentemente, tem-se que:

$$\frac{m_1}{M} = 1 - \mu, \quad (3.113)$$

de tal modo que:

$$\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M} = 1 - \mu + \mu = 1, \quad (3.114)$$

verificando-se a unidade canônica de massa do sistema e com $0 < \mu < \frac{1}{2}$ de modo a garantir-se que o primário representado como dipolo seja o corpo menos massivo do sistema binário.

Das Equações 3.102 e 3.103, pode-se relacionar tais resultados às distâncias que os centros de massa de cada primário apresentam em relação ao baricentro B do sistema. Tão logo, tem-se:

$$a = \frac{m_2}{M}l = \mu l, \quad (3.115)$$

$$b = \frac{m_1}{M}l = (1 - \mu)l. \quad (3.116)$$

A partir destes resultados pode-se definir os parâmetros geométricos característicos adimensionais das órbitas dos primários, como se segue:

$$\frac{a}{l} = \mu, \quad (3.117)$$

$$\frac{b}{l} = 1 - \mu. \quad (3.118)$$

Esta parametrização é tal que a distância adimensionalizada entre os centros de massa dos primários I e II seja invariavelmente igual à unidade canônica de distância do sistema, pois:

$$\frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \mu + 1 - \mu = 1. \quad (3.119)$$

Analogamente, define-se o parâmetro de massa característico do dipolo de massa em rotação:

$$\frac{m_{21}}{M} = \mu^*. \quad (3.120)$$

Dado que:

$$\frac{m_{21}}{M} + \frac{m_{22}}{M} = \frac{m_2}{M}, \quad (3.121)$$

tem-se que:

$$\frac{m_{22}}{M} = \mu - \mu^*. \quad (3.122)$$

O parâmetro de massa μ do sistema e o parâmetro de massa μ^* do dipolo podem ser relacionados mediante a quantidade f , denominada fator de massa do dipolo. Este fator expressa a fração de μ , compreendida, por escolha, pelo polo P_{21} do dipolo, tal que:

$$\mu^* = f\mu, \quad (3.123)$$

com $0 < f < 1$.

Tão logo, as Equações 3.120 e 3.122 podem ser reescritas como:

$$\frac{m_{21}}{M} = f\mu, \quad (3.124)$$

$$\frac{m_{22}}{M} = (1 - f)\mu. \quad (3.125)$$

Como feito anteriormente, das Equações 3.110 e 3.111, pode-se relacionar as distâncias de cada ponto de massa constituinte do dipolo aos parâmetros adimensionais de massa característicos do sistema binário e do dipolo, como se segue:

$$d_1 = \frac{m_{22}}{m_2} d = (1 - f)d, \quad (3.126)$$

$$d_2 = \frac{m_{21}}{m_2} d = fd. \quad (3.127)$$

Destes resultados pode-se definir os parâmetros geométricos característicos adimensionais dos pontos de massa P_{21} e P_{22} do dipolo, como se segue:

$$\frac{d_1}{l} = (1 - f) \frac{d}{l}, \quad (3.128)$$

$$\frac{d_2}{l} = f \frac{d}{l}. \quad (3.129)$$

Define-se, ainda, o parâmetro geométrico característico do dipolo como:

$$d^* = \frac{d}{l}. \quad (3.130)$$

Tão logo, tem-se das Equações 3.128 e 3.129 que:

$$\frac{d_1}{l} = (1 - f)d^*, \quad (3.131)$$

$$\frac{d_2}{l} = f d^*. \quad (3.132)$$

de tal forma que a distância adimensionalizada entre os pontos de massa P_{21} e P_{22} constituintes do dipolo de massa em rotação seja também invariavelmente igual a uma fração da unidade canônica de distância do sistema, pois:

$$\frac{d_1}{l} + \frac{d_2}{l} = (1 - f)d^* + f d^* = d^*, \quad (3.133)$$

tal que $0 < d^* \ll 1$, de modo a garantir-se que o comprimento do dipolo seja significativamente menor que a escala geométrica do problema.

Uma vez feita a adimensionalização dos parâmetros mássicos e geométricos característicos do sistema binário e do dipolo, pode-se empreender a adimensionalização das coordenadas paramétricas de posição siderais e sinódicas de cada ponto de massa constituinte do sistema, e, conseqüentemente, obter-se as equações adimensionais siderais e sinódicas do movimento da partícula de prova no plano de movimento dos primários. No que se segue, como feito no Capítulo 2, define-se o instante adimensional t^* , que deve ser entendido como o próprio ângulo de anomalia verdadeira do centro de massa do primário II, isto é:

$$t^* = nt. \quad (3.134)$$

Sejam as coordenadas paramétricas de posição siderais adimensionais de P dadas por:

$$\xi(t^*) = \frac{x(t)}{l}, \quad (3.135)$$

$$\eta(t^*) = \frac{y(t)}{l}. \quad (3.136)$$

Além disso, sejam as normas métricas euclidianas adimensionais siderais dos vetores posição da partícula P relativos a P_1 , P_{21} e P_{22} dados por:

$$\rho_1 = \frac{\|\vec{r}_1\|}{l}, \quad (3.137)$$

$$\rho_{21} = \frac{\|\vec{r}_{21}\|}{l}, \quad (3.138)$$

$$\rho_{22} = \frac{\|\vec{r}_{22}\|}{l}. \quad (3.139)$$

Define-se o operador linear de derivação ordinária temporal adimensional como:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) := \frac{d}{d\left(\frac{t^*}{n}\right)}(\cdot) = n \frac{d}{dt^*}(\cdot). \quad (3.140)$$

Então, segue que:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = n^2 l \frac{d^2}{dt^{*2}}\xi(t^*) = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \xi(t^*)} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right], \quad (3.141)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = n^2 l \frac{d^2}{dt^{*2}}\eta(t^*) = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \eta(t^*)} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right]. \quad (3.142)$$

Logo, vem que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^{*2}}\xi(t^*) &= \frac{1}{n^2 l^2} \frac{\partial}{\partial \xi(t^*)} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi(t^*)} \left\{ \frac{1}{n^2 l^2} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.143)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^{*2}}\eta(t^*) &= \frac{1}{n^2 l^2} \frac{\partial}{\partial \eta(t^*)} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta(t^*)} \left\{ \frac{1}{n^2 l^2} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.144)$$

Dado o potencial gravitacional composto dos primários no sistema sideral de referência, $U[x(t), y(t), t]$, define-se o potencial gravitacional composto adimensionalizado neste mesmo sistema como:

$$\Omega[\xi(t^*), \eta(t^*), t^*] = \frac{1}{n^2 l^2} U[x(t), y(t), t] = \frac{1}{n^2 l^2} U \left[l\xi(t^*), l\eta(t^*), \frac{t^*}{n} \right]. \quad (3.145)$$

Então, segue que:

$$\Omega[\xi(t^*), \eta(t^*), t^*] = \frac{1}{n^2 l^2} \mathcal{G} \left(\frac{m_1}{\|\vec{r}_1\|} + \frac{m_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|} + \frac{m_{22}}{\|\vec{r}_{22}\|} \right). \quad (3.146)$$

Da adimensionalização dos parâmetros mássicos e geométricos característicos do sistema binário e do dipolo, bem como das coordenadas siderais paramétricas da partícula de prova, vem imediatamente que:

$$\Omega[\xi(t^*), \eta(t^*), t^*] = \mathcal{G} \frac{M}{n^2 l^3} \left[\frac{1-\mu}{\rho_1} + f \frac{\mu}{\rho_{21}} + (1-f) \frac{\mu}{\rho_{22}} \right], \quad (3.147)$$

em que:

$$\rho_1 = \{[\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)]^2 + [\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)]^2\}^{1/2}, \quad (3.148)$$

$$\begin{aligned} \rho_{21} = \{ & [\xi(t^*) - [1 - \mu - (1 - f)d^*] \cos(t^*)]^2 \\ & + [\eta(t^*) - [1 - \mu - (1 - f)d^*] \sin(t^*)]^2\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} \rho_{22} = \{ & [\xi(t^*) - (1 - \mu + fd^*) \cos(t^*)]^2 \\ & + [\eta(t^*) - (1 - \mu + fd^*) \sin(t^*)]^2\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Mas, como sabido, $\mathcal{GM} = n^2 l^3$. Logo, segue que:

$$\Omega[\xi(t^*), \eta(t^*), t^*] = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + f \frac{\mu}{\rho_{21}} + (1 - f) \frac{\mu}{\rho_{22}}. \quad (3.151)$$

Com isto, as Equações 3.143 e 3.144 ficam, após manipulações algébricas elementares:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} \xi(t^*) = - \left\{ & \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} [\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)] \right. \\ & + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3} \{ \xi(t^*) - [1 - \mu - (1 - f)d^*] \cos(t^*) \} \\ & \left. + \frac{(1 - f)\mu}{\rho_{22}^3} [\xi(t^*) - (1 - \mu + fd^*) \cos(t^*)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} \eta(t^*) = - \left\{ & \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} [\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)] \right. \\ & + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3} \{ \eta(t^*) - [1 - \mu - (1 - f)d^*] \sin(t^*) \} \\ & \left. + \frac{(1 - f)\mu}{\rho_{22}^3} [\eta(t^*) - (1 - \mu + fd^*) \sin(t^*)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Fazendo-se, agora, a adimensionalização das coordenadas paramétricas de posição sinódicas da partícula de prova, definem-se:

$$x^*(t^*) = \frac{\tilde{x}(t)}{l}, \quad (3.154)$$

$$y^*(t^*) = \frac{\tilde{y}(t)}{l}. \quad (3.155)$$

Além disso, sejam as normas métricas euclidianas adimensionais dos vetores posição da partícula P relativos a P_1 , P_{21} e P_{22} dados por:

$$r_1^* = \rho_1 = \frac{\|\vec{r}_1\|}{l}, \quad (3.156)$$

$$r_{21}^* = \rho_{21} = \frac{\|\vec{r}_{21}\|}{l}, \quad (3.157)$$

$$r_{22}^* = \rho_{22} = \frac{\|\vec{r}_{22}\|}{l}. \quad (3.158)$$

Utilizando-se o operador linear de derivação ordinária temporal adimensional, dado na Equação 3.140, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = nl \frac{d}{dt^*} x^*(t^*), \quad (3.159)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = nl \frac{d}{dt^*} y^*(t^*). \quad (3.160)$$

Consequentemente, as Equações 3.75 e 3.76 ficam:

$$\begin{aligned} n^2 l \frac{d^2}{dt^{*2}} x^*(t^*) - 2n^2 l \frac{d}{dt^*} y^*(t^*) &= \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*(t^*)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \\ &= \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*(t^*)} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)], \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} n^2 l \frac{d^2}{dt^{*2}} y^*(t^*) + 2n^2 l \frac{d}{dt^*} x^*(t^*) &= \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y^*(t^*)} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] \\ &= \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y^*(t^*)} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)]. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} x^*(t^*) - 2 \frac{d}{dt^*} y^*(t^*) &= \frac{1}{n^2 l^2} \frac{\partial}{\partial x^*(t^*)} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^*(t^*)} \left\{ \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} y^*(t^*) + 2 \frac{d}{dt^*} x^*(t^*) &= \frac{1}{n^2 l^2} \frac{\partial}{\partial y^*(t^*)} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)] \\ &= \frac{\partial}{\partial y^*(t^*)} \left\{ \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Analogamente, dado o potencial efetivo dos primários no referencial sinódico, $\tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]$, define-se o potencial efetivo adimensionalizado neste mesmo sistema como:

$$\Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] = \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{U}[lx^*(t^*), ly^*(t^*)]. \quad (3.165)$$

Então, vem que:

$$\begin{aligned} \Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] &= \frac{1}{n^2 l^2} \frac{n^2}{2} \{[lx^*(t^*)]^2 + [ly^*(t^*)]^2\} \\ &+ \mathcal{G} \frac{M}{n^2 l^3} \left[\frac{1-\mu}{r_1^*} + f \frac{\mu}{r_{21}^*} + (1-f) \frac{\mu}{r_{22}^*} \right]. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Novamente, dado que $\mathcal{G}M = n^2 l^3$, tem-se:

$$\begin{aligned} \Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] &= \frac{1}{2} \{[x^*(t^*)]^2 + [y^*(t^*)]^2\} + \frac{1-\mu}{r_1^*} + f \frac{\mu}{r_{21}^*} + (1-f) \frac{\mu}{r_{22}^*}. \end{aligned} \quad (3.167)$$

E, além disso, pode-se escrever que:

$$r_1^* = \{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2\}^{1/2}, \quad (3.168)$$

$$r_{21}^* = \{[x^*(t^*) - [1 - \mu - (1-f)d^*]]^2 + [y^*(t^*)]^2\}^{1/2}, \quad (3.169)$$

$$r_{22}^* = \{[x^*(t^*) - (1 - \mu + fd^*)]^2 + [y^*(t^*)]^2\}^{1/2}. \quad (3.170)$$

E, desta forma, as equações de movimento da partícula de prova adimensionalizadas e no referencial sinódico são:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^{*2}} x^*(t^*) - 2 \frac{d}{dt^*} y^*(t^*) \\
& = x^*(t^*) \\
& - \left\{ \frac{1-\mu}{r_1^{*3}} [x^*(t^*) + \mu] + \frac{f\mu}{r_{21}^{*3}} \{x^*(t^*) - [1-\mu - (1-f)d^*]\} \right. \\
& \left. + \frac{(1-f)\mu}{r_{22}^{*3}} [x^*(t^*) - (1-\mu + fd^*)] \right\}, \quad (3.171)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^{*2}} y^*(t^*) + 2 \frac{d}{dt^*} x^*(t^*) \\
& = y^*(t^*) - \left[\frac{1-\mu}{r_1^{*3}} + f \frac{\mu}{r_{21}^{*3}} + (1-f) \frac{\mu}{r_{22}^{*3}} \right] y^*(t^*). \quad (3.172)
\end{aligned}$$

As Equações 3.171 e 3.172 admitem serem reescritas de forma compacta, respectivamente, como:

$$\ddot{x}^*(t^*) - 2\dot{y}^*(t^*) = \Omega_{x^*}^*[x^*(t^*), y^*(t^*)], \quad (3.173)$$

$$\ddot{y}^*(t^*) + 2\dot{x}^*(t^*) = \Omega_{y^*}^*[x^*(t^*), y^*(t^*)], \quad (3.174)$$

em que:

$$\Omega_{x^*}^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = \frac{\partial}{\partial x^*(t^*)} \Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)], \quad (3.175)$$

$$\Omega_{y^*}^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = \frac{\partial}{\partial y^*(t^*)} \Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)]. \quad (3.176)$$

Partindo-se da Equação 3.92, a Integral Jacobiana, ao ser adimensionalizada, resulta em:

$$\frac{1}{n^2 l^2} \|\vec{v}(t)\|^2 = \frac{2}{n^2 l^2} \left\{ \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] - \frac{\tilde{C}}{2} \right\}. \quad (3.177)$$

Mas, observa-se que:

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = \left[\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) \right]^2 = n^2 l^2 \left\{ \left[\frac{d}{dt^*} x^*(t^*) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt^*} y^*(t^*) \right]^2 \right\}. \quad (3.178)$$

E, como já mostrado, $\Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{U}[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)]$. Definindo-se:

$$C^* = \frac{1}{n^2 l^2} \tilde{C}, \quad (3.179)$$

em que C^* é a constante adimensional de Jacobi. Então, tem-se que:

$$\frac{1}{n^2 l^2} n^2 l^2 \left\{ \left[\frac{d}{dt^*} x^*(t^*) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt^*} y^*(t^*) \right]^2 \right\} = 2\Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] - C^*. \quad (3.180)$$

Assim, a Integral Adimensional de Jacobi fica:

$$\left[\frac{d}{dt^*} x^*(t^*) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt^*} y^*(t^*) \right]^2 = 2\Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] - C^*. \quad (3.181)$$

3.5 Alteração de Escala do Problema

A partir das Equações 3.168 a 3.170, tem-se que as abscissas sinódicas adimensionalizadas dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema são:

$$x_1^* = x_1^*(\mu) = -\mu, \quad (3.182)$$

$$x_{21}^* = x_{21}^*(\mu, f, d^*) = 1 - \mu - (1 - f)d^*, \quad (3.183)$$

$$x_{22}^* = x_{22}^*(\mu, f, d^*) = 1 - \mu + fd^*. \quad (3.184)$$

Os parâmetros adimensionais μ , f e d^* são denominados parâmetros do modelo físico em estudo (parâmetros do sistema binário). Mediante variação desses parâmetros, em seus respectivos intervalos de validade anteriormente apresentados, tem-se a variação das abscissas sinódicas dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema, em particular, dos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, que, como visto, têm suas abscissas dependentes de mais de um parâmetro do sistema. Consequentemente, como apresentado no Capítulo 2, as posições sinódicas dos pontos de equilíbrio do sistema dependerão dos valores assumidos por tais parâmetros. Particular interesse tem-se sobre os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 que são vizinhos ao dipolo dado que a descrição da dinâmica de uma partícula de prova nas vizinhanças desses pontos de equilíbrio é fundamental na compreensão do movimento da mesma ao redor do dipolo em alusão a um veículo espacial movendo-se próximo ao asteroide tomado como primário II. Contudo, das Equações 3.182 a 3.184, observa-se que a adoção da escala geométrica do problema como sendo a distância, em unidades canônicas, entre os centros de massa dos primários introduz variação nas coordenadas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 do sistema, não apenas associada ao parâmetro μ , mas também em relação à variação dos parâmetros f e d^* , de tal modo que:

$$x_{L_1}^* = x_{L_1}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.185)$$

e

$$x_{L_2}^* = x_{L_2}^*(\mu, f, d^*). \quad (3.186)$$

Consequentemente, a análise de $x_{L_1}^*$ e $x_{L_2}^*$ para d^* fixo, por exemplo, implica na dificuldade de se desacoplar o efeito de variação de massa de cada polo pelo parâmetro f em relação ao efeito de variação de posição dos polos decorrentes desse mesmo parâmetro, já que f também determina a distância, a partir do centro de massa do dipolo, de cada um dos polos. Desta forma, de modo a se analisar apenas o efeito de variação de massa dos polos P_{21} e P_{22} pela variação do parâmetro f na localização dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 do sistema, adota-se uma nova escala geométrica para o problema considerando-se a distância entre os centroides (centros geométricos) dos primários.

Para corpos homogêneos, isotrópicos e com distribuição radial de massa, como assumido, por hipótese, ao primário I do sistema, tem-se a coincidência, num mesmo ponto, de seu centro de massa (B_{p1}) e seu centroide (C_{p1}). Logo, para este corpo, tem-se $x_{B_{p1}}^* = x_{C_{p1}}^*$. No entanto, em corpos assimétricos, não homogêneos e não isotrópicos, como é o caso do primário II, modelado como dipolo de massa em rotação, a coincidência desses pontos não é verificada. Considerando-se, porém, que o primário II seja alongado e que sua massa é distribuída ao longo do eixo que caracteriza tal alongamento, por hipótese, pode-se considerar que seu centro de massa (B_{p2}) e seu centroide (C_{p2}) permanecem dispostos sobre tal direção de alongamento. Além disso, da condição de ressonância spin-órbita, é possível afirmar que B_{p2} e C_{p2} localizam-se sobre o eixo das abscissas sinódicas do sistema.

Seja δ a distância entre B_{p2} e C_{p2} para o primário II, isto é:

$$\delta = d(B_{p2}, C_{p2}). \quad (3.187)$$

A quantidade δ é denominada margem estática do primário II. Considere ainda que $x_{B_{p2}}^*$ e $x_{C_{p2}}^*$ são as abscissas sinódicas de B_{p2} e C_{p2} , respectivamente. É perceptível que para $x_{21}^* < x_{22}^*$ e assumido-se $m_{21} > m_{22}$, tem-se $x_{B_{p2}}^* < x_{C_{p2}}^*$. Do contrário, se $m_{21} < m_{22}$, então $x_{B_{p2}}^* > x_{C_{p2}}^*$. Evidentemente, para $m_{21} = m_{22}$, tem-se $x_{B_{p2}}^* = x_{C_{p2}}^*$, que é a configuração de dipolo simétrico.

Recorda-se que l é a distância entre os centros de massa dos primários. Pelo modelo de escala geométrica anteriormente adotado para o problema, a quantidade l define tal escala. A partir de agora, considera-se uma nova escala geométrica para o problema, definida como a distância entre os centroides dos primários. Consequentemente, se esta nova escala é denotada por l' , tem-se que:

$$l' = l \pm \delta. \quad (3.188)$$

O termo $\pm\delta$ é devido ao fato de a posição do centro de massa do dipolo oscilar em relação ao centroide do mesmo conforme varia-se o parâmetro f para dado d^* fixo. É importante ressaltar que a margem estática é uma quantidade não negativa. Como a massa do sistema é constante, pode-se presumir uma proporção entre a massa associada ao centro de massa B_{p2} do dipolo, a saber, m_2 e a massa desse corpo associada a C_{p2} , denotada por m_{2c} . Tal relação é justificada como sendo linear pelo fato de se assumir que o corpo do primário II é homogêneo, por hipótese. Então, tem-se que:

$$\frac{m_2/M}{l} = \frac{m_{2c}/M}{l'}. \quad (3.189)$$

Definindo-se:

$$\frac{m_{2c}}{M} = \mu_c, \quad (3.190)$$

vem, pela Equação 3.189, que:

$$\mu_c = \mu \left(1 \pm \frac{\delta}{l}\right). \quad (3.191)$$

Se $x_{B_{p1}}^* = x_{C_{p1}}^*$, então, pelo raciocínio empregado acima verifica-se que $\frac{m_{1c}}{M} = \frac{m_1}{M} = 1 - \mu$. Consequentemente, tem-se que a nova escala geométrica do problema, dada entre os centroides, passa a ser:

$$\frac{m_{1c}}{M} + \frac{m_{2c}}{M} = 1 - \mu + \mu \left(1 \pm \frac{\delta}{l}\right) = 1 \pm \mu \frac{\delta}{l}, \quad (3.192)$$

que será a unidade canônica se, e somente se, $\delta = 0$ conforme configuração de dipolo simétrico. Assim, na configuração genérica de dipolo assimétrico, a nova escala do problema, definida entre os centroides dos primários, não é fixa conforme varia-se o parâmetro f nem, tampouco, vale a unidade canônica.

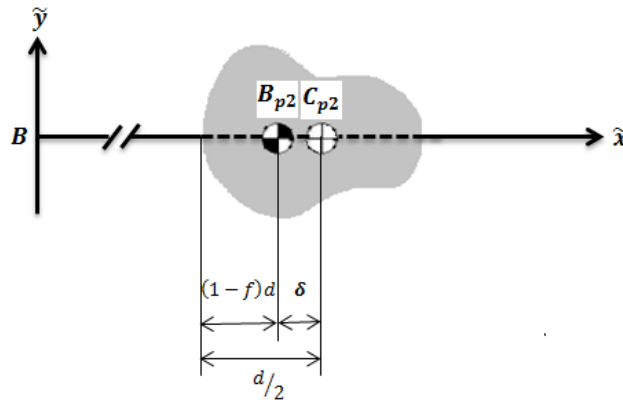
Nota-se que, da Equação 3.192, do baricentro do sistema ao centroide do dipolo a escala vale $1 - \mu$ e é independente de f , ao passo que do baricentro do sistema ao centroide do primário I a escala vale $\mu_c = \mu_c(\delta)$. De modo a fixar-se em μ a distância do primário mais massivo ao baricentro do sistema binário e considerar como variante a f a escala entre o centroide do dipolo e o baricentro, faz-se:

$$1 - \mu + \mu_c = \mu + x_{C_{p2}}^*. \quad (3.193)$$

Então, pela Equação 3.193, tem-se que:

$$x_{C_{p2}}^* = 1 - 2\mu + \mu \left(1 \pm \frac{\delta}{l}\right) = 1 - \mu \pm \mu \frac{\delta}{l}. \quad (3.194)$$

Figura 3.4: Primário II com polo P_{21} mais massivo.



Fonte: Produção do Autor.

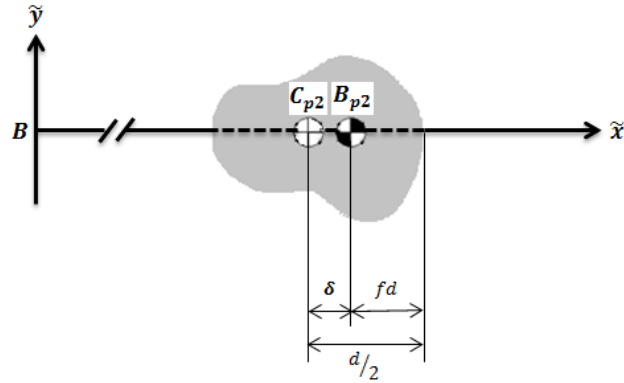
É necessário, ainda, verificar a relação analítica entre a margem estática δ e o fator de massa f e o comprimento característico d do dipolo. Considerando-se o polo P_{21} como o mais massivo do dipolo ($\frac{1}{2} < f < 1$) e sua posição em relação a B_{p2} e a margem estática, como apresentado na Figura 3.4, tem-se que:

$$(1 - f)d + \delta = \frac{d}{2}. \quad (3.195)$$

De onde se obtém que:

$$\delta = \left(-\frac{1}{2} + f\right)d. \quad (3.196)$$

Figura 3.5: Primário II com polo P_{22} mais massivo.



Fonte: Produção do Autor.

Considerando-se agora o polo P_{22} como o mais massivo do dipolo ($0 < f < \frac{1}{2}$) e sua posição em relação a B_{p2} e a margem estática, como apresentado na Figura 3.5, tem-se que:

$$fd + \delta = \frac{d}{2}. \quad (3.197)$$

De onde vem que:

$$\delta = \left(\frac{1}{2} - f\right) d. \quad (3.198)$$

Assim, verifica-se que $\delta = \delta(f, d)$, de modo que:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{B_{p2}} < \tilde{x}_{C_{p2}}: \delta(f, d) = \left(-\frac{1}{2} + f\right) d, & \frac{1}{2} < f < 1 \\ \tilde{x}_{B_{p2}} > \tilde{x}_{C_{p2}}: \delta(f, d) = \left(\frac{1}{2} - f\right) d, & 0 < f < \frac{1}{2}. \\ \tilde{x}_{B_{p2}} = \tilde{x}_{C_{p2}}: \delta(f, d) = 0, & f = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.199)$$

Assim, a nova escala geométrica do problema passa a ser:

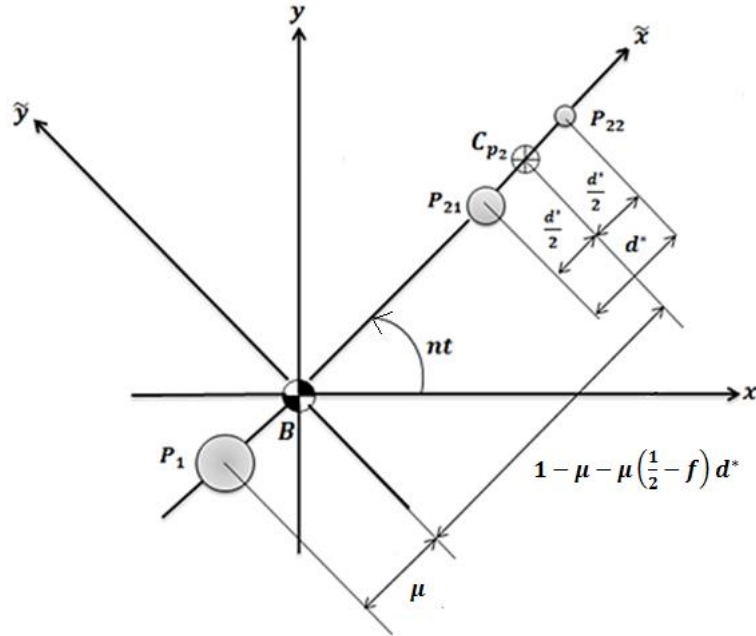
$$\begin{cases} \tilde{x}_{B_{p2}} < \tilde{x}_{C_{p2}} : l' = l + \left(-\frac{1}{2} + f\right) d, & \frac{1}{2} < f < 1 \\ \tilde{x}_{B_{p2}} > \tilde{x}_{C_{p2}} : l' = l - \left(\frac{1}{2} - f\right) d, & 0 < f < \frac{1}{2} \\ \tilde{x}_{B_{p2}} = \tilde{x}_{C_{p2}} : l' = l, & f = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.200)$$

Nota-se, desta forma, que a escala geométrica estabelecida entre os centroides é variável conforme o parâmetro f é variado e que para um mesmo valor de $f \neq \frac{1}{2}$ tem-se a mesma forma analítica para o comprimento da nova escala geométrica. Observa-se, desta forma que, para $0 < f < \frac{1}{2}$, tem-se $l' < l$, isto é, $l'/l < 1$ e para $\frac{1}{2} < f < 1$, tem-se $l' > l$, ou ainda $l'/l > 1$.

Então, a abscissa sinódica do centroide do dipolo em cada caso é:

$$\begin{cases} x_{B_{p2}}^* < x_{C_{p2}}^* : x_{C_{p2}}^* = 1 - \mu + \mu \left(-\frac{1}{2} + f\right) d^*, & \frac{1}{2} < f < 1 \\ x_{B_{p2}}^* > x_{C_{p2}}^* : x_{C_{p2}}^* = 1 - \mu - \mu \left(\frac{1}{2} - f\right) d^*, & 0 < f < \frac{1}{2} \\ x_{B_{p2}}^* = x_{C_{p2}}^* : x_{C_{p2}}^* = 1 - \mu, & f = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.201)$$

Figura 3.6: Representação artística do sistema considerando-se a distância entre os centroides dos primários como nova escala geométrica.



Fonte: Produção do Autor.

Assim, como apresentado na Figura 3.6, independentemente da posição relativa do centro de massa do dipolo em relação a seu centroide e pela Equação 3.194, tem-se, para caso geral de dipolo assimétrico que:

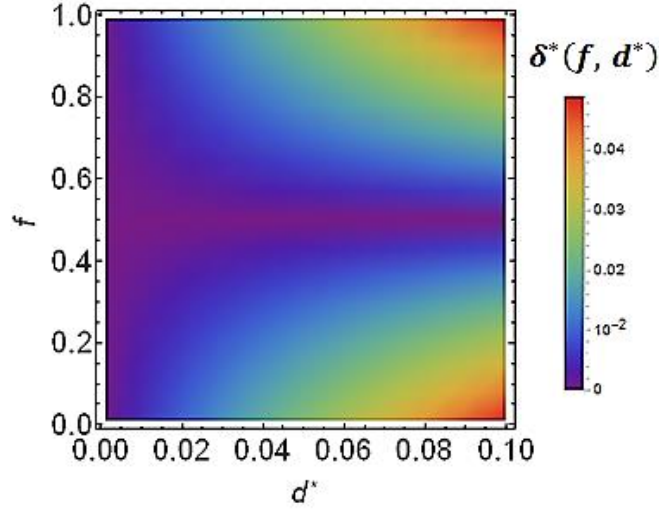
$$x_{C_{p2}}^* = 1 - \mu - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^*. \quad (3.202)$$

Consequentemente, as coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos massa P_{21} e P_{22} do sistema, considerando-se a nova escala geométrica para o problema são:

$$x_{21}^* = x_{21}^*(\mu, f, d^*) = 1 - \mu - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* - \frac{d^*}{2}, \quad (3.203)$$

$$x_{22}^* = x_{22}^*(\mu, f, d^*) = 1 - \mu - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* + \frac{d^*}{2}. \quad (3.204)$$

Figura 3.7: Variação da margem estática adimensionalizada $\delta^*(f, d^*)$ em função dos parâmetros f e d^* .



Fonte: Produção do Autor.

Nota-se ainda que:

$$\frac{\delta(f, d)}{l} = \delta^*(f, d^*) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2} + f \right) d^* = -\left(\frac{1}{2} - f \right) d^*, & \frac{1}{2} < f < 1 \\ \left(\frac{1}{2} - f \right) d^*, & 0 < f < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.205)$$

em que $\delta^*(f, d^*)$ é margem estática adimensional. Nota-se que $0 < \delta^*(f, d^*) \ll 1 \forall 0 < f < 1$ pois $d^* \ll 1$, como pode ser visto na Figura 3.7. Como pode ser observado nesta figura, para pequenos valores de d^* , a margem estática adimensional do problema é aproximadamente nula, pois tem-se um dipolo que tende a uma única partícula (considerando-se $d^* \rightarrow 0$). Para valores de d^* maiores e considerando-se valores de f próximos ao da configuração simétrica, a margem estática adimensional do problema é aproximadamente nula, como esperado. Para valores de d^* maiores e assumindo-se f para caso não simétrico, $\delta^*(f, d^*)$ será tão mais significativa quanto mais próximos dos extremos de seu intervalo de validade, $f \in]0,1[$ estiver. Além disso,

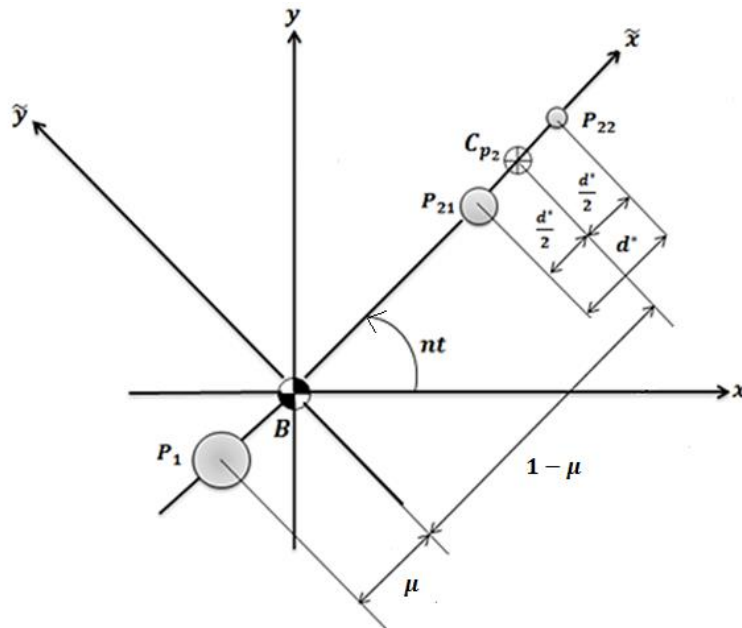
como $0 < \mu < \frac{1}{2}$, então constata-se que $0 < \mu \left| \frac{1}{2} - f \right| < 1$. Conseqüentemente, pode-se aproximar as Equações 3.203 e 3.204 para:

$$x_{21}^* \cong x_{21}^*(\mu, d^*) \cong 1 - \mu - \frac{d^*}{2}, \quad (3.206)$$

$$x_{22}^* \cong x_{22}^*(\mu, d^*) \cong 1 - \mu + \frac{d^*}{2}, \quad (3.207)$$

o que é razoável ao se supor que o centro de massa do dipolo não deve localizar-se distante do centroide do primário II.

