



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/03.28.05.42-TDI

SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL BASEADO NA INTEGRAÇÃO DE UMA IMU DE CLASSE TÁTICA COM UM RECEPTOR GPS

Leonardo Kameyama de Castro Leite

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Helio Koiti Kuga, aprovada em 28 de março de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3T2LU62>>

INPE
São José dos Campos
2019

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/03.28.05.42-TDI

SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL BASEADO NA INTEGRAÇÃO DE UMA IMU DE CLASSE TÁTICA COM UM RECEPTOR GPS

Leonardo Kameyama de Castro Leite

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Helio Koiti Kuga, aprovada em 28 de março de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3T2LU62>>

INPE
São José dos Campos
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Leite, Leonardo Kameyama de Castro.

L536s Sistema de navegação inercial baseado na integração de uma IMU de classe tática com um receptor GPS / Leonardo Kameyama de Castro Leite. – São José dos Campos : INPE, 2019.
xxii + 90 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/03.28.05.42-TDI)

Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2019.

Orientador : Dr. Helio Koiti Kuga.

1. Navegação auxiliada. 2. Navegação inercial.
3. Autoalinhamento grosseiro. 4. Filtro de kalman cubature.
I.Título.

CDU 629.7.05



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Leonardo Kameyama de Castro Leite**

Título: "SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL BASEADO NA INTEGRAÇÃO DE UMA IMU DE CLASSE TÁTICA COM UM RECEPTOR GPS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em
**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle**

Dr. Mario Cesar Ricci



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. Helio Koiti Kuga



Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. Valdemir Carrara



Membro da Banca / ITA/DCTA / SJC Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Dr. Davi Antonio dos Santos



Convidado(a) / ITA/DCTA / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 28 de março de 2019

“O cavalo prepara-se para o dia da batalha, mas do Senhor vem a vitória”.

Provérbios 21:31

A meus pais, Waldemar e Mariko.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus de Abraão, Isaque e Jacó por todo o amor, bênçãos e milagres que me sustentaram até aqui.

À minha família, em especial, meus pais. Por todo o seu amor, educação, carinho e compreensão que formaram o que sou.

Ao meu pai, Waldemar, por compartilhar seu sonho comigo.

À Maureen Correa Viana, por todo o seu amor, paciência, perdão e compreensão nesta jornada. Que o final dela te encha de orgulho.

Ao meu avô Hitoshi Kameyama, por seu exemplo de vida e trabalho.

À Castro Leite Consultoria, empresa que me apoiou financeiramente durante todo o período, fomentando a pesquisa o desenvolvimento da tecnologia no Brasil.

Aos meus colegas do INPE que compartilharam os momentos de alegria e de dificuldade nesta aventura. Seria injusto mencionar nomes, mas cada um me influenciou positivamente à sua própria maneira.

Aos professores Ronan Arraes Jardim Chagas e Hélio Koiti Kuga. Nunca souberam, mas foram os responsáveis por me fazer criar coragem de me inscrever no mestrado e acreditar em mim mesmo.

A todos os meus amigos de infância, igreja, faculdade, trabalho que me incentivaram e estiveram comigo, mesmo longe. Obrigado.

Ao Instituto de Aeronáutica e Espaço, IAE, pelo fornecimento dos dados para este trabalho.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um procedimento de integração de informações de aceleração e de taxa angular de uma unidade de medida inercial (UMI) de classe tática, às medidas de uma massa de dados oriunda de um experimento real, emuladas como de um receptor GPS. Para tanto, foram aplicados métodos de autoalinhamento grosseiro, algoritmo de navegação puramente inercial e filtro de kalman *cubature*. Esta construção foi demonstrada através do detalhamento de equações de navegação inercial utilizadas para integrar movimento e atitude de um sistema com sensores inerciais solidários (“strapdown”); métodos de autoalinhamento grosseiro clássico (TRIAD) e novo (ON-TRIAD); métodos de filtragem de kalman clássica e o chamado kalman *cubature*. Foi feita a comparação do resultado da implementação da navegação puramente inercial utilizando o autoalinhamento TRIAD contra a o resultado da implementação da navegação puramente inercial utilizando o autoalinhamento ON-TRIAD. Também foi feita a implementação do algoritmo navegação inercial auxiliado por GPS utilizando filtro de kalman *cubature*.

Palavras-chave: Navegação Auxiliada. Navegação Inercial. Autoalinhamento Grosseiro. Filtro de Kalman *Cubature*.

INERTIAL NAVIGATION SYSTEM BASED FROM TACTICAL CLASS IMU AND GPS RECEPTOR INTEGRATION

ABSTRACT

The objective of this work is to present a procedure for integration of information from acceleration and angular rates, stemming from a tactical grade inertial measurement unit (IMU), with the measurement from a real experiment data mass emulated as GPS receiver. For this purpose, there were applied methods of coarse self-alignment, inertial navigation and cubature kalman filter. This framework was demonstrated with the description of detailed inertial navigation equations used to integrate attitude and movement from a strapdown inertial system; classic TRIAD and new ON-TRIAD coarse self-alignment methods; and the stochastic method of kalman filter and cubature kalman filter. After development and implementation of the algorithms, it has been made the comparsion between a pure inertial navigation algorithm with coarse self-alignment performed by TRIAD and ON-TRIAD. Also, the algorithm of inertial navigation aided with GPS using cubature kalman filter has been made.

Keywords: Aided Inertial Navigation. Inertial Navigation. Coarse Self-Alignment. Cubature Kalman Filter.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 2.1 – ECIF.....	7
Figura 2.2 – ECIF e ECEF representados na mesma imagem.	8
Figura 2.2 - Ilustração do sistema local geodético.	9
Figura 2.3 - Maiores detalhes sobre o sistema local geodético.....	9
Figura 2.5 - Esquema de funcionamento de acoplamento fraco.	32
Figura 2.6 - Esquema de funcionamento de acoplamento forte.	33
Figura 2.7- Esquema de funcionamento de acoplamento ultra-forte.....	34
Figura 3.1 - Vista superior da montanha russa Montezum.....	36
Figura 3.2. Diagrama do funcionamento de um algoritmo de navegação inercial pura.	38
Figura 3.3 - Dados do acelerômetro eixo X do SNI de referência.	39
Figura 3.4 - Dados do acelerômetro eixo Y do SNI de referência.	39
Figura 3.5 - Dados do acelerômetro eixo Z do SNI de referência.	40
Figura 3.6 - Implementação do FKC.	43
Figura 4.1 - Altura navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.....	48
Figura 4.2 - Latitude navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	50
Figura 4.3 - Longitude navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	51
Figura 4.4 - Lat x Long navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	52
Figura 4.5 - Lat x Long navegação autônoma REF x TRIAD.	53
Figura 4.6 - Lat x Long navegação autônoma REF x ON-TRIAD.....	53
Figura 4.7 - Yaw navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	55
Figura 4.8 - Pitch navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.....	56
Figura 4.9 - Roll navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.....	57
Figura 4.10 - VN navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	58
Figura 4.11 - VE navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	59
Figura 4.12 - VD navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.	60
Figura 4.13 - Deriva X, Y e Z, navegação auxiliada FKC.	63
Figura 4.14 - Bias Y, Z navegação auxiliada FKC.....	64

Figura 4.15 - Bias X, Y, Z navegação auxiliada FKC.	65
Figura 4.16 - Altura navegação auxiliada FKC.	66
Figura 4.17 - Erro da altura navegação auxiliada FKC.....	67
Figura 4.18 - Latitude navegação auxiliada FKC.....	68
Figura 4.19 - Longitude navegação auxiliada FKC.....	69
Figura 4.20 - Erros latitude e longitude navegação auxiliada FKC.....	70
Figura 4.21 - Pitch (Arfagem) navegação auxiliada FKC.	72
Figura 4.22 - Yaw (Guinada) navegação auxiliada FKC.	72
Figura 4.23 - Roll (Rolamento) navegação auxiliada FKC.	73
Figura 4.24 - Erros atitude navegação auxiliada FKC.....	74
Figura 4.25. VN (Velocidade Norte) navegação auxiliada FKC.....	76
Figura 4.26 - VE (Velocidade Leste) navegação auxiliada FKC.....	76
Figura 4.27 - VD (Velocidade Down) navegação auxiliada FKC.	77
Figura 4.28 - Erros das velocidades navegação auxiliada FKC.	77
Figura 4.29 - Resíduos de altitude.	79
Figura 4.30 - Resíduos de latitude.	79
Figura 4.31 - Resíduos de longitude.	80
Figura 4.32 - Resíduos de velocidade norte.....	82
Figura 4.33 - Resíduos de velocidade leste.	82
Figura 4.34 - Resíduos de velocidade baixo.	83

