IMPLEMENTAÇÃO DA TÉCNICA DE MULTIGRID, NUM CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAL

Philippe R.B. Devloo
Deptº de Mecânica
INPE
São José dos Campos, SP.
12201

Antonio C. Faleiros
Arlenes S. da Silva
Deptº de Matemática
ITA/CTA
São José dos Campos, SP.
12225

RESUMO

Implementamos a técnica de multigrid descrita por Brandt [1], Hackbusch [3] e outros, no código unidimensional de elementos finitos descrito no livro de Becker, Carey e Oden [2]. Usamos uma estrutura de dados que permite uma generalização para dimensões maiores e a transferência dos dados de uma malha para outra foi realizada por meio do uso de bases hierárquicas.

INTRODUÇÃO

O livro de Becker et al. [2] apresenta um código de elementos finitos para problemas de valor no contorno em equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem. Implementamos neste código a técnica de multigrid descrita por Brandt [1], Hackbusch [3] e outros.

A discretização da equação diferencial pelo método de elementos finitos nos leva a um sistema algébrico do tipo $K_N u_N = f_N$. A técnica de multigrid consiste em obter uma solução aproximada deste sistema algébrico, usando um método iterativo (Jacobi, por exemplo), usando malhas de diferentes espessuras ou níveis (N indica o nível), amortecendo os termos de baixa freqüência do erro, nas malhas mais grossas.

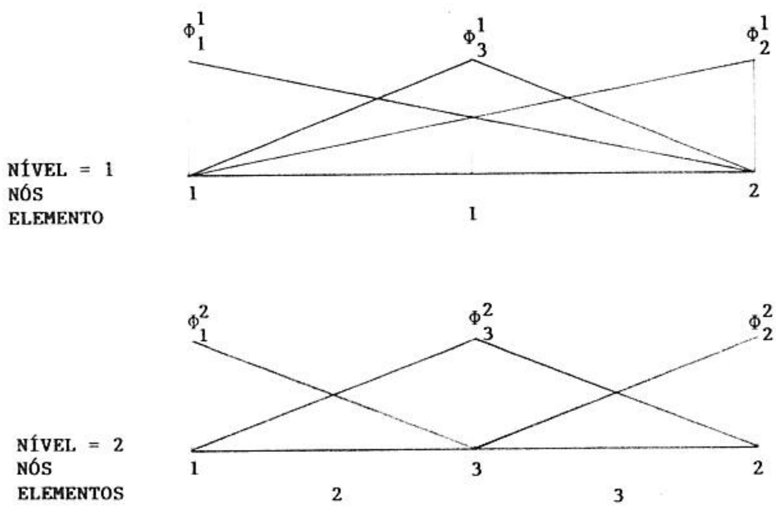
Para aplicação do método, a partir de um nível, fazemos alguns pas sos de relaxação na equação $K_N\ u_N = f_N$ para obter uma solução aproximada $\bar{u}_N$; calculamos

$$f_{N-1} = RF(f_N - K_N\ \bar{u}_N) + K_{N-1}\ RU\ \bar{u}_N \tag{4}$$

onde RF são os operadores de restrição de f e u respectivamente. Fazemos alguns passos de relaxação em $K_{N-1} u_{N-1} = f_{N-1}$ e voltamos ao nível N interpolando u_{N-1}. Realizamos este processo em diversos níveis, fazendo iterações em cada um.

ESTRUTURA DE DADOS

Usamos o pré-processador do CODE 1 para gerar o nível mais baixo (N = 1) e introduzimos uma subrotina REFINA para gerar os demais níveis até N = NIVMAX. Para passar de um nível a outro, usamos bases hierárquicas. A figura que segue mostra as bases hierárquicas e a divisão de um elemento em dois outros, denominados filhos.



Só trabalhamos com as matrizes de rigidez e vetor de força locais. Podemos interpolar a solução aproximada u usando as bases ϕ_i^1 ou ϕ_i^2, isto é,

$$u = C_1^1\phi_1^1 + C_2^1\phi_2^1 + C_3^1\phi_3^1 = C_1^2\phi_1^2 + C_2^2\phi_2^2 + C_3^2\phi_3^2 \quad . \tag{5}$$

Um exercício simples de geometria nos fornece

$$C_1^1 = C_1^2 \ , \ C_2^1 = C_2^2 \ , \ C_3^1 = C_3^2 - (C_1^2 + C_2^2)/2 \quad ,$$

que nos permite restringir e interpolar u. Se f_i^p, f_i^1 e f_i^2 representarem as funções de força no elemento pai (elemento 1 da figura) e nos filhos (elementos 2 e 3 da figura) então

$$f_1^p = f_1^1 + (f_2^1 + f_1^2)/2 \ ,$$

$$f_2^p = f_2^2 + (f_2^1 + f_1^2)/2$$

que nos permite restringir o vetor de força. As matrizes de rigidez nos diversos níveis são calculadas diretamente pela subrotina ELEM do CODE 1.

Introduzimos uma subrotina MULTI que executa os ciclos V e W de multigrid.

CONCLUSÃO

Estamos na fase inicial de análise do código. os primeiros resultados têm se mostrado promissores, fornecendo dados precisos com pouco esforço computacional. Usamos o código para realizar o ciclo V com quatro níveis e dois passos de relaxação em cada nível, para obter a solução aproximada de $-y'' + y = 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. Obtivemos uma aproximação absoluta da solução exata da ordem de 10^{-2}.

Nossa próxima etapa consistirá na análise da eficiência do método para resolver equações lineares e não lineares como a equação de Burger.

BIBLIOGRAFIA

1. **Brandt, A.**; Multi-level adaptative solutions to boundary-value problems. Math. Comp., 31, pp. 333-390, 1977

2. **Becker, E.B.**; **Carey, G.F.**; **Oden, J.T.**; Finite Elements, An Introduction. Prentice-Hall, 1981

3. **Hackbusch, W.**; Multi-Grid Methods and Applications. Springer-Verlag, 1984