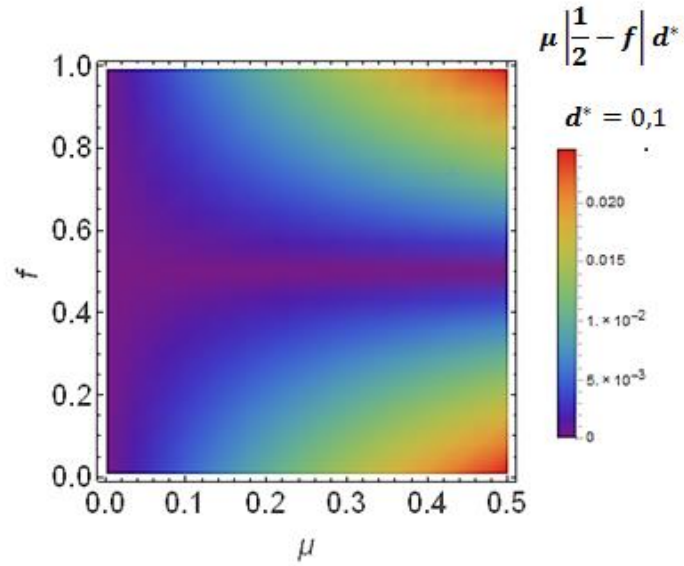
Figura 3.8: Representação artística do sistema binário em seus pontos de massa constituintes, desconsiderando-se efeito da margem estática.



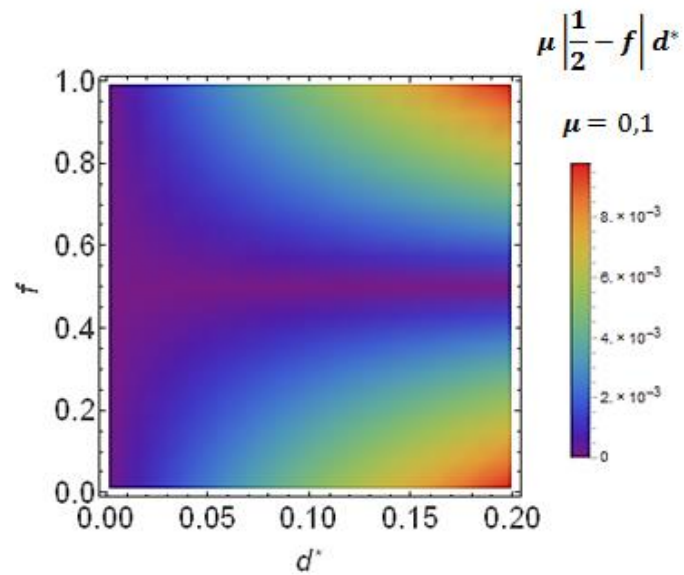
Fonte: Produção do Autor.

Na Figura 3.8 apresenta-se a representação do sistema binário em estudo, desconsiderando-se o efeito da margem estática. Nota-se o restabelecimento da unidade canônica de distância, tomada agora, entre os centroides dos primários.

Figura 3.9: Variação de $\mu \left| \frac{1}{2} - f \right| d^*$ em função dos parâmetros f e μ considerando-se $d^* = 0,1$ em (a) e em função dos parâmetros f e d^* , considerando-se $\mu = 0,1$ em (b).



(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

As Figuras 3.9 (a) e (b) mostram o valor de $\mu \left| \frac{1}{2} - f \right| d^*$ conforme variam-se os parâmetros do sistema em seus respectivos intervalos de validade. Nota-se o pequeno incremento ou decremento à escala do problema devido à margem estática quaisquer que sejam as combinações adotadas aos valores dos parâmetros do sistema. Desta forma, as abscissas sinódicas dos polos P_{21} e P_{22} do dipolo dependem muito pouco do fator de massa f do dipolo ao se adotar a nova escala geométrica variável com f do problema, como apresentado nas Equações 3.206 e 3.207. Consequentemente, a localização dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 do sistema, vizinhos ao dipolo, serão influenciadas pelo parâmetro f somente em termos das massas dos polos e não mais também pelas distâncias deles à referência geométrica local que, agora, com a nova escala, é o centroide C_{p2} do primário II. Como resultado, o potencial efetivo adimensionalizado do sistema, considerando-se a escala do problema entre os centroides dos primários, é:

$$\begin{aligned} \Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = & \frac{1}{2} \{ [x^*(t^*)]^2 + [y^*(t^*)]^2 \} + \\ & \frac{1 - \mu}{\sqrt{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2}} + \\ & \frac{f\mu}{\sqrt{\left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + [y^*(t^*)]^2}} + \\ & \frac{(1 - f)\mu}{\sqrt{\left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + [y^*(t^*)]^2}}, \end{aligned} \quad (3.208)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\Omega^*[x^*(t^*), y^*(t^*)] = \frac{1}{2} \{ [x^*(t^*)]^2 + [y^*(t^*)]^2 \} + \frac{1 - \mu}{r_{1}^{**}} + \frac{f\mu}{r_{21}^{**}} + \frac{(1 - f)\mu}{r_{22}^{**}}, \quad (3.209)$$

em que:

$$r_1^{**} = r_1^* = \sqrt{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2}, \quad (3.210)$$

$$r_{21}^{**} = \sqrt{\left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2}\right)\right]^2 + [y^*(t^*)]^2}, \quad (3.211)$$

$$r_{22}^{**} = \sqrt{\left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2}\right)\right]^2 + [y^*(t^*)]^2}. \quad (3.212)$$

Como resultados, as equações de movimento da partícula de prova, no referencial sinódico, depois de adotada a nova escala geométrica entre os centroides e desconsiderando-se o efeito da margem estática, são:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}^*(t^*) - 2\dot{y}^*(t^*) \\ &= x^*(t^*) \\ & - \left\{ \frac{(1 - \mu)[x^*(t^*) + \mu]}{\{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & + \frac{f\mu \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2}\right)\right]}{\left\{ \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2}\right)\right]^2 + [y^*(t^*)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \\ & \left. + \frac{(1 - f)\mu \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2}\right)\right]}{\left\{ \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2}\right)\right]^2 + [y^*(t^*)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.213)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{y}^*(t^*) + 2\dot{x}^*(t^*) \\
= & y^*(t^*) \\
& - \left\{ \frac{(1-\mu)y^*(t^*)}{\{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\
& + \frac{f\mu y^*(t^*)}{\left\{ \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + [y^*(t^*)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \\
& \left. + \frac{(1-f)\mu y^*(t^*)}{\left\{ \left[x^*(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + [y^*(t^*)]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \right\}. \tag{3.214}
\end{aligned}$$

3.6 Pontos de Equilíbrio do Sistema

Como visto no Capítulo 2, os pontos de equilíbrio do sistema físico em estudo, considerando-se o referencial sinódico \tilde{S}_B , são os lugares geométricos $P_i(x_i^*, y_i^*) \in \varpi$ que verificam as equações $\Omega_{x^*}^*(x^*, y^*) = 0$ e $\Omega_{y^*}^*(x^*, y^*) = 0$. Considerando-se a influência gravitacional de P_1 , P_{21} e P_{22} e a alteração de escala geométrica apresentada acima, tem-se, a partir das Equações 3.209 a 3.212 que:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \Omega^*(x^*, y^*) \right]_{\substack{x^*=x_i^* \\ y^*=y_i^*}} = x_i^* - \frac{(1-\mu)(x_i^* + \mu)}{[(x_i^* + \mu)^2 + y_i^{*2}]^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{f\mu \left[x_i^* - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2} \right) \right]}{\left\{ \left[x_i^* - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + y_i^{*2} \right\}^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{(1-f)\mu \left[x_i^* - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2} \right) \right]}{\left\{ \left[x_i^* - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + y_i^{*2} \right\}^{\frac{3}{2}}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.215}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial y^*} \Omega^*(x^*, y^*) \right]_{\substack{x^*=x_i^* \\ y^*=y_i^*}} \\
& = y_i^* - \frac{(1-\mu)y_i^*}{[(x_i^* + \mu)^2 + y_i^{*2}]^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{f\mu y_i^*}{\left\{ \left[x_i^* - \left(1 - \mu - \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + y_i^{*2} \right\}^{\frac{3}{2}}} \\
& - \frac{(1-f)\mu y_i^*}{\left\{ \left[x_i^* - \left(1 - \mu + \frac{d^*}{2} \right) \right]^2 + y_i^{*2} \right\}^{\frac{3}{2}}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.216}$$

O sistema de Equações 3.215 e 3.216 apresenta, de modo geral, seis soluções reais que definem os pontos de equilíbrio do sistema físico em estudo. Uma dessas soluções representa um ponto localizado ao longo do eixo das abscissas sinódicas e entreposto aos polos P_{21} e P_{22} . Como descarta-se o movimento da partícula de prova entre tais polos, uma vez que o modelo de dipolo está associado a um corpo extenso (primário II), o referido ponto de equilíbrio não é considerado neste estudo. Os demais cinco pontos de equilíbrio do sistema físico dispõem-se no plano ϖ como os pontos de equilíbrio no problema clássico. Encontram-se três valores reais de x_i^* para os quais $y_i^* = 0$ e que correspondem a três pontos de equilíbrio colineares a saber, $L_1(x_{L1}^*, 0)$, $L_2(x_{L2}^*, 0)$ e

$L_3(x_{L3}^*, 0)$, além dos pontos triangulares $L_4(x_{L4}^*, y_{L4}^*)$ e $L_5(x_{L5}^*, y_{L5}^*)$, com $x_{L4}^* = x_{L5}^*$ e $y_{L4}^* = -y_{L5}^*$. A localização dos pontos de equilíbrio colineares, de forma qualitativa, considerando-se os parâmetros μ , f e d^* do problema, são:

$$\begin{cases} L_1(x_{L1}^*, 0), 0 < x_{L1}^* < 1 - \mu - \frac{d^*}{2} \\ L_2(x_{L2}^*, 0), x_{L2}^* > 1 - \mu + \frac{d^*}{2} \\ L_3(x_{L3}^*, 0), x_{L3}^* < -\mu \end{cases} \quad (3.217)$$

Para os pontos triangulares, suas coordenadas sinódicas podem ser determinadas, com boa aproximação, considerando-se a margem estática:

$$L_4(x_{L4}^*, y_{L4}^*): \begin{cases} x_{L4}^* \cong f \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* - \frac{d^*}{2} \right] - \mu \right\} + \\ (1-f) \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* + \frac{d^*}{2} \right] - \mu \right\}, \\ y_{L4}^* \cong \Omega^*_{y^*}(x^*, y^*)_{x^*=x_{L4}^*} = 0 \end{cases} \quad (3.218)$$

$$L_5(x_{L5}^*, y_{L5}^*): \begin{cases} x_{L5}^* \cong f \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* - \frac{d^*}{2} \right] - \mu \right\} + \\ (1-f) \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \mu \left(\frac{1}{2} - f \right) d^* + \frac{d^*}{2} \right] - \mu \right\} \\ y_{L5}^* \cong \Omega^*_{y^*}(x^*, y^*)_{x^*=x_{L5}^*} = 0 \end{cases} \quad (3.219)$$

Embora, das relações acima, observa-se que os limites de posição associados a L_1 e a L_2 não dependam de f , ao se desconsiderar o efeito da margem estática, os três parâmetros do problema, μ , f e d^* influenciam a localização desses pontos de equilíbrio sobre o eixo das abscissas sinódicas, conforme Equações 3.215 e 3.216, ainda que, como apresentado na redefinição da escala geométrica do problema, tenha-se realizado o desacoplamento do efeito do parâmetro f sobre a influência de massa em relação à influência geométrica de P_{21} e P_{22} sobre a localização dos pontos de equilíbrio do sistema. Os pontos triangulares L_4 e L_5 também exibem dependência de suas coordenadas sinódicas com os parâmetros μ , f e d^* , levando-se em conta a margem

estática. O ponto de equilíbrio colinear L_3 , por ser vizinho ao primário mais massivo, não apresenta considerável variação de sua abscissa sinódica ao se variarem os parâmetros f e d^* que são exclusivos do dipolo. Assim, pode-se escrever que:

$$x_{L1}^* = x_{L1}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.220)$$

$$x_{L2}^* = x_{L2}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.221)$$

$$x_{L3}^* \cong x_{L3}^*(\mu), \quad (3.222)$$

$$x_{L4}^* = x_{L4}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.223)$$

$$y_{L4}^* = y_{L4}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.224)$$

$$x_{L5}^* = x_{L5}^*(\mu, f, d^*), \quad (3.225)$$

$$y_{L5}^* = y_{L5}^*(\mu, f, d^*). \quad (3.226)$$

Das Equações 3.220 a 3.226 pode-se perceber que, ao serem variados os parâmetros μ , f, d^* , individualmente, aos pares ou conjuntamente, ter-se-á variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio do sistema.

3.7 Curvas de Velocidade Zero do Sistema

Relembrando a Equação 2.52 para a Integral de Jacobi do PRTCC, pode-se, analogamente, escrever tal equação para o problema em estudo, em que se considera o dipolo de massa em ressonância spin-órbita como:

$$\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} = 2\Omega^*(x^*, y^*) - C^*. \quad (3.227)$$

A partir das Equações 3.209 a 3.212, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} &= [x^*(t^*)]^2 + [y^*(t^*)]^2 \\ +2 &\left\{ \frac{1-\mu}{\sqrt{[x^*(t^*) + \mu]^2 + [y^*(t^*)]^2}} + \frac{f\mu}{\sqrt{[x^*(t^*) - (1-\mu - \frac{d^*}{2})]^2 + [y^*(t^*)]^2}} \right. \\ &\left. + \frac{(1-f)\mu}{\sqrt{[x^*(t^*) - (1-\mu + \frac{d^*}{2})]^2 + [y^*(t^*)]^2}} \right\} - C^*. \end{aligned} \quad (3.228)$$

Considerando os pontos de equilíbrio $L_i, i = 1, 2, \dots, 5$ do sistema, e assumindo-se a condição para curva de velocidade zero ($\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} = 0$), pode-se determinar o valor da Constante Adimensional de Jacobi $C^*_i(x^* = x_i^*, y^* = y_i^*, \dot{x}^* = 0, \dot{y}^* = 0)$ associada, fazendo-se:

$$\begin{aligned} C^* &= C^*_i = x_i^{*2} + y_i^{*2} \\ +2 &\left\{ \frac{1-\mu}{\sqrt{[x_i^* + \mu]^2 + y_i^{*2}}} + \frac{f\mu}{\sqrt{[x_i^* - (1-\mu - \frac{d^*}{2})]^2 + y_i^{*2}}} \right. \\ &\left. + \frac{(1-f)\mu}{\sqrt{[x_i^* - (1-\mu + \frac{d^*}{2})]^2 + y_i^{*2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.229)$$

em que $x^* = x_i^*, y^* = y_i^*$ são as coordenadas sinódicas do ponto de equilíbrio L_i . Mantida a condição de velocidade zero, pode-se determinar, a partir do valor de C^*_i o conjunto de pontos $P(x^*, y^*) \in \varpi$ que verificam a Equação 3.229. Tais pontos compõem a curva de velocidade zero (curva de Hill) associada a C^*_i :

$$\Gamma_{0L_i}: C^*_i = x^{*2} + y^{*2} + 2 \left\{ \frac{1-\mu}{\sqrt{[x^* + \mu]^2 + y^{*2}}} + \frac{f\mu}{\sqrt{[x^* - (1-\mu - \frac{d^*}{2})]^2 + y^{*2}}} + \frac{(1-f)\mu}{\sqrt{[x^* - (1-\mu + \frac{d^*}{2})]^2 + y^{*2}}} \right\}. \quad (3.230)$$

As curvas de velocidade zero Γ_0 associadas aos pontos de equilíbrio $L_i, i = 1, 2, \dots, 5$, evidentemente não são as únicas curvas de velocidade zero do sistema. Contudo, tais curvas, denotadas por Γ_{0L_i} , como apresentado na Equação 2.66, compõem-se como curvas de velocidade zero de referência para estudo do mapa de velocidades do sistema no referencial sinódico. Recordar-se que o movimento espontâneo da partícula de prova é confinado na região delimitada por uma curva de velocidade zero para dado valor de C^* que, como foi definido no Capítulo 2, verifica:

$$\Lambda = \{(x^*, y^*) \in \varpi \mid 2\Omega^*(x^*, y^*) \geq C^*\}, \quad (3.231)$$

e que inclui as curvas de velocidade zero Γ_{0L_i} , para $C^* = C^*_i$. Como sabido, a desigualdade acima equivale dizer que o conjunto de pontos de ϖ espontaneamente permitidos ao movimento da partícula de prova é aquele em que, para dado C^* , verifica-se que $\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2} \geq 0$, uma vez que, fisicamente, a partícula não pode desenvolver uma velocidade cuja intensidade seja um número real negativo.

Assim, considerando-se a família de curvas de velocidade zero Γ_{0L_i} do sistema associadas à Constante de Jacobi C^*_i calculada num ponto de equilíbrio L_i , $i = 1, 2, \dots, 5$, verifica-se, das Equações 3.220 a 3.226, que, de modo geral:

$$C^*_i = C^*_i(\mu, f, d^*) = 2\Omega^*[x_i^*(\mu, f, d^*), y_i^*(\mu, f, d^*)]. \quad (3.232)$$

A partir da Equação 3.232 pode-se verificar que, considerando-se variações dos parâmetros μ, f, d^* do sistema, as coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio do sistema apresentarão variação correspondente, o que, por sua vez, leva à variação de C^*_i associada e, portanto, à modificação do traçado das curvas de velocidade zero relacionadas a um mesmo ponto de equilíbrio. Desta forma, é imediato que:

$$\Gamma_{0L_1} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2}C^*_1(\mu, f, d^*) = 0 \right\}, \quad (3.233)$$

$$\Gamma_{0L_2} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2}C^*_2(\mu, f, d^*) = 0 \right\}, \quad (3.234)$$

$$\Gamma_{0L_3} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2}C^*_3(\mu, f, d^*) = 0 \right\}, \quad (3.235)$$

$$\Gamma_{0L_4} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2}C^*_4(\mu, f, d^*) = 0 \right\}, \quad (3.236)$$

$$\Gamma_{0L_5} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2}C^*_5(\mu, f, d^*) = 0 \right\}. \quad (3.237)$$

Vale ressaltar ainda que, embora $C^*_4(\mu, f, d^*) = C^*_5(\mu, f, d^*)$ para quaisquer valores de μ, f e d^* , o que implica em $\Gamma_{0L_4} = \Gamma_{0L_5}$, os pontos dessas curvas não se sobrepõem,

uma vez que localizam-se em semi planos sinódicos diferentes, em relação ao eixo das abscissas sinódicas.

Como apresentado na Equação 3.222, o ponto de equilíbrio L_3 do sistema, em primeira aproximação, tem sua abscissa sinódica dependente apenas do parâmetro de massa μ do sistema binário. Os parâmetros f, d^* , associados ao dipolo, em sua variação, pouco afetam a localização de L_3 , uma vez que, como sabido, tal ponto de equilíbrio é vizinho ao primário mais massivo do sistema binário cuja massa e distância ao baricentro do sistema é função apenas de μ . Desta forma, a Equação 3.235 pode ser reescrita, por aproximação, como:

$$\Gamma_{0L_3} = \left\{ (x^*, y^*) \in \varpi \mid \Omega^*(x^*, y^*) - \frac{1}{2} C^*_3(\mu) = 0 \right\}. \quad (3.238)$$

3.8 Equações de Movimento da Partícula de Prova no Referencial Sideral Considerando-se Pressão da Radiação Solar

Voltando às Equações 3.152 e 3.153, que descrevem o movimento da partícula de prova no referencial sideral S_B e fazendo-se uso da nova escala geométrica adotada para o sistema físico em estudo, estabelecida entre os centroides dos primários, desconsiderando a margem estática, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} \xi(t^*) = & - \left\{ \frac{1-\mu}{\rho_1^3} [\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)] \right. \\ & + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3} \left\{ \xi(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2} d^* \right) \cos(t^*) \right\} \\ & \left. + \frac{(1-f)\mu}{\rho_{22}^3} \left[\xi(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2} d^* \right) \cos(t^*) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.239)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^{*2}}\eta(t^*) = & -\left\{\frac{1-\mu}{\rho_1^3}[\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)] \right. \\
& + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3}\left\{\eta(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2}d^*\right)\sin(t^*)\right\} \\
& \left. + \frac{(1-f)\mu}{\rho_{22}^3}\left[\eta(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2}d^*\right)\sin(t^*)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{3.240}$$

com ρ_1 , ρ_{21} e ρ_{22} dados, com a nova escala sem efeito da margem estática, por:

$$\rho_1 = \{[\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)]^2 + [\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)]^2\}^{1/2}, \tag{3.241}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{21} = & \left\{ \left[\xi(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2}d^*\right)\cos(t^*) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[\eta(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2}d^*\right)\sin(t^*) \right]^2 \right\}^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.242}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{22} = & \left\{ \left[\xi(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2}d^*\right)\cos(t^*) \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[\eta(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2}d^*\right)\sin(t^*) \right]^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.243}$$

Considerando-se, então, o efeito da pressão da radiação solar, apresentado na Equação 2.76, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^{*2}} \xi(t^*) = & - \left\{ \frac{1-\mu}{\rho_1^3} [\xi(t^*) + \mu \cos(t^*)] \right. \\
& + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3} \left\{ \xi(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2}d^*\right) \cos(t^*) \right\} \\
& + \frac{(1-f)\mu}{\rho_{22}^3} \left[\xi(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2}d^*\right) \cos(t^*) \right] \left. \right\} \\
& - \|\vec{a}_p^*\| \cos\left(\frac{n_S}{n} t^*\right),
\end{aligned} \tag{3.244}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^{*2}} \eta(t^*) = & - \left\{ \frac{1-\mu}{\rho_1^3} [\eta(t^*) + \mu \sin(t^*)] \right. \\
& + \frac{f\mu}{\rho_{21}^3} \left\{ \eta(t^*) - \left(1 - \mu - \frac{1}{2}d^*\right) \sin(t^*) \right\} \\
& + \frac{(1-f)\mu}{\rho_{22}^3} \left[\eta(t^*) - \left(1 - \mu + \frac{1}{2}d^*\right) \sin(t^*) \right] \left. \right\} \\
& - \|\vec{a}_p^*\| \sin\left(\frac{n_S}{n} t^*\right),
\end{aligned} \tag{3.245}$$

onde:

$$\|\vec{a}_p^*\| \cong \frac{\frac{1}{n^2 l} C_r \frac{A}{m} P_s \left(\frac{R_0}{l}\right)^2}{\left[\xi(t^*) - \frac{a_S}{l} \cos\left(\frac{n_S}{n} t^*\right)\right]^2 + \left[\eta(t^*) - \frac{a_S}{l} \sin\left(\frac{n_S}{n} t^*\right)\right]^2}, \tag{3.246}$$

Recorda-se que o efeito da pressão da radiação solar é considerado sobre um corpo que, neste estudo, representa um veículo espacial em órbita ao redor do primário tratado como dipolo e assume-se neste estudo que: $C_r = 1,5$, $A = 1m^2$, $m = 100kg$, o que resulta em $\frac{A}{m} = 0,01m^2/kg$. Além disso, conforme apresentado no Capítulo 2, $R_0 = 1$ au e $P_s = 4,55 \cdot 10^{-6} N/m^2$.

Ao sistema de Equações 3.244 e 3.245 relacionam-se as condições iniciais de pericentro dadas pelas Equações 2.128 a 2.131, para órbita direta centrada no dipolo, ou pelas

Equações 2.132 a 2.135, para órbita retrógrada centrada no dipolo. É importante salientar que as referidas condições iniciais foram deduzidas no Capítulo 2 considerando-se o movimento da partícula de prova ao redor do centro de massa do primário II, modelado como dipolo de massa em ressonância spin-órbita com o primário I. A partir da redefinição da escala geométrica do sistema binário, considerou-se a distância entre os centroides dos primários como comprimento padrão do problema. Para um sistema binário genérico, em que o primário menos massivo é assimétrico em sua distribuição de massa, não se verifica a coincidência, num mesmo ponto, entre seu centro de massa e seu centroide, como discutido. Desta forma, assumida a nova escala geométrica, a rigor, as condições iniciais de movimento da partícula devem ser relacionadas, num instante inicial, a uma órbita osculadora kepleriana em torno do centroide do primário II (e portanto, do dipolo). Segue que, ao se fazerem as devidas translações de coordenadas, do sistema de referência local do asteroide para o referencial sideral, deve-se levar em consideração o efeito da margem estática. Contudo, dada, de modo geral, a pequena ordem de grandeza da margem estática do sistema em comparação com a unidade canônica de distância, para fins de simplificação da descrição matemática do problema, pode-se, com boa aproximação, desconsiderar o efeito da margem estática nas condições iniciais cinemáticas do problema.

É importante ressaltar ainda que nos termos das Equações 3.244 e 3.245 associados ao efeito da pressão da radiação solar, considerou-se o terceiro corpo do sistema com extensão no espaço, dado que é levada em consideração a área da superfície externa desse corpo iluminada pelo Sol. Contudo, embora tal consideração induza a se pensar que este corpo não mais admita ser tomado como partícula, no que se refere à interação gravitacional do terceiro corpo com os pontos de massa dos primários, assume-se que as dimensões físicas daquele corpo são desconsideráveis em relação aos primários, enquanto corpos extensos e/ou desconsideráveis em relação aos pontos de massa representativos dos primários, considerando-se a distância instantânea do terceiro corpo a P_1 , P_{21} e P_{22} . Desta forma, nos termos gravitacionais das equações supracitadas, mantém-se o uso do modelo de partícula de prova (ponto de massa) para o terceiro corpo do sistema.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo realiza-se a apresentação dos resultados obtidos via simulação computacional do modelo físico apresentado no Capítulo 3. O presente capítulo é dividido em três seções: na primeira, apresenta-se a variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio do sistema físico considerando-se a variação dos parâmetros do sistema em seus respectivos intervalos de validade; na segunda parte, expõem-se as curvas de velocidade zero do sistema, considerando-se, novamente, diferentes combinações para os parâmetros do sistema; e, na terceira parte, são apresentadas as grades de condições iniciais para o movimento de uma partícula de prova no sistema físico, considerando-se como corpo central o primário II, tratado como dipolo de massa em rotação com ressonância spin-órbita. Em cada seção, após expostos os resultados, realizam-se as devidas discussões para elucidá-los e justificá-los.

4.1 Variação das Coordenadas Sinódicas Adimensionais dos Pontos de Equilíbrio do Sistema

Analisando-se o modelo físico apresentado no Capítulo 3, observa-se que os pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema físico influenciam gravitacionalmente o espaço circundante, mediante os parâmetros μ , f e d^* , de duas formas: a primeira, em termos da massa de cada ponto de massa e a segunda, mediante a distância de dado ponto do espaço circundante até cada ponto de massa constituinte do sistema físico. À primeira forma de influência dá-se o nome de efeito de massa e à segunda forma de influência atribui-se o nome de efeito de distância. Estes dois efeitos são simultâneos e concorrentes sobre os pontos do espaço circundante aos primários. Recorda-se que o campo de aceleração gravitacional (campo de força gravitacional específica) aumenta em intensidade linearmente com a massa de dado corpo, assumido corpo central, e decai com o inverso do quadrado da distância a partir do referido corpo, ao passo que a pseudo força centrífuga aumenta em intensidade linearmente com a distância em relação ao centro de massa do sistema, no referencial sideral. As forças gravitacionais devidas as cada ponto de massa do sistema e a pseudo força centrífuga determinam, verificando-se as condições de equilíbrio dinâmico apresentadas no Capítulo 2, a localização dos

pontos de equilíbrio do sistema físico no plano sinódico. Ocorre que tais efeitos terão sua intensidade e, portanto, sua extensão nesse plano, diretamente influenciada pela variação de valores dos parâmetros μ , f e d^* do sistema. Esta variação é empreendida de modo a se estudar as possíveis configurações gravitacionais de uma classe de sistemas binários de asteroides em que se considera o primário menos massivo alongado e com assimetria de massa, atribuindo-lhe o modelo de dipolo de massa em rotação e dotado de ressonância spin-órbita com um primário mais massivo, assumido com formato esférico. Além disso, ao variar-se os parâmetros do sistema em seus respectivos intervalos de validade, atribui-se ao modelo matemático deste estudo significativa flexibilidade para o modelo físico do campo potencial gravitacional de um sistema binário, bem como, de cada um de seus primários, o que possibilita, por exemplo, a redefinição do movimento orbital de um veículo espacial neste sistema conforme são conhecidos mais aspectos físicos do mesmo.

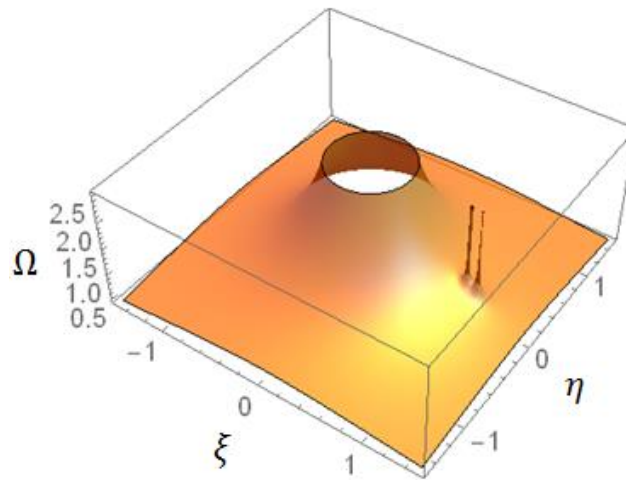
Mediante as Equações 3.215 e 3.216, foram determinados os pontos de coordenadas reais pertencentes ao plano sinódico que verificam tal sistema de equações. Como dito nos Capítulos 2 e 3, essas soluções reais são os pontos de equilíbrio do sistema (pontos de Lagrange), sendo três deles, a saber, L_1 , L_2 e L_3 , colineares, dispostos ao longo do eixo das abscissas sinódicas e os outros dois, L_4 e L_5 , simétricos ao eixo das abscissas sinódicas, denominados de pontos triangulares, como ocorre no PRTCC. Para a ocorrência desses pontos de equilíbrio não foi levado em conta o efeito da pressão da radiação solar.

Como apresentado nas Equações 3.220 a 3.226, as coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema físico são funções de, pelo menos, um dos parâmetros do modelo físico apresentado no Capítulo 3, por aproximação. A seguir, apresenta-se o comportamento das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio em função da variação de cada um dos parâmetros do sistema.

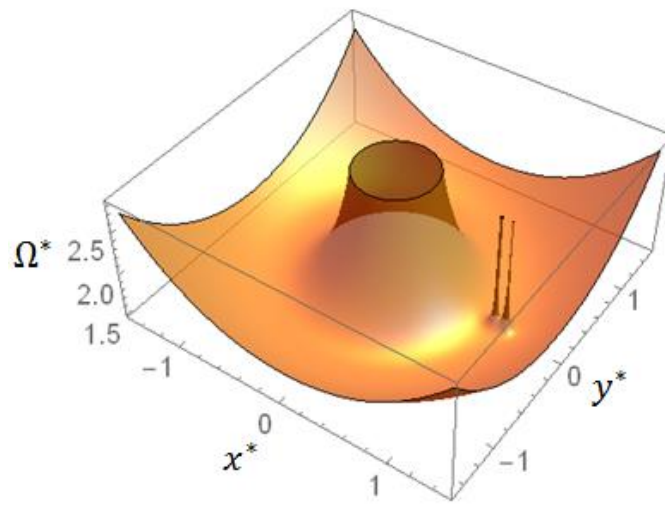
4.1.1 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Massa do Sistema Binário

Das Equações 3.220 a 3.226 verifica-se que as coordenadas sinódicas de todos os pontos de equilíbrio do sistema físico dependem do parâmetro de massa μ do sistema binário, com $0 < \mu < \frac{1}{2}$, como apresentado anteriormente. Da Equação 3.208 observa-se que este parâmetro contribui para o efeito de massa e para o efeito de distância associado a cada ponto de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema sobre seus pontos de equilíbrio.

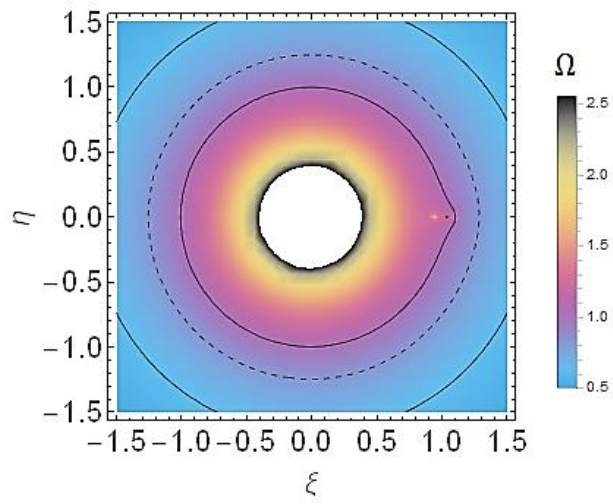
Figura 4.1: Superfície de variação da intensidade do campo potencial composto dos primários do sistema em função da distância a cada ponto de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , considerando-se o referencial sideral (em $t_0^* = 0$), em (a) e o referencial sinódico, em (b), assumindo-se $\mu = 0,01$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$. Em (c), projeção de (a) no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e em (d), projeção de (b) no plano sinódico.