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 4.1 – Erro da Altura (H) ao longo do tempo.....	49
Tabela 4.2 – Erro da latitude ao longo do tempo.....	50
Tabela 4.3 – Erro da longitude ao longo do tempo.....	51
Tabela 4.4 – Erro da posição horizontal ao longo do tempo.	54
Tabela 4.5 – Erro do ângulo Yaw ao longo do tempo.	55
Tabela 4.6 – Erro do ângulo Pitch ao longo do tempo.	56
Tabela 4.7 – Erro do ângulo Roll ao longo do tempo.	57
Tabela 4.8 – Erro da velocidade norte ao longo do tempo.....	59
Tabela 4.9 – Erro da velocidade leste ao longo do tempo.	60
Tabela 4.10 - Erro da velocidade down (baixo) ao longo do tempo.	61
Tabela 4.11 – Erros altura navegação auxiliada.	66
Tabela 4.12 – Erros latitude e longitude na navegação auxiliada FKC.	68
Tabela 4.13 – Erros de atitude navegação auxiliada.....	71
Tabela 4.14 – Erros de velocidade navegação auxiliada.	75
Tabela 4.15 – Análise dos resíduos em posição.	81
Tabela 4.16 – Análise dos resíduos em velocidade.	84

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ECIF	<i>Earth Centered Inertial Frame</i>
ECEF	<i>Earth-Centered Earth-Fixed Frame</i>
IAE	Instituto de Aeronáutica e Espaço
FK	Filtro de Kalman <i>Filtro de Kalman Cubature</i>
FKC	Filtro de Kalman Estendido
FKE	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
FKU	<i>Global Positioning System</i>
GPS	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
INPE	<i>Micro Eletro-Mechanical System</i>
MEMS	Montagem de Sistemas Inerciais
NED	Acrônimo para o sistema de coordenadas <i>North-East-Down</i>
ON- TRIAD	<i>Orthogonal Normal Three-Axis Attitude Determination-Based</i>
SID	Serviço de Informação e Documentação
SNI	Sistema de Navegação Inercial
SPG	Serviço de Pós-Graduação
TDI	Teses e Dissertações Internas
TRIAD	<i>Three-Axis Attitude Determination-Based</i>
UMI	Unidade de Medida Inercial
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
WGS-84	Norma <i>World Geodetic System 84</i>

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos.....	1
1.3 Justificativa e bibliografia	3
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1 Sistema de coordenadas	6
2.1.1 ECIF	6
2.1.2 ECEF.....	7
2.1.3 NED, geográfico ou local geodético	8
2.1.3.1 Raio meridional	10
2.1.3.2 Raio normal.....	10
2.1.3.3 WGS-84	10
2.1.4 Sistema de coordenada do corpo	11
2.2 Equações de navegação inercial	13
2.3 Autoalinhamento.....	17
2.3.1 TRIAD	18
2.3.2 ON-TRIAD.....	22
2.4 Navegação inercial auxiliada	23
2.4.1 Navegação inercial auxiliada por GPS.....	24
2.4.1.1 Funcionamento do sistema GPS	24
2.4.2 Filtro de Kalman	25
2.4.2.1 Filtro de Kalman caso contínuo discreto	26
2.4.2.2 Filtro de Kalman Cubature	27
2.4.2.2.1 Fase de propagação.....	29
2.4.2.2.2 Fase de atualização.....	31
2.4.2.3 Decomposição de Cholesky.....	31
2.4.3 Acoplamentos	32
2.4.3.1 Acoplamento fraco	32
2.4.3.2 Acoplamento forte.....	33

2.4.3.3	Acoplamento ultra forte	33
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	35
3.1	Descrição dos dados	35
3.2	Implementação da navegação inercial autônoma.....	37
3.3	Implementação dos métodos de autoalinhamento	38
3.4	Implementação de navegação inercial auxiliada por GPS através do FKC40	
4	TESTES E RESULTADOS	45
4.1	Autoalinhamento.....	45
4.1.1	Filtro de mediana	45
4.1.2	TRIAD	46
4.1.3	ON-TRIAD.....	46
4.1.4	Navegação autônoma	47
4.1.5	Análise dos resultados	48
4.1.6	Análise dos resultados em posição.....	48
4.1.7	Análise dos resultados em atitude	54
4.1.8	Análise dos resultados em velocidade	57
4.2	Navegação inercial auxiliada por GPS através do FKC.....	61
4.2.1	Resultados da estimação de Bias e Derivas	62
4.2.2	Resultado em posição.....	65
4.2.3	Resultado em atitude	70
4.2.4	Resultado em velocidade.....	74
4.2.5	Análise de resíduos.....	78
4.2.5.1	Resíduos de posição	78
4.2.5.2	Resíduos de velocidade.....	81
5	CONCLUSÃO	85
5.1	Trabalhos Futuros.....	87
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A crescente miniaturização de sensores inerciais, baseada em tecnologia MEMS (*Micro Electro-Mechanical System*) de acelerômetros e de girômetros tem permitido o desenvolvimento de um número cada vez maior de dispositivos embarcados dotados de alguma funcionalidade de navegação. Dada a maior integração tecnológica de outros sistemas externos e o baixo custo dos sensores inerciais MEMS, a fusão de medidas de um sistema inercial com as medidas de sistemas externos, como as informações de um sistema GPS, ou de um magnetômetro ou de um altímetro, por exemplo, permitem uma navegação mais acurada

Apesar dos avanços tecnológicos na manufatura de sensores inerciais, as aplicações de navegação inercial em um sistema de tempo real possuem suas dificuldades, limitações intrínsecas e fontes de erros. Como exemplos de erros podemos citar os erros de alinhamento inicial, erros numéricos, erros de calibração e erros de modelagem. A implantação de métodos eficientes de autoalinhamento e de fusão de dados do sistema inercial com sensores externos são imprescindíveis para a atenuação estes erros de navegação.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo o estudo de métodos para diminuir os erros de um sistema de navegação inercial. Desta forma, visam-se dois objetivos distintos:

- Estudo comparativo de dois métodos de alinhamento grosseiro, TRIAD e ON-TRIAD, bem como o seu desempenho em navegação puramente inercial;
- Integração, por meio de software, de medidas de aceleração e de velocidade angular de uma UMI de classe tática com as medidas de um receptor GPS através de um algoritmo utilizando filtro de kalman *cubature* (FKC).

Este trabalho comparará 2 métodos de autoalinhamento grosseiro (TRIAD e ON-TRIAD). O método TRIAD é bastante conhecido (BRITTING, 1971) e o método ON-TRIAD foi proposto em Silva et al. (2016). Ambos serão analisados e comparados em termos de performance para o problema de aplicação.

Uma vez que o alinhamento não é perfeito, nota-se na prática que os erros se acumulam ao longo do tempo, tendo como causas a má inicialização, os erros dos sensores, e os erros cometidos pelo processador devidos ao algoritmo, erros de arredondamento e truncamento, típicos de processamento numérico. Assim sendo, recorre-se a auxílio externo para mitigar essa acumulação de erros. O auxílio externo pode ser fornecido por sensores extras (como magnetômetro, odômetro, altímetro, GPS e etc...). Esta técnica recebe o nome de navegação inercial auxiliada (BIEZAD, 1999; GREWAL et al., 2001; FARREL; BARTH, 1999; FARREL, 2008). O GPS (Sistema de Posicionamento Global) aparece como o sensor auxiliar mais comum e será utilizado neste trabalho. Assim, além dos sensores inerciais, adiciona-se o auxílio externo através de sensores extras (GPS), de forma que é necessário um procedimento de fusão de dados para o processamento das medidas realizadas pelos sensores. Para tanto usa-se comumente o filtro de kalman. Na sua forma linear o filtro de kalman é a solução ótima para o problema de mínima variância ou mínimo erro (MAYBECK, 1979; GELB, 1974; BROWN; HWANG, 1997).

Entretanto, o problema de navegação inercial auxiliada é em geral não-linear, de forma que filtros de kalman não-lineares devem ser utilizados, tais como o filtro de kalman estendido FKE (MAYBECK, 1979), filtro de kalman *unscented* FKU (JULIER; UHLMAN, 2004), ou filtro de kalman *cubature* FKC (ARASARATNAM; HAYKIN, 2009). Para este trabalho foi escolhido o filtro de kalman *cubature*, por ser o menos explorado em problemas similares. Os fundamentos do FKC podem ser encontrados em Arasaratnam e Haykin (2009), e Sarkka e Solin (2012). Algumas aplicações variadas tem sido reportadas na literatura recente de engenharia aeroespacial, em determinação de órbita e atitude (ZHANG et al., 2014; LI; GE, 2011; XIAOJUN et al., 2012; GARCIA et al., 2019), navegação de VANT (BALLET, 2017), e navegação inercial auxiliada com acoplamento forte (ZHAO, 2016). Em termos de fusão de dados, o presente trabalho irá

desenvolver o algoritmo FKC para realizar a fusão dos dados dos sensores inerciais e do sensor auxiliar GPS.

1.3 Justificativa e bibliografia

Navegação é o processo de se determinar a posição, velocidade e atitude no tempo, em relação a sistemas de referências especificadas (BIEZAD, 1999). Navegação inercial por sua vez utiliza dados dos chamados sensores inerciais. Os sensores inerciais clássicos fornecem dados de força específica e de velocidades angulares que podem ser obtidas por várias tecnologias de transdução. Os chamados acelerômetros medem a força específica, e os giroscópios medem a taxa de rotação desse corpo. Girômetros e acelerômetros são chamados de sensores inerciais, pois medem velocidade angular e força específica não gravitacional em relação a um *frame* ou referencial inercial. Há uma variada gama de tecnologias utilizadas para fabricar esses sensores, que fornecem assim diferentes desempenhos e.g.(TITTERTON; WESTON, 2004; GREWAL et al., 2001; FARREL; BARTH, 1998).

Existem essencialmente dois tipos de montagem para navegação inercial (GREWAL et al., 2001): estabilização de plataforma (“gimballed”), e sensores solidários (“strapdown”). Este trabalho ater-se-á à navegação inercial *strapdown*.

Uma das preocupações que se deve ter com os SNI *strapdown* é na forma de como é realizada a sua inicialização. Em outras palavras, é necessário o conhecimento suficientemente preciso das condições iniciais de posição, velocidade, e atitude para iniciar a navegação. Quanto maior a precisão dessa inicialização, menor o acúmulo de erros ao longo do processo de estimação do movimento. O uso dos próprios sensores inerciais (acelerômetros e giroscópios) para inicialização é chamado de auto alinhamento.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O conhecimento sobre o tema navegação inercial, apesar de ser um assunto clássico, tornou-se um ativo imprescindível nos dias de hoje. No passado, restrita às viagens e grandes navegações, nos tempos modernos, faz-se presente nas tecnologias espaciais, bélica, civis e, entre outros.

Entende-se por navegação a arte de determinar a localização de um objeto. O conceito de navegação pode ser estendido para a determinação do estado dinâmico de um objeto, não se limitando apenas à sua localização. No caso, a arte de determinar a localização, velocidade e atitude efetivas de um objeto, segundo Grewal et al. (2013).

Ainda de acordo com Grewal et al. (2013), a navegação tem seu fundamento teórico conhecido desde o tempo de Newton. Ou seja, do instante inicial t_0 , a partir das posições $x(t_0)$, velocidade $v(t_0)$ e aceleração $a(s)$ para $s > t_0$, é possível determinar a solução de navegação para um objeto.

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(s). ds \quad (2.1)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s). ds \quad (2.2)$$

As medidas de aceleração obtidas serão integradas, conforme as Equações 2.1 e 2.2, e fornecerão estimativas de mudanças em velocidade e em posição. Segundo Titterton e Weston (2004), prefere-se medidas de aceleração a medidas diretas de velocidade ou de posição, pois essas últimas requerem uma referência, enquanto aceleração pode ser medida diretamente.

Entendem-se por sensores inerciais os dispositivos que propiciam as medidas de grandezas inerciais como aceleração e velocidade angular para implementação das equações supracitadas. No caso, sensores que:

- Realizam medidas de força específica em três eixos
- Realizam medidas dos movimentos de rotação dos sensores para determinar a direção dos componentes de aceleração

É de se notar que a navegação inercial apresenta, como principais fontes de erro:

- Precisão dos sensores
- Alinhamento inicial
- Erros numéricos

Um navegador enxerga apenas as informações que os seus sensores lhe fornecem. Dadas as equações de cinemática, é possível perceber que um erro constante na medida da aceleração aumenta com o quadrado do tempo. Tal afirmação se sustenta observando as Equações 2.1 e 2.2. Caso a medida de aceleração contenha um erro constante er a Equação 2.1 se torna:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t (a(s) + er) ds \quad (2.3)$$

Desta forma, a Equação 2.2 poderia ser reescrita da seguinte forma:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (v(s) + er s) ds \quad (2.4)$$

Desenvolvendo 2.4 temos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) \cdot ds + er \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \right) \quad (2.5)$$

Conforme mostrado nas Equações 2.3, 2.4 e 2.5, qualquer erro na posição inicial do navegador será refletido na integração das equações, independentemente dos erros dos sensores.

Para que navegação inercial seja mais precisa, ou seja, para que se atenuem o erro er , faz-se uso de outros tipos de sensores que promovem um auxílio externo. Os sensores de auxílio ou *aiding*, inglês, têm como principal finalidade limitar ou reduzir erros de navegação. A ideia principal, segundo Titterton e Weston (2004), é, através de uma fonte de informações independente dos sensores inerciais, realizar procedimentos matemáticos que possibilitem, junto com os dados de navegação inercial, calcular uma estimativa de dados com maior precisão.

2.1 Sistema de coordenadas

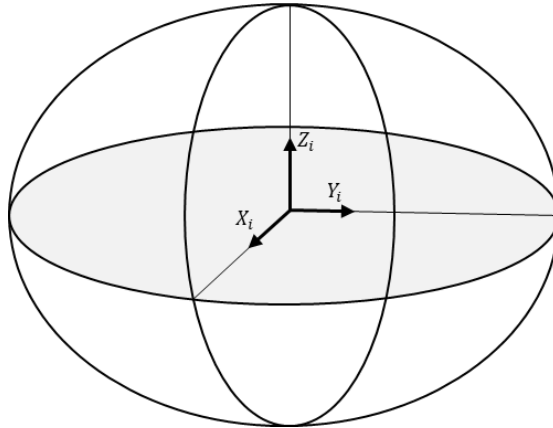
Como as medidas inerciais são realizadas em relação a referenciais inerciais, a navegação inercial não consiste apenas em integrar as Equações de aceleração e de velocidade 2.1 e 2.2 para encontrar a posição. Devem-se considerar diversos fatores para uma abordagem correta do problema. Como por exemplo, o triedro em que as informações de aceleração e de velocidade foram colhidas, e o movimento de rotação da Terra. Caso contrário, cálculos podem ser feitos utilizando referenciais não-inerciais.

Os sistemas de coordenadas de interesse, explicados com maior profundidade em Farrell (2008), e abordados neste trabalho são:

2.1.1 ECIF

O sistema de coordenadas ECIF (*Earth Centered Inertial Frame*), X_i , Y_i , Z_i , é o sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de massa do planeta Terra. Para a maioria das aplicações é considerado como o referencial inercial. A Figura 2.1 mostra o sistema de coordenadas ECIF em que: eixo X_i coincide com o cruzamento entre: i) a linha do Equador e o meridiano de Greenwich ou ii) o meridiano que contém o ponto vernal considerado inercial (ECIF); o eixo Z_i coincide com o eixo de rotação da Terra; o eixo Y_i é ortogonal aos eixos X_i e Z_i .

Figura 2.1 – ECIF.



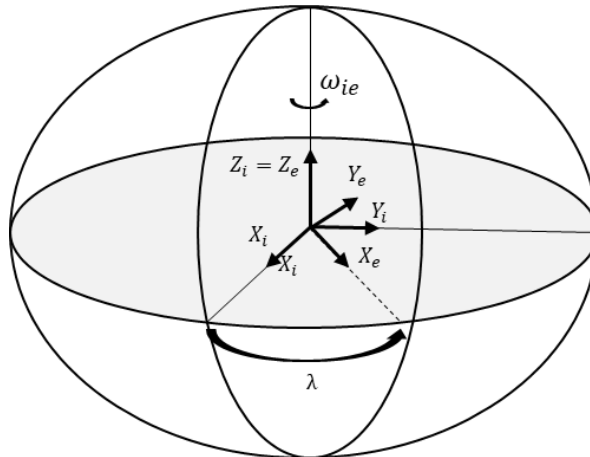
Fonte: Produção do Autor.

Esse sistema consiste em um sistema de coordenadas ortogonais e dextrogiro $X_i Y_i Z_i$.