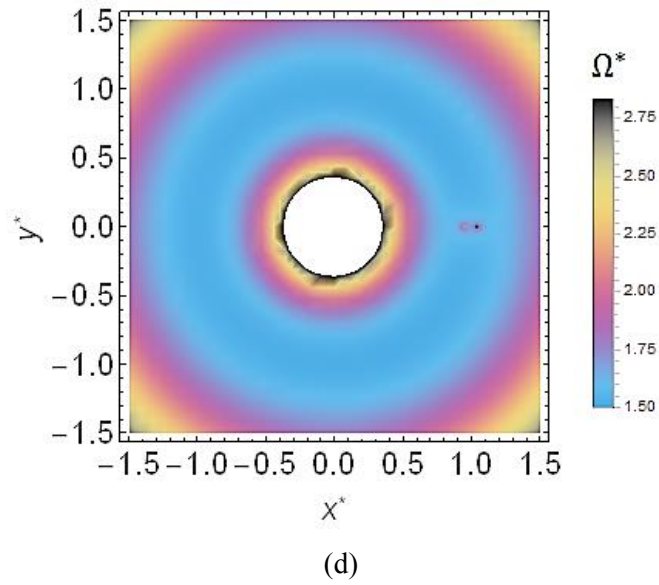
(a)



(b)

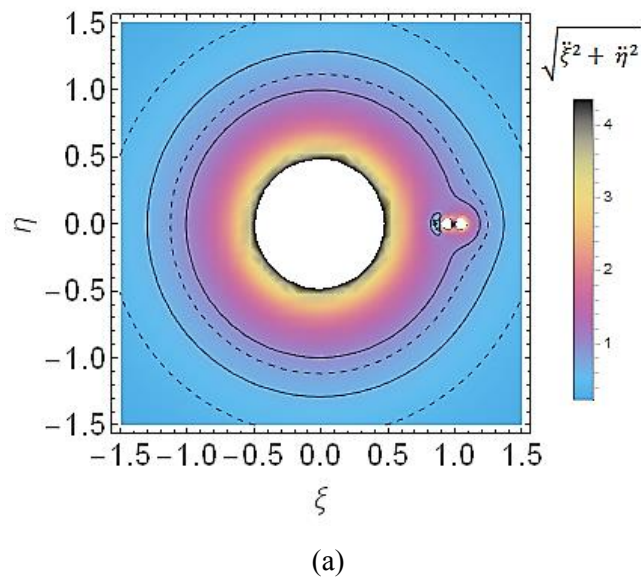


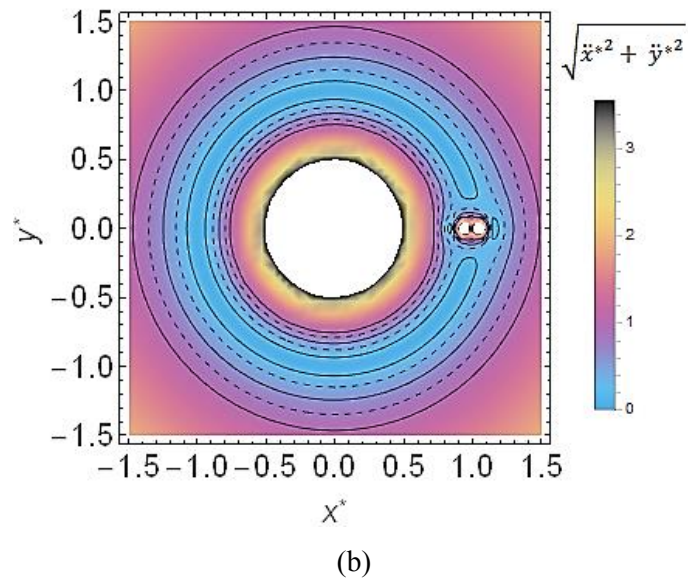
(c)



Fonte: Produção do Autor.

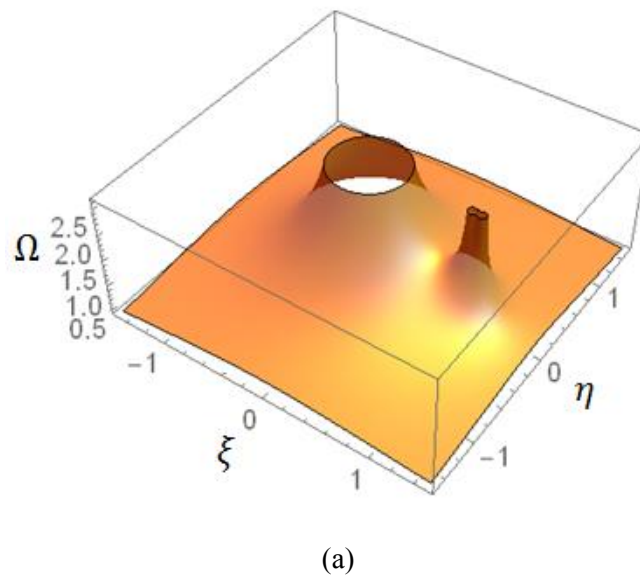
Figura 4.2: Mapas de aceleração (alcance gravitacional) dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema, em (a), no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e, em (b), no plano sinódico, considerando-se $\mu = 0,01$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$.

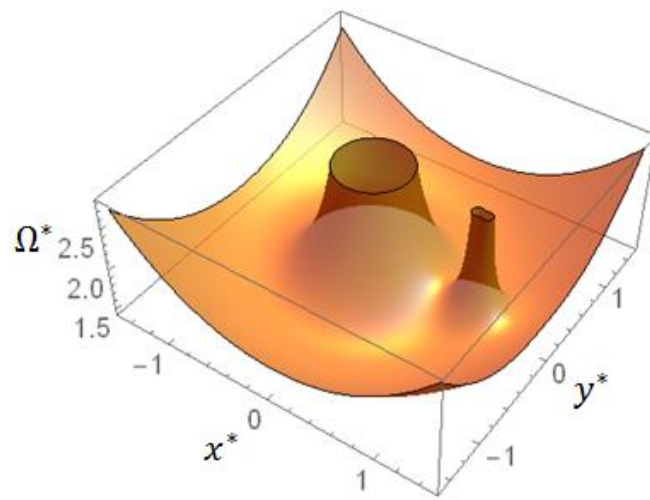




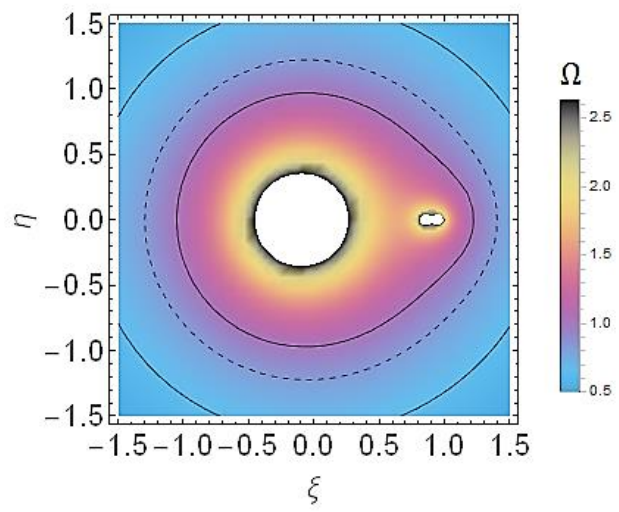
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.3: Superfície de variação da intensidade do campo potencial composto dos primários do sistema em função da distância a cada ponto de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , considerando-se o referencial sideral (em $t_0^* = 0$), em (a) e o referencial sinódico, em (b), assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$. Em (c), projeção de (a) no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e em (d), projeção de (b) no plano sinódico.

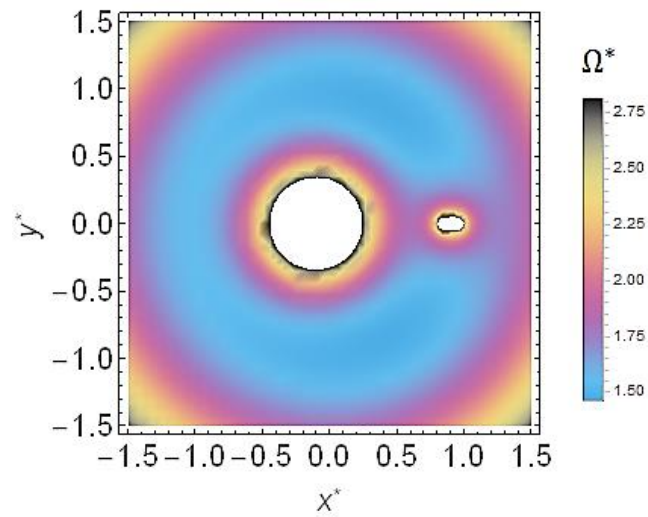




(b)



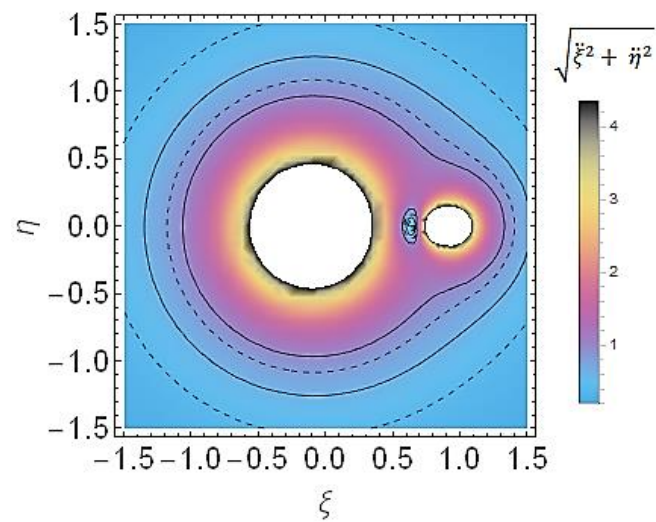
(c)



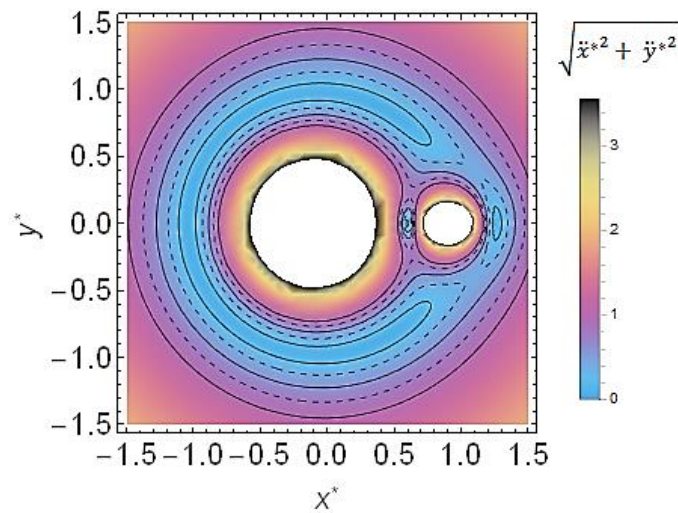
(d)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.4: Mapas de aceleração (alcance gravitacional) dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} do sistema, em (a), no plano sideral (em $t_0^* = 0$) e, em (b), no plano sinódico, considerando-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$.



(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

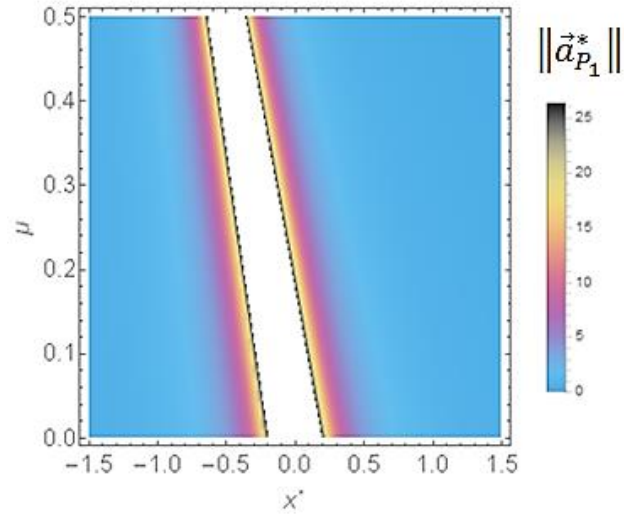
Nas Figuras 4.1 (a) e 4.1 (b) e Figuras 4.3 (a) e 4.3 (b) apresentam-se as superfícies de variação da intensidade do campo potencial composto dos primários do sistema considerando-se a distância a cada ponto de massa constituinte no referencial sideral, em $t_0^* = 0$, e no referencial sinódico, respectivamente. Considera-se que em $t_0^* = 0$ o eixo das abscissas sinódicas ao longo do qual encontra-se o dipolo coincide com o eixo das abscissas siderais. Recorda-se que no primeiro referencial, todos os pontos do plano sideral estão sujeitos aos potenciais gravitacionais sobrepostos de P_1 , P_{21} e P_{22} ao passo que no segundo referencial, em adição a tais potenciais, acrescenta-se, como mostrado nos Capítulos 2 e 3, o efeito do pseudo potencial centrífugo, o que compõe sobre os pontos do plano sinódico o potencial efetivo do sistema.

Nas Figuras 4.1 (c) e 4.1 (d) e Figuras 4.3 (c) e 4.3 (d), as superfícies de intensidade do potencial composto do sistema são projetadas nos planos sideral em $t_0^* = 0$ e sinódico, respectivamente. Nas Figuras 4.1 (c) e 4.3 (c), o potencial composto gravitacional é mais intenso à medida que se toma proximidade de qualquer um dos primários do sistema, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras. A intensidade do potencial composto gravitacional, no referencial sideral, decai à medida que se toma distância dos corpos constituintes do sistema. Nas Figuras 4.1 (d) e 4.3 (d), o potencial efetivo do sistema é mais intenso, pela parcela gravitacional composta, à medida que se

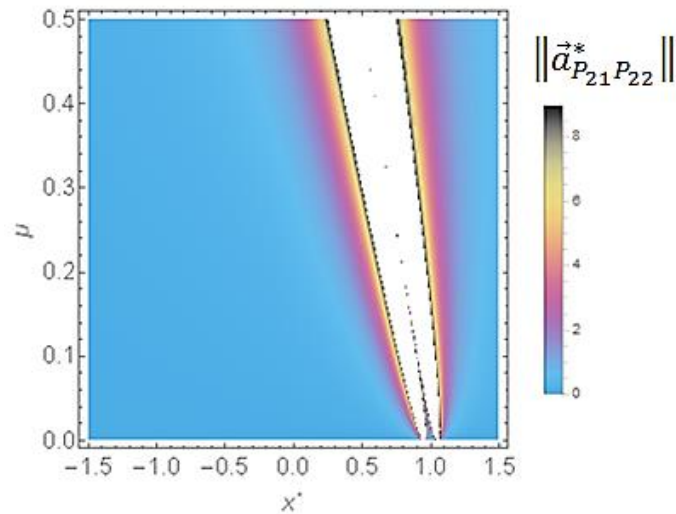
aproxima de qualquer um dos primários do sistema, novamente, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras. Além disso, o potencial efetivo também é mais intenso, pela parcela de pseudo potencial centrífugo, conforme consideram-se pontos radialmente mais distantes em relação ao baricentro do sistema binário. O potencial efetivo do sistema, desta forma, apresenta uma região mais tênue, em forma de coroa, que circunda os primários. Nota-se, ainda, que o pseudo potencial centrífugo reduz o alcance do potencial composto gravitacional dos primários, como pode ser visualizado nas Figuras 4.1 (d) e 4.3 (d).

Como consequência direta à variação do potencial gravitacional composto, no referencial sideral e do potencial efetivo, no referencial sinódico, tem-se a variação da intensidade do campo de acelerações do sistema, em ambos os referenciais considerados. Nas Figuras 4.2 (a) e 4.4 (a), em acordo com o apresentado nas Figuras 4.1 (c) e 4.3 (c), a intensidade do campo de acelerações gravitacionais devidas a P_1 , P_{21} e P_{22} é mais significativa quanto menor a distância a qualquer um desses pontos de massa. Nas Figuras 4.2 (b) e 4.4 (b), como apresentado nas Figuras 4.1 (d) e 4.3 (d), devido ao comportamento do potencial efetivo apresentado, a intensidade do campo de aceleração efetiva é maior, pelas parcelas gravitacionais devidas a P_1 , P_{21} e P_{22} , quanto menor a distância a qualquer um desses pontos de massa. A intensidade desse campo de aceleração não inercial volta a crescer pela parcela da pseudo aceleração centrífuga quando são tomadas distâncias maiores em relação ao baricentro do sistema. Observa-se a existência de regiões com acelerações menores ao longo do eixo das abscissas sinódicas, sobretudo, adjacentes ao dipolo. Estas regiões são aquelas em que se encontram os pontos de equilíbrio colineares do sistema, em particular L_1 e L_2 .

Figura 4.5: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas dimensionais devido ao primário mais massivo, em (a) e ao dipolo, em (b), tomando-se $\Delta\mu > 0$ (adotados $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$).



(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

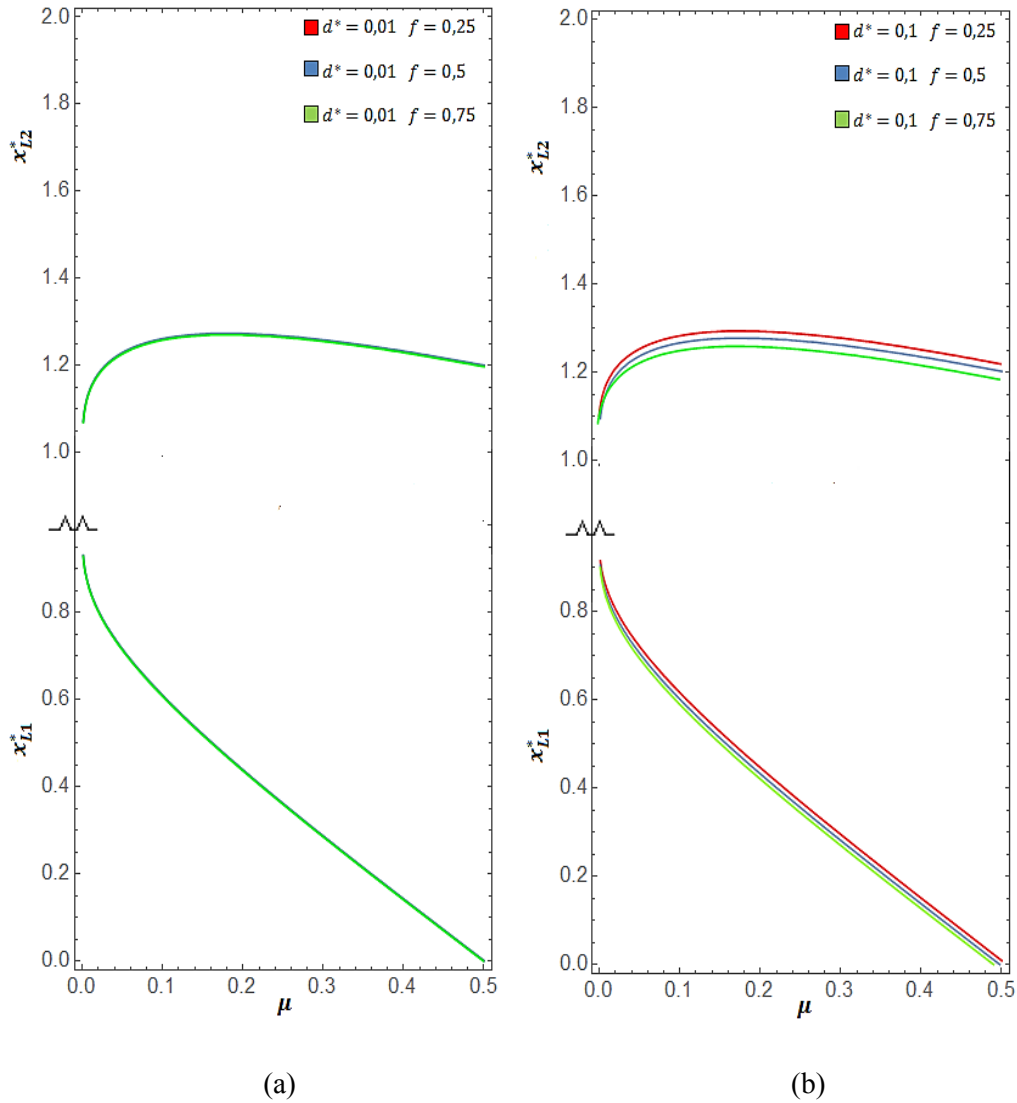
Como mostra a Figura 4.5 (a), considerando-se o referencial sinódico, à medida que o parâmetro μ é incrementado, a massa do primário I, representado por P_1 , diminui, reduzindo-se, com isso, o efeito de massa desse corpo sobre o plano sinódico, como pode ser visto pelo estreitamento da zona de seu alcance gravitacional. Além disso, dado o acoplamento de escala massa-distância ao baricentro do sistema binário, ao

tomar-se $\Delta\mu > 0$, P_1 tende a se afastar do baricentro, aumentando, como isso, o efeito de distância desse primário em relação aos pontos do plano sinódico entrepostos entre ele e o dipolo, o que pode ser constatado pelo recuo do alcance gravitacional desse primário em relação à origem sinódica.

Simultaneamente a este fenômeno, pela Figura 4.5 (b), pode-se verificar que, para $\Delta\mu > 0$, o efeito de massa é incrementado no par P_{21} e P_{22} , isto é, os polos do dipolo tornam-se ambos mais massivos com a redução de massa do primário principal do sistema binário. Nas Figuras 4.1 (a) a 4.1 (d), considera-se um sistema binário com $\mu = 0,01$, e nas Figuras 4.3 (a) a 4.3 (d) apresenta-se um sistema binário com $\mu = 0,1$. Devido ao acoplamento de escala massa-distância ao baricentro do sistema binário, ao tomar-se $\Delta\mu > 0$, o par P_{21} e P_{22} tende a se aproximar do baricentro do sistema, intensificando o efeito de distância desse primário em relação aos pontos do plano sinódico entrepostos entre o dipolo e o primário I, o que pode ser constatado pelo avanço da faixa de alcance gravitacional dos polos em relação à origem sinódica.

Os comportamentos acima descritos são devidos ao fato de que, como sabido, o campo de aceleração gravitacional tem sua intensidade linearmente aumentada com o aumento de massa de dado corpo e apresenta redução de intensidade com o aumento do inverso do quadrado da distância a este corpo. Tais efeitos afetam as condições de equilíbrio dinâmico entre as forças gravitacionais devidas a P_1 , P_{21} e P_{22} e a pseudo força centrífuga. Deve-se enfatizar que as faixas brancas presentes nas Figuras 4.5 (a) e 4.5 (b) correspondem às regiões circundantes brancas aos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} em que se verifica abrupto crescimento da intensidade do campo potencial nas vizinhanças dos primários, à medida que a distância aos mesmos tende a zero e também correspondem às regiões em branco apresentadas nas Figuras 4.2 (b) e 4.4 (b). Para os pontos de equilíbrio colineares, de modo geral, pode-se dizer que os pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} afetam a localização dos pontos L_1 e L_2 pelo fato destes serem vizinhos ao dipolo e devido ao primário representado por P_1 ser o corpo mais massivo do sistema no intervalo de valores adotados para μ . Ao contrário, tem-se que L_3 é influenciado majoritariamente por P_1 , que é o corpo mais próximo a esse ponto de equilíbrio.

Figura 4.6: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo. Em (a), adota-se $d^* = 0,01$ e em (b), adota-se $d^* = 0,1$.



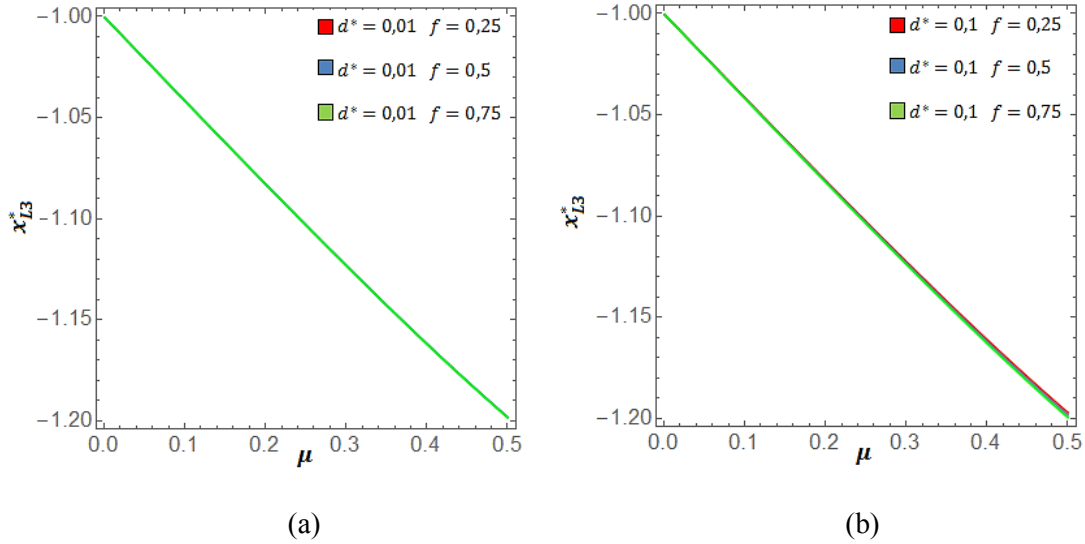
Fonte: Produção do Autor.

Nota-se que, independentemente do tamanho relativo do dipolo sobre a escala geométrica do problema assumida entre os centroides dos primários, o que é dado pelo parâmetro d^* , e independentemente da distribuição de massa sobre o dipolo, dado pelo parâmetro f , à medida que o parâmetro μ aumenta, o ponto de equilíbrio L_1 tende a apresentar redução de sua abscissa sinódica em decorrência da sobreposição de efeitos de massa crescente e de distância decrescente pelo primário II (par P_{21} e P_{22}), e de

efeito de massa decrescente sobreposto ao efeito de distância crescente pelo ponto de massa P_1 , considerando-se o baricentro do sistema. Este deslocamento de L_1 ocorre devido à alteração das coordenadas do ponto de aceleração efetiva nula entre os primários, como determinado pelas Equações 3.215 e 3.216 de equilíbrio e como pode ser visto nas Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b). Em outras palavras, qualquer que seja o valor do parâmetro μ no intervalo considerado, o aumento e a redução de massa dos primários II e I, respectivamente, atrai o ponto de equilíbrio L_1 em direção ao baricentro do sistema binário. Observa-se que, no caso limite de $\mu = \frac{1}{2}$, tem-se a sobreposição de L_1 sobre o baricentro do sistema binário. Como este ponto é fixo no plano de movimento, nesta particular configuração, o sistema físico também passa a possuir um ponto de equilíbrio em relação ao referencial sideral.

Simultaneamente ao deslocamento de L_1 , o ponto de equilíbrio L_2 sofre afastamento inicial em relação ao centroide do dipolo, seguido por reaproximação ao mesmo, conforme aumenta-se μ , como apresentado nas Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b). É visível a partir dessas figuras que existe um valor de μ para o qual a variação da abscissa de L_2 em relação a tal parâmetro apresenta um máximo. Para valores menores que μ máximo ($\mu \cong 0,15$), há predomínio do efeito de massa crescente do par P_{21} e P_{22} sobre a condição de equilíbrio para um ponto de aceleração efetiva nula com abscissa sinódica maior que a do centroide do dipolo. Para valores maiores que μ máximo, o predomínio do efeito de distância decrescente do par P_{21} e P_{22} em relação ao baricentro do sistema induz efeito oposto ao anterior, trazendo este ponto de aceleração efetiva nula para abscissas sinódicas menores. Desta forma, quando $\mu \cong 0,15$ tem-se que ambos os efeitos apresentados têm igual significância sobre a localização de L_2 , que apresenta distância máxima em relação ao baricentro do sistema. É importante ressaltar ainda que P_1 também atua sobre a localização de L_2 . Com o aumento dos valores de μ , o efeito de massa do primário mais massivo do sistema é reduzido ao passo que seu efeito de distância é aumentado em relação ao baricentro do sistema binário, amortecendo o efeito de massa dominante do dipolo para baixos valores de μ e intensificando o efeito de distância do primário II para valores mais altos desse parâmetro.

Figura 4.7: Variação das abscissas sinódicas do ponto de equilíbrio L_3 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo. Em (a), adota-se $d^* = 0,01$ e em (b), adota-se $d^* = 0,1$.

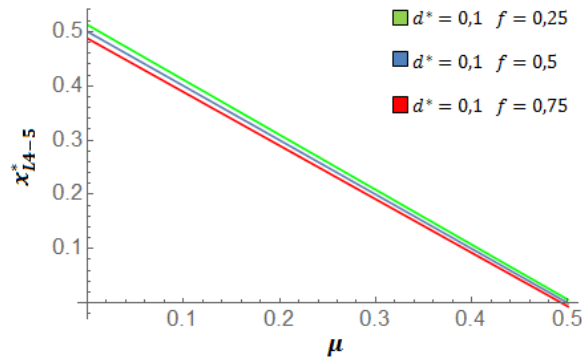


Fonte: Produção do Autor.

Embora o ponto de equilíbrio L_3 também sofra os efeitos de massa e de distância do dipolo sobre sua localização ao longo das abscissas sinódicas, como dito anteriormente, sua posição é predominantemente determinada pelos efeitos de massa e de distância associados ao primário mais massivo do sistema, representado por P_1 . Como pode ser visto nas Figuras 4.7 (a) e 4.7 (b), à medida que o parâmetro μ de massa do sistema binário aumenta, a consequente redução de massa do primário acoplada ao seu afastamento do baricentro do sistema induz ao também afastamento, em relação a este baricentro, do ponto de aceleração efetiva nula vizinho a P_1 , de modo a serem preservadas as condições de equilíbrio estabelecidas pelas Equações 3.215 e 3.216. Nas Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b) e Figuras 4.7 (a) e 4.7 (b) são representadas três diferentes configurações para o sistema binário relativas à distribuição de massa do dipolo: dipolo simétrico ($f = 0,5$), e dipolo assimétrico ($f = 0,25$ e $f = 0,75$), para $d^* = 0,01$ e $d^* = 0,1$, respectivamente. Observa-se que, quanto menor o valor de d^* adotado para o tamanho relativo do dipolo sobre a escala geométrica do sistema, tomada entre os centroides dos primários, menores são as diferenças de posição assumidas pelos pontos de equilíbrio colineares para diferentes valores de f mediante variação do parâmetro de massa μ do sistema binário, como apresentado acima e como pode ser notado ao serem

comparadas as Figuras 4.6 (a) e 4.6 (b), para L_1 e L_2 , e as Figuras 4.7 (a) e 4.7 (b), para L_3 . A razão deste fato é que quanto menor o valor assumido pelo parâmetro d^* , mais próximos os polos P_{21} e P_{22} do dipolo encontram-se do centroide do primário II, tal que, a processo de limite, para $d^* \rightarrow 0$, tem-se a sobreposição dos polos num único ponto de massa, retornando-se ao PRTCC, em que os primários são adotados como partículas.

Figura 4.8: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo, assumindo-se $d^* = 0,1$.

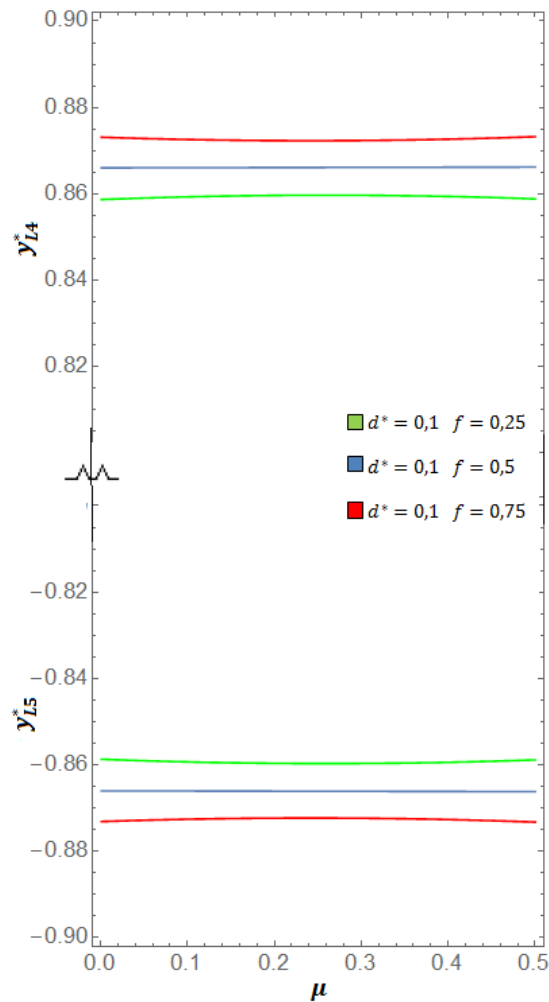


Fonte: Produção do Autor.

Mediante variação crescente do parâmetro de massa do sistema binário ($\Delta\mu > 0$), os pontos de equilíbrio triangulares L_4 e L_5 também apresentam variação de suas coordenadas sinódicas. Da Figura 4.8, observa-se que, para $d^* = 0,1$ e considerando-se casos simétrico e assimétricos de dipolo, as abscissas sinódicas dos pontos triangulares decrescem linearmente, segundo modelo apresentado nas Equações 3.218 e 3.219, até se localizarem sobre o eixo das ordenadas sinódicas, quando $\mu = \frac{1}{2}$. A ligeira diferença entre as abscissas sinódicas de L_4 e L_5 para f diferentes é justificada pelo fato de que os pontos triangulares são afetados em sua localização pela distribuição de massa entre os polos do dipolo. Além disso, como ocorre no PRTCC, os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 têm abscissas intermediárias aos centroides dos primários. Desta forma, quando P_{22} é mais massivo ($f = 0,25$), tem-se as abscissas de L_4 e L_5 maiores que seu valor para o caso de dipolo simétrico ($f = 0,5$), mas inferiores à posição do centroide do dipolo. Em

contrapartida, quando P_{21} é mais massivo, as abscissas dos pontos triangulares permanecem inferiores à posição do centroide do dipolo e passam a serem menores que no caso simétrico (caso de referência). Nestas configurações, o primário I é consideravelmente mais massivo que o dipolo e, conseqüentemente, desloca as condições de equilíbrio sobre os pontos triangulares para regiões mais afastadas de si. À medida que μ aumenta, o afastamento do primário I em relação ao baricentro do sistema e o conseqüente aumento de massa do dipolo tende a deslocar os pontos triangulares para abscissas sinódicas menores.

Figura 4.9: Variação das ordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 mediante $\Delta\mu > 0$ para casos simétrico e assimétricos de dipolo, assumindo-se $d^* = 0,1$.



Fonte: Produção do Autor.