2.1.2 ECEF

O sistema de coordenadas ECEF (*Earth-Centered Earth-Fixed Frame*), X_e, Y_e, Z_e , é o sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de massa do planeta Terra. Por definição, este sistema gira com a Terra de acordo com a respectiva velocidade de rotação (ω_{ie}). Ou seja, num instante inicial, os ECEF e ECIF coincidem. Entretanto, à medida em que o tempo passa, o ECEF sofre rotação de um ângulo λ em relação ao eixo Z_e do ECIF.

Figura 2.2 – ECIF e ECEF representados na mesma imagem.

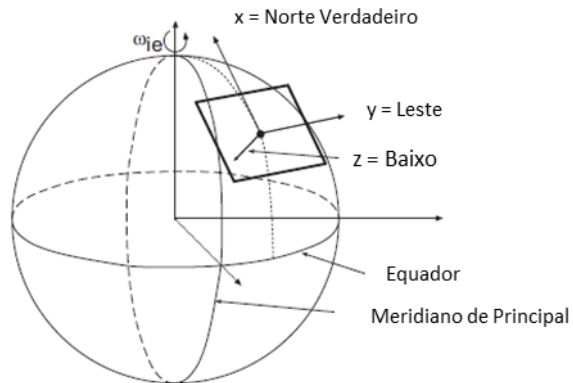


Fonte: Produção do Autor.

2.1.3 NED, geográfico ou local geodético

O sistema de coordenadas NED (*North East Down*) ou local geodético é determinado por um plano tangente à elipse geodética em um determinado ponto de interesse. Possui cada um dos seus respectivos eixos apontando para o norte, leste e para baixo. No caso, eixo x aponta para norte verdadeiro; eixo z aponta na direção vertical para baixo, perpendicular à superfície do elipsoide de referência; o eixo y, completando o sistema dextrogiro, aponta para o Leste. Como dois de seus eixos estão na horizontal, este sistema de coordenadas está sempre na altura local.

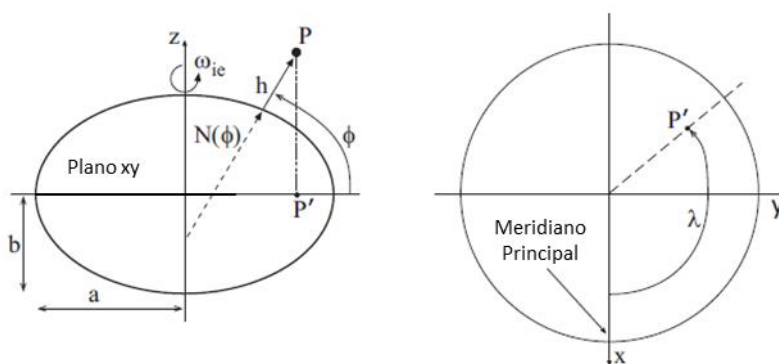
Figura 2.2 - Ilustração do sistema local geodético.



Fonte: Adaptado de Farrell (2008).

Convenientemente, o sistema geodético considera a Terra aproximadamente como um elipsoide cujo centro de massa coincide com o centro da Terra. O sistema NED costuma, com frequência, ser utilizado como o triedro de navegação. Assim sendo, este trabalho adotará o sistema NED para o seu triedro de navegação.

Figura 2.3 - Maiores detalhes sobre o sistema local geodético.



Fonte: Farrell (2008).

Como o planeta é considerado um elipsoide, é necessário, para fins de navegação inercial, não considerar constante o raio do elipsoide da Terra. Este sim, é dividido em dois raios distintos segundo Farrell (2008), como se segue:

2.1.3.1 Raio meridional

O raio meridional de curvatura da Terra, ou simplesmente raio meridional, é formulado da seguinte maneira:

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.6)$$

Em que R_M é o raio meridional, a é o semi-eixo maior do elipsoide da Terra, e é a excentricidade da Terra e φ é a Latitude.

2.1.3.2 Raio normal

O raio normal de curvatura da Terra, ou simplesmente raio normal, é definido como a reta perpendicular ao ponto do elipsoide da Terra, em uma determinada latitude, que se prolonga até cruzar com o eixo polar. É formulado da seguinte maneira:

$$R_N = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2(\varphi))^{\frac{1}{2}}} \quad (2.7)$$

Em que R_N é o raio normal, a é o semi-eixo maior do elipsoide da Terra, e é a excentricidade da Terra, φ é a Latitude.

2.1.3.3 WGS-84

O WGS-84, trata-se de um modelo elipsoidal da Terra, adotado por este trabalho, que, além de fornecer os parâmetros geodéticos a serem considerados para os cálculos do GPS, fornece também o modelo da gravidade, imprescindível para uma navegação inercial precisa. No caso, como utilizado por Einwoegerer (2009):

- $R_t = 6378137$ m
- $\omega_{ie} = 7,2921115 \cdot 10^{-5}$ rad/s
- $f = 0,003352810664747$
- $g = 9,788324190687$ m/s²

$$g(\varphi) = g \cdot [1 + 0,0053024 \cdot \text{sen}^2(\varphi) - 0,0000058 \cdot \text{sen}^2(\varphi)] \quad (2.50)$$

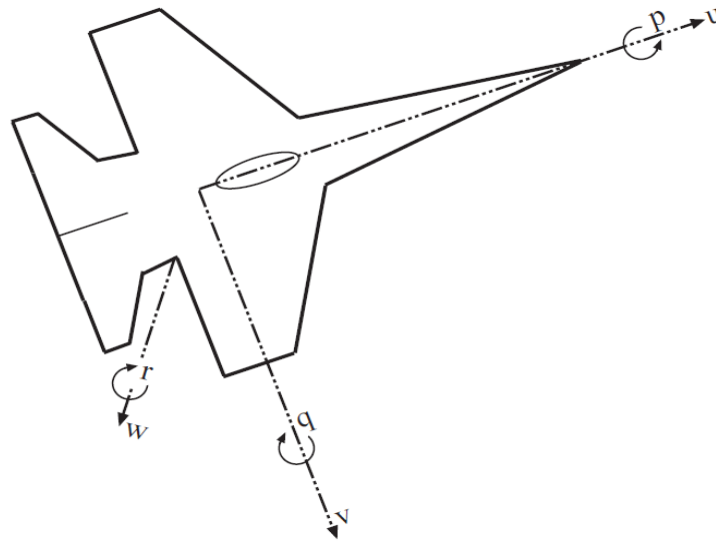
$$g(\varphi, h) = g(\varphi) \cdot [3,0877 \cdot 10^{-6} - 0,0044 \cdot 10^{-6} \text{sen}^2(\varphi)] \cdot h + 0,072 \cdot 10^{-12} \cdot h^2 \quad (2.51)$$

Onde R_t é o raio da Terra, ω_{ie} é a velocidade de rotação da Terra, f é o fator de achatamento da Terra, g é a gravidade ao nível do mar, h é a altura local, $g(\varphi)$ é o modelo da gravidade, em m/s², em função da latitude e $g(\varphi, h)$ é o modelo da gravidade em, em m/s², função da latitude e da altura.

2.1.4 Sistema de coordenada do corpo

O sistema do corpo consiste no sistema de coordenadas em que o SNI (sistema de navegação inercial) é fixado no corpo do veículo que irá navegar. É um sistema de coordenadas não inercial. Para simplificações, considera-se que o SNI se encontra fixado no centro de massa de um veículo qualquer, com os eixos alinhados com os respectivos eixos do veículo. Os eixos u , w e v do veículo são respectivamente os eixos da direção dianteira, da direção baixo e da direção que completa a tríade dextrogira ortogonal. No caso, o eixo x do SNI está alinhado com o eixo u do veículo (longitudinal). Analogamente, o eixo y do SNI está alinhado com o eixo v do veículo e o eixo z do SNI está alinhado com o eixo w .

Figura 2.4 - Exemplo de sistema de coordenadas corpo.



Fonte: Farrell (2008).

Os dados dos sensores, apesar de fornecidos no sistema do corpo do veículo devem ser referidos ao triedro de navegação. Para tanto, é necessário utilizar de uma matriz de atitude para converter de um triedro para outro. As matrizes de rotação em cada um dos eixos, segundo Titterton e Weston (2004) podem ser representadas por:

$$\mathbf{C1} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{C2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{C3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Onde ψ é o ângulo de euler de *yaw*, ou, guinada, θ é o ângulo de euler de *pitch*, ou, arfagem, ϕ é o ângulo de euler de *roll*, ou, rolamento.

A matriz de transformação do sistema NED para o sistema do Corpo, na sequência de rotações (3-2-1) é dada por Farrell (2008):

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Em que: \mathbf{C}_n^b é a matriz de atitude do sistema NED para o sistema do Corpo.

Já, a matriz de atitude do sistema corpo para o sistema NED, conforme Titterton e Weston (2004) é:

$$\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{C}_n^b)^T \quad (2.12)$$

2.2 Equações de navegação inercial

A implementação de um algoritmo de navegação inercial autônoma se dá mediante o desenvolvimento e solução das equações que descrevem a evolução temporal dos parâmetros de navegação, em função dos dados recebidos pelos sensores inerciais.

Seja a força específica não gravitacional \mathbf{a}^b fornecida pelos acelerômetros do SNI no sistema do corpo, já corrigida dos vieses ou *bias*.

$$\mathbf{a}^b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Onde a_x , a_y e a_z são as medidas acelerométricas corrigidas dos respectivos *bias* nos eixos x, y e z, \tilde{a}_x , \tilde{a}_y e \tilde{a}_z são as medidas realizadas pelos acelerômetros dos

eixos x, y e z, e b_x , b_y e b_z são os respectivos vieses (*bias*) dos acelerômetros obtidos ou estimados pelo processo.

Seja a velocidade angular ω_{ib}^b fornecida pelos girômetros, já corrigida dos vieses ou deriva, do SNI no sistema do corpo.

$$\omega_{ib}^b = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Em que ω_x , ω_y e ω_z : Medidas girométricas corrigidas das respectivas derivas, $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$ e $\tilde{\omega}_z$ são as medidas realizadas pelos girômetros dos eixos x, y e z, respectivamente, e, u_x , u_y e u_z são as derivas dos girômetros obtidos ou estimados pelo processo.

Seja Ω o valor escalar da velocidade de rotação da Terra, φ a latitude geodésica e ω_{ie}^n o vetor velocidade de rotação terra do sistema ECEF em relação ao sistema ECIF no triedro de navegação. Então este vetor é explicitador por:

$$\omega_{ie}^n = \begin{pmatrix} \Omega \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\Omega \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Seja ω_{en}^n o vetor velocidade angular do sistema de Navegação em relação ao sistema ECEF projetado no sistema de navegação. Então:

$$\omega_{en}^n = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos(\varphi) \\ -\dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Onde λ é a longitude.

Seja ω_{in}^n conforme a definição:

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \quad (2.19)$$

Segundo Farrell (2008), as equações de navegação inercial no triedro de navegação podem ser dadas da seguinte forma:

Definição de posição no triedro de navegação:

$$\mathbf{p}^n = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\lambda} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Onde $\hat{\varphi}$ é a latitude atualizada, $\hat{\lambda}$ é a longitude atualizada e \hat{h} é a altura atualizada.

Definição de velocidade relativa à Terra no triedro de navegação:

$$\mathbf{v}_e^n = \begin{pmatrix} \hat{v}_N \\ \hat{v}_E \\ \hat{v}_D \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Onde: \hat{v}_N , \hat{v}_E e \hat{v}_D são as velocidades escalares atualizadas nas direções Norte, Leste e Baixo, respectivamente.

Equação da cinemática da posição:

$$\dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{v}_e^n \quad (2.22)$$

Equação da cinemática da velocidade:

$$\dot{\mathbf{v}}_e^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{a}^b + \mathbf{g}^n - (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^b) \mathbf{v}_e^n \quad (2.23)$$

Equação da cinemática da atitude:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^b) \quad (2.24)$$

Em que \mathbf{g}^n é o vetor gravidade no triedro de navegação, \mathbf{C}_b^n é a matriz de atitude do triedro corpo para o triedro de navegação, $\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b$ é a matriz antissimétrica do vetor $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ e $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^b$ é a matriz antissimétrica do vetor $\boldsymbol{\omega}_{in}^b$.

A Equação 2.22 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\phi}} \\ \dot{\hat{\lambda}} \\ \dot{\hat{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_M + \hat{h}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos(\hat{\phi})(R_N + \hat{h})} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_N \\ \hat{v}_E \\ \hat{v}_D \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Já a Equação 2.23 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{v}}_N \\ \dot{\hat{v}}_E \\ \dot{\hat{v}}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{a}_E \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} + \mathbf{g}^n - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_D & \omega_E \\ \omega_D & 0 & -\omega_N \\ -\omega_E & \omega_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_N \\ \hat{v}_E \\ \hat{v}_D \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Complementando a navegação inercial no triedro de navegação, segundo Titterton e Weston (2004), a Equação 2.15, da velocidade angular no triedro do corpo, pode ser reescrita utilizando as Equações 2.9 e 2.10.

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C3} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C3.C2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Utilizando o resultado da Equação 2.27, é possível rearranjá-lo e o escrever na forma da Equação da integração da atitude.

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen}\phi \text{tg}\theta & \text{cos}\phi \text{tg}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\theta} & \frac{\text{cos}\phi}{\text{cos}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

É de se notar que a Equação 2.28 tem solução limitada. Quando o ângulo de arfagem $\theta = 90^\circ$, $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ têm solução indeterminada. Ou seja, necessita ser $\theta \neq 90^\circ$.

2.3 Autoalinhamento

Para ser possível a integração das Equações 2.22, 2.26 e 2.28, é necessário que se conheça as condições iniciais de suas variáveis. O processo de definição desses valores é chamado de alinhamento inicial.

O mau alinhamento inicial é uma das principais fontes de erro da navegação inercial, senão a principal, dependendo dos sensores.

Entende-se alinhamento como o procedimento para estabelecer a atitude inicial UMI. Quando os sensores são precisos o suficiente e o sistema que os contém é estacionário em relação à Terra, pode ser realizado o procedimento de autoalinhamento, segundo Grewal et al. (2013). O autoalinhamento é realizado em duas etapas:

- **Nivelamento:** Consiste no uso de acelerômetros para determinar, através da gravidade conhecida do local, a orientação da UMI em relação à vertical.
- **Girocompasso:** Consiste no uso dos girômetros para determinar a rotação da Terra em cada um dos eixos da UMI e, dessa forma, obter o ângulo com o norte geográfico (azimute).

Com a combinação dos resultados do nivelamento e do girocompasso, é possível determinar a orientação da UMI com relação ao norte, usualmente através de ângulos de euler, desde que o sistema estacionário não esteja na proximidade dos polos norte ou sul da Terra.

Em geral, o alinhamento pode ser dividido em duas fases: alinhamento grosseiro e alinhamento fino. Cada uma das fases pode ser considerada como um método de autoalinhamento, mas com diferenças na rapidez de execução e na precisão de seus resultados.

O alinhamento grosseiro consiste em um método analítico que, com o conhecimento da aceleração gravitacional e da velocidade de rotação da Terra, usa os dados da UMI e gera, como o próprio nome sugere, uma estimativa crua da orientação do sistema inercial.

O alinhamento fino é um método que utiliza os resultados do alinhamento grosseiro e melhora-os através do uso de equações dinâmicas. Diversos métodos são propostos na literatura incluindo um filtro de kalman indireto. O estudo deste método está fora do escopo desta tese de mestrado.

Neste trabalho, pretende-se dar continuidade ao estudo realizado por Castro Leite et al. (2017), implementando dois algoritmos de alinhamento grosseiro distintos: o clássico TRIAD e o recente ON-TRIAD. A utilização de dois métodos distintos se dará para permitir a comparação de desempenho da navegação inercial ao utilizar o alinhamento inicial proposto por ambos.

2.3.1 TRIAD

O método proposto por Britting (1971), posteriormente conhecido como TRIAD, *Three-Axis Attitude Determination-Based*, é um método analítico de autoalinhamento grosseiro. Ou seja, provê uma estimativa crua a respeito da atitude inicial de uma UMI. O método consiste em utilizar os vetores gravidade e velocidade angular da Terra, valores conhecidos ao longo da superfície terrestre, a fim de se determinar a matriz de atitude no triedro inercial. A formulação do método consiste em:

$$\mathbf{g}^b = \mathbf{C}_n^b \cdot \mathbf{g}^n \quad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \mathbf{C}_n^b \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (2.30)$$

Onde \mathbf{g}^b é o vetor de aceleração gravitacional ou gravidade, no triedro da plataforma, \mathbf{g}^n é o vetor de aceleração gravitacional ou gravidade, no triedro de navegação, $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$ é o vetor de velocidade de rotação da Terra, no triedro da

plataforma, ω_{ie}^n é o vetor de velocidade de rotação da Terra, no triedro de navegação, C_n^b é a matriz de atitude ou de cossenos diretores que rotacionam o sistema do triedro de navegação para o triedro da plataforma.