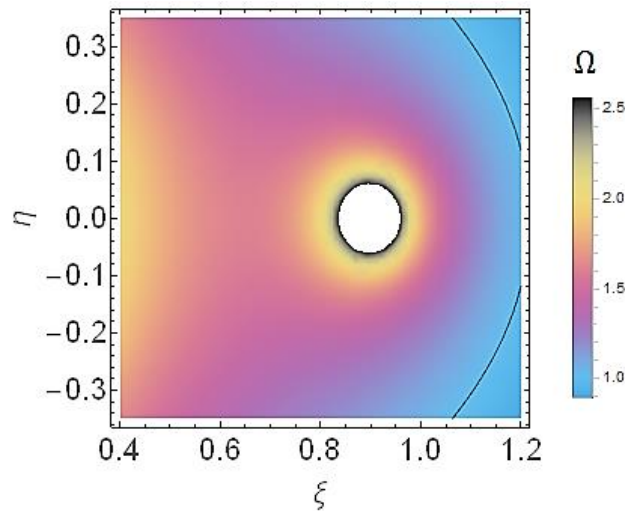
A partir das Equações 3.218 e 3.219, tomando-se $x^* = x_{L_4-5}^*$, obteve-se a variação das ordenadas sinódicas dos pontos triangulares conforme sua abscissa é variada com $\Delta\mu > 0$. Da Figura 4.9, considerando-se $d^* = 0,1$, observa-se que, no caso simétrico, as ordenadas de L_4 e L_5 permanecem constantes, o que significa que, assim como no PRTCC, as ordenadas desses pontos são independentes do parâmetro de massa do sistema. Para os casos de dipolo assimétrico, observa-se ligeira variação das ordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio triangulares com incremento do parâmetro μ . Para esses casos, tomando-se $\Delta\mu > 0$, L_4 e L_5 apresentam ligeiro distanciamento do eixo das abscissas sinódicas, que é máximo para $\mu = 0,25$, na condição de dipolo a $f = 0,25$, e, simetricamente, L_4 e L_5 apresentam ligeira aproximação do eixo das abscissas sinódicas, que é máxima também para $\mu = 0,25$, na condição de dipolo a $f = 0,75$. A análise de variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 mediante variação do parâmetro μ foi realizada considerando-se apenas o valor de $d^* = 0,1$, diferentemente da análise empreendida para os demais pontos de equilíbrio do sistema, pois o maior interesse deste estudo recai sobre os pontos colineares vizinhos ao dipolo, a saber, L_1 e L_2 . Além disso, como foi observado na Figura 4.6 (a), as curvas de variação das abscissas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 para $d^* = 0,01$ se sobrepõem assumindo-se diferentes valores para o parâmetro f . Dado que L_1 e L_2 são os pontos mais próximos ao dipolo e, portanto, mais sensíveis à variação de sua distribuição de massa, não é esperada significativa variação no traçado das curvas dos pontos L_4 e L_5 para $d^* = 0,01$.

Deve-se ressaltar ainda que, embora a pseudo força centrífuga não varie explicitamente com os parâmetros μ , f e d^* , dado que nos pontos de equilíbrio, como apresentado nos Capítulos 2 e 3, verifica-se a igualdade entre tal pseudo força e as forças gravitacionais devidas aos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , à medida que a resultante gravitacional do sistema varia com os parâmetros do modelo, tem-se a igual variação da pseudo força centrífuga, como pode ser visto nas Equações 3.215 e 3.216.

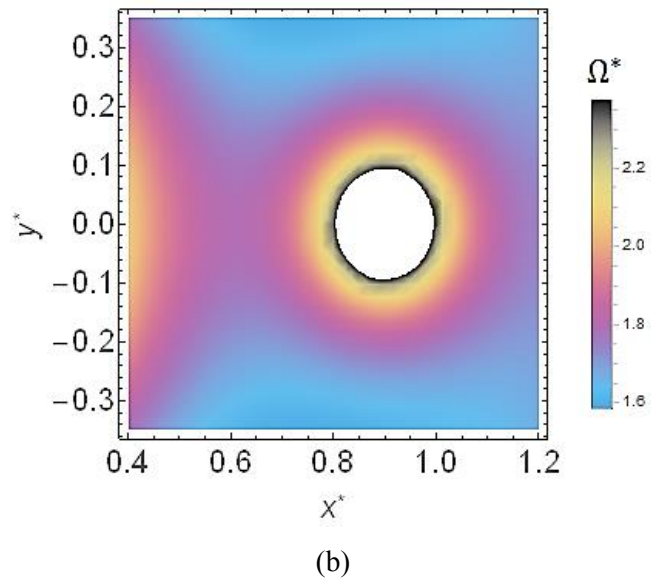
4.1.2 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Comprimento do Dipolo

Voltando às Equações 3.220 a 3.226, pode-se observar que as coordenadas sinódicas de todos os pontos de equilíbrio do sistema físico, a exceção de L_3 , por aproximação, dependem do parâmetro de comprimento d^* do dipolo, com $0 < d^* \ll 1$. Pela Equação 3.208 observa-se que este parâmetro influencia os efeitos de distância dos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, a partir do centroide do mesmo. Vale ressaltar que é considerada a nova escala geométrica do sistema, estabelecida entre os centroides dos primários. Além disso, ainda pela Equação 3.208, o parâmetro d^* não participa do efeito de massa dos polos do dipolo, além de não estar presente no termo de potencial do primário mais massivo. Desta forma, ao se considerar a variação de d^* , a alteração das coordenadas dos pontos de equilíbrio do sistema binário se dará, por este parâmetro, apenas devido ao efeito de distância de P_{21} e P_{22} .

Figura 4.10: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,01$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$.

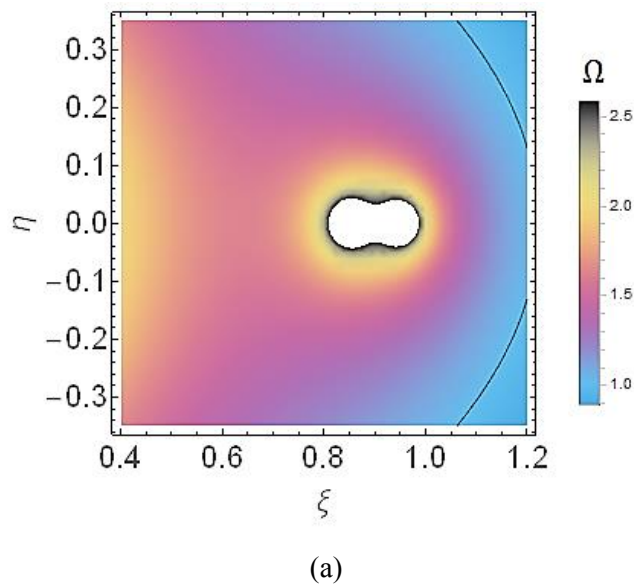


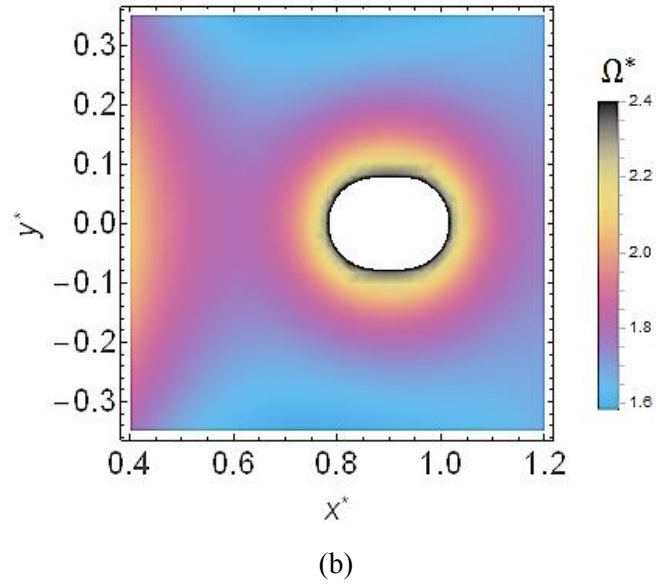
(a)



Fonte: Produção do Autor.

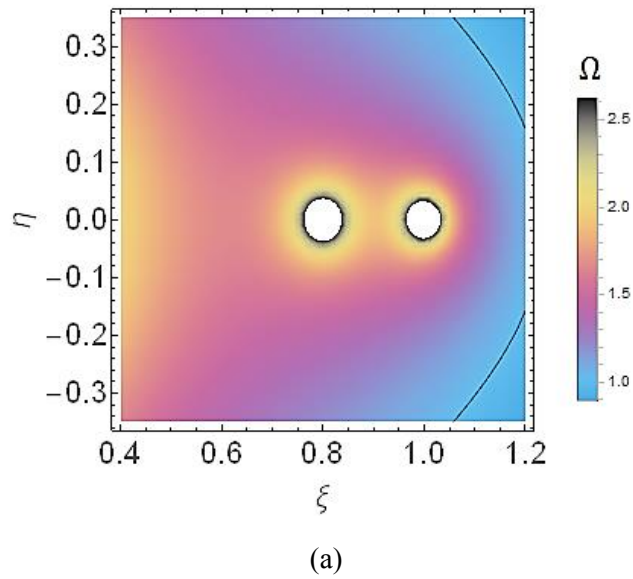
Figura 4.11: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,1$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$.

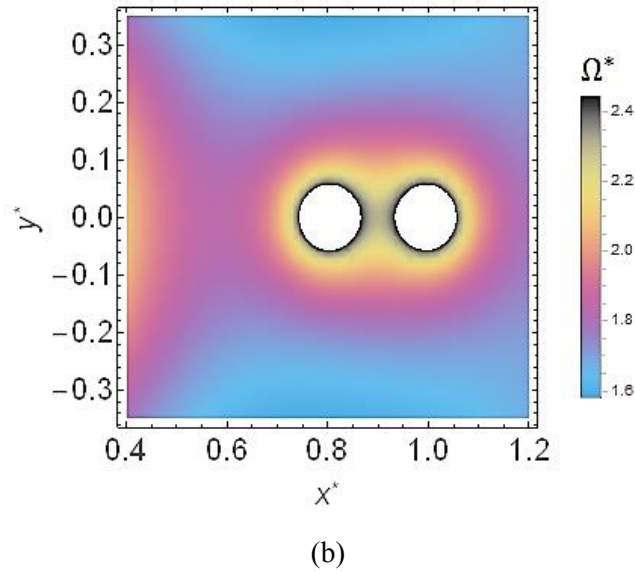




Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.12: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $d^* = 0,2$, para $\mu = 0,1$, $f = 0,5$.



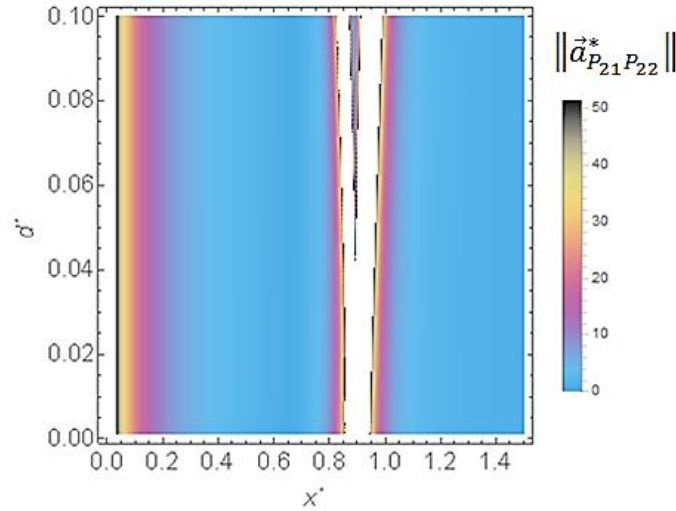


Fonte: Produção do Autor.

Nas Figuras 4.10 (a) e 4.10 (b), Figuras 4.11 (a) e 4.11 (b) e Figuras 4.12 (a) e 4.12 (b), as superfícies de intensidade do potencial composto do sistema sobre o dipolo, na configuração simétrica ($f = 0,5$) e para $\mu = 0,1$, são projetadas nos planos sideral, $t_0^* = 0$, e sinódico, respectivamente. Nas Figuras 4.10 (a), 4.11 (a) e 4.12 (a), o potencial composto gravitacional do dipolo é mais intenso à medida que se toma proximidade de qualquer um de seus polos, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras. A intensidade do potencial composto desse corpo, no referencial sideral, decai à medida que se toma distância do dipolo. Nas Figuras 4.10 (b), 4.11 (b) e 4.12 (b), o potencial efetivo do dipolo é mais intenso, pela parcela gravitacional composta dos polos, à medida que se aproxima de P_{21} ou de P_{22} , novamente, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras. Ainda, pelas Figuras 4.10 (a) e 4.10 (b), percebe-se que para d^* pequeno, da ordem da centésima parte da nova escala geométrica do sistema, os polos P_{21} e P_{22} do dipolo dispõem-se muito próximos um do outro, tal que, a processo de limite, para $d^* \rightarrow 0$, tenha-se a sobreposição dos polos num único ponto de massa coincidente com o centroide do primário II, retornando-se à configuração do PRTCC. Nas Figuras 4.11 (a) e 4.11 (b), e nas Figuras 4.12 (a) e 4.12 (b) tem-se $d^* = 0,1$ e $d^* = 0,2$, respectivamente, sendo possível, sobretudo neste último caso, distinguir com clareza a influência gravitacional de cada polo do dipolo na

região que o circunda em relação ao referencial sideral e ao referencial sinódico, respectivamente.

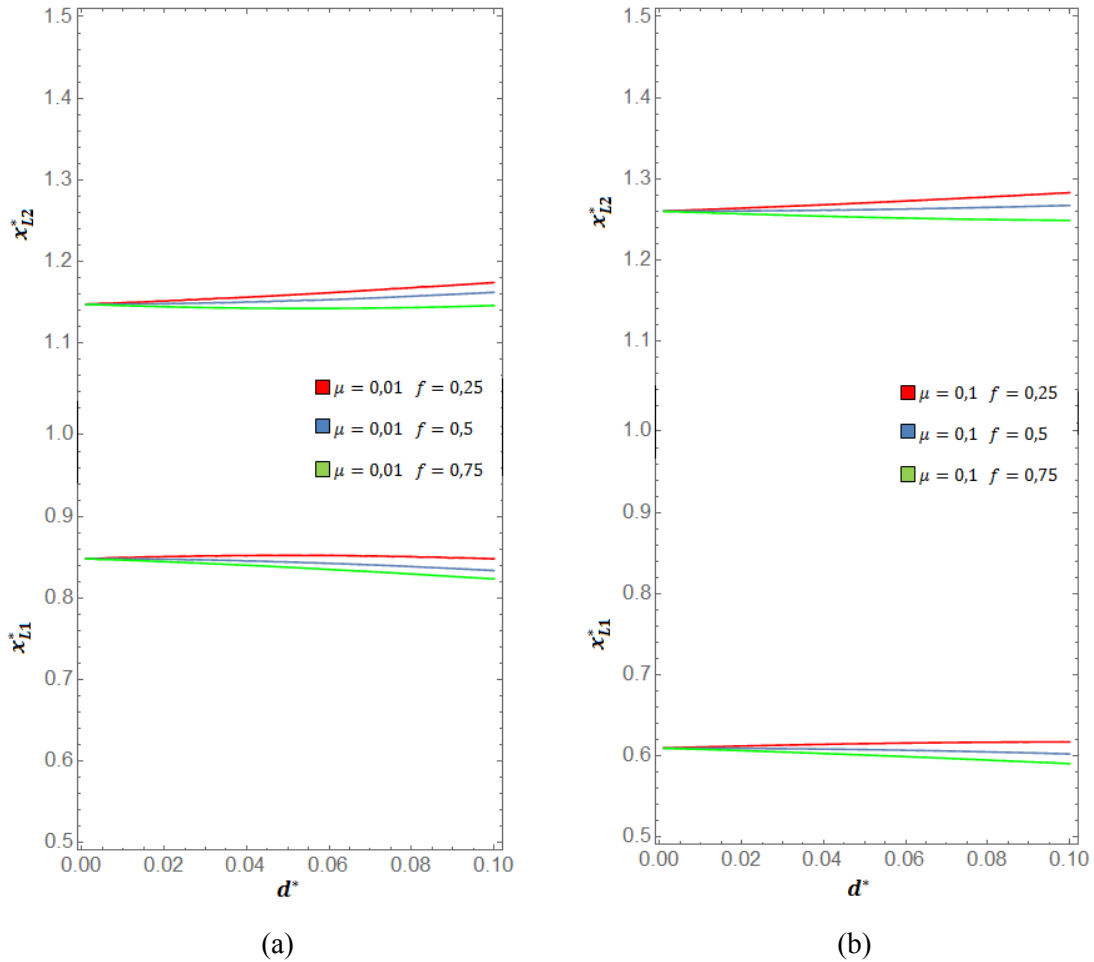
Figura 4.13: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, tomando-se $\Delta d^* > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $f = 0,5$).



Fonte: Produção do Autor.

Como apresentado na Figura 4.13, considerando-se o referencial sinódico, à medida que o parâmetro d^* é incrementado, a distância entre os polos do dipolo aumenta, partindo-se da configuração inicial de referência em que P_{21} e P_{22} encontram-se sobrepostos, retornando-se ao PRTCC ($d^* = 0$). A partir do exposto, o efeito de distância de P_{21} e de P_{22} tende a aumentar com $\Delta d^* > 0$, em relação ao centroide do dipolo, como indicado na figura acima. É importante notar, contudo, que para uma mesma configuração dos parâmetros de massa do sistema binário e do dipolo, μ e f , respectivamente, e mesmo considerando-se o caso de dipolo simétrico ($f = 0,5$), tem-se que o efeito de distância de P_{21} é menor que o de P_{22} , isto é, o alcance da influência gravitacional devido a P_{21} sofre maior atenuação em comparação com o mesmo efeito devido a P_{22} . A razão deste comportamento é o efeito de distância concorrente, no plano sinódico, do primário mais massivo, que, pelo critério de proximidade aos polos do dipolo, é, evidentemente, muito maior sobre P_{21} em comparação com P_{22} , como pode ser notado na Figura 4.13.

Figura 4.14: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta d^* > 0$ para $\mu = 0,01$ em (a) e para $\mu = 0,1$ em (b).



Fonte: Produção do Autor.

Como dito acima, d^* expressa, em unidades canônicas, a fração da nova escala geométrica do problema compreendida pelo dipolo. Desta forma, qualquer variação de comprimento do dipolo impactará na alteração das condições de equilíbrio da força resultante gravitacional com a pseudo força centrífuga, de modo mais acentuado, nas regiões do plano sinódico vizinhas ao próprio dipolo. O fato de o parâmetro de massa μ do sistema ser mantido fixo para a variação de d^* implica não só na não variação da massa do dipolo mas, também, no fato de o primário mais massivo do sistema apresentar sua massa constante. Em decorrência desta configuração paramétrica, o primário mais massivo blinda qualquer variação apreciável na localização do ponto de equilíbrio que lhe é adjacente, isto é, L_3 , conforme varia-se d^* . Além disso, embora as

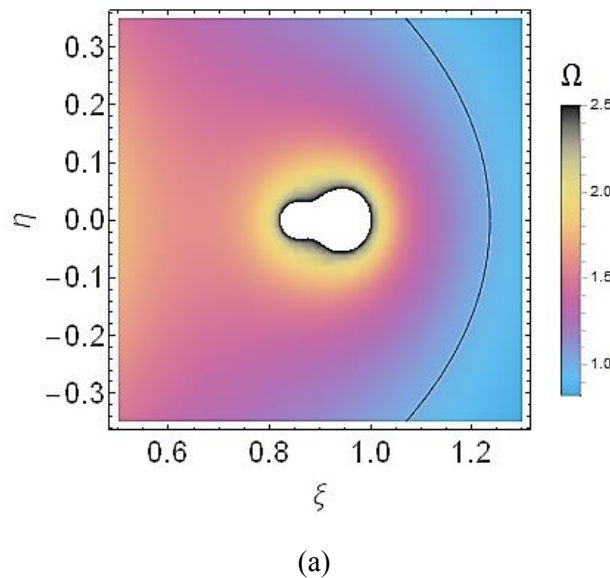
coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio triangulares, L_4 e L_5 , dependam explicitamente do parâmetro d^* , como pode ser visto nas Equações 3.218 e 3.219, mediante análise estabelecida na seção anterior, constata-se que o primário mais massivo influencia majoritariamente a localização desses pontos de equilíbrio no plano sinódico por seu efeito de massa dominante no sistema, em comparação com o mesmo efeito atribuído ao dipolo como um todo. Por esta razão, desconsidera-se, neste estudo, a variação das coordenadas sinódicas de L_4 e L_5 mediante variação de d^* . Assim, restringe-se a análise do efeito de variação deste parâmetro à variação das condições de equilíbrio associadas aos pontos colineares L_1 e L_2 , como apresenta-se nas Figuras 4.14 (a) e 4.14 (b). Quanto maior o parâmetro de massa μ do sistema, maior é a massa do dipolo e, conseqüentemente, menor é a distância de seu centroide ao baricentro do sistema binário. Além disso, para valores maiores de μ , mais significativo é o efeito de massa do dipolo sobre os pontos de equilíbrio colineares que lhe são vizinhos, isto é, L_1 e L_2 , que tendem a se localizarem à maiores distâncias do centroide do dipolo de modo a serem preservadas as condições de equilíbrio. Ainda, pelas Figuras 4.14 (a) e 4.14 (b), para um dado μ , percebe-se que o ponto de equilíbrio L_1 é mais sensível à variação de d^* quando o polo P_{21} é mais massivo e, desta forma, o efeito de massa deste polo tende a repelir L_1 para abscissas sinódicas menores, de modo a ser preservada a existência de um ponto de aceleração efetiva nula entre o primário mais massivo e o dipolo. Opostamente, o ponto de equilíbrio L_2 é mais sensível à variação de d^* quando o polo P_{22} é o mais massivo, o que leva ao efeito de massa do mesmo a repelir esse ponto de equilíbrio para abscissas sinódicas maiores, preservando-se, com isso, a existência de um ponto de aceleração efetiva nula de abscissa sinódica maior que a do centroide do dipolo.

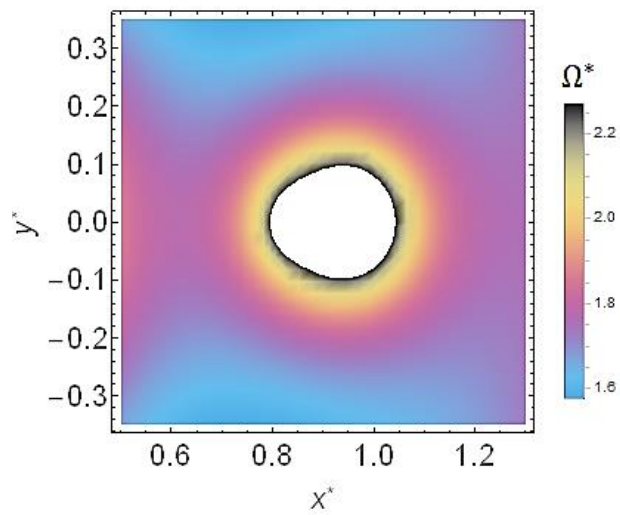
4.1.3 Comportamento das Coordenadas Sinódicas dos Pontos de Equilíbrio em Função da Variação do Parâmetro de Massa do Dipolo

Recorrendo-se, novamente, às Equações 3.220 a 3.226, pode-se observar que as coordenadas sinódicas de todos os pontos de equilíbrio do sistema físico, a exceção de L_3 , por aproximação, dependem do parâmetro de massa f do dipolo, com $0 < f < 1$, como apresentado anteriormente. Pela Equação 3.208 observa-se que este parâmetro

também contribui para o efeito de massa dos polos P_{21} e P_{22} do dipolo. Deve-se enfatizar que, em decorrência da adoção da nova escala geométrica do problema como sendo a distância entre os centroides dos primários e considerando-se as Equações 3.206 e 3.207, em que se desconsidera o efeito da margem estática nas abscissas sinódicas dos polos do dipolo, tem-se que f não altera o efeito de distância de P_{21} e P_{22} sobre os pontos de equilíbrio do sistema, dado que os polos são mantidos fixos em relação ao centroide do primário II, representado pelo dipolo. Desta forma, com a nova escala geométrica, obtém-se o desacoplamento do efeito de massa dos polos P_{21} e P_{22} em relação ao efeito de distância dos mesmos sobre os pontos de equilíbrio do sistema. Além disso, ainda pela Equação 3.208, observa-se que o parâmetro f não compõe o termo de potencial associado ao primário I.

Figura 4.15: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,25$ e $d^* = 0,1$.

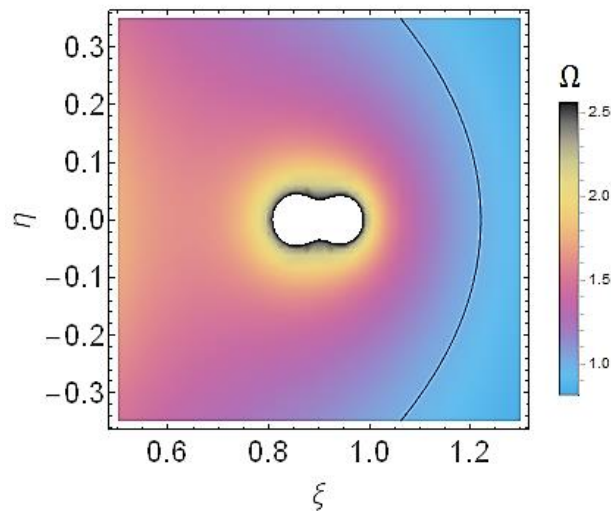




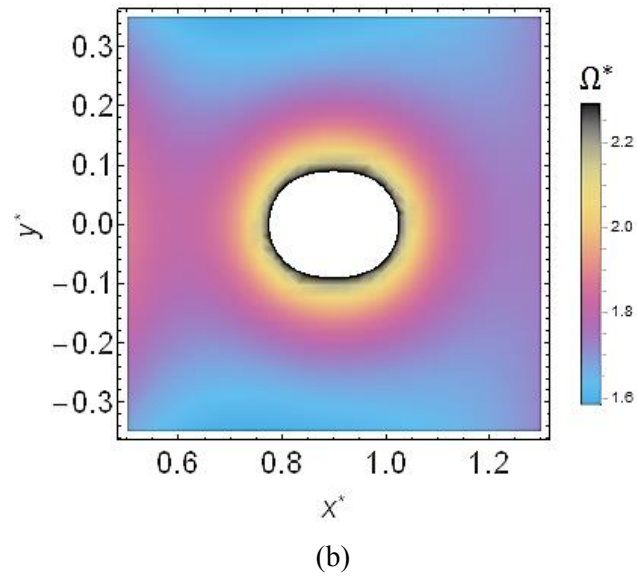
(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.16: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,5$ e $d^* = 0,1$.

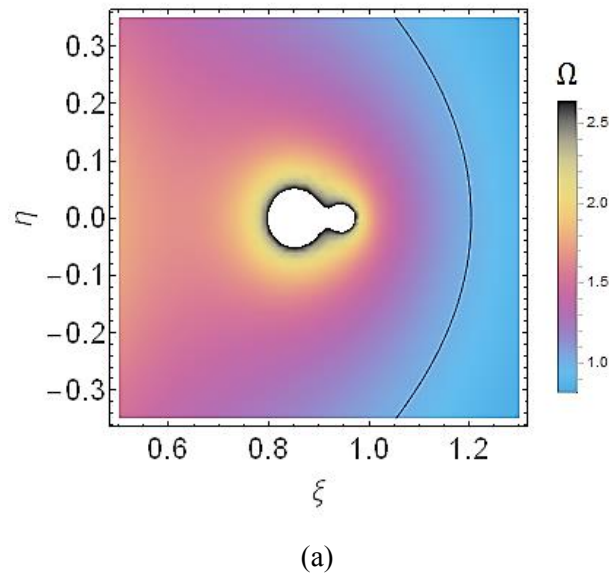


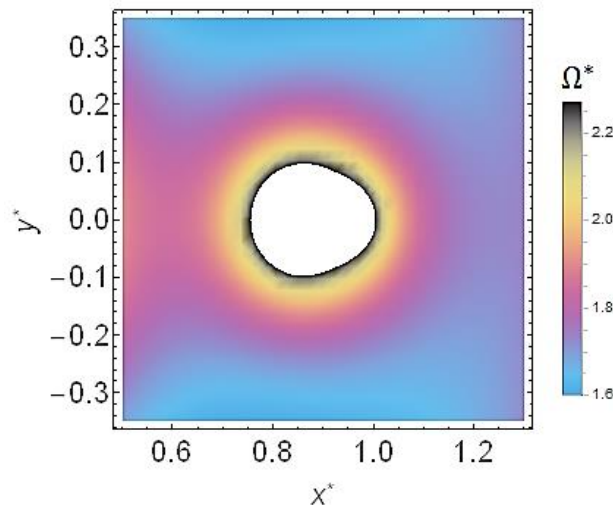
(a)



Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.17: Projeção no plano sideral (em $t_0^* = 0$), em (a), e no plano sinódico, em (b), da superfície de variação da intensidade do campo potencial composto do dipolo assumindo-se $\mu = 0,1$, $f = 0,75$ e $d^* = 0,1$.



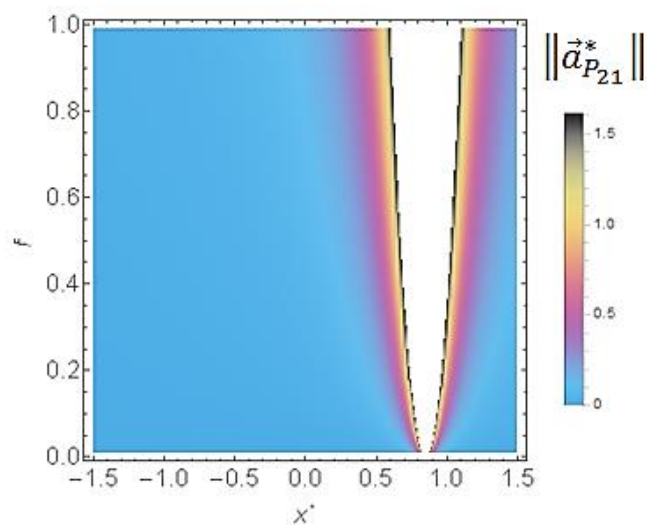


(b)

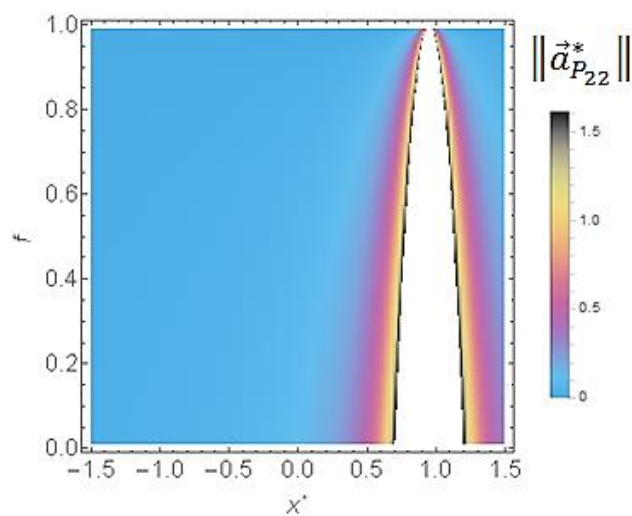
Fonte: Produção do Autor.

Nas Figuras 4.15 (a) e 4.15 (b), Figuras 4.16 (a) e 4.16 (b) e Figuras 4.17 (a) e 4.17 (b), as superfícies de intensidade do potencial composto do sistema sobre o dipolo, nas configurações simétrica ($f = 0,5$) e assimétricas escolhidas, ($f = 0,25$ e $f = 0,75$), são projetadas nos planos sideral para $t_0^* = 0$, e sinódico, respectivamente. Nas Figuras 4.15 (a), 4.16 (a) e 4.17 (a), como apresentado anteriormente, o potencial composto gravitacional do dipolo é mais intenso à medida que se toma proximidade de qualquer um de seus polos, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras. A intensidade do potencial composto, no referencial sideral, decai à medida que se toma distância do dipolo. Nas Figuras 4.15 (b), 4.16 (b) e 4.17 (b), o potencial efetivo do dipolo é mais intenso, pela parcela gravitacional composta dos polos, à medida em que se aproxima de P_{21} ou de P_{22} , novamente, localizados no interior das regiões brancas dessas figuras.

Figura 4.18: Variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} , em (a) e P_{22} , em (b), tomando-se $\Delta f > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).



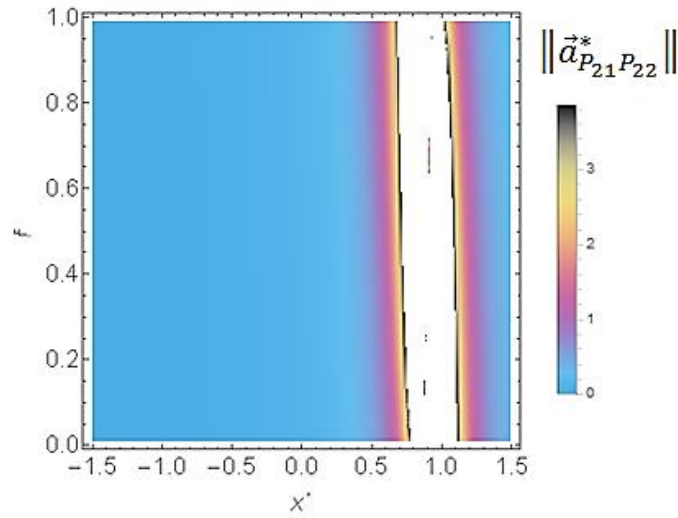
(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.19: Sobreposição da variação da intensidade e do alcance do campo de aceleração gravitacional ao longo das abscissas sinódicas adimensionais devido aos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, tomando-se $\Delta f > 0$ (adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).