Usa-se o produto vetorial entre os vetores gravidade e o vetor velocidade de rotação da Terra para obter um vetor ortogonal aos dois supracitados. No caso:

$$\mathbf{v}^b = \mathbf{g}^b \times \omega_{ie}^b \quad (2.31)$$

$$\mathbf{v}^b = C_n^b \cdot \mathbf{v}^n \quad (2.32)$$

$$C_b^n = (C_n^b)^{-1} = (C_n^b)^T \quad (2.33)$$

A partir das Equações 2.29, 2.30, 2.31 e 2.32, considerando a propriedade da Equação 2.31, que pode ser encontrada em Britting (1971), pode-se afirmar que:

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{nT} \\ \omega_{ie}^{nT} \\ (\mathbf{g}^n \times \omega_{ie}^n)^T \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{bT} \\ \omega_{ie}^{bT} \\ (\mathbf{g}^b \times \omega_{ie}^b)^T \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Em que \mathbf{v}^b é o vetor velocidade, no triedro da plataforma, \mathbf{v}^n é o vetor velocidade, no triedro de navegação.

As Equações 2.29, 2.30, 2.31 podem ser reescritas em função dos valores dos sensores do MSI, segundo Silva et al. (2016).

$$\mathbf{g}^b \approx -\mathbf{a}^b = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{g}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^b = \begin{pmatrix} a_z \cdot \omega_y - a_y \cdot \omega_z \\ a_x \cdot \omega_z - a_z \cdot \omega_x \\ a_y \cdot \omega_x - a_x \cdot \omega_y \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

No caso, no triedro de navegação, os vetores deveriam apresentar os seguintes valores em um caso ideal.

$$\mathbf{g}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_p \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \Omega \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\Omega \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Desta forma, a matriz de atitude da Equação 2.34 pode ser escrita de outra forma, em função dos valores indicados pelos sensores inerciais. Este arranjo também proporciona extrair os ângulos de euler.

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \frac{g_p \cdot \omega_x - \Omega \cdot \sin(\varphi) \cdot a_x}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} & \frac{g_p \cdot \omega_y - \Omega \cdot \sin(\varphi) \cdot a_y}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} & \frac{g_p \cdot \omega_z - \Omega \cdot \sin(\varphi) \cdot a_z}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} \\ \frac{a_z \cdot \omega_y - a_y \cdot \omega_z}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} & \frac{a_x \cdot \omega_z - a_z \cdot \omega_x}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} & \frac{a_y \cdot \omega_x - a_x \cdot \omega_y}{g_p \cdot \Omega \cdot \cos(\varphi)} \\ -\frac{a_x}{g_p} & -\frac{a_y}{g_p} & -\frac{a_z}{g_p} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{C_{3,2}}{C_{3,3}}\right) = \arctg\left(\frac{a_y}{a_z}\right) \quad (2.42)$$

$$\theta = \arcsin(C_{3,1}) = \arcsin\left(\frac{a_x}{g_p}\right) \quad (2.43)$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{C_{2,1}}{C_{1,1}}\right) = \arctg\left(\frac{a_z \cdot \omega_y - a_y \cdot \omega_z}{g_p \cdot \omega_z - \Omega \cdot \sin(\varphi) \cdot a_x}\right) \quad (2.44)$$

Onde g_p é a magnitude da gravidade da Terra e Ω é a magnitude da velocidade de rotação da Terra, φ é a latitude, $C_{i,j}$ elementos da matriz de atitude C_b^n , ϕ ângulo de euler de rolamento, θ ângulo de euler de arfagem e ψ ângulo de euler de guinada.

Como os sensores inerciais do UMI não são perfeitos, os erros inerentes do método TRIAD podem ser representados da seguinte maneira:

$$\hat{C}_b^n = C_b^n + \delta C_b^n = (I + E) \cdot C_b^n \quad (2.45)$$

Em que \hat{C}_b^n a matriz de atitude correspondente à matriz da Equação 2.41, todavia, contendo erros intrínsecos dos sensores inerciais, bem como da própria plataforma, δC_b^n é a matriz que contém os erros da matriz C_b^n , E é a matriz que contém os erros da matriz \hat{C}_b^n .

A matriz de atitude \hat{C}_b^n é ortonormal. Dada esta característica, os erros dos sensores do UMI podem ser representados como desvios das propriedades de ortogonalidade e de norma da matriz \hat{C}_b^n . Os erros de ortogonalidade podem ser interpretados como os desvios que impedem a matriz \hat{C}_b^n de apresentar a propriedade da Equação 2.33. Já a os erros de normalização podem ser interpretados como os desvios que impedem a matriz \hat{C}_b^n de ter norma igual a 1. De acordo com Silva et al. (2016), a matriz E da Equação 2.45 pode ser vista como uma associação de duas matrizes de erro complementares da seguinte forma:

$$E = E_s + E_{ss} \quad (2.46)$$

$$E_s = \frac{E+E^T}{2} = \begin{pmatrix} \eta_N & O_D & O_E \\ O_D & \eta_E & O_N \\ O_E & O_N & \eta_D \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$E_{ss} = \frac{E-E^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_D & -\varepsilon_E \\ -\varepsilon_D & 0 & \varepsilon_N \\ \varepsilon_E & -\varepsilon_N & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Em que E_s é a matriz simétrica que representa os vetores de erro de normalização η e o de erro de ortogonalidade O referente à atitude calculada nas direções norte (N), leste (E) e baixo (D), E_{ss} é uma matriz anti-simétrica que representa o vetor de erro de alinhamento ε calculados nas direções norte (N), leste (E) e baixo (D).

2.3.2 ON-TRIAD

Uma maneira de obter um melhor resultado de autoalinhamento do que o método TRIAD é eliminando o seu erro de ortogonalidade. O trabalho de Jiang (1998), propôs a criação do método Ortogonal-TRIAD ou O-TRIAD. Este método substitui dois dos três vetores linearmente independentes por novos vetores ortogonais gerados a partir dos vetores de gravidade e de rotação da Terra. Por ser construído a partir de vetores ortogonais entre si, a matriz de atitude deste método de autoalinhamento não possui erros de normalização. Ou seja, η_N , η_E , η_D são iguais a zero. A Equação 2.49 representa a ideia do método O-TRIAD.

$$C_b^n = \begin{pmatrix} g_p^{nT} \\ (g_p^n \times \omega_{ie}^n)^T \\ (g_p^n \times \omega_{ie}^n \times g_p^n)^T \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_p^{bT} \\ (g_p^b \times \omega_{ie}^b)^T \\ (g_p^b \times \omega_{ie}^b \times g_p^b)^T \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Este método resulta em um ângulo de guinada (*yaw*) diferente do obtido pelo método TRIAD, conforme a Equação 2.50 mostra. Já os ângulos de arfagem (*pitch*) e de rolamento (*roll*) são idênticos ao do método TRIAD.

$$\psi = \arctg\left(\frac{c_{2,1}}{c_{1,1}}\right) = \arctg\left(\frac{a_z \cdot \omega_y - a_y \cdot \omega_z}{a_z^2 \cdot \omega_x - a_x \cdot a_z \cdot \omega_z - a_x \cdot a_y \cdot \omega_y - a_y^2 \cdot \omega_x}\right) \quad (2.50)$$

Baseado em uma ideia similar do conceito do O-TRIAD, o trabalho de Silva et al. (2016) traz o método Ortogonal-Normal-TRIAD, ou ON-TRIAD. O método ON-TRIAD consiste na determinação dos ângulos de euler através do método O-TRIAD e os usar para montar uma matriz de atitude. Desta forma, utilizando a sequência de rotações 1-2-3 da matriz de atitude, a matriz de atitude do método ON-TRIAD, construída com os ângulos de euler obtidos pelo método O-TRIAD, é dada por:

$$C_b^n = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Esta matriz de rotação possui os erros mostrados $\eta_N, \eta_E, \eta_D, O_N, O_E$ e O_D , vistos na Equação 2.47, iguais a zero. Ou seja, a matriz C_b^n não possui erros de normalização nem de ortogonalidade.

2.4 Navegação inercial auxiliada

A navegação inercial autônoma, leva os erros acelerométricos a crescerem com o quadrado do tempo, conforme visto nas Equações 2.1 e 2.2. Este auxílio deve ser uma fonte independente de informação, como um GPS, altímetro, sensor de estrelas, magnetômetro, entre outros. Cada sensor externo pode auxiliar um ou mais tipos de informação. Por exemplo, o GPS provê um auxílio direto em posição. Já um magnetômetro, em atitude.

Em um sistema de tempo real, todavia, o reinício de todo o processo de navegação inercial mediante a inserção de dados externos de velocidade e de posição à medida que o erro cresce torna a aplicação complexa. Há, todavia, algumas ferramentas que são capazes de realizar este *aiding* à navegação inercial sem que seja necessário reiniciar todo o processo. Um método capaz de

servir como esta ferramenta se chama filtro de kalman, conforme relata Grewal et al. (2013).

2.4.1 Navegação inercial auxiliada por GPS

A navegação inercial auxiliada por GPS possui diversas particularidades e dificuldades a serem contornadas, dado o funcionamento do sistema GPS.

2.4.1.1 Funcionamento do sistema GPS

Segundo Grewal et al (2013), GPS é acrônimo para *Global Positioning System*. Trata-se de um sistema de navegação baseado em satélites desenvolvido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América. O sistema GPS, atualmente, conta com mais de 31 satélites em órbita. Estas órbitas são distribuídas uniformemente em 6 órbitas circulares com, pelo menos 4 satélites em cada uma. Cada órbita é separada uma da outra por 60° , sendo que elas têm como inclinação múltiplos de 55° de inclinação com ao plano do equador.

É necessária uma visada de pelo menos 4 satélites GPS para que o receptor GPS possa determinar as informações de posição e de velocidade. Para tanto, uma vez recebidos os suficientes dados dos satélites, o receptor GPS realiza os cálculos no sistema ECEF obedecendo o modelo WGS-84 (*World Geodetic System 1984*). O algoritmo para determinação da posição e da velocidade por um receptor GPS utilizando as características supracitadas, podem ser encontrados no trabalho de Grewal et al. (2013).

A distância entre satélite de transmissão GPS e aparelho receptor do sinal GPS se chama *pseudo-range*.

A precisão das medidas de posição do sistema GPS pode ser influenciada pelos seguintes fatores:

- Atrasos Ionosféricos;
 - Erros de 3 m ~ 6 m durante a noite e até 80 m durante o dia.
- Atrasos Troposféricos;

- Erros tipicamente de 1 m ~ 3 m.
- Erros de Efeméride;
 - Erros menores do que 2 m.
- Erros do Relógio (*Clock*) do Satélite;

2.4.2 Filtro de Kalman

O filtro de kalman (FK) se trata de um método de estimação de estados criado por Rudolf E. Kalman e publicado no ano de 1960. O FK é um estimador com características recursivas. Pode ser aplicado a dinâmica e medidas contínuas, dinâmica contínua e medidas discretas, dinâmica e medidas discretas.

O FK é um algoritmo com as seguintes características marcantes em relação ao método de mínimos quadrados, segundo a teoria melhor detalhada em Gelb (1974), Maybeck (1979), Brown e Hwang (1997) e Kuga (2005):

- O filtro de kalman pode incorporar ruído dinâmico no modelo de estado
- O FK é um estimador com características de tempo real, ou seja, ele fornece as estimativas para o instante em que a medida é processada

O algoritmo do filtro de kalman possui duas etapas:

- Predição ou propagação: A fase de propagação, propaga a estimativa do estado e a covariância do instante de tempo t_1 , no caso contínuo, ou t_{k-1} , no caso discreto, ao instante de tempo t_2 , no caso contínuo, t_k , no caso discreto
- Correção ou Atualização: A fase de atualização corrige a estimativa do estado e a covariância para o instante t , no caso contínuo, ou t_k , no caso discreto, com medida $y(t)$, no caso contínuo, ou y_{t_k} , no caso discreto

2.4.2.1 Filtro de Kalman caso contínuo discreto

O caso contínuo-discreto ocorre quando a dinâmica é contínua e as observações são discretas. Seja a dinâmica do estado dada por:

$$\dot{x} = Fx + Gw \quad (2.52)$$

Em que, x é o vetor com o estado continuamente variante no tempo, F é a matriz $n \times n$ que relaciona o estado e sua derivada linearmente, G é a matriz $n \times p$ de adição de ruído dinâmico, w é o vetor de ruídos branco da dinâmica de estado, com média zero e covariância Q .

Seja o modelo das observações:

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.53)$$

Onde y_k é o vetor de m -observações coletadas, H_k é a matriz de $m \times n$ relacionando as observações ao estado, v_k é o vetor de m ruídos brancos discreto.

A fase de propagação do filtro de kalman é realizada através das seguintes equações:

Propagação da estimativa do estado:

$$\bar{x}_{k/k-1} = \varphi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \quad (2.54)$$

Propagação discreta da covariância:

$$\bar{P}_{k/k-1} = \varphi_{k,k-1} \hat{P}_{k-1/k-1} \varphi_{k,k-1}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T \quad (2.55)$$

$$\Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T = \int_{k-1}^k \boldsymbol{\varphi}_{\tau, k-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\varphi}_{\tau, k-1}^T d\boldsymbol{\tau} \quad (2.56)$$

Onde $\bar{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ é o vetor de estimativa de estados propagado para o instante $k+1$, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}$ é o vetor de estimativa de estados atualizados, $\bar{\mathbf{P}}_{k/k-1}$ é a matriz $n \times n$ de covariância propagada para o instante $k+1$, $\hat{\mathbf{P}}_{k-1/k-1}$ é a matriz $n \times n$ de covariância atualizada, \mathbf{Q}_k é a matriz $p \times p$ de covariância do ruído dinâmico, \mathbf{G} é uma matriz $n \times p$ de adição do ruído dinâmico.

A fase de atualização do FK é utilizada para corrigir o estado e a covariância do instante k devido à medida \mathbf{y}_k , através do modelo de observações dado pela Equação acima. Em essência, a(s) medida(s) do instante k fornece(m) informação para corrigir o estado e a covariância. Esta fase simplesmente incorpora essa informação às estimativas, na forma:

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.57)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k/k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1} \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \bar{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \quad (2.59)$$

Onde \mathbf{K}_k é o ganho de kalman, $\hat{\mathbf{x}}_k$ é o vetor de n -estados atualizados, $\hat{\mathbf{P}}_k$ é a matriz $n \times n$ de covariância atualizada, \mathbf{H}_k é a matriz de $m \times n$ relacionando as observações ao estado, \mathbf{y}_k é o vetor de m -observações coletadas, \mathbf{I} é a matriz $n \times n$ Identidade, e \mathbf{R}_k é a matriz $m \times m$ da covariância dos erros de observação.

2.4.2.2 Filtro de Kalman Cubature

O filtro de kalman *cubature* (FKC) para problemas não lineares é o filtro proposto para a aplicação deste trabalho.

O FKC, de acordo com Arasaratnam e Haykin (2009), vem como uma alternativa para a solução de problemas de filtragem não linear de grandes dimensões. Em outras palavras, para problemas de filtragem não linear cujo vetor de estados tenha mais do que vinte componentes. Todavia, pode ser aplicado com sucesso para vetores de estado com dimensões menores.

Trabalhar com um grande número de dimensões em um sistema com dinâmica não linear pode trazer problemas de divergência para aplicações de FK. No caso a divergência pode ocorrer devido a:

- Modelos imprecisos ou incompletos da física do sistema
- Perda de informação na captura da verdadeira evolução da densidade de probabilidade. Por exemplo, o Filtro foi feito para suportar um processo Gaussiano, mas o sistema real não é. Desta forma, há perda de informação
- Alto grau de não linearidade nas equações que descrevem o modelo adotado para o espaço de estados
- Erros numéricos

Assim, para evitar divergência bem como obter precisões melhores, sem grandes custos computacionais adicionais, propõe-se neste trabalho o uso do FKC. Desta forma seja o modelo em espaço de estado de um sistema não linear cujas equações são definidas pelas equações diferenciais discretas:

- Equação do processo

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (2.60)$$

- Equação da medida do processo

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2.61)$$

Em que $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, é o estado da dinâmica do sistema em tempo discreto k ; $\mathbf{f}, \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, e $\mathbf{h}, \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ são funções conhecidas; $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, é conhecido como sinal de controle; $\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$, é a medida do processo; \mathbf{v}_{k-1} e \mathbf{w}_k são ruídos gaussianos independentes, processos independentes, com média zero e covariâncias \mathbf{Q}_{k-1} e \mathbf{R}_k , respectivamente.