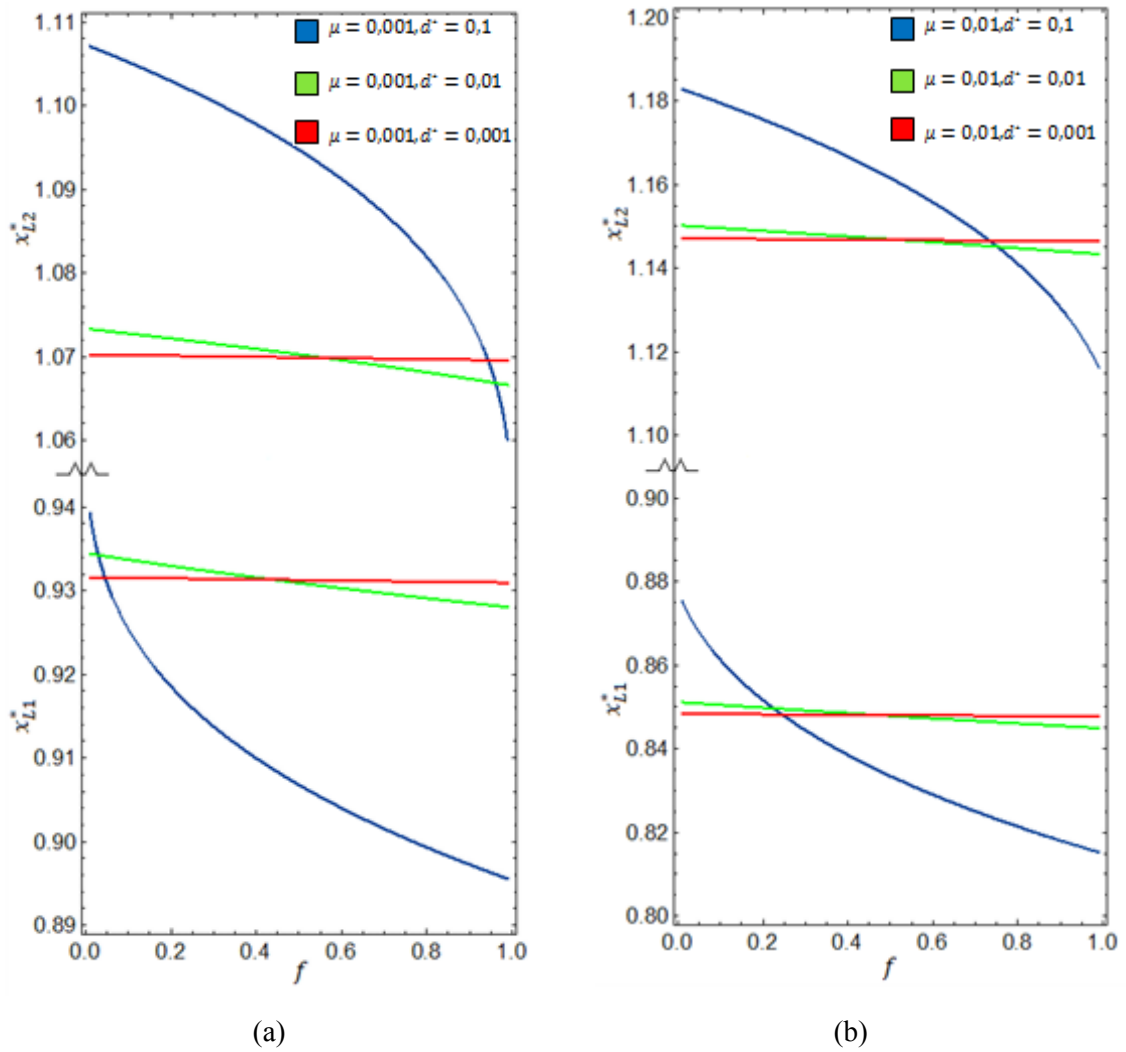


Fonte: Produção do Autor.

Como mostram as Figuras 4.18 (a) e 4.18 (b) e a Figura 4.19, considerando-se o referencial sinódico, à medida que o parâmetro f é incrementado, a massa do polo P_{21} aumenta, em detrimento da redução da massa do polo P_{22} , partindo-se da configuração inicial arbitrária de que o polo mais afastado do baricentro do sistema é o mais massivo. A partir do exposto, o efeito de massa de P_{21} sobre o plano sinódico aumenta com $\Delta f > 0$, como pode ser visto pelo alargamento da zona de seu alcance gravitacional, na Figura 4.18 (a), enquanto este mesmo efeito sobre P_{22} diminui, o que justifica o estreitamento de seu alcance gravitacional, como mostrado na Figura 4.18 (b). Estes efeitos são simultâneos sobre o dipolo, tal que a sobreposição dos mesmos e o alcance gravitacional do par de polos do dipolo, para $\Delta f > 0$, é mostrado na Figura 4.19. Recorda-se que as faixas brancas presentes nas Figuras 4.18 (a) e 4.18 (b) e na Figura 4.19 correspondem às regiões circundantes brancas aos pontos de massa P_{21} e P_{22} em que se verifica abrupto crescimento da intensidade do campo potencial nas vizinhanças dos polos do dipolo, à medida que a distância aos mesmos tende a zero e correspondem às regiões em branco apresentadas nas Figuras 4.15 (b), 4.16 (b) e 4.17 (b).

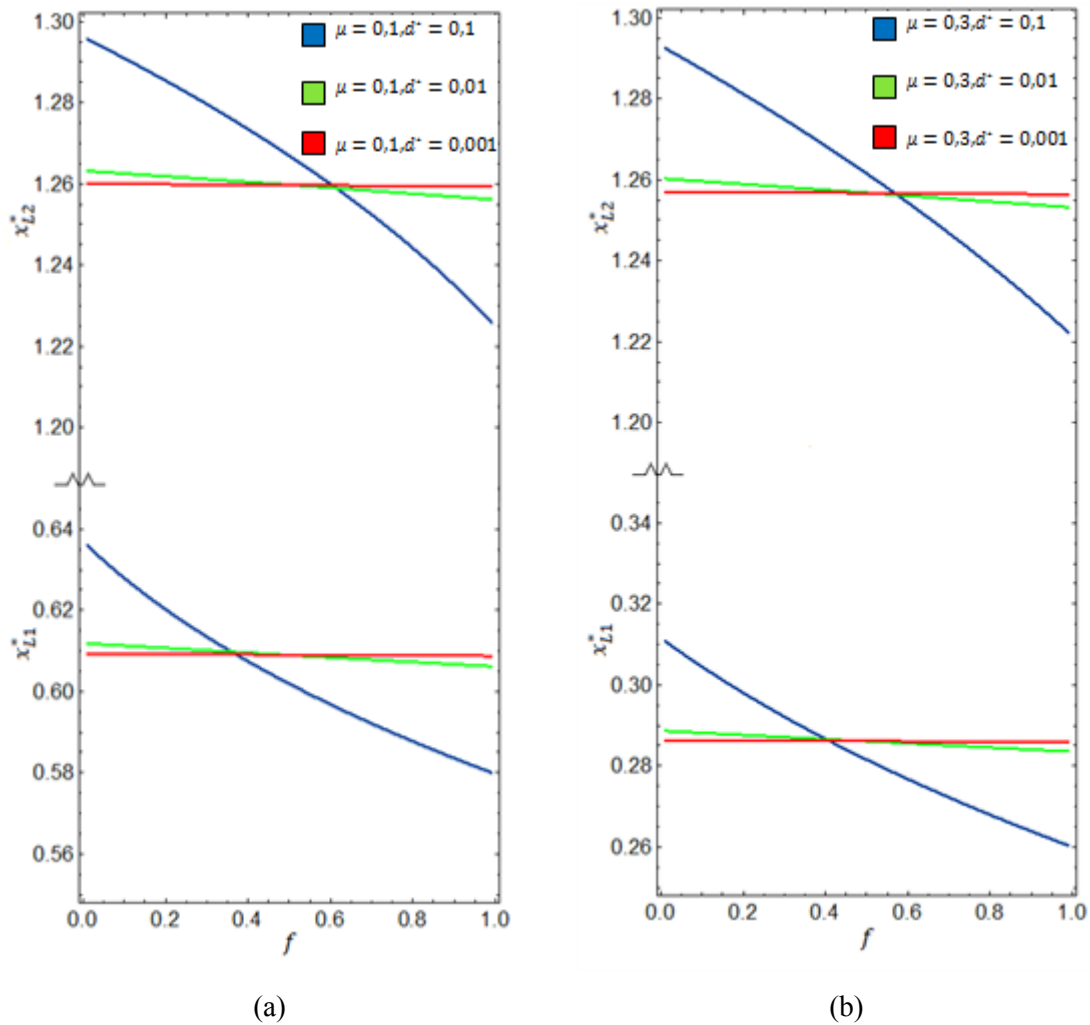
Mediante a variação do parâmetro f , pelo efeito de massa dos polos do dipolo e de modo a serem preservadas as condições de equilíbrio do sistema, os pontos de equilíbrio apresentam variação de suas coordenadas sinódicas. Em particular, para o ponto de equilíbrio colinear L_3 verifica-se que, por este ser o ponto de equilíbrio mais próximo do primário tomado como mais massivo, representado pelo ponto de massa P_1 , não há apreciável alteração de sua abscissa sinódica conforme varia-se f para dado valor de μ e d^* fixos. A razão para este comportamento é o fato de que para dado valor de μ , a massa do primário mais massivo é mantida constante e este primário, pela proximidade a L_3 , domina gravitacionalmente sobre este ponto de equilíbrio. Além disso, quanto menor for o parâmetro de massa μ do sistema binário, maior é a massa do primário P_1 e, conseqüentemente, mais próximo deste primário estará o ponto de equilíbrio L_3 , recordando-se o apresentado nas Figuras 4.7 (a) e 4.7 (b).

Figura 4.20: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta f > 0$ para $\mu = 0,001$ em (a) e para $\mu = 0,01$ em (b).



Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.21: Variação das abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante $\Delta f > 0$ para $\mu = 0,1$ em (a) e para $\mu = 0,3$ em (b).



Fonte: Produção do Autor.

Devido aos pontos de equilíbrio colineares L_1 e L_2 serem vizinhos ao dipolo, observa-se, conforme varia-se o parâmetro f , a variação de suas abscissas sinódicas, como pode ser verificado nas Figuras 4.20 (a) e 4.20 (b) e Figuras 4.21 (a) e 4.21 (b). Fisicamente, devido à maior proximidade destes pontos de equilíbrio aos polos do dipolo P_{21} e P_{22} , os mesmos apresentam maior sensibilidade de posição sobre o eixo das abscissas sinódicas, em comparação a L_3 , conforme f assume valores diferentes e ao se considerarem configurações de valores distintas para os parâmetros μ e d^* . Para cada configuração dos parâmetros μ e d^* , à medida que o valor do parâmetro f aumenta, ocorre alteração na distribuição de massa internamente ao dipolo, como dito

anteriormente. De modo a ser mantido um par de pontos de equilíbrio sobre o eixo das abscissas sinódicas e que estes pontos sejam vizinhos aos polos do dipolo, constata-se que o ponto L_1 tende a se afastar do centroide do dipolo ao passo que o ponto L_2 tende a se aproximar deste ponto. Em contrapartida, considerando-se a redução do valor parâmetro f , tem-se que o polo P_{22} apresenta incremento de massa ao passo que o polo P_{21} sofre decremento de massa e, conseqüentemente, L_1 tende a aproximar-se do centroide do dipolo enquanto L_2 tende a afastar-se deste ponto. Este comportamento se deve ao fato de, internamente ao dipolo, também haver disputa de influência gravitacional entre pontos de massa P_{21} e P_{22} pelo efeito de massa.

Mediante análise das Figuras 4.20 (a) e 4.20 (b) e Figuras 4.21 (a) e 4.21 (b) constata-se que, à medida que se assume valores menores para o parâmetro de massa μ do sistema binário, os intervalos de variação das abscissas sinódicas dos pontos L_1 e L_2 , mediante variação de f , tendem a serem mais próximos do dipolo, cuja abscissa do centroide é dada por $1 - \mu$. Fisicamente, quanto menor é o parâmetro de massa do sistema binário, menor é a massa do dipolo. Conseqüentemente, o efeito gravitacional de massa exercido pelo dipolo sobre os pontos de equilíbrio adjacentes é reduzido ao passo que tal efeito devido ao ponto de massa P_1 torna-se cada vez mais predominante. De modo a ser preservada a condição de equilíbrio para ocorrência de L_1 e L_2 , tais pontos tendem a migrar para as proximidades do dipolo. L_1 apresenta incremento de abscissa sinódica enquanto L_2 sofre decremento desta coordenada em relação à origem do referencial sinódico conforme diminui-se o valor de μ . Além disso, das Figuras 4.21 (a) e 4.21 (b), nota-se que L_1 é mais sensível que L_2 à variação do parâmetro de massa do sistema binário. Da Figura 4.21 (a) para a Figura 4.21 (b) a massa do dipolo é triplicada: enquanto o ponto L_2 apresenta sua variação devido à modificação de f em um mesmo intervalo de abscissas, nota-se que L_1 sofre modificação de seu intervalo de variação, ao se tornar, aproximadamente, duas vezes mais distante do centroide do dipolo na Figura 4.21 (b) do que no caso anterior mostrado na Figura 4.21 (a). Isto é explicado pelo fato de L_1 ter sua localização entreposta ao ponto de massa P_1 e ao dipolo e, desta forma, ser mais vulnerável aos efeitos simultâneos de incremento de massa de P_1 e decremento de massa do dipolo, se comparado a L_2 que encontra-se à distância maior do primário mais massivo do sistema. Também, quanto menor o parâmetro μ do sistema binário, pela

decorrente maior proximidade dos pontos L_1 e L_2 dos polos do dipolo, mais sensível é o posicionamento desses pontos sobre o eixo das abscissas sinódicas conforme varia-se f . A razão para este comportamento é que, à medida que o parâmetro μ torna-se menor, os polos do dipolo passam a dominar gravitacionalmente sobre a localização dos pontos L_1 e L_2 em termos do efeito de distância. Desta forma, para o sistema físico em estudo, quanto menor o valor do parâmetro μ , mais significativas serão as influências gravitacionais associadas ao efeito de massa e ao efeito de distância na localização dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 devidos ao ponto de massa P_1 e aos polos P_{21} e P_{22} do dipolo, respectivamente. Em contrapartida, quanto maior o valor de μ , tais efeitos sobre L_1 e L_2 tendem a se distribuírem similarmente aos três pontos de massa do sistema.

As abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 também se mostram mais sensíveis à variação do parâmetro f à medida que se assume valores maiores para o parâmetro d^* . Fisicamente, quanto maior é o valor de d^* , mais afastados estão os polos P_{21} e P_{22} do dipolo entre si. Consequentemente, a distribuição de massa do dipolo ao longo do eixo das abscissas sinódicas abrange uma extensão maior o que posiciona, para um mesmo valor do parâmetro μ , o polo P_{21} mais próximo ao ponto de massa P_1 , mais massivo, e o polo P_{22} à uma distância maior desse ponto de massa. Esta consequente disposição dos pontos de massa do sistema afeta a competição das forças gravitacionais atribuídas a cada um deles. Em linhas gerais, para dado parâmetro de massa μ do sistema binário, quanto maior a dimensão relativa do dipolo em comparação à dimensão do sistema, maior será a amplificação do efeito gravitacional dos polos P_{21} e P_{22} do dipolo em termos do efeito de distância na localização dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 face ao efeito gravitacional de massa associado ao ponto de massa P_1 . Desta forma, maior é a variação das abscissas sinódicas de L_1 e L_2 para um mesmo incremento de f e, como resultado, maior é o intervalo de posições admissíveis para os pontos de equilíbrio em tal configuração de parâmetros.

A partir do exposto nas Seções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, pode-se observar que, assim como o parâmetro μ define a distribuição de massa no sistema binário e a distância do centroide de cada primário ao baricentro desse sistema, os parâmetros f e d^* definem a distribuição de massa e a extensão do dipolo sobre a escala geométrica do sistema,

respectivamente, tomada entre os centroides dos primários. Não obstante, gravitacionalmente, o primário II, modelado como dipolo de massa em rotação, se constitui como um subsistema gravitacional no sistema gravitacional do sistema binário, apresentando, desta forma, parâmetros próprios, a saber, f e d^* . De modo geral, percebe-se, a partir do exposto acima, que a dependência de posicionamento dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 do sistema com os parâmetros μ , f e d^* ocorre, simultaneamente, em duas instâncias gravitacionais: em primeira instância, a do sistema binário, o parâmetro μ determina o quão próximo ou afastado devem estar L_1 e L_2 do ponto de massa P_1 e do dipolo de modo a preservar-se a condição de equilíbrio. Em segunda instância, a do dipolo, os parâmetros f e d^* refinam a disposição dos pontos de equilíbrio L_1 e L_2 mediante distribuição de massa interna ao dipolo e sua extensão, respectivamente.

4.2 Análise das Curvas de Velocidade Zero do Sistema

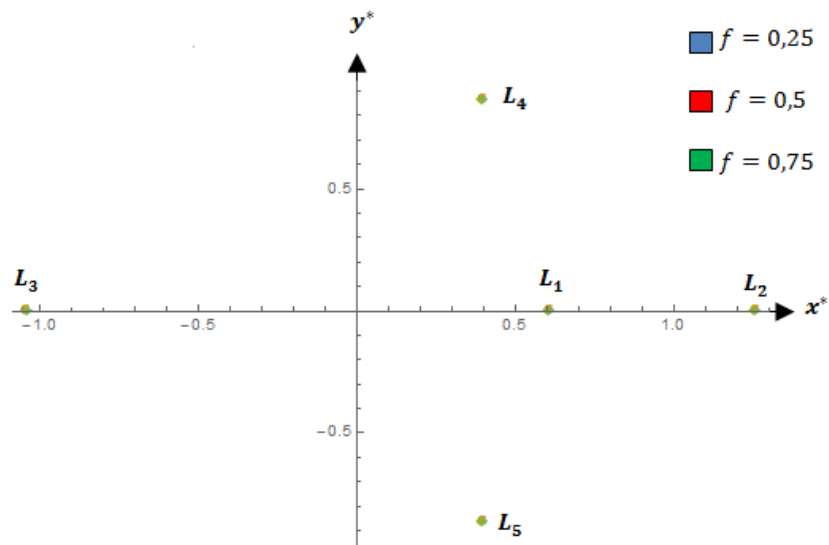
De modo a quantificar a variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio de um sistema binário considerando-se o modelo físico apresentado no Capítulo 3, adotou-se, como exemplos, duas configurações para um sistema celeste composto de dois asteroides: na primeira configuração, assume-se $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e, na segunda configuração tomou-se $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$. Para ambas as configurações escolhidas, foram considerados três valores para o parâmetro f de massa do dipolo de modo a representar casos assimétricos ($f = 0,25$ e $f = 0,75$) e simétrico ($f = 0,5$) para o dipolo. Variando-se f foram obtidas as coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio para cada configuração escolhida. Adotou-se a configuração em que os primários são dois pontos de massa com $\mu = 0,1$ como configuração de referência para a análise das coordenadas dos pontos de equilíbrio acima mencionada. Nota-se que, nesta configuração de referência, passa-se ao restabelecimento do PRTCC. Na sequência, apresentam-se as coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio para as configurações consideradas e para a configuração de referência, além da variação, em termos percentuais, das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio em relação à configuração de referência.

Tabela 4.1: Comparação das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f , adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e configuração de referência (PRTCC).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$	Referência (PRTCC)
x_{L_1}	0,6104095	0,6089613	0,6075462	0,6090351
x_{L_2}	1,2615434	1,2597743	1,2579719	1,2596998
x_{L_3}	-1,0415076	-1,0416091	-1,0416305	-1,0416098
$y_{L_{1-2-3}}$	0	0	0	0
$x_{L_{4-5}}$	0,4003350	0,4000108	0,3996869	0,4000000
y_{L_4}	0,8657264	0,8660208	0,8663144	0,8660254
y_{L_5}	-0,8657264	-0,8660208	-0,8663144	-0,8660254

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.22: Representação da localização dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$).



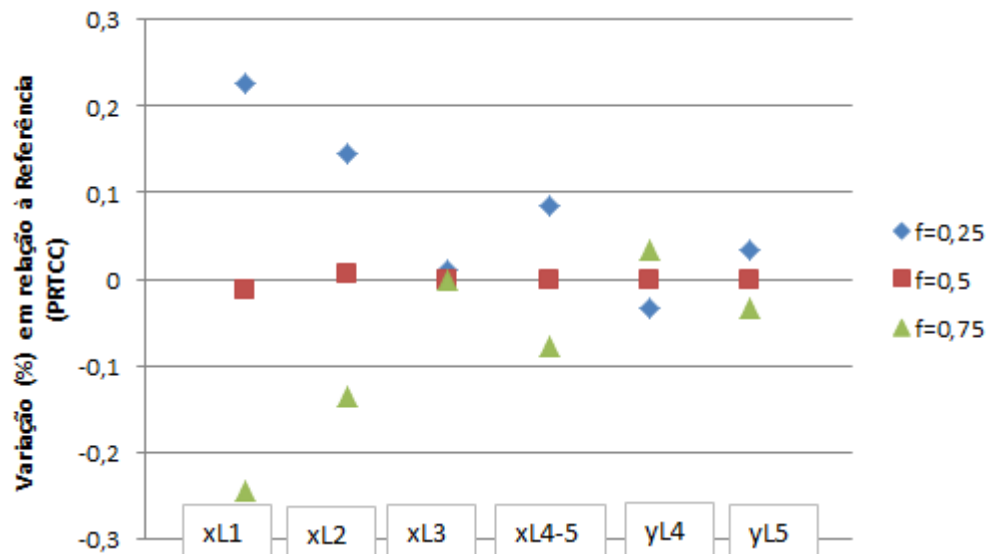
Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.2: Variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC) sobre a nova escala geométrica do sistema, assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$
$\Delta x_{L_1}(\%)$	0,226	-0,012	-0,244
$\Delta x_{L_2}(\%)$	0,146	0,006	-0,137
$\Delta x_{L_3}(\%)$	0,010	0	-0,002
$\Delta x_{L_{4-5}}(\%)$	0,084	0,003	-0,078
$\Delta y_{L_4}(\%)$	-0,034	0	0,033
$\Delta y_{L_5}(\%)$	0,034	0	-0,033

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.23: Representação da variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC), assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.



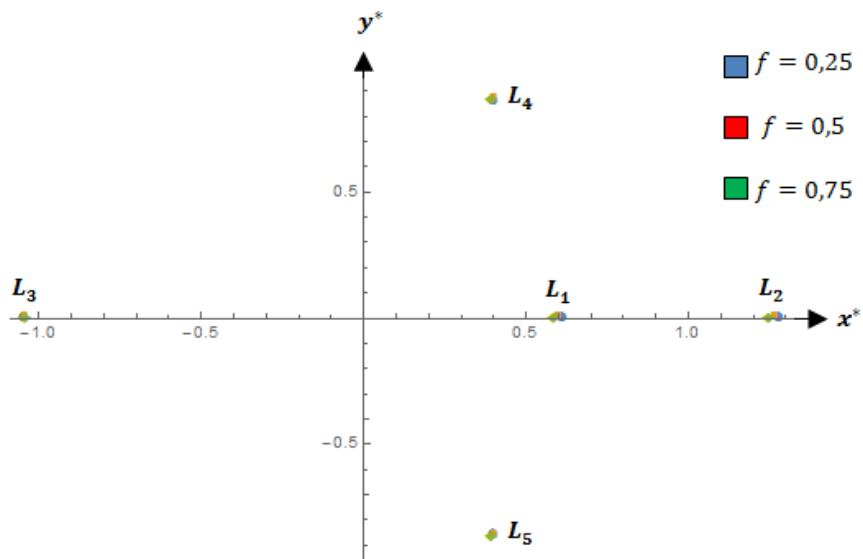
Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.3: Comparação das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f , adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ e configuração de referência (PRTCC).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$	Referência (PRTCC)
x_{L_1}	0,6167710	0,6018982	0,5898750	0,6090351
x_{L_2}	1,2825658	1,2669562	1,2483811	1,2596998
x_{L_3}	-1,0414106	-1,0416255	-1,0418403	-1,0416098
$y_{L_{1-2-3}}$	0	0	0	0
$x_{L_{4-5}}$	0,4043092	0,4010811	0,3978973	0,4000000
y_{L_4}	0,8625978	0,8655608	0,8684549	0,8660254
y_{L_5}	-0,8625978	-0,8655608	-0,8684549	-0,8660254

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.24: Representação da localização dos pontos de equilíbrio do sistema binário assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).



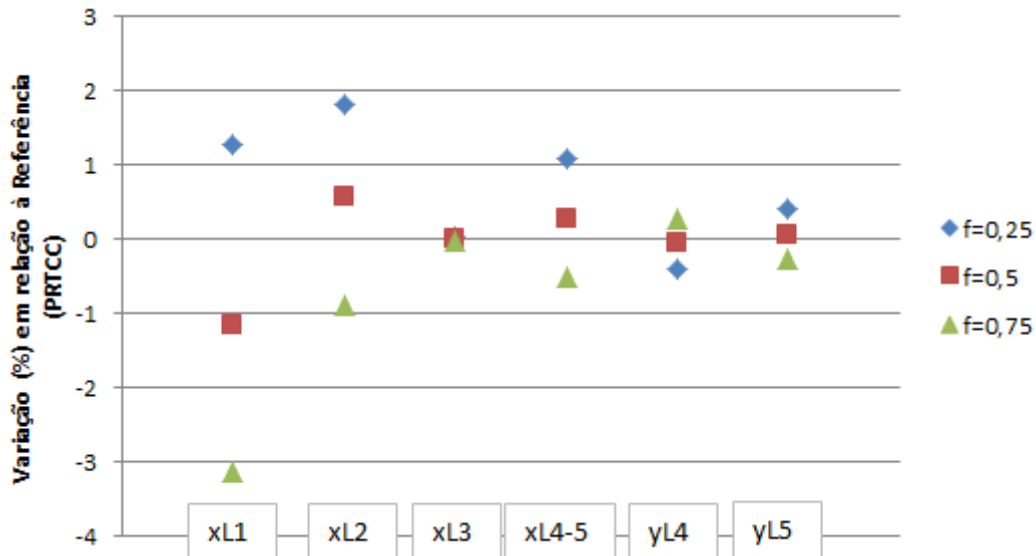
Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.4: Variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC) sobre a nova escala geométrica do sistema, assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$
$\Delta x_{L_1}(\%)$	1,270	-1,172	-3,146
$\Delta x_{L_2}(\%)$	1,815	0,576	-0,898
$\Delta x_{L_3}(\%)$	0,019	0,001	-0,022
$\Delta x_{L_{4-5}}(\%)$	1,077	0,270	-0,526
$\Delta y_{L_4}(\%)$	-0,396	-0,054	0,280
$\Delta y_{L_5}(\%)$	0,396	0,054	-0,280

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.25: Representação da variação percentual das coordenadas sinódicas adimensionais dos pontos de equilíbrio do sistema binário em relação à referência (PRTCC), assumindo-se dipolo à diferentes valores de f . (Adotados $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.



Fonte: Produção do Autor.

Mediante as Tabelas 4.1 e 4.2, para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$, e as Tabelas 4.3 e 4.4, para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$, pode-se observar que, mantido constante o parâmetro de massa do sistema binário e considerando-se os mesmos casos de distribuição de massa interna ao dipolo, quanto maior o valor do parâmetro d^* , maior é a variação observada, em unidades canônicas (Tabelas 4.1 e 4.3) e em termos percentuais (Tabelas 4.2 e 4.4) das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio do sistema em relação à configuração de referência. Das Figuras 4.22 e 4.23 verifica-se que para valores pequenos de d^* ($d^* = 0,01$) não se verifica considerável variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio entre os diferentes valores adotados para o parâmetro f de massa do dipolo. Tal variação torna-se mais perceptível para valores maiores de d^* ($d^* = 0,1$). Além disso, das Figuras 4.24 e 4.25, quanto menor for o valor de d^* , mais simétrica é a variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio, em unidades canônicas e em termos percentuais, em relação às coordenadas assumidas por tais pontos na configuração de referência, assumindo-se os casos de dipolo assimétrico. Estes resultados já eram esperados dado que, como foi verificado na seção precedente, à medida que o parâmetro d^* é reduzido, os polos do dipolo tendem a serem cada vez

mais próximos um do outro tal que, a processo de limite, verifica-se a degeneração do dipolo em um único ponto de massa coincidente com seu centroide, retornando-se ao PRTCC (referência).

Devido aos efeitos de massa e de distância dos pontos de massa P_1 , P_{21} e P_{22} , explicados anteriormente, para dado μ e d^* fixos, verifica-se que os cinco pontos de equilíbrio do sistema binário exibem sensibilidades diferentes quanto à variação de suas coordenadas sinódicas à medida em que se varia o parâmetro de massa f do dipolo. Com base nas Tabelas 4.1 a 4.4, e no que foi discutido na Seção 4.1, pode-se observar que, em comparação com a configuração de referência, os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 são os que apresentam maior variação de suas coordenadas sinódicas conforme varia-se f , o que se expressa em unidades canônicas por meio das Tabelas 4.1 e 4.3 e em termos percentuais pelas Tabelas 4.2 e 4.4 para as configurações de μ e d^* adotadas. Como já mencionado, esta variação mais acentuada para tais pontos de equilíbrio justifica-se pela sua sensibilidade ao parâmetro f mais significativa devido sua proximidade aos pontos de massa P_{21} e P_{22} que apresentam suas massas modificadas pela variação de f . Das Tabelas 4.1 a 4.4 é possível perceber também que a abscissa sinódica de L_1 apresenta, em ambas as configurações, maior diferença em relação ao valor correspondente no PRTCC quando $f = 0,75$, uma vez que, neste caso, o polo mais massivo do dipolo é P_{21} , o que tende, por efeito de massa, a deslocar de modo mais significativo o ponto de equilíbrio L_1 . Em contrapartida, nas configurações apresentadas, a abscissa sinódica de L_2 apresenta maior diferença em relação ao valor correspondente no PRTCC quando $f = 0,25$. Isto ocorre porque, neste caso, o polo mais massivo do dipolo é P_{22} e, novamente, considerando-se o efeito de massa, tal polo, ao ser mais massivo, tende a deslocar de forma mais significativa o ponto de equilíbrio L_2 . Observa-se também que as coordenadas de L_1 e L_2 , no caso simétrico, são mais próximas das abscissas destes pontos na configuração de referência. A razão deste comportamento se deve ao fato de que, no caso de dipolo simétrico, como sabido, os polos P_{21} e P_{22} apresentam a mesma fração em massa do quantitativo de massa do sistema pertencente ao primário II, modelado como dipolo. Conseqüentemente, a ausência de assimetria na distribuição de massa entre os polos permite a sobreposição do centro de massa do dipolo sobre seu centroide. Desta forma, a influência gravitacional de um dipolo simétrico sobre a

localização dos pontos L_1 e L_2 assemelha-se à influência gravitacional de um único ponto de massa que concentra toda a massa do dipolo, como no PRTCC.

Em ambas as configurações para os parâmetros μ e d^* consideradas, independentemente da distribuição de massa interna ao dipolo, observa-se que a abscissa sinódica do ponto de equilíbrio L_3 não exhibe significativa variação e, além disso, as abscissas deste ponto de equilíbrio praticamente não diferem em relação à configuração de referência, como pode ser verificado nas Tabelas 4.1 e 4.2 e nas Figuras 4.22 e 4.23 para $d^* = 0,01$ e nas Tabelas 4.3 e 4.4 e nas Figuras 4.24 e 4.25, para $d^* = 0,1$. A causa deste comportamento é o fato deste ponto ser próximo ao primário mais massivo do sistema, cuja massa não é modificada em cada configuração de μ e d^* mediante variação de f . Desta forma, pode-se afirmar que o ponto de equilíbrio L_3 do sistema sofre considerável inercialidade de posição em relação à configuração de referência. Além disso, verifica-se variação nas abscissas e nas ordenadas sinódicas, nestas últimas de forma mais sutil, dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 considerando-se variação do fator de massa f do dipolo para cada configuração de μ e d^* adotada. Recorda-se que as abscissas sinódicas dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 são menores que as abscissas sinódicas do ponto de equilíbrio L_1 , qualquer que seja a configuração de parâmetros considerada, assim como é verificado na configuração de referência (PRTCC). Conseqüentemente, os pontos triangulares exibem menor distância ao primário mais massivo que o ponto colinear L_1 . Desta forma, este primário domina em efeito de massa e distância sobre L_4 e L_5 , sendo que o efeito de f sobre o dipolo na localização desses pontos mostra-se menor, como apresentado nas Tabelas 4.1 e 4.2 e nas Figuras 4.22 e 4.23 para $d^* = 0,01$ e nas Tabelas 4.3 e 4.4 e nas Figuras 4.24 e 4.25, para $d^* = 0,1$, em comparação ao que é observado em L_1 . Ainda, conforme Tabelas 4.1 e 4.2 e Tabelas 4.3 e 4.4, é possível perceber que as abscissas de L_4 e L_5 , no caso de dipolo simétrico, são mais próximas das abscissas destes pontos na configuração de referência, o que se justifica pelas mesmas razões apresentadas acima para L_1 e L_2 . Nota-se ainda que, para valores maiores de d^* , a variação de abscissas sinódicas dos pontos triangulares é mais significativa quando $f = 0,25$ e, desta forma, quando o polo P_{22} é o mais massivo, o que leva à constatação de que o efeito de distância entre as soluções de equilíbrio triangulares e os pontos de massa do dipolo é significativo. Uma vez que a distribuição

de massa do dipolo é feita sobre o eixo das abscissas sinódicas, não há variação de massa ao longo das ordenadas sinódicas, o que explica a pequena variação das ordenadas de L_4 e L_5 conforme varia-se f , em comparação com a variação das abscissas sinódicas desses pontos.

Considerando-se as configurações $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ e fator de massa f para os casos de dipolo assimétrico ($f = 0,25$ e $f = 0,75$) e simétrico ($f = 0,5$), para cada ponto de equilíbrio do sistema, determinou-se o valor da constante adimensional de Jacobi, a partir da Equação 3.227, como apresentado nas Tabelas 4.5 e 4.7, em unidades canônicas, a seguir. Apresentam-se também os valores da constante adimensional de Jacobi associada a cada ponto de equilíbrio para a configuração de referência (PRTCC). Nas Tabelas 4.6 e 4.8 apresentam-se as variações, em termos percentuais, da constante adimensional de Jacobi associada a cada ponto de equilíbrio em relação à configuração de referência.

Tabela 4.5: Valores da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e no caso de referência (PRTCC).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$	Referência (PRTCC)
$C^*_{L_1}$	3,59122	3,59716	3,60303	3,59695
$C^*_{L_2}$	3,47064	3,46679	3,46291	3,46668
$C^*_{L_3}$	3,09945	3,09958	3,09971	3,09958
$C^*_{L_{4-5}}$	2,90975	2,90999	2,91025	2,91000

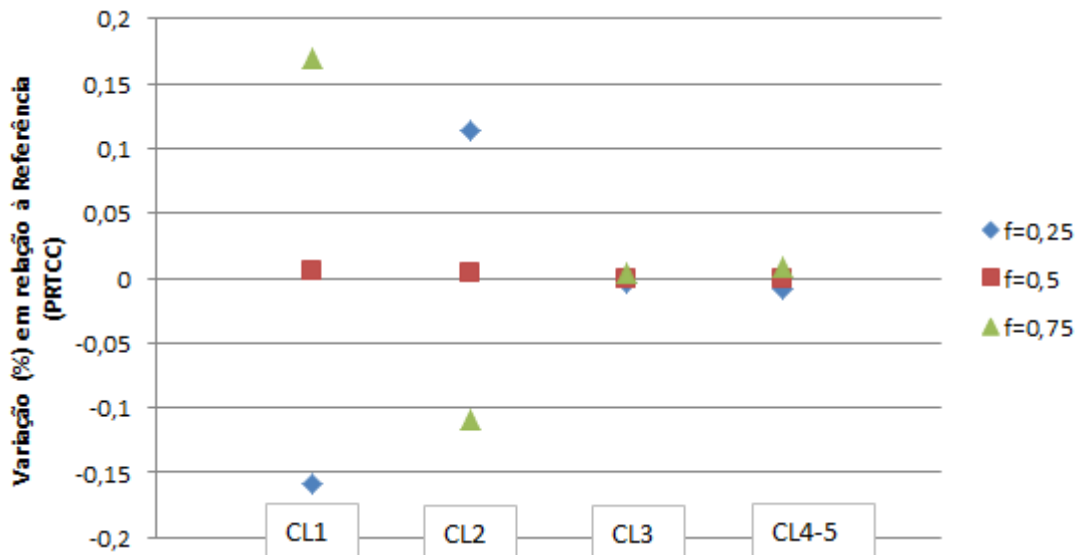
Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.6: Variação percentual da constante adimensional de Jacobi em relação à referência (PRTCC) associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$.

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$
$\Delta C^*_{L_1}(\%)$	-0,15930	0,00584	0,16903
$\Delta C^*_{L_2}(\%)$	0,11423	0,00317	-0,10875
$\Delta C^*_{L_3}(\%)$	-0,00419	0	0,00419
$\Delta C^*_{L_{4-5}}(\%)$	-0,00859	-0,00034	0,00859

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.26: Representação da variação percentual da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ em relação à referência (PRTCC). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.



Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.7: Valores da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ e no caso de referência (PRTCC).

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$	Referência (PRTCC)
$C^*_{L_1}$	3,55619	3,61709	3,67261	3,59695
$C^*_{L_2}$	3,51353	3,47731	3,43748	3,46668
$C^*_{L_3}$	3,09832	3,09965	3,10097	3,09958
$C^*_{L_{4-5}}$	2,90743	2,90994	2,91243	2,91000

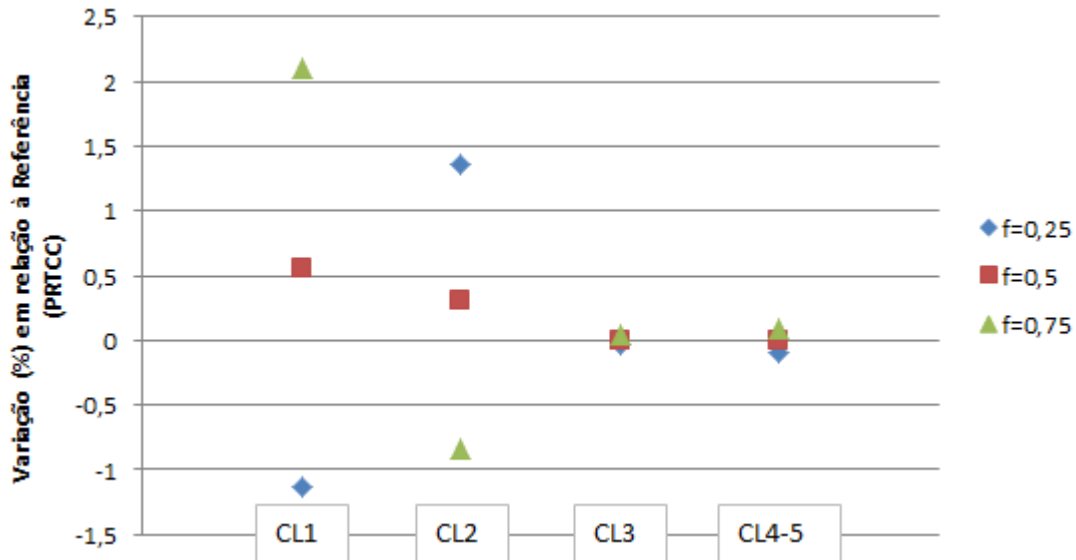
Fonte: Produção do Autor.

Tabela 4.8: Variação percentual da constante adimensional de Jacobi em relação à referência (PRTCC) associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$.

	$f = 0,25$	$f = 0,5$	$f = 0,75$
$\Delta C^*_{L_1}(\%)$	-1,13318	0,55992	2,10345
$\Delta C^*_{L_2}(\%)$	1,35144	0,30663	-0,84230
$\Delta C^*_{L_3}(\%)$	-0,04065	0,00226	0,04484
$\Delta C^*_{L_{4-5}}(\%)$	-0,08832	-0,00206	0,08350

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.27: Representação da variação percentual da constante adimensional de Jacobi associada aos pontos de equilíbrio do sistema em função de f , para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ em relação à referência (PRTCC). A configuração de referência corresponde à linha de valor zero.



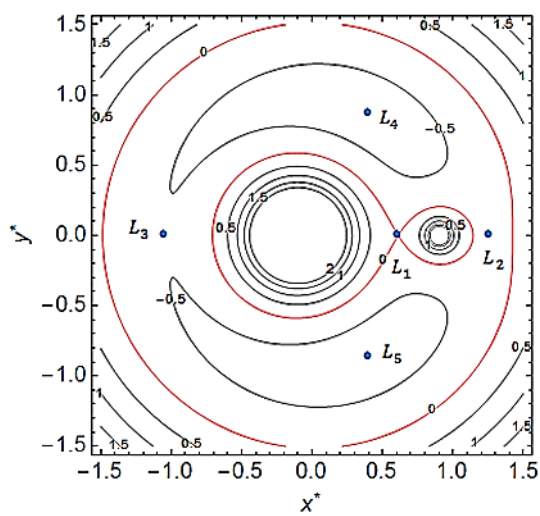
Fonte: Produção do Autor.

A partir das Tabelas 4.5 a 4.8, pode-se constatar que, em decorrência de na configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$, como discutido anteriormente, os pontos de equilíbrio do sistema apresentarem menor variação de suas coordenadas sinódicas em relação à configuração de referência, em comparação com que ocorre com a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$ dada a variação de f , na primeira configuração observa-se menor diferença dos valores da constante adimensional de Jacobi associada a cada ponto de equilíbrio do sistema em relação ao valor dessa constante assumida nos pontos de equilíbrio correspondentes no PRTCC. Além disso, em ambas as configurações consideradas para os parâmetros μ e d^* , à medida que varia-se o fator de massa f do dipolo, as constantes adimensionais de Jacobi associadas a L_1 e a L_2 , isto é, $C^*_{L_1}$ e $C^*_{L_2}$, são as que apresentam variação mais significativa. Este comportamento se deve ao fato de, como discutido anteriormente, os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 apresentarem maior variação de abscissas sinódicas conforme o fator f assume valores diferentes, o que leva à alteração da localização dos pontos de equilíbrio. Desta forma, em virtude de L_1 e L_2 serem os pontos de equilíbrio cujas localizações sobre as abscissas sinódicas são as mais sensíveis à variação de f

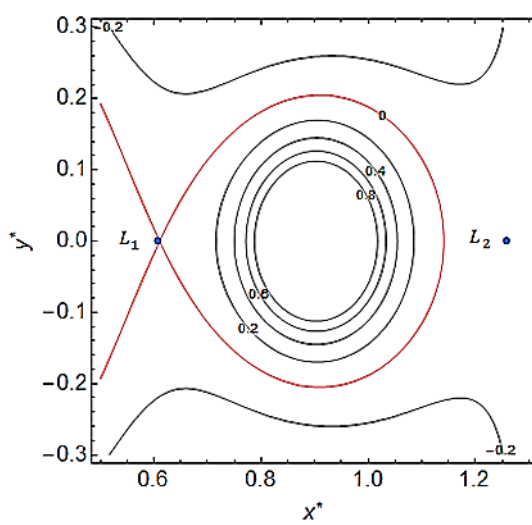
entre todos os pontos de equilíbrio do sistema, tem-se que a constante adimensional de Jacobi a eles associada apresenta maior variação em relação aos valores dessa mesma constante, nestes pontos, para a configuração de referência, como apresentado nas Tabelas 4.5 e 4.6 e Figura 4.26, para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e nas Tabelas 4.7 e 4.8 e Figura 4.27, para $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$. Ainda, como pode ser verificado nas Figuras 4.26 e 4.27, e em decorrência do que foi apresentado anteriormente para a variação das coordenadas dos pontos de equilíbrio do sistema, a variação dos valores da constante adimensional de Jacobi são mais simétricas em relação à configuração de referência quanto menor for a extensão do dipolo sobre as abscissas sinódicas. Nota-se também que, em decorrência da menor sensibilidade ao fator f por parte dos pontos L_3 , L_4 e L_5 , as constantes adimensionais de Jacobi a eles associadas, $C^*_{L_3}$ e $C^*_{L_4-5}$, respectivamente, apresentam menor variação em comparação com $C^*_{L_1}$ e $C^*_{L_2}$ à medida que a distribuição de massa do dipolo é modificada.

A partir da constante adimensional de Jacobi associada a cada ponto de equilíbrio, foram traçadas as curvas de velocidade zero para o sistema binário considerando-se as configurações apresentadas e levando-se em conta a variação do fator de massa f do dipolo.

Figura 4.28: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_1}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



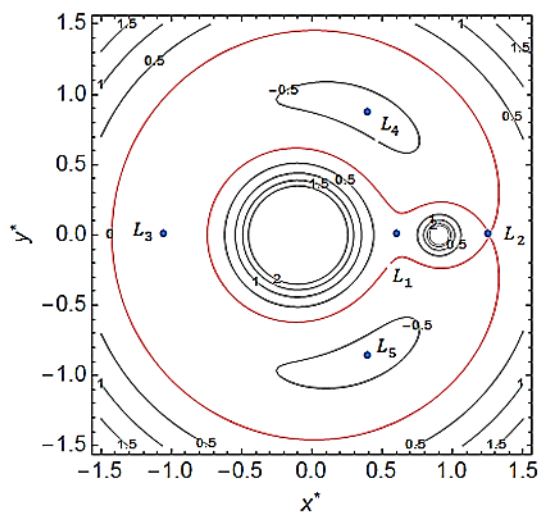
(a)



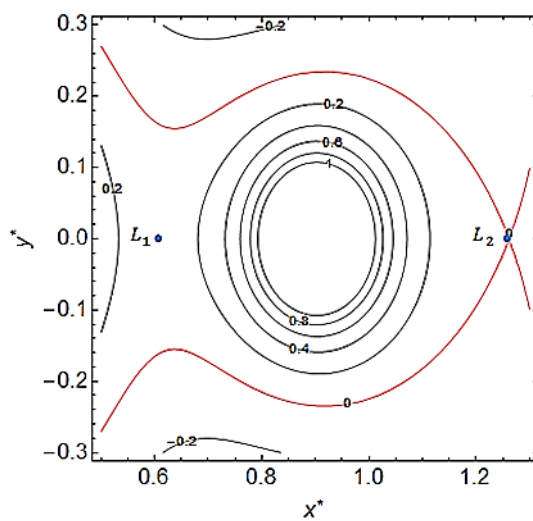
(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.29: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_2}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



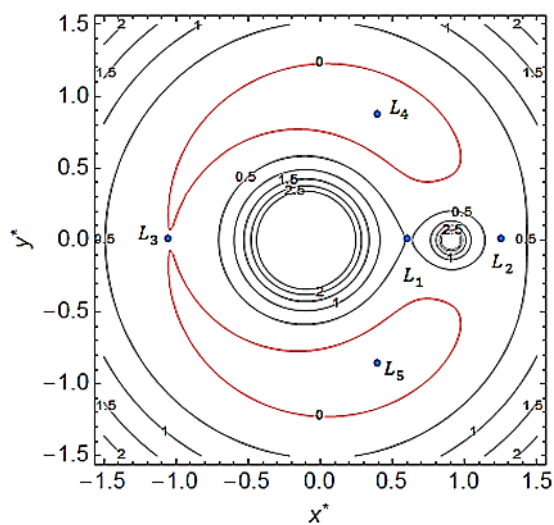
(a)



(b)

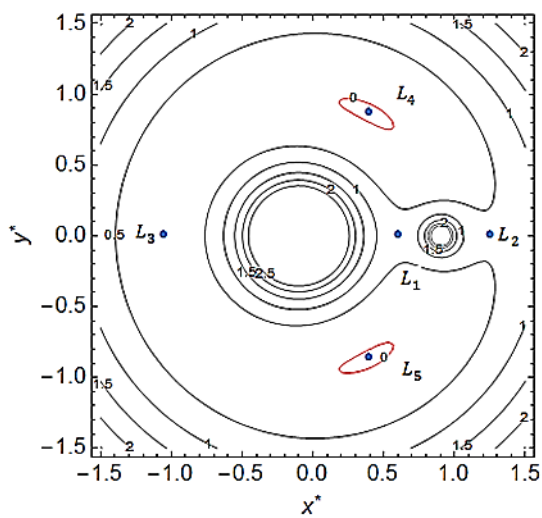
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.30: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_3}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$.



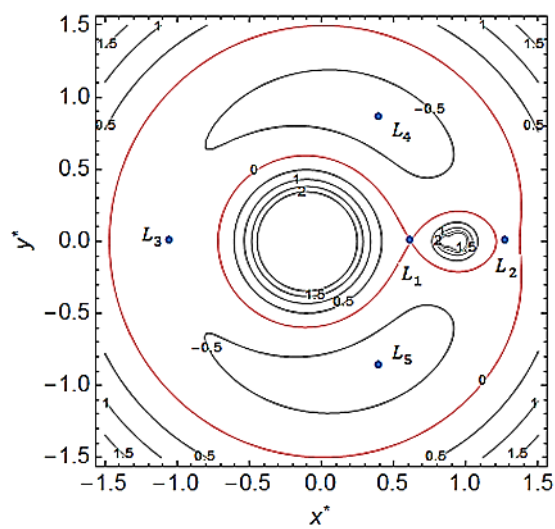
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.31: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_{4-5}}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,01$ e $f = 0,25$.

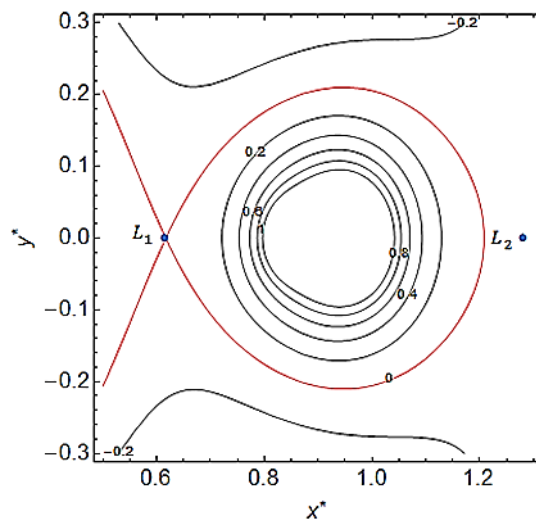


Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.32: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_1}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



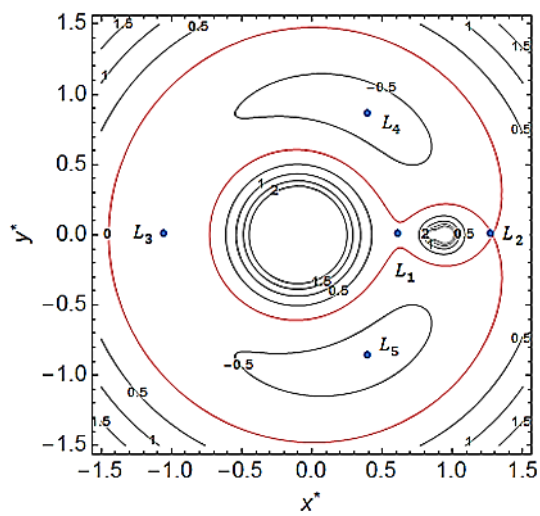
(a)



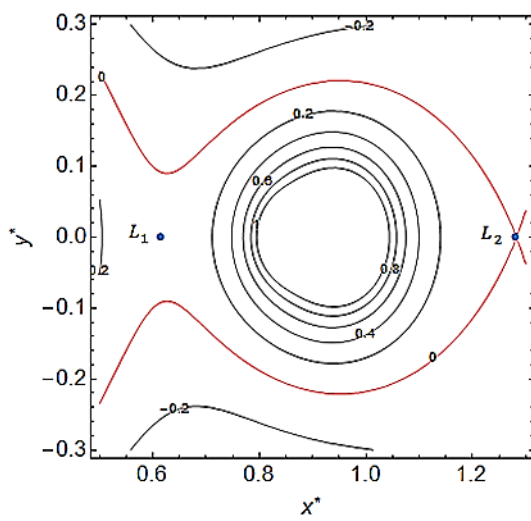
(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.33: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_2}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



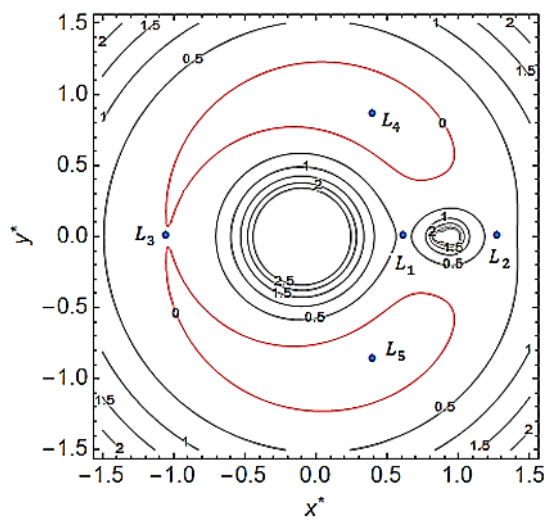
(a)



(b)

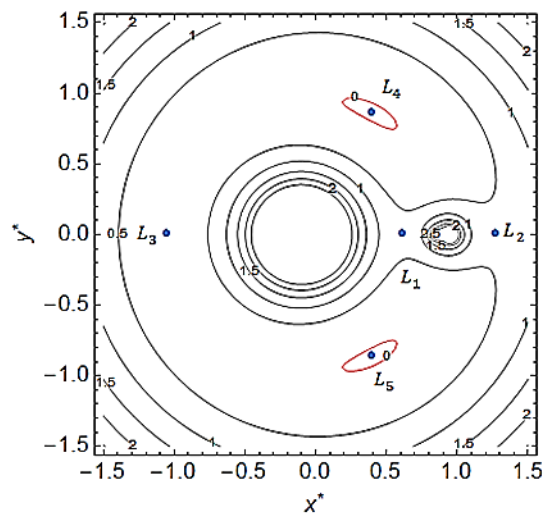
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.34: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_3}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$.



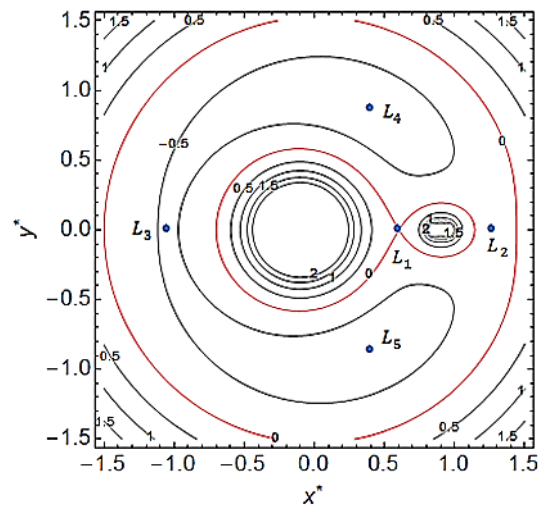
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.35: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_4-5}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,25$.

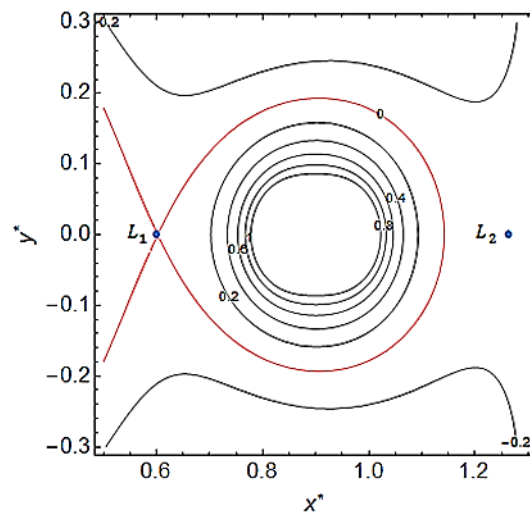


Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.36: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_1}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



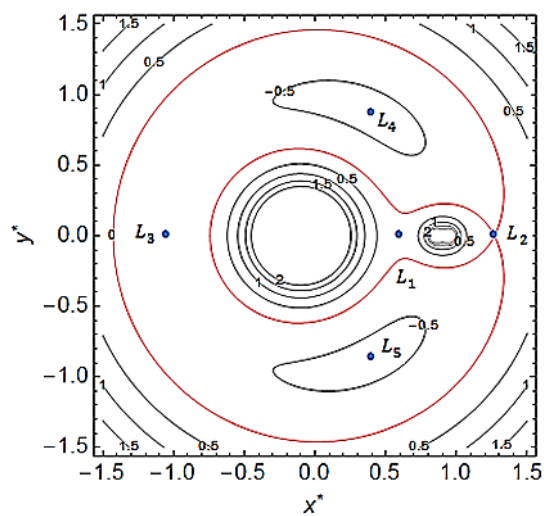
(a)



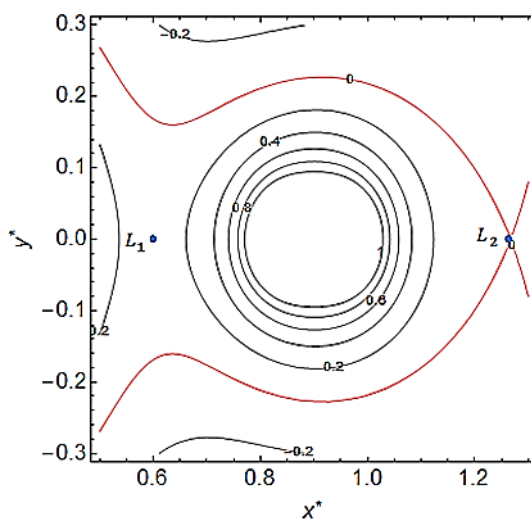
(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.37: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_2}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



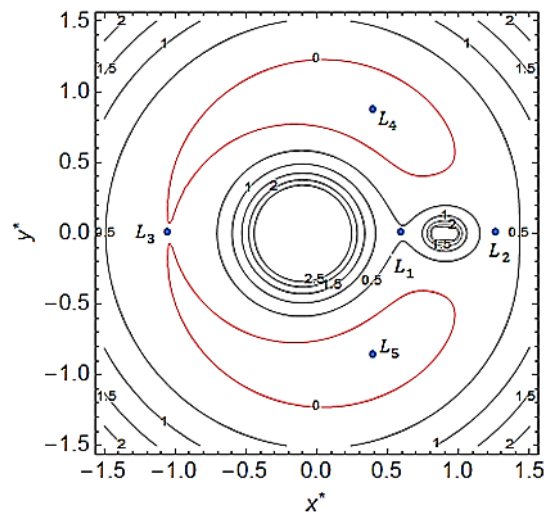
(a)



(b)

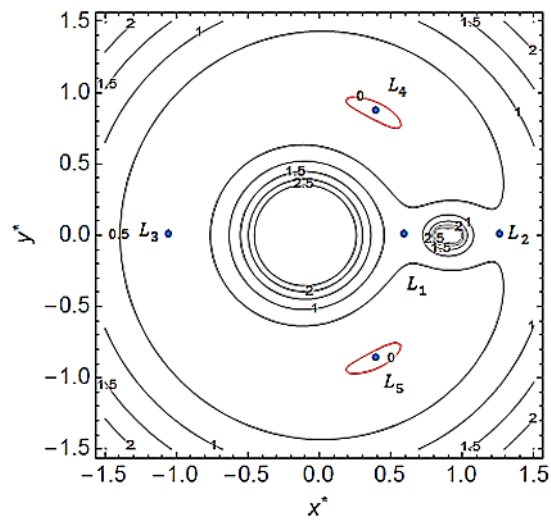
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.38: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_3}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$.



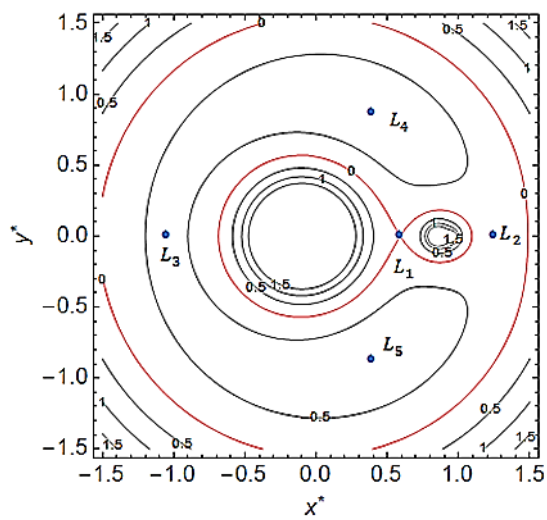
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.39: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_4-5}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,5$.

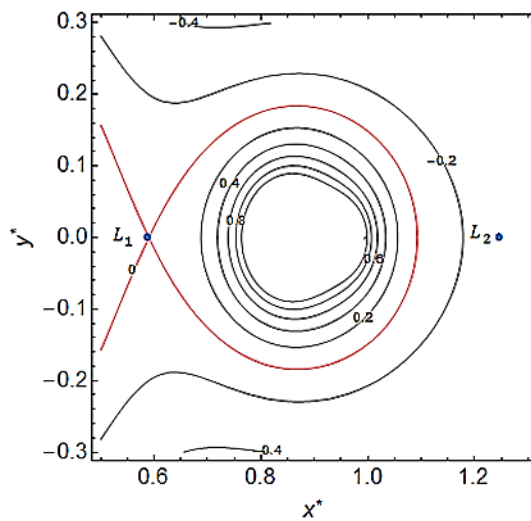


Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.40: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_1}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



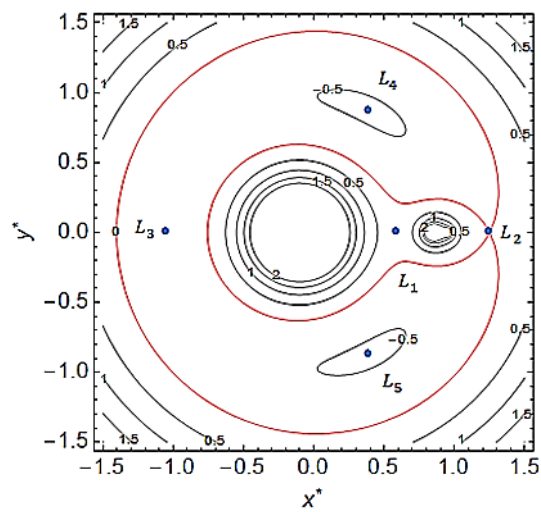
(a)



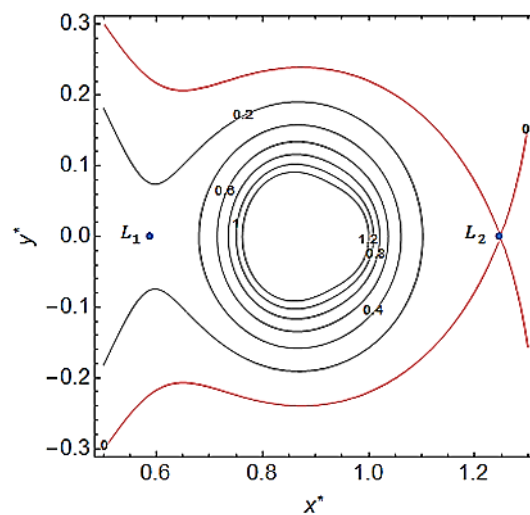
(b)

Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.41: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_2}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$. Em (a), traçado geral e em (b), traçado ao redor do dipolo.



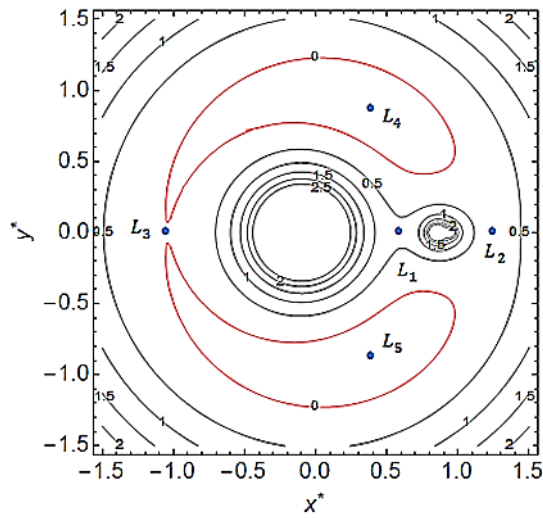
(a)



(b)

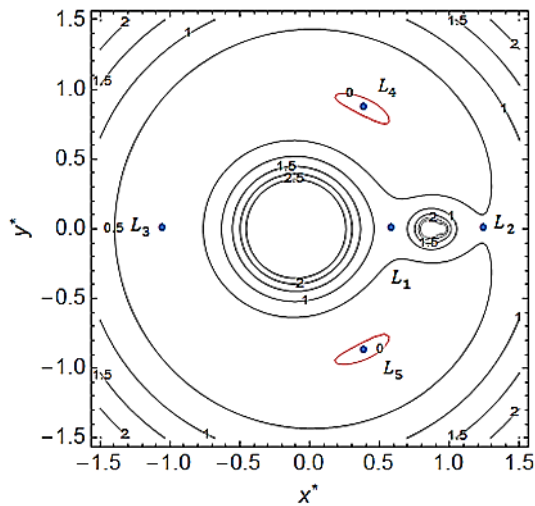
Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.42: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_3}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$.



Fonte: Produção do Autor.

Figura 4.43: Curvas de velocidade associadas a $C^*_{L_4-5}$ para configuração $\mu = 0,1$, $d^* = 0,1$ e $f = 0,75$.



Fonte: Produção do Autor.

Nas Figuras 4.28 a 4.31 são apresentadas as curvas de velocidade zero para o sistema binário na configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$. Devido ao pequeno valor de d^* o traçado das curvas de velocidade zero correspondentes aos referidos valores do negativo da

constante adimensional de Jacobi também não exibem significativa variação de seu traçado, mesmo ao se considerar a região circunvizinha ao dipolo, conforme f assume valores distintos. Desta forma, devido concentração de massa do dipolo numa pequena fração da escala geométrica do sistema, a variação de massa entre os polos devida à modificação de f entre os casos assimétricos ($f = 0,25$ e $f = 0,75$) e caso simétrico ($f = 0,5$), não altera significativamente o campo potencial gravitacional do dipolo.

Nas Figuras 4.32 a 4.35, Figuras 4.36 a 4.39 e Figuras 4.40 a 4.43 são apresentadas as curvas de velocidade zero para o sistema binário na configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$, para $f = 0,25$, $f = 0,5$ e $f = 0,75$, nesta ordem. Nesta configuração, em particular, mantido o parâmetro de massa do sistema $\mu = 0,1$, ao se considerar maior afastamento entre os polos do dipolo ($d^* = 0,1$), verifica-se que a variação de massa dos mesmos em decorrência da alteração de f entre os casos assimétricos ($f = 0,25$ e $f = 0,75$) e caso simétrico ($f = 0,5$) altera significativamente o campo potencial gravitacional, sobretudo, nas regiões circunvizinhas ao dipolo, como pode ser notado nas Figuras 4.32 (b), 4.33 (b), 4.36 (b), 4.37 (b), 4.39 (b) e 4.41 (b).

Para ambas as configurações consideradas, as curvas de velocidade zero associadas aos valores da constante adimensional de Jacobi relacionada aos pontos de equilíbrio do sistema são representadas por curvas vermelhas, para destaque. Nas figuras mencionadas pode-se verificar que, em relação a estas curvas, as curvas adjacentes apresentam incremento ou decréscimo de valor da constante adimensional de Jacobi, representados pelos valores positivos e negativos, respectivamente, sobre seu traçado. Fisicamente, tais variações do valor da constante adimensional de Jacobi expressam incrementos ou decréscimos de energia mecânica total específica para a partícula de prova, em relação ao referencial sinódico.

Nas Figuras 4.30 e 4.31, da configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e nas Figuras 4.34 e 4.35, Figuras 4.38 e 4.39 e Figuras 4.42 e 4.43, da configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$, são apresentados os traçados gerais das curvas de velocidade zero associadas aos valores $C^*_{L_3}$ e $C^*_{L_{4-5}}$, respectivamente. Como os valores da constante adimensional de Jacobi associados aos pontos de equilíbrio do sistema que não são vizinhos ao dipolo não

exibem considerável variação de coordenadas sinódicas dada a variação de f , são apresentados apenas os traçados gerais das curvas de velocidade zero associadas.

Na Figura 4.28 (a) para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$, bem como nas Figuras 4.32 (a), 4.36 (a) e 4.40 (a) para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$, com $f = 0,25$, $f = 0,5$ e $f = 0,75$, respectivamente, mostram-se as curvas de velocidade zero associadas a $C^*_{L_1}$. Estas curvas se interseccionam no ponto de equilíbrio L_1 , localizado entre os primários, como no PRTCC e, por esta razão, o mesmo também é denominado primeiro ponto de contato, como apresentado no Capítulo 2. Na Figura 4.28 (b), para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e Figuras 4.32 (b), 4.36 (b) e 4.40 (b) também apresenta-se, em maiores detalhes, o traçado das curvas de velocidade zero associadas a $C^*_{L_1}$ nas circunvizinhanças do dipolo de massa. Para ambas as configurações, verifica-se ainda uma segunda curva de velocidade zero associada a $C^*_{L_1}$ que circunda os dois primários, como pode ser visto nas Figuras 4.28 (a), 4.32 (a), 4.36 (a) e 4.40 (a).

Na Figura 4.29 (a), para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$, bem como nas Figuras 4.33 (a), 4.37 (a) e 4.41 (a) para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$, com $f = 0,25$, $f = 0,5$ e $f = 0,75$, respectivamente, mostram-se as curvas de velocidade zero associadas a $C^*_{L_2}$. Verifica-se que as curvas de velocidade zero associadas a tal valor para a constante adimensional de Jacobi se interseccionam sobre o ponto de equilíbrio L_2 , à direita do dipolo, em relação ao baricentro do sistema. Este ponto de equilíbrio, como no PRTCC é o segundo ponto de contato do sistema, e, em particular, permite o contato da oval circundante aos primários com a oval externa ao sistema binário. Na Figura 4.29 (b), para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e Figuras 4.33 (b), 4.37 (b) e 4.41 (b) também apresenta-se, em maiores detalhes, o traçado das curvas de velocidade zero associadas a $C^*_{L_2}$ nas circunvizinhanças do dipolo de massa.

Mediante a constante adimensional de Jacobi assumir o valor $C^*_{L_3}$, tem-se o terceiro ponto de contato do sistema, a saber, o ponto de equilíbrio L_3 , considerado para os casos do fator de massa f apresentados, como apresentado na Figura 4.30 para a configuração

$\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e nas Figuras 4.34, 4.38 e 4.42 para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$.

Reduzindo-se o valor da constante adimensional de Jacobi ao ponto de esta assumir o valor $C^*_{L_{4-5}}$, tem-se considerável redução de regiões espontaneamente proibidas ao movimento da partícula de prova. Consequentemente, as regiões espontaneamente permitidas ao movimento do terceiro corpo do sistema tornam-se maiores, como pode ser visto na Figura 4.31 para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,01$ e nas Figuras 4.35, 4.39 e 4.43 para a configuração $\mu = 0,1$ e $d^* = 0,1$.

4.3 Estudo Qualitativo da Estabilidade do Movimento Orbital da Partícula de Prova

A partir das condições iniciais de movimento da partícula de prova em torno do primário representado pelo modelo de dipolo de massa, expressas pelas Equações 2.128 a 2.131, para órbita osculadora direta, e pelas Equações 2.132 a 2.135, para órbita osculadora retrógrada, pode-se estudar qualitativamente, via integração numérica das Equações 3.244 e 3.245, o movimento dessa partícula no sistema binário em consideração. Recordar-se que as condições de posição e velocidade da partícula de prova na órbita osculadora inicial centrada no dipolo, para dado valor de μ , são funções do semi-eixo maior orbital inicial \tilde{a}_0 e da excentricidade orbital inicial e_0 e expressas no referencial sideral.

O estudo qualitativo do movimento da partícula de prova no sistema binário permite que se investigue a estabilidade do mesmo no referido sistema. Caracteriza-se, neste estudo, a estabilidade qualitativa do movimento orbital da partícula de prova como a ausência de colisão da mesma com os primários, bem como a inexistência de sua ejeção gravitacional do sistema, após dado intervalo de tempo considerado. A estas condições de estabilidade qualitativa associa-se o tempo de permanência da partícula de prova em órbita do primário tomado como dipolo de massa. Como será apresentado, a depender do tempo de integração estabelecido, da distribuição de massa do primário II e da inclinação do plano orbital da partícula de prova em relação ao plano sideral, não se

verificam órbitas cujo tempo de permanência da partícula em órbita do dipolo seja considerável, de tal modo que, inevitavelmente a mesma acaba por colidir com algum primário ou por ser ejetada gravitacionalmente do sistema. Desta forma, é mais correto dizer que busca-se a configuração de condições iniciais à partícula de prova que possibilitem à mesma o movimento menos instável possível, associado à dada inclinação de plano orbital da partícula e à distribuição de massa do primário assimétrico. Em outras palavras, quanto maior o tempo de permanência da partícula em órbita ao redor do dipolo, menos instável qualitativamente é seu movimento orbital ao redor desse corpo. Neste sentido, mostra-se útil a construção de grades de condições iniciais para o movimento da partícula que relacionam seu tempo de permanência orbital com os valores osciladores iniciais de semi-eixo maior e excentricidade orbitais. Salienta-se que as grades são, com boa aproximação, referenciadas ao centroide do dipolo, uma vez que é desconsiderada a margem estática do problema.

Tabela 4.9: Parâmetros característicos do sistema 2001SN₂₆₃.

m_1 (<i>Alpha</i>)	$917,5 \times 10^{10}$ kg
m_2 (<i>Gamma</i>)	$9,8 \times 10^{10}$ kg
l	3804 m
d	500 m
\mathcal{R}_1 (raio de <i>Alpha</i>)	1350 m

Fonte: Produção do Autor.

Neste estudo, consideram-se aspectos físicos do par de corpos *Alpha* e *Gamma* do sistema triplo de asteroides 2001SN₂₆₃, apresentados na Tabela 4.9, como referências para análise do tempo de permanência de uma partícula de prova num sistema binário. A razão pela escolha desse par de corpos de um sistema triplo, e não de um sistema constituído por apenas dois corpos é devida ao fato de o sistema triplo 2001SN₂₆₃ ter sido escolhido como alvo de estudo da missão espacial brasileira ASTER. O corpo *Beta* descreve sua órbita externamente ao sistema binário *Alpha* – *Gamma*, além desse corpo

apresentar significativa distância a esses corpos do sistema triplo. Dada a relativa proximidade entre *Alpha* e *Gamma*, um veículo espacial pode investigar, por exemplo, numa mesma missão, esses dois corpos do sistema 2001SN₂₆₃. Desta forma, neste estudo assume-se *Alpha* e *Gamma* como primários I e II, respectivamente. O asteroide *Gamma* possui formato alongado e seu movimento no sistema 2001SN₂₆₃ apresenta ressonância spin-órbita com o corpo *Alpha*

O sistema triplo 2001SN₂₆₃, que pertence à categoria NEA, foi descoberto em 2001 pelo programa LINEAR (*Lincoln Near-Earth Asteroid Research*), desenvolvido como cooperação entre a força aérea norte americana, pela NASA e pelo *Lincoln Laboratory - MIT*. A princípio, mediante primeiras observações, acreditava-se que o 2001SN₂₆₃ fosse um único corpo. Contudo, novas observações realizadas em 2008, pelo Observatório de Arecibo, Porto Rico, que aproveitaram a aproximação desse corpo em relação à Terra, mostraram que na realidade o 2001SN₂₆₃ é um sistema triplo de asteroides (NOLAN et al., 2008; ARAUJO, 2011). Em 2009, foram divulgadas as primeiras características físicas do sistema triplo 2001SN₂₆₃, como, por exemplo, o fato de o asteroide principal do sistema (*Alpha*) apresentar forma esferoidal (BECKER et al., 2009; ARAUJO, 2011).

A missão ASTER, primeira missão brasileira de espaço profundo, tem como principal objetivo o desenvolvimento de tecnologias espaciais para o Brasil e a realização de pesquisas científicas acerca das características físicas e dinâmicas do sistema triplo 2001SN₂₆₃, como seu campo gravitacional e velocidade de rotação de seus corpos constituintes, a distribuição de massa dos corpos, sua composição química e refinar o conhecimento de seus parâmetros orbitais (MASAGO, 2014).

Para construção das grades de condições iniciais consideram-se diferentes valores para semi-eixo maior e excentricidade orbitais osculadores. Adotam-se valores de semi-eixo maior entre 250 metros em relação ao centroide do primário II até cinco vezes o valor do raio de Hill para este corpo, o que corresponde a 1900 metros, com passo de variação de 0,5 metros. O valor mínimo de 250 metros para semi-eixo maior osculador é adotado para que se leve em conta a máxima extensão do primário II no espaço, a partir de seu centroide. Este valor é estabelecido como parâmetro para critério de

colisão da partícula com o referido primário. Como apresentado na Tabela 4.9, assume-se que o primário II possui 500 metros de comprimento, ao longo das abscissas sinódicas, sendo esta a sua dimensão mais significativa. Além disso, adota-se que o primário I, modelado como corpo esférico, apresenta raio de 1350 metros, sendo esta quantidade também parâmetro para colisão da partícula de prova com este corpo. Considera-se ainda que ocorre ejeção gravitacional da partícula em relação ao sistema binário quando o semi-eixo maior osculador é superior a 30 vezes a distância entre os primários, cujo valor para o sistema adotado é de 3804 metros. Em termos da excentricidade, consideram-se os valores $0 \leq e_0 < 1$ para que a órbita kepleriana osculadora seja fechada, com passo de variação de 0,01.

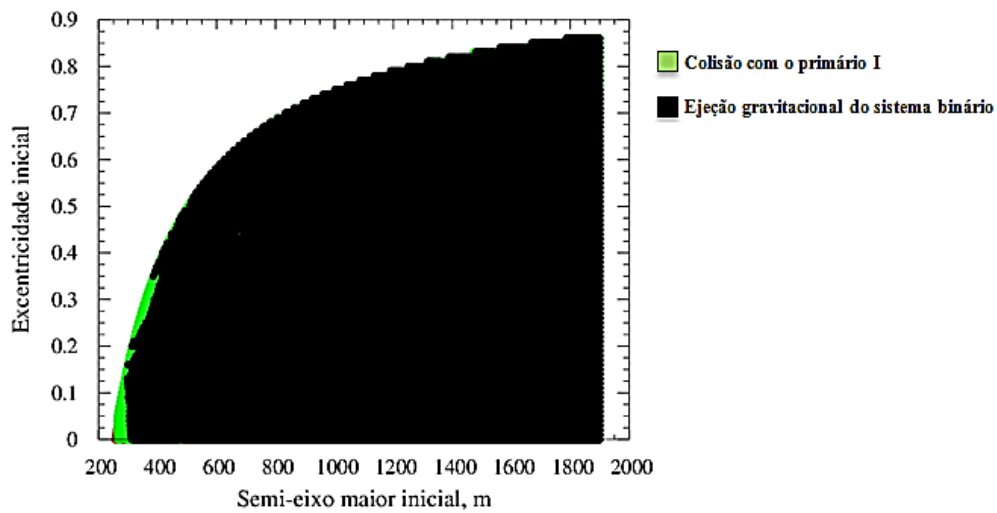
Recorda-se que, neste estudo, considera-se o efeito da pressão da radiação solar sobre o movimento da partícula de prova no sistema. Quanto mais próximo estiver a partícula em relação ao dipolo, em sua posição inicial, mais rapidamente ela tenderá a colidir com o primário II e, desta forma, pode-se dizer que a pressão da radiação solar reduz o tempo de permanência da partícula em órbita no sistema.

Neste estudo, empregou-se o integrador numérico Runge-Kutta 7/8 com passo de integração variável. O tempo total de integração adotado para as simulações é de 512 dias (ou 4690 unidades canônicas de tempo), o que equivale a meio período orbital do sistema binário ao redor do Sol. A justificativa para este período de integração é considerar o movimento da partícula em torno do dipolo assumindo-se a variação de distância aparente do Sol em relação ao baricentro do sistema binário, o que, por sua vez, leva à variação da intensidade e da direção do vetor aceleração devida à pressão da radiação solar. Este procedimento é realizado para um sistema binário com parâmetro de massa $\mu \cong 0,01$ e considerando-se um dipolo em *Gamma* com $d^* \cong 0,13$. Analizam-se os casos de dipolo assimétrico ($f = 0,25$ e $f = 0,75$) e dipolo simétrico ($f = 0,5$).

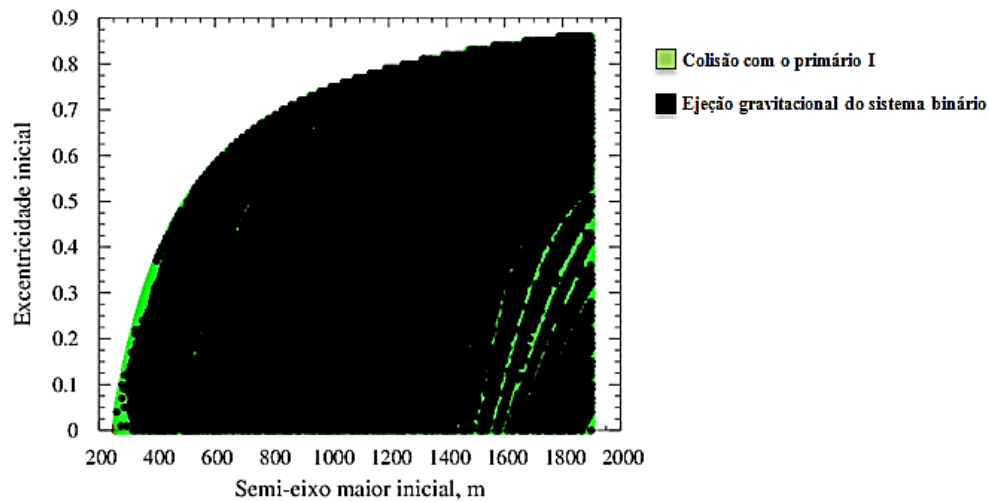
Para fins de comparação, considerou-se também o movimento da partícula de prova ao redor de um ponto de massa que concentra toda a massa do primário II. Desta forma, analisa-se o tempo de permanência dessa partícula num sistema binário com $\mu \cong 0,01$ e $d^* = 0$, o que configura o PRTCC, que é a referência deste estudo. Além disso, realiza-

se a comparação do tempo de permanência da partícula em órbita ao redor do primário II (tratado como ponto de massa) considerando-se a ausência e depois a existência da aceleração devida à pressão da radiação solar. Com isto, torna-se possível analisar o efeito dessa perturbação no movimento da partícula de prova e o quanto seu tempo de permanência em órbita ao redor do primário II (desprovido, por hora, de dimensão) é afetado pela pressão da radiação solar.

Figura 4.44: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* = 0$ (PRTCC – referência) considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), ausência da pressão da radiação solar e em (b) presença da pressão da radiação solar.



(a)



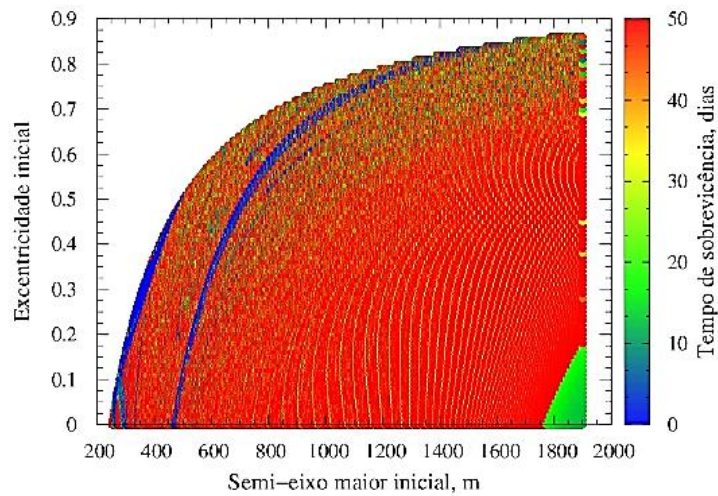
(b)

Fonte: Produção do Autor.

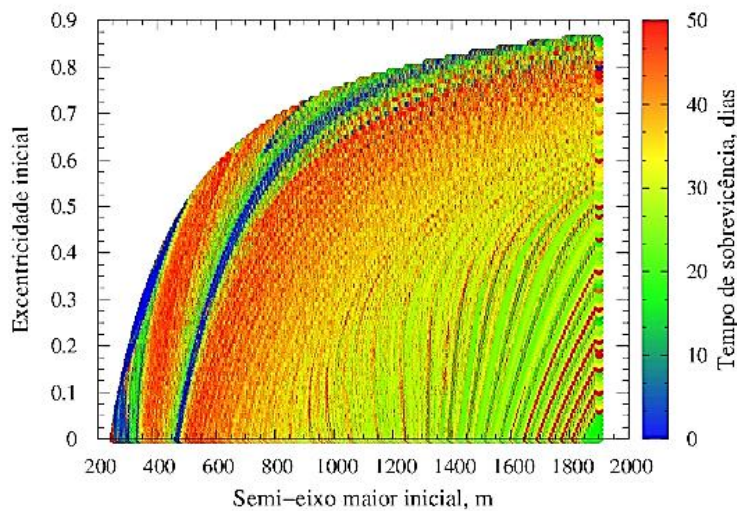
Como pode ser observado nas Figuras 4.44 (a) e 4.44 (b), para valores de semi-eixo maior próximos do valor mínimo considerado para este elemento orbital (250 metros) e considerando excentricidades entre zero e 0,35, aproximadamente, verifica-se que, após 512 dias de movimento orbital, a partícula de prova acaba por colidir com o ponto de massa que representa o primário principal (primário I) do sistema. Para valores maiores de semi-eixo maior e considerando-se todo o intervalo de excentricidades adotado, observa-se, das figuras, que a partícula de prova, após o referido intervalo de tempo de integração, sofre ejeção gravitacional do sistema. Além disso, comparando-se as Figuras 4.44 (a) e 4.44 (b), observa-se que a presença da pressão da radiação solar leva à existência de determinadas configurações de semi-eixo maior (acima dos 1400 metros) e de excentricidades entre zero e 0,50 em que verifica-se, após 512 dias de movimento orbital, a colisão da partícula com o ponto de massa representativo do primário I. Tal fenômeno é observado devido ao fato de, como dito anteriormente, a pressão da radiação solar empurrar a partícula de prova em direção a sua colisão com os primários, reduzindo, assim, seu tempo de permanência em órbita do primário tomado como dipolo.

Como para o período de integração de 512 dias não foram observadas órbitas de sobrevivência da partícula de prova ao redor do ponto de massa representativo do primário II, considerou-se os primeiros 50 dias do período de integração.

Figura 4.45: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* = 0$ (PRTCC – referência) considerando-se os primeiros 50 dias do período de integração. Em (a), ausência da pressão da radiação solar e em (b) presença da pressão da radiação solar.



(a)



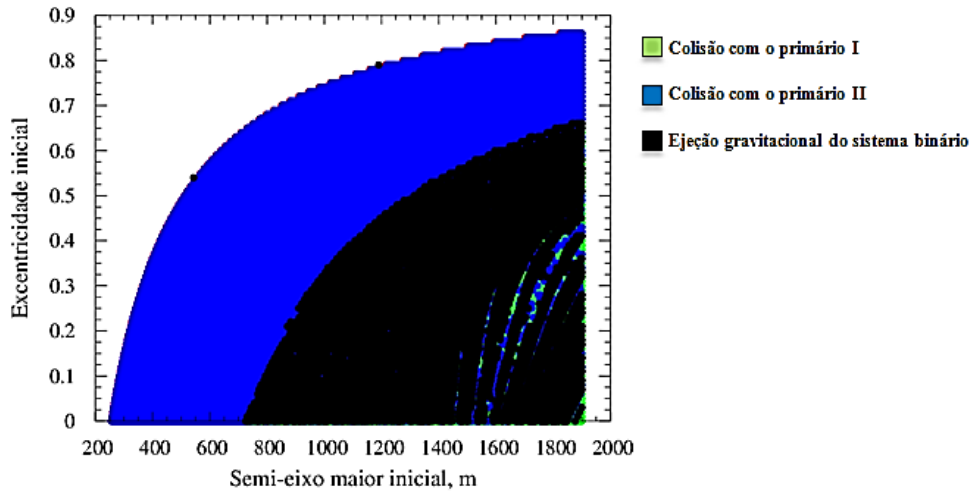
(b)

Fonte: Produção do Autor.

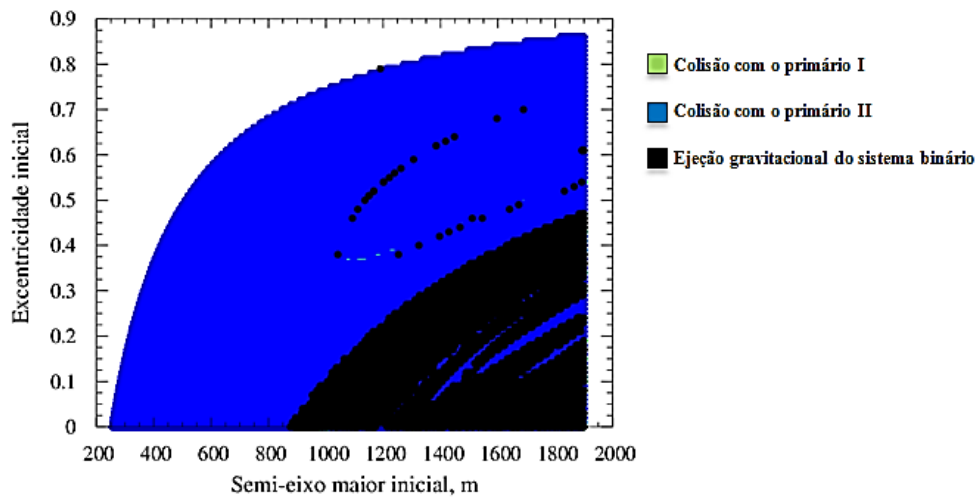
Nas Figuras 4.45 (a) e 4.45 (b), como indicado na escala de cores lateral, configurações de semi-eixo maior e excentricidades apresentadas em tons mais avermelhados correspondem às condições iniciais desses elementos orbitais que proporcionam maior tempo de permanência da partícula em órbita do ponto de massa representativo do primário II. Comparando-se as Figuras 4.45 (a) e 4.45 (b) nota-se, como esperado, que a presença da pressão da radiação solar reduz, em alguns dias, o tempo de permanência da partícula de prova em órbita ao redor do ponto de massa representativo do primário II. Como pode ser observado na Figura 4.45 (b), as órbitas de maior tempo de permanência para o movimento da partícula estão concentradas no intervalo de semi-eixo maior entre 300 e 400 metros, para excentricidade entre zero e 0,70 e para semi-eixo maior acima dos 500 metros correlacionados com excentricidade entre zero e 0,80. Ainda, comparando-se as Figuras 4.45 (a) e 4.45 (b) é possível verificar que, tanto com a ausência quanto com a presença da pressão da radiação solar, as regiões de maior tempo de permanência acima analisadas são separadas por configurações de condições iniciais que proporcionam tempos de permanência orbital praticamente nulos, correspondente a uma faixa de coloração azulada. Também observa-se este comportamento para valores baixos de semi-eixo maior associado à excentricidades entre zero e 0,50.

A partir do que foi observado nas grades de condições iniciais para o PRTCC, que é a referência deste estudo, empreendeu-se a mesma análise considerando-se, agora, o primário II como dipolo ($d^* \cong 0,13$). Para análise do tempo de permanência da partícula de prova ao redor desse primário foram consideradas órbitas diretas e retrógradas, sujeitas à pressão da radiação solar e dipolo, período de integração de 512 dias e diferentes valores do parâmetro f que, como sabido, está associado à distribuição de massa do primário II.

Figura 4.46: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,25$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)



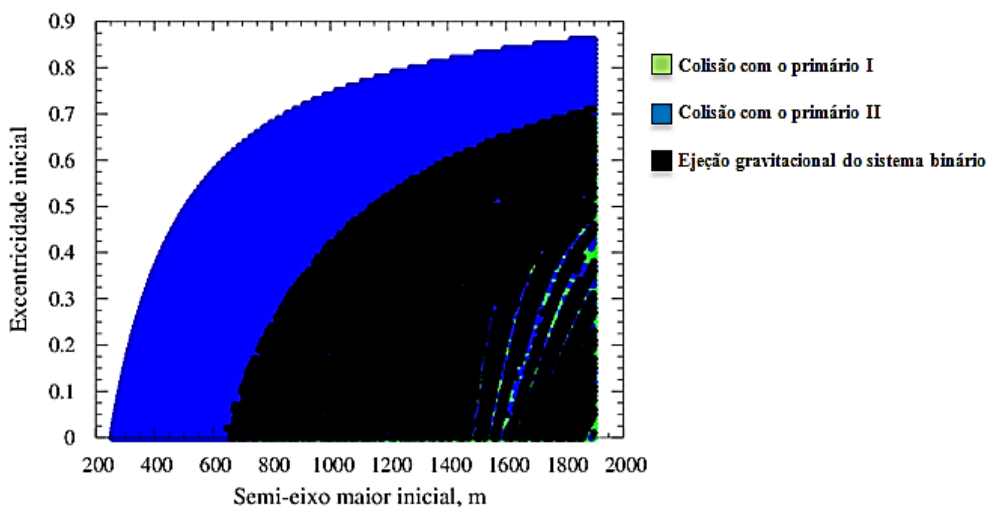
(b)

Fonte: Produção do Autor.

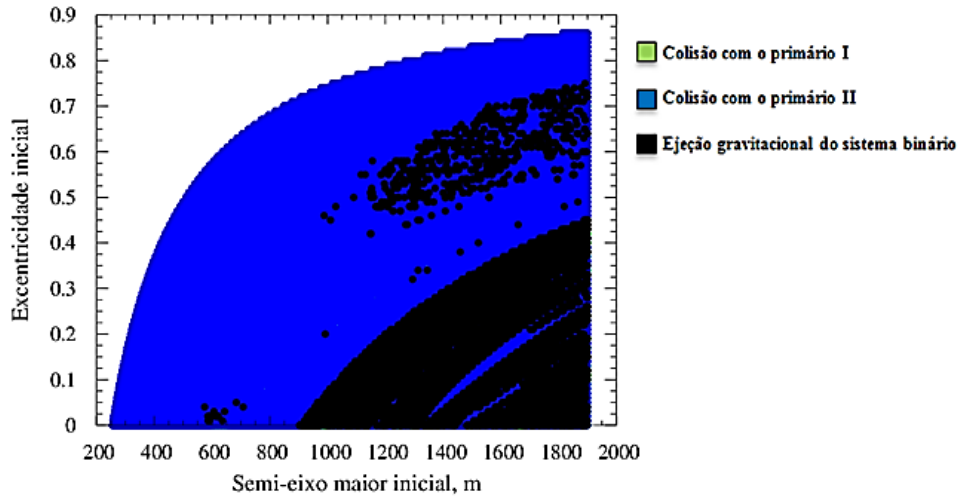
Como apresentado nas Figuras 4.46, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,25$ observou-se que no caso de órbita direta, na Figura 4.46 (a), a partícula de prova sofre ejeção gravitacional do sistema para semi-eixo maior inicial a partir de aproximadamente 700 metros e num intervalo aproximado de excentricidade inicial entre zero e 0,70. De fato, quanto maior for o afastamento da partícula de prova de seu centro de atração gravitacional, que é o centroide do dipolo, menos atraída

gravitacionalmente a mesma estará pelo primário II, sendo-lhe, assim, mais provável a ejeção gravitacional do sistema. Ainda na Figura 4.46 (a), para valores de semi-eixo maior inicial a partir dos 250 metros, correlacionados de forma crescente com o aumento da excentricidade, verifica-se que a partícula de prova, no intervalo de integração considerado, colide com o primário II. Isto se deve ao fato da órbita osculadora da partícula de prova apresentar semi-eixo maior que ofereça pouco afastamento em relação ao dipolo e/ou pronunciada excentricidade que, após dado intervalo de tempo, conduza a partícula a colidir com o dipolo. Além disso, para valores de semi-eixo maior acima dos 1500 metros, em configurações locais de semi-eixo maior e excentricidade, verifica-se a colisão da partícula de prova com o primário I do sistema binário. No caso de movimento retrógrado, representado na Figura 4.46 (b), observa-se a expansão das condições iniciais de semi-eixo maior e excentricidade que, para 512 dias de análise e, em comparação com o caso direto associado, levam a partícula de prova a colidir com o dipolo. Nesta região, constata-se que, em casos pontuais de condições iniciais, há a ejeção gravitacional da partícula. Tal fenômeno também ocorre para semi-eixo maior acima dos 900 metros, aproximadamente, e para excentricidades entre zero e 0,50.

Figura 4.47: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,5$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)

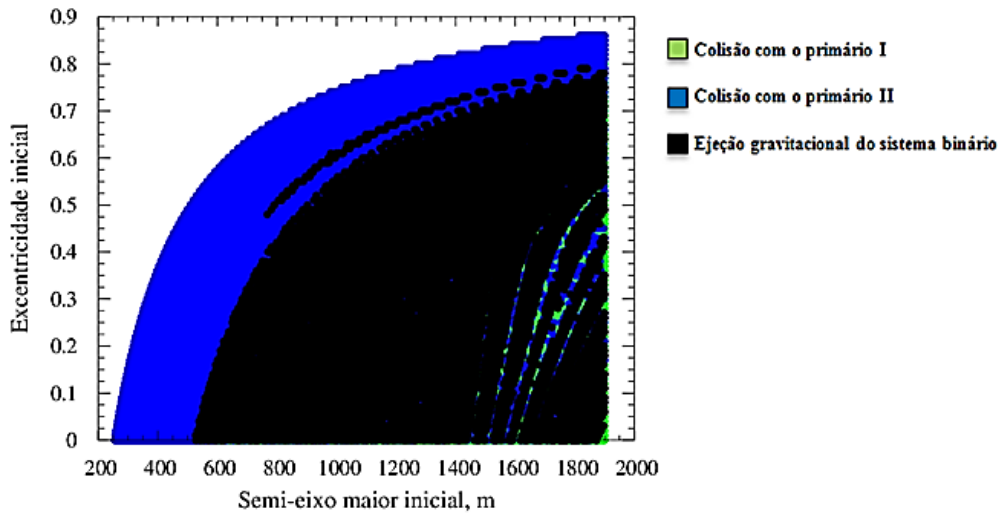


(b)

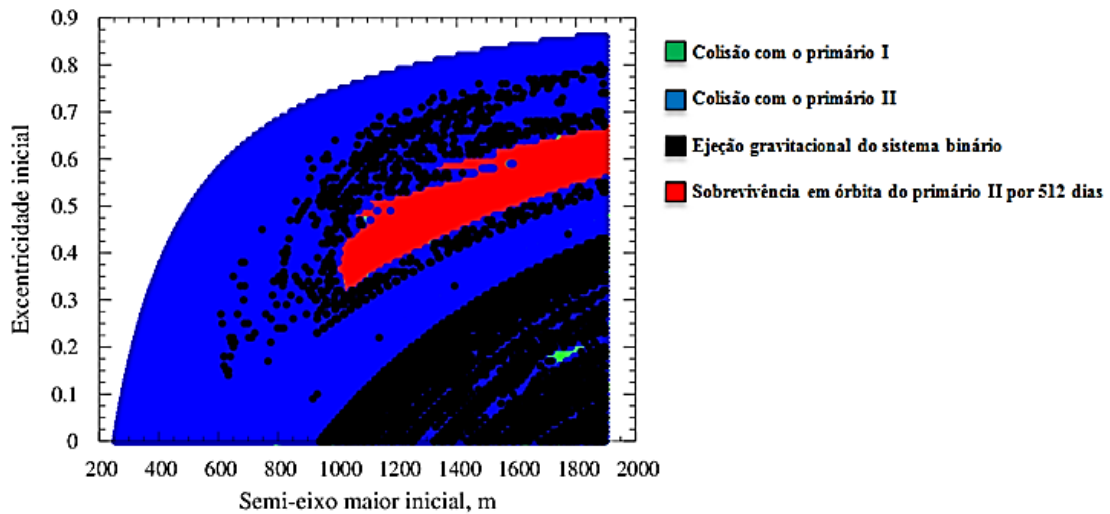
Fonte: Produção do Autor.

A partir das Figuras 4.47, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,5$ observou-se que no caso de órbita direta, na Figura 4.47 (a), a partícula de prova está sujeita a sofrer ejeção gravitacional e a colidir com o dipolo ou com o primário I para, aproximadamente, as mesmas configurações de semi-eixo maior e excentricidades observadas na Figura 4.46 (a) para órbita direta a $f = 0,25$. No caso retrógrado, representado na Figura 4.47 (b), também nota-se grande similaridade com o que ocorre com a partícula de prova no caso de órbita retrógrada para $f = 0,25$, como apresentado na Figura 4.46 (b). Contudo, como é possível observar na Figura 4.47 (b), há maior concentração de configurações de semi-eixo maior entre 1000 metros e 1900 metros e de excentricidade entre 0,45 e 0,75, em que se verifica ejeção gravitacional da partícula de prova.

Figura 4.48: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,75$ considerando-se tempo de integração de 512 dias. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

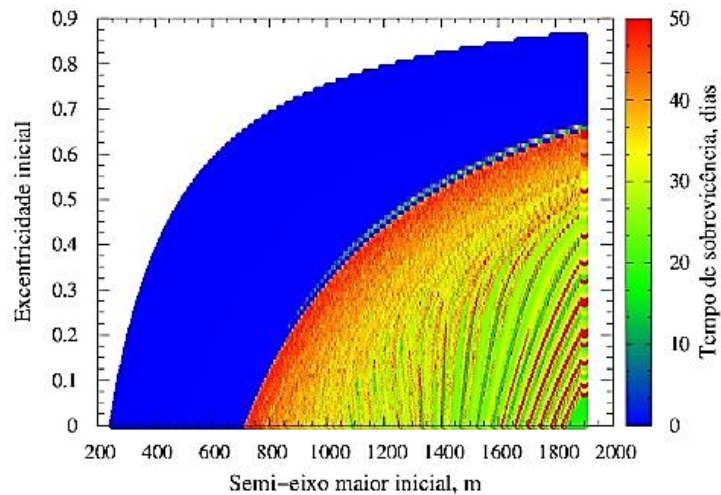
Nas Figuras 4.48, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,75$ observou-se que no caso de órbita direta, Figura 4.48 (a), há considerável preservação da distribuição das configurações de condições iniciais que conduzem a partícula de prova a ser ejetada gravitacionalmente do sistema ou a colidir com algum dos primários do sistema binário em relação às grades equivalentes para $f = 0,25$ e para $f = 0,5$. Nota-se, contudo, que

a partir dos 600 metros de semi-eixo maior, correlacionadas com excentricidade crescente entre, aproximadamente, 0,45 e 0,80, há uma estreita faixa de configuração de condições iniciais que, após 512 dias, levam a partícula de prova a ser ejetada gravitacionalmente do sistema. Além disso, verifica-se a redução das configurações iniciais de semi-eixo maior e excentricidade que conduzem a partícula de prova a colidir com o dipolo após 512 dias em comparação com as grades para órbitas diretas associadas aos valores anteriores de f . Na Figura 4.48 (b), apresenta-se a grade de condições iniciais para órbitas retrógradas e assumindo-se $f = 0,75$. Novamente, observa-se a preservação das configurações de semi-eixo maior a partir dos 900 metros e excentricidades de zero a 0,50, aproximadamente, que conduzem a partícula a ser ejetada gravitacionalmente do sistema. Além disso, observa-se o aumento da região em que se verifica concentração de configurações de semi-eixo maior, entre 1000 metros e 1900 metros e de excentricidade entre 0,20 e 0,80 em que se verifica ejeção gravitacional da partícula de prova. Nesta região, nota-se a presença de configurações iniciais, indicadas em vermelho, a partir das quais a partícula de prova sobrevive em órbita do dipolo pelos 512 dias considerados nas simulações. Verifica-se que tais órbitas de sobrevivência localizam-se a partir dos 1000 metros de semi-eixo maior, e para valores de excentricidade entre 0,35 e 0,65, aproximadamente. Há ainda, conforme Figura 4,48 (b), para semi-eixo maior de aproximadamente 1800 metros e excentricidade entre, aproximadamente, 0,15 e 0,20, configurações iniciais que levam a partícula de prova a colidir com o primário principal do sistema. Nas demais configurações de semi-eixo maior e excentricidade, conforme visualizado, a partícula de prova acaba por colidir com o próprio primário modelado como dipolo após 512 dias de movimento orbital.

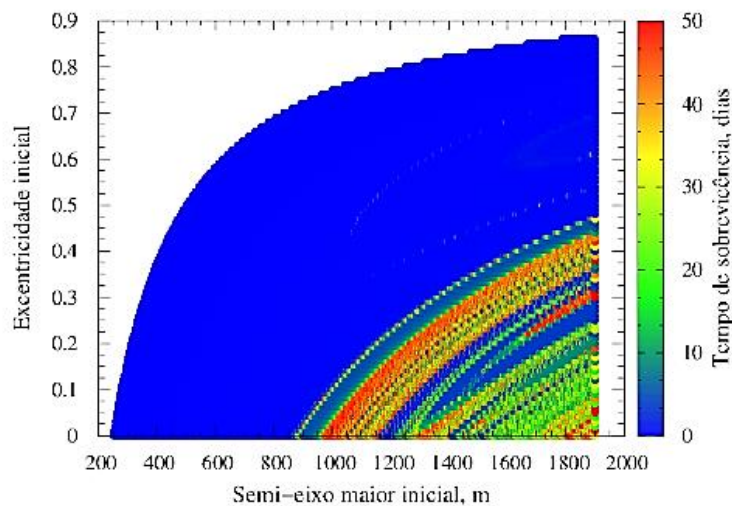
Das Figuras 4.46 (a) e 4.46 (b) a 4.48 (a) e 4.48 (b), a exceção do que é observado nesta última, nota-se que após 512 dias de movimento orbital da partícula de prova ao redor do dipolo, a mesma acaba por colidir com algum primário do sistema ou a sofrer ejeção gravitacional desse sistema. Em virtude disso, optou-se por considerar os primeiros 50 dias de simulação, isto é, os primeiros 50 dias de movimento da partícula de prova ao redor do dipolo, sujeita à aceleração da pressão da radiação solar. Nas figuras seguintes, configurações de semi-eixo maior e de excentricidade mais

avermelhadas correspondem às condições iniciais de movimento da partícula de prova que lhe conferem maior tempo de permanência em órbita do dipolo. Nessas figuras, nas regiões mais azuladas, não se especifica a razão de determinadas configurações de condições iniciais estarem associadas ao baixo tempo de permanência da partícula em movimento orbital ao redor do dipolo, isto é, se a partícula apresenta pouco tempo de permanência em órbita do dipolo porque colidiu com algum primário ou porque foi ejetada gravitacionalmente do sistema binário.

Figura 4.49: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,25$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)



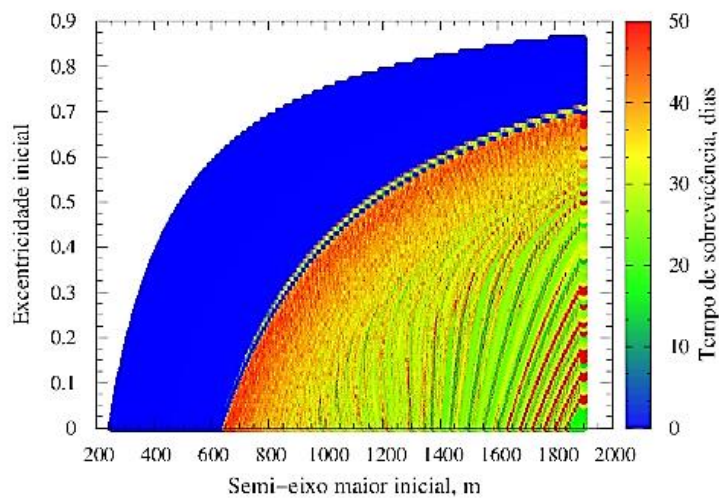
(b)

Fonte: Produção do Autor.

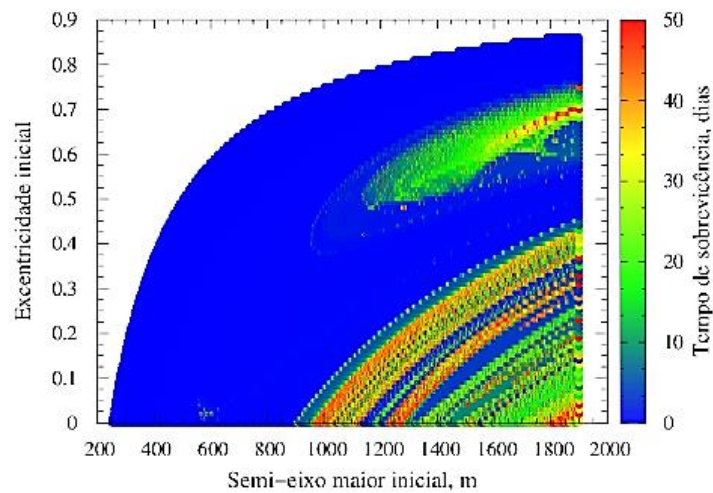
Como apresentado nas Figuras 4.49, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,25$ observou-se que no caso de órbita direta, na Figura 4.49 (a), a partícula de prova apresenta menor tempo de permanência em órbita no sistema para valores de semi-eixo maior abaixo dos 700 metros correlacionado com valores de excentricidade entre zero e 0,60, aproximadamente e para valores de semi-eixo maior inicial acima de 700 metros para excentricidade inicial de 0,60 a 0,85 aproximadamente. Observa-se ainda que, para semi-eixo maior acima dos 700 metros correlacionado com excentricidade entre zero e 0,70, aproximadamente, tem-se uma região de configurações iniciais para o movimento da partícula de prova com tempo de permanência orbital entre 10 e 50 dias. Merece atenção o fato de que a faixa de transição entre essas duas regiões, de coloração avermelhada, corresponde às configurações de semi-eixo maior e excentricidade que garantem, para dipolo assimétrico a $f = 0,25$, órbitas diretas de maior duração ao redor do dipolo, considerando-se os primeiros 50 dias de simulação. No caso retrógrado, na Figura 4.49 (b), pode-se observar que para valores de semi-eixo maior inicial abaixo de 900 metros, com excentricidade de zero a 0,45 e para valores de semi-eixo maior inicial acima dos 900 metros correlacionado de forma crescente com a excentricidade, tem-se configurações iniciais à partícula que lhe conferem pouca duração orbital. Nas demais possíveis configurações de condições iniciais, salvo particulares combinações de semi-

eixo maior e excentricidade, a partícula de prova apresenta tempo de permanência entre 10 e 50 dias ao redor do dipolo. Nota-se na Figura 4.49 (b) que uma pequena variação nos valores de semi-eixo maior acima dos 900 metros e de excentricidade na faixa de zero a 0,45 leva à abrupta variação do tempo de permanência da partícula em órbita retrógrada ao redor do dipolo, dada a existência de regiões de elevada permanência adjacentes a outras regiões em que se verifica permanência reduzida.

Figura 4.50: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,5$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)



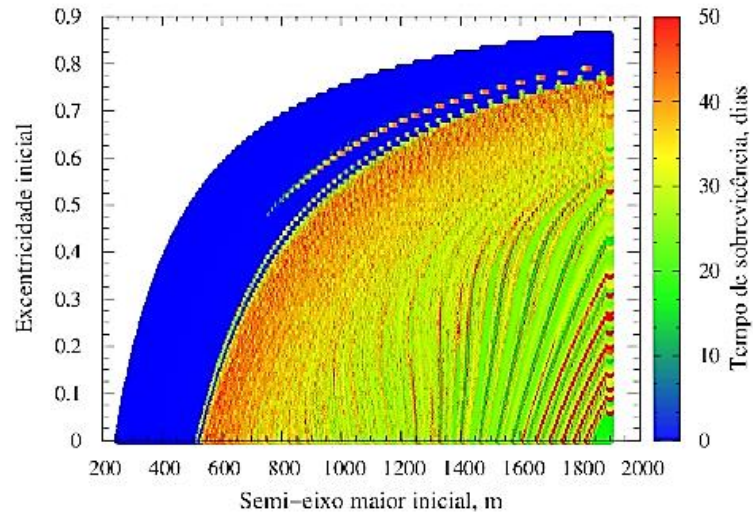
(b)

Fonte: Produção do Autor.

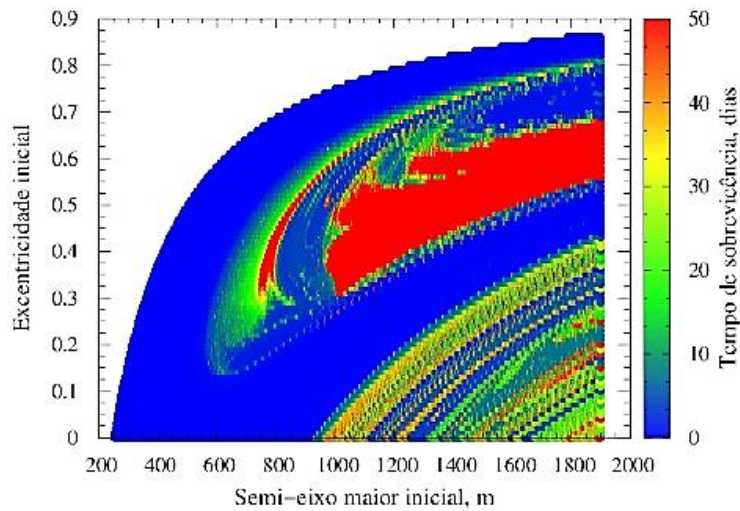
A partir da análise das Figuras 4.50, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,5$ observou-se que no caso de órbita direta, na Figura 4.50 (a), as configurações de semi-eixo maior e excentricidade que proporcionam à partícula de prova maior tempo de permanência ao redor do dipolo e as configurações associadas à permanência reduzida se assemelham consideravelmente com o que é apresentado na grade de condições iniciais para órbita direta com $f = 0,25$, como apresentado na Figura 4.49 (a). Novamente, as condições iniciais de semi-eixo maior e excentricidade que oferecem maior tempo de permanência orbital dispõem-se numa faixa de transição entre a região azulada, em que o tempo de permanência orbital para a partícula é praticamente nulo e a região onde esse tempo é maior, representado por coloração amarelada. Para órbita retrógrada, conforme Figura 4.50 (b), também é notada similaridade na distribuição de cores com a grade correspondente para $f = 0,25$, tal que uma pequena variação nos valores de semi-eixo maior acima dos 900 metros e de excentricidade até aproximadamente 0,45 conduz à abrupta variação do tempo de permanência da partícula em órbita retrógrada ao redor do dipolo. Em particular, observa-se também que a partir dos 1000 metros, para semi-eixo maior, e assumindo-se excentricidade entre 0,45 e 0,75, há outra região de configurações de condições iniciais ao movimento orbital da partícula de prova que lhe oferecem tempo de permanência em órbita do dipolo acima dos 10 dias. Para as demais configurações de semi-eixo maior e

excentricidade, conforme observado na Figura 4.50 (b), a partícula de prova apresenta tempo de permanência em órbita no dipolo praticamente nulo.

Figura 4.51: Grades de condições iniciais para sistema com $\mu \cong 0,01$, $d^* \cong 0,13$ e $f = 0,75$ considerando-se os primeiros 50 dias do tempo de integração. Em (a), assume-se órbita direta e em (b) órbita retrógrada.



(a)



(b)

Fonte: Produção do Autor.

A partir das Figuras 4.51, para o sistema em análise, ao se considerar $f = 0,75$ observou-se que, no caso de órbita direta, na Figura 4.51 (a), a maioria das

configurações de semi-eixo maior e excentricidade iniciais são similares com as configurações correspondentes para órbita direta e para $f = 0,25$ e $f = 0,5$, conforme Figuras 4.49 (a) e 4.50 (a), respectivamente, quanto ao tempo de permanência orbital da partícula de prova ao redor do dipolo. Contudo, deve-se mencionar que a faixa de transição entre a região azulada, em que a partícula apresenta tempo de permanência nulo e a região mais amarelada, de média permanência orbital ao redor do dipolo, apresenta, desta vez, coloração avermelhada menos intensa, o que significa ligeira redução do tempo de permanência orbital da partícula ao redor do dipolo, considerando-se os primeiros 50 dias de simulação. No entanto, observa-se a existência de uma estreita faixa de condições iniciais, com semi-eixo maior acima dos 600 metros, correlacionados crescentemente com excentricidades entre 0,50 e 0,80, aproximadamente, que oferecem à partícula de prova em torno de 30 dias ou mais de permanência orbital ao redor do dipolo. Na Figura 4.51 (b), apresenta-se a grade de condições iniciais para órbitas retrógradas e para dipolo com $f = 0,75$. Novamente, para semi-eixo maior a partir dos 1000 metros, aproximadamente, e considerando-se excentricidades entre zero e 0,40, observam-se configurações de condições iniciais que oferecem à partícula de prova maior tempo de permanência ao redor do dipolo. Destaca-se a região de semi-eixo maior acima dos 1000 metros e excentricidade entre 0,30 e 0,65, e semi-eixo maior de aproximadamente 800 metros, com excentricidade entre 0,30 e 0,60, onde observam-se configurações de condições iniciais que permitem à partícula de prova manter-se em órbita ao redor do dipolo, pelo menos pelos primeiros 50 dias de simulação. Deve-se observar que esta região avermelhada é compatível com a região de mesma coloração apresentada na Figura 4.48 (b), para órbita retrógrada em torno de dipolo assimétrico com $f = 0,75$ e assumindo-se 512 dias de simulação.

Em todas as grades de condições iniciais, Figuras 4.44 (a) e 4.44 (b) às Figuras 4.51 (a) e 4.51 (b), existem combinações de semi-eixo maior e excentricidade iniciais representadas pela cor branca. Tais combinações de condições iniciais fisicamente não são possíveis, pois a órbita osculadora da partícula de prova apresentaria pericentro no interior do dipolo ou raio de pericentro inferior ao raio do dipolo, no caso do PRTCC.

Das Figuras 4.46 (a) e 4.46 (b) a 4.51 (a) e 4.51 (b), apresentadas anteriormente, em que consideram-se os primeiros 50 dias de integração, nota-se que as configurações de semi-eixo maior e excentricidade das grades de condições iniciais que oferecem maior permanência à partícula de prova em órbita ao redor do dipolo se devem a dois motivos: à inclinação do plano orbital da partícula de prova em relação ao plano de movimento dos primários e ao fator de massa do dipolo. Assim, para um dado fator de massa do dipolo, o tempo de permanência da partícula de prova em torno desse corpo é significativamente influenciado em duração e em localização nas grades pela inclinação do plano orbital da própria partícula. Para valores mais baixos do fator de massa do dipolo, como $f = 0,25$, tem-se que o polo P_{22} do dipolo é mais massivo e constata-se que órbitas diretas apresentam configurações de semi-eixo maior e de excentricidade mais abundantes em que se verifica maior tempo de permanência orbital para a partícula ao redor do dipolo, se comparado ao caso retrógrado correspondente. Contudo, ao se adotar valores mais elevados para o fator de massa do dipolo, como $f = 0,75$, por exemplo, com o polo P_{21} do dipolo como mais massivo, constata-se significativa abundância de condições iniciais para órbitas retrógradas com maior duração em comparação com o caso direto correspondente. Em particular, como foi observado, para fatores de massa do dipolo mais elevados, as órbitas retrógradas apresentam, inclusive, tempo de sobrevivência de 512 dias em torno do dipolo.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se um modelo analítico simplificado de potencial gravitacional para um sistema binário de asteroides em que o primário principal, de maior massa, foi considerado esférico e o primário de menor massa e de formato assimétrico foi modelado como dipolo de massa, dotado de rotação, e que apresenta ressonância spin-órbita com o outro primário. O modelo de potencial adotado para o sistema parte do conceito físico de potencial gravitacional de um ponto de massa (partícula). O sistema binário, depois de assumidas as hipóteses do modelo, é representado por três pontos de massa. Os pontos de massa que compõem o dipolo não possuem vínculo material entre si. A razão de se adotar este modelo físico para o potencial gravitacional do sistema binário é justificada pelo fato deste modelo oferecer um método genérico de descrição e representação do potencial gravitacional de uma classe de sistemas celestes constituídos por dois corpos em que o de menor massa, por sua gravidade reduzida e consequente forma assimétrica, suposta alongada, pode ser tomado como dipolo de massa. Esta abordagem possibilita a realização de estudos iniciais acerca da dinâmica e estabilidade orbitais de um veículo espacial para uma missão em que o alvo é um sistema de asteroides ou um de seus corpos constituintes.

A partir do modelo de potencial gravitacional do sistema binário foi possível estudar aspectos qualitativos da dinâmica de uma partícula de prova em torno do primário tomado como dipolo. Esta partícula representa, fisicamente, um veículo espacial que se desloca nas proximidades do par de asteroides. Neste sentido, determinou-se, inicialmente, o número e a localização dos pontos de equilíbrio do sistema físico em estudo.

O presente sistema genérico composto por dois asteroides apresenta seis pontos de equilíbrio, sendo um desses pontos localizado ao longo das abscissas sinódicas e entre os polos do dipolo. Por tal razão, este ponto foi desconsiderado, uma vez que, por estar no interior do primário menos massivo, não pode ser alcançado pela partícula de prova. Desta forma, o sistema binário genérico possui cinco pontos de equilíbrio alcançáveis pela partícula de prova e sua localização no plano sinódico do sistema é tal qual à

observada no Problema Restrito de Três Corpos Clássico (PRTCC): observa-se a ocorrência de três pontos de equilíbrio colineares, L_1 , L_2 e L_3 , dispostos ao longo das abscissas sinódicas, e de dois pontos de equilíbrio triangulares, L_4 e L_5 .

Na representação matemática do modelo físico do sistema binário foram considerados três parâmetros, μ , d^* e f , sendo μ o parâmetro de massa do sistema binário, d^* a distância entre os polos do dipolo e f o parâmetro de massa do dipolo, todos adimensionais (em unidades canônicas). O parâmetro μ expressa a fração em massa do sistema binário contida no primário menos massivo; o parâmetro d^* quantifica o comprimento do dipolo representativo do primário menos massivo do sistema; e o parâmetro f expressa a fração em massa do parâmetro μ contida no polo P_{21} do dipolo. A escala geométrica do problema foi assumida entre os centroides dos primários e mostrou-se que a mesma admite, com boa aproximação, ser tomada como constante. Por meio da variação desses parâmetros em seus respectivos intervalos de validade, analisou-se o comportamento da distribuição dos pontos de equilíbrio do sistema binário. Observou-se que os pontos colineares L_1 e L_2 , por serem vizinhos ao dipolo, são os que apresentam maior variação de suas coordenadas sinódicas conforme são variados os parâmetros do sistema. O ponto de equilíbrio L_3 , por localizar-se próximo ao primário de maior massa, não apresenta variação de sua posição ao se adotar μ constante. Os pontos triangulares L_4 e L_5 apresentem pequena variação de sua localização no plano sinódico mediante variação do parâmetro μ do sistema. Dada a variação crescente de μ , notou-se que o ponto L_1 afasta-se do dipolo em direção ao primário principal, ao passo que L_2 , que inicialmente também tende a se afastar do dipolo, para valores maiores de μ tende a se reaproximar do primário de menor massa, de tal modo a serem preservadas as condições de equilíbrio físico sobre tais pontos.

Analisou-se também a localização de L_1 e L_2 nas vizinhanças do dipolo conforme varia-se o parâmetro d^* . O interesse maior sobre L_1 e L_2 é justificado pelo fato de serem os pontos de equilíbrio mais próximos ao dipolo. Verificou-se que, quanto maior o comprimento do dipolo (maior d^*), tão mais afastados são os pontos de equilíbrio L_1 e L_2 em relação ao centroide do primário de menor massa. Em seguida, analisou-se o comportamento da variação das coordenadas sinódicas de L_1 e L_2 mediante variação do

parâmetro de massa f do dipolo. Inicialmente, e sem perda de generalidade, supôs-se como menos massivo o polo do dipolo voltado para o primário de maior massa do sistema. Em análise combinada com os demais parâmetros considerados, observou-se que quanto menor for o valor de μ e quanto maior for d^* mais sensíveis são as coordenadas sinódicas de L_1 e L_2 conforme varia-se f . De fato, quanto menos massa apresentar o primário representado pelo dipolo e maior for a distância entre os polos, mais próximo do polo P_{21} estará o ponto de equilíbrio L_1 e mais próximo do polo P_{22} estará o ponto de equilíbrio L_2 . Consequentemente, mais sensíveis serão estes pontos de equilíbrio em sua localização sobre o eixo das abscissas sinódicas dada a variação de f .

Por meio deste estudo, ao adotar-se o modelo de dipolo de massa em ressonância spin-órbita com o primário principal, compondo-se um sistema binário de asteroides, foi possível verificar a variação das coordenadas sinódicas dos pontos de equilíbrio desse sistema em comparação com suas coordenadas no PRTCC, que é a referência adotada. Verificou-se que tal variação está associada aos valores dos parâmetros μ , d^* e f do modelo. A variação das coordenadas dos pontos de equilíbrio do sistema, em unidades canônicas ou em termos percentuais, é tão mais significativa, para dado valor de μ , quanto maior for o valor do parâmetro d^* . Assim, para valores maiores de d^* , justifica-se a utilização do modelo físico proposto neste estudo.

Em seguida, foram determinadas as constantes adimensionais de Jacobi para cada ponto de equilíbrio considerando-se algumas configurações de valores para os parâmetros μ , d^* e f de modo a serem representados casos de dipolo simétrico e assimétricos. Com base nas constantes adimensionais de Jacobi foram traçadas as curvas de velocidade zero do sistema binário para cada caso. Observou-se que a passagem energeticamente espontânea da partícula de prova da oval do primário de maior massa para a oval do dipolo (e vice-versa) se dá com menor energia no caso em que $f = 0,75$, pois L_1 (primeiro ponto de contato) encontra-se mais afastado do polo P_{21} , por este deter a maior massa do dipolo. Verificou-se também que a passagem energeticamente espontânea da partícula de prova da oval dos primários para o exterior, por meio de L_2 (segundo ponto de contato) é mais facilitada (menor energia) no caso em que $f = 0,25$ e, portanto, na configuração em que o polo P_{22} é o mais massivo do dipolo, o que leva

L_2 a assumir maior distanciamento desse polo. A passagem energeticamente espontânea da partícula de prova entre a oval do primário mais massivo e o exterior, por meio de L_3 (terceiro ponto de contato), praticamente não sofre considerável variação conforme varia-se f devido à inercialidade gravitacional exercida pelo primário principal, representado pelo ponto massa P_1 sobre esse ponto de equilíbrio

Por fim, com o objetivo de se estudar o tempo de permanência da partícula de prova em órbita ao redor do primário tomado como dipolo, foram compostas grades de condições iniciais em termos de semi-eixo maior e excentricidade para uma órbita kepleriana osculadora inicial da partícula em torno desse primário. Foram consideradas órbitas diretas e retrógradas para a partícula de prova, sujeita à aceleração da pressão da radiação solar. Verificou-se, por meio do estudo do efeito da pressão da radiação solar sobre uma partícula no PRTCC (referência), que a pressão da radiação solar reduz o tempo de permanência orbital dessa partícula em torno do primário menos massivo. Para um período de integração de 512 dias, o que corresponde a meio período orbital do sistema binário ao redor do Sol, não foram observadas órbitas que sobrevivam para a partícula ao redor do dipolo, tomando-se órbitas diretas para os valores do parâmetro f considerados. A ausência de órbitas de sobrevivência associadas a este tempo de integração também ocorre para órbitas retrógradas associadas a valores de $f = 0,25$ e $f = 0,5$. Nestes casos, após 512 dias, a partícula de prova acaba por colidir com algum primário do sistema ou por ser ejetada gravitacionalmente do sistema binário. Verificou-se, no entanto, que para órbitas retrógradas ao redor do dipolo com fator de massa $f = 0,75$, são verificadas condições iniciais de semi-eixo maior e excentricidade que sustentam órbitas com duração de 512 dias. Em seguida, optou-se por considerar as grades de condições iniciais para o movimento orbital da partícula de prova ao redor do dipolo para os primeiros 50 dias de simulação. Neste caso, observa-se que, para diferentes valores do parâmetro f do dipolo, tanto para órbitas diretas quanto para órbitas retrógradas, há configurações de condições iniciais que propiciam à partícula manter-se em órbita ao redor dipolo por, pelo menos, 50 dias. Para valores menores de f , como, por exemplo, $f = 0,25$, as grades associadas às órbitas diretas em torno do dipolo oferecem mais configurações de condições iniciais ao movimento da partícula de prova que a mantenham em órbita pelos 50 dias considerados, se comparadas com as

grades correspondentes para órbitas retrógradas. Ao se considerar valores maiores para o parâmetro f , como, por exemplo, $f = 0,75$, verifica-se que as grades de condições iniciais para órbitas retrógradas fornecem um maior número de configurações associadas a maior tempo de sobrevivência para a partícula de prova ao redor do dipolo, se comparadas às grades para órbitas diretas correspondentes. Desta forma, conclui-se que para dipolo assimétrico com polo P_{22} mais massivo ($f = 0,25$), pode-se optar por órbitas diretas ou retrógradas para um veículo espacial ao redor desse primário, havendo maior número de configurações de condições iniciais associadas à maior permanência orbital no caso de órbitas diretas. Ao contrário, para dipolo assimétrico com polo P_{21} mais massivo ($f = 0,75$), embora também se possa optar por órbitas diretas ou retrógradas ao redor do dipolo, estas últimas não só se mostram associadas a um maior número de condições iniciais possíveis ao movimento orbital do veículo, se comparada à grade de órbitas diretas correspondente, como também fornecem maior tempo de sobrevivência para um veículo espacial em torno do primário menos massivo, chegando-se a ter configurações de condições iniciais que permitem órbitas retrógradas com os 512 dias de simulação considerados.

A partir do que foi apresentado, pode-se afirmar que as principais contribuições deste estudo foram: (i) formular e testar um modelo novo para o potencial gravitacional de um asteroide alongado e com distribuição assimétrica de massa, bem como para um sistema binário de asteroides, em que um dos primários é um asteroide com tais características; (ii) determinar os pontos de equilíbrio e as curvas de velocidade zero desse sistema binário genérico em função dos parâmetros desse modelo físico; e (iii) obter grades de condições iniciais ao movimento de uma partícula de prova em que se analisa a duração de órbitas em torno do asteroide alongado e com distribuição assimétrica de massa em função dos parâmetros do modelo e da órbita inicial dessa partícula.

Como estudos futuros, em continuidade ao presente, sugere-se o desenvolvimento de modelos de multipolos (múltiplos pontos de massa) para a representação tridimensional de asteroides, fazendo-se recurso a parâmetros geométricos e de massa, como os aqui empregados, com o objetivo de analisar o número e a localização dos pontos de equilíbrio de um corpo ou de um sistema de corpos e visando-se determinar órbitas em

torno desses pontos bem como sua estabilidade à medida que são variados os parâmetros do modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAÚJO, R. A. N. O sistema triplo de asteroides 2001SN263: dinâmica orbital e estabilidade. São José dos Campos: INPE, 2011.
- BECKER, T. M. et al. Physical modeling of triple Near-Earth Asteroid 153591 (2001 SN263). *Bulletin of the American Astronomical Society*, v. 41, p. 190, 2009.
- BEUTLER, G. **Methods of Celestial Mechanics**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- CUI, P.; QIAO, D. The present status and prospects in the research of orbital dynamics and control near small celestial bodies. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 4, n. 1, p. 14, 2014.
- CRAWFORD, I. A. Asteroids in the service of humanity. In: BADESCU, V. (Ed.). **Asteroids: prospective energy and material resources**. Berlin: Springer, 2013. in press.
- CHERMNYKH, S. V. On the stability of libration points in a certain gravitational field. **Vest. Leningrad University**, v. 2, n. 8, p. 10, 1987.
- DANTAS, M. P.; LLIBRE, J. The global phase space for the 2- and 3-dimensional Kepler problems. **Qualitative Theory of Dynamical Systems**, v. 8, p. 45, 2009.
- DULLIN, H. R.; WORTHINGTON, J. The vanishing twist in the restricted three-body problem. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 276, p. 12–20, 2014.
- DUTT, P.; ANILKUMAR, A. K. Planar fly-by trajectories to moon in the restricted three-body problem. **Advances in Space Research**, v. 54, n. 10, p. 2050–2058, 2014.
- DUTT, P.; SHARMA, R. Evolution of periodic orbits near the lagrangian point L2. **Advances in Space Research**, v. 47, n. 10, p. 1894–1904, 2011.
- DVORAK, R. **The role of resonances in astrodynamical systems**. Vienna: Institut for Astronomy. University Vienna, 2008.
- ELIPE, A.; LARA, M. A. Simple model for the chaotic motion around (433) Eros. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 51, n. 4, p. 391- 404, 2003.
- GEIGES, H. **The geometry of celestial mechanics**. London: University of Cologne, Cambridge University Press, 237p. 2016.
- GOZDZIEWSKI, K.: Stability of the triangular libration points in the unrestricted planar problem of a symmetric rigid body and a point mass. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, 79–103, 2003.

GOZDZIEWSKI, K.; MACIEJEWSKI, A. J. Nonlinear stability of the lagrangian libration points in the Chermnykh problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 70, n. 1, p. 41–58, 1998.

_____. Unrestricted planar problem of a symmetric body and a point mass: triangular libration points and their stability. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 75, n. 4, p. 251–285, 1999.

HOBSON, E. **The theory of spherical and ellipsoidal harmonics**. New York: Chelsea Publishing Company, 1955.

INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - IAG-USP. **A nova definição de planeta**. Grupo de Dinâmica de Sistemas Planetários. 2015. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/~dinamica/iau-planeta.html>>. Acesso em: 10 -ago_ 2018.

INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION - IAU. **Near Earth Asteroids (NEAs)**. 2013. Disponível em: <<https://www.iau.org/public/themes/neo/nea2/>>. Acesso em: 7 jun. 2018.

JET PROPULSION LABORATORY. CENTER OF NEAR EARTH OBJECTS STUDIES. **Frequently asked questions**. 2018. Disponível em: <<https://cneos.jpl.nasa.gov/faq/#ast>>. Acesso em: 7 -jun 2018.

JET PROPULSION LABORATORY. CENTER OF NEAR EARTH OBJECTS STUDIES. **Discovery statistics**. 2018. Disponível em: <<http://neo.jpl.nasa.gov/stats/>>. Acesso em: 7 -jun_ 2018_

KOKORIEV, A. A.; KIRPICHNIKOV, S. N. On the stability of stationary triangular lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric. **Vestn. Leningrad University**, v. 1, n. 1, p. 75–84, 1988.

KIRPICHNIKOV, S. N; KOKORIEV, A. A. On the stability of stationary collinear lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric **Vestn. Leningrad. University**, 72–84, 1988.

KUGA, H. K. et al. **Satélites artificiais: movimento orbital**. São José dos Campos: INPE, 106p, 2011.

KUGA, H. K. et al. **Introdução à mecânica orbital**. 2.ed. São José dos Campos: INPE, 77p, 2012.

MASAGO, B. Y. P. L. Estudo de órbitas ressonantes no sistema triplo 2001SN263. São José dos Campos: INPE_ 2014.

MASAGO, B. Y. P. L. et al. Developing the precessing inclined bi-elliptical four-body problem with radiation pressure to search for orbits in the triple asteroid 2001SN263. **Advances in Space Research**, v. 57, p. 962–982, 2016.

MCCUSKEY, S. W. **Introduction to celestial mechanics**. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1963.

MOLTON, F. R. **An introduction to celestial mechanics**. 4. ed. New York: The Macmillan Company, 1960.

MONTENBRUCK, O.; GILL, E. **Satellite orbits**. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1999.

NOLAN, M. C. et al. Arecibo radar imaging of 2001 SN263: a Near-Earth triple asteroid system. *Asteroids, Comets, Meteors*, n.8257,2008.

PICK, E. et al. **Theory of the Earth's gravity field**. New York: Elsevier, 1973.

PRADO, A. F. B. A. **Trajatórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. .75-113.

PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. **Fundamentos da tecnologia espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001.

RAMÍREZ, A. M.; VIDAL, C. Behavior of the binary collision in a planar restricted (n+1)-body problem. **Physica D: Nonlinear Phenomena.**, v. 28, n. 2, p. 1–11, 2013.

ROIG, F. V. **Ressonâncias planetárias: dinâmica orbital e caos no sistema solar**. Observatório Nacional, 2006. Disponível em: <<http://staff.on.br/froig/apostilas/>>. Acesso em: 2 set. 2018.

SANTOS, L. B. T. et al. Equilibrium points in the restricted synchronous three-body problem using a mass dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v.362, p.61, 2017.

_____ et al. Lifetime of a spacecraft around a synchronous system of asteroids using a dipole model. **Astrophysics and Space Science**, v.362, p.202, 2017.

_____. **Pontos lagrangeanos: aplicação para o Asteroide 2001SN263**. São José dos Campos: INPE, 2017.

SCHEERES, D. J. et al. Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: applications to 433 Eros. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 23, n. 3, p. 466–475, 2000.

SCHEERES, D.J. Orbital mechanics about small bodies. *Acta Astronautica*. 72, 1-14. 2012.

- SZEBEHELY, V. **Theory of orbits**. New York; London: Academic Press, 1967.
- VOLCHAN, S. B. Uma introdução à mecânica celeste. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 26., 2007, Rio de Janeiro. **Anais...** IMPA, 2007. 85p.
- WALSH, K. J. Asteroids with satellites: inventory, properties, and prospects for future discoveries. **Earth Moon Planet**, v.105, p.193–199, 2009.
- WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, n. 3, p.253–278, 1994.
- ZENG, X. Y. et al. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies. **Astrophysics and Space Science**, v. 356, p. 29–42, 2015a.
- ZENG, X. Y. et al. Equilibrium points of elongated celestial bodies as the perturbed rotating mass dipole. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 39, n. 6, p. 1223, 2015b.

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)	Manuais Técnicos (MAN)
Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.	São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.
Notas Técnico-Científicas (NTC)	Relatórios de Pesquisa (RPQ)
Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.	Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.
Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)	Publicações Didáticas (PUD)
São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.	Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.
Publicações Seriadas	Programas de Computador (PDC)
São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.	São as sequências de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.
Pré-publicações (PRE)	
Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.	