Uma vez conceituado o sistema do problema, o respectivo algoritmo do CKF é:

2.4.2.2.1 Fase de propagação

a) Fatorar a matriz de covariância:

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T \quad (2.62)$$

Em que, $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ é a matriz $n \times n$ de covariância, $\mathbf{S}_{k-1|k-1}$ é a matriz $n \times n$ que representa a decomposição de cholesky da matriz $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$.

b) Calcular os pontos de *cubature*:

Para $(i = 1, 2, \dots, m)$ e $m = 2n_x$

$$\mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (2.63)$$

Onde ξ_i é igual a \sqrt{m} para $(i = 1, 2, \dots, m)$ e é igual a $-\sqrt{m}$ para $(i = m + 1, m + 2, \dots, 2m)$.

c) Propagar os pontos de *cubature*:

Para $(i = 1, 2, \dots, m)$ e $m = 2n_x$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad (2.64)$$

d) Estimar o estado predito:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \quad (2.65)$$

e) Estimar a covariância:

Para $(i = 1, 2, \dots, m)$ e $m = 2n_x$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \mathbf{X}_{i,k|k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (2.66)$$

f) Fatorar a matriz de covariância:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (2.67)$$

g) Calcular os pontos de *cubature*:

Para $(i = 1, 2, \dots, m)$ e $\xi_i = \sqrt{\frac{m}{2}}$

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (2.68)$$

h) Propagar os pontos de *cubature*:

Para $(i = 1, 2, \dots, m)$

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}, \mathbf{u}_k) \quad (2.69)$$

i) Estimar a medida predita:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \quad (2.70)$$

j) Estimar a matriz de covariância \mathbf{P}_{zz} :

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i,k|k-1} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T \quad (2.71)$$

k) Estimar a matriz de covariância cruzada:

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \mathbf{X}_{i,k|k-1} \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T \quad (2.72)$$

2.4.2.2.2 Fase de atualização

a) Estimar o ganho de kalman:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{P}_{xz,k|k-1} \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (2.73)$$

b) Estimar o estado do sistema atualizado:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (2.74)$$

c) Estimar a covariância correspondente ao novo estado:

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{P}_{zz,k|k-1} \mathbf{W}_k^T \quad (2.75)$$

2.4.2.3 Decomposição de Cholesky

A execução do algoritmo do FKC demanda a fatoração da matriz de covariância, como pode ser visto nas Equação 2.62 e 2.67. Isto é implementado através da fatoração ou decomposição de cholesky.

A decomposição de cholesky determina que uma matriz simétrica e positiva definida pode ser decomposta em uma matriz triangular inferior e sua transposta. Ou seja, esta fatoração procura decompor uma matriz M da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (2.76)$$

Onde \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior com elementos estritamente positivos na diagonal principal.

Maiores detalhes sobre a formulação da decomposição de cholesky podem ser encontrados em Einwoegerer (2009).

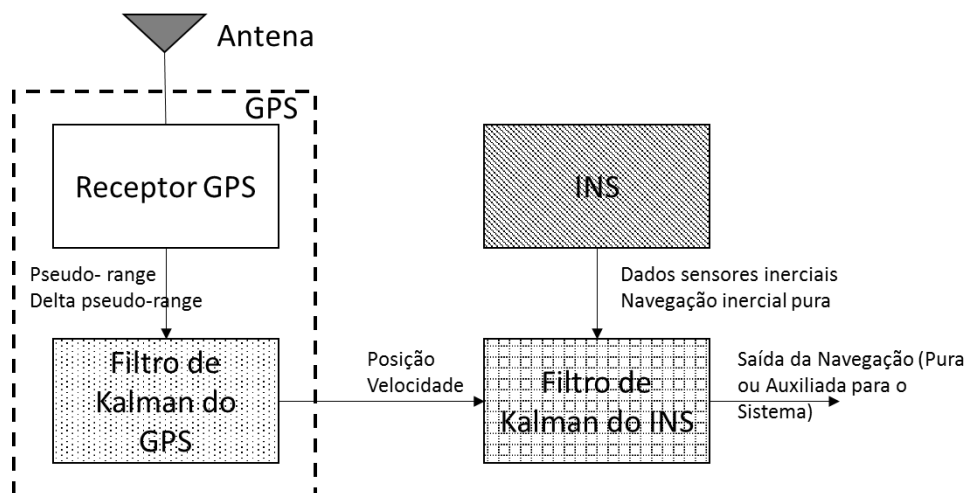
2.4.3 Acoplamentos

Há diversas maneiras de se executar fusão de dados entre um SNI e um GPS através de um filtro de kalman. Em geral, existem três tipos de implementações possíveis, segundo Titterton e Weston (2004).

2.4.3.1 Acoplamento fraco

Esta técnica consiste em utilizar as informações da UMI, as informações de navegação puramente inercial calculadas pelo SNI, e os dados do GPS como entrada de um FK e obter posição, velocidade e atitude, segundo Grewal et al (2013). Possui baixo custo computacional e permite o uso de praticamente qualquer equipamento GPS, uma vez que para esta técnica, o GPS é encarado como uma “caixa-preta”. Tem como principal desvantagem a utilização de filtros de kalman em cascata. Como pode ser visto na Figura 2.5, uma vez que o receptor GPS faz internamente uso de um FK. A desvantagem desta configuração de FKs em sequência é que o FK pressupõe que os erros de suas medidas não são correlacionados. Este arranjo em cascata não garante que os erros dos dados não serão correlacionados para a entrada do segundo FK.

Figura 2.5 - Esquema de funcionamento de acoplamento fraco.

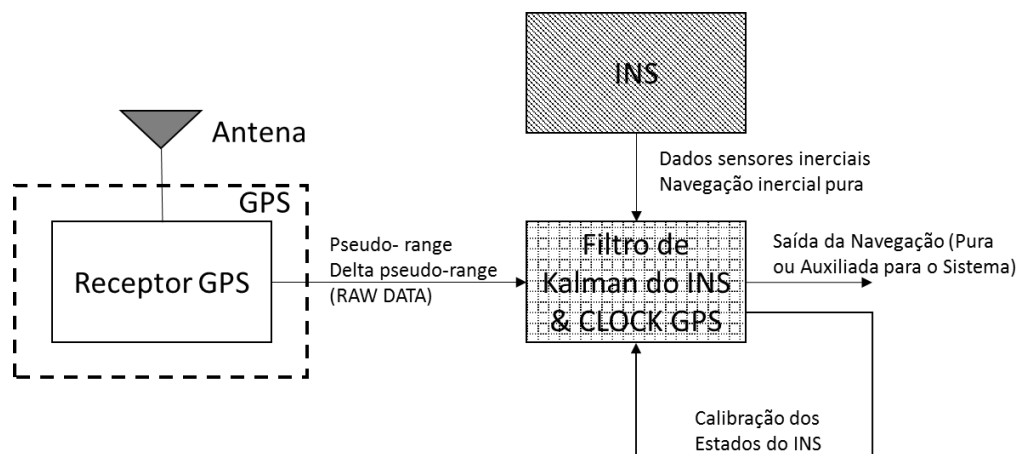


Fonte: Adaptado de Grewal (2016).

2.4.3.2 Acoplamento forte

Esta técnica não trata o receptor de GPS como uma caixa-preta. Ela consiste em utilizar as informações de *pseudo-range* dos satélites GPS para realizar as estimativas de posição, de velocidade e de atitude. Em seguida, funde-as com os dados do SNI por meio de um FK, segundo Grewal et al (2013). Este processo é mais pesado computacionalmente do que o processo do acoplamento fraco, todavia elimina “cascateamento” de dois FK. Não obstante, não depende da solução completa do GPS para promover auxílio ao SNI, como no caso do acoplamento fraco. Permite estimar uma posição mesmo sem a visada de quatro satélites GPS. Basta uma medida de *pseudo-range* de um satélite GPS para servir de input ao filtro. Todavia a precisão da estimativa cai rapidamente.

Figura 2.6 - Esquema de funcionamento de acoplamento forte.



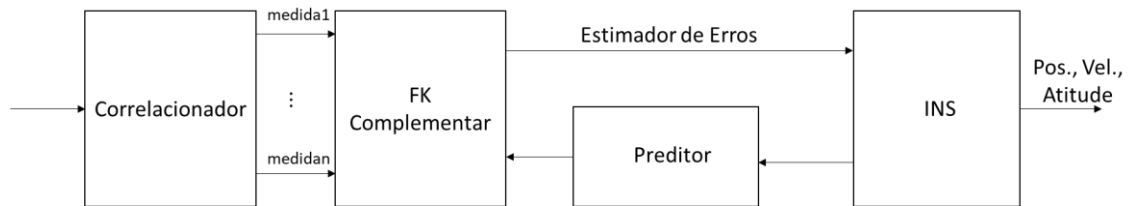
Fonte: Adaptado de Grewal (2016).

2.4.3.3 Acoplamento ultra forte

Segundo Babu e Wang (2005), esta implementação consiste no uso das do SNI para aumentar o poder de detecção do GPS. O GPS não é encarado como um sistema de navegação externo, mas sim como um sensor do SNI. Ou seja, as informações do SNI e do receptor GPS não podem trabalhar de maneira independente e se relacionam através de um FK. O relacionamento entre as medidas e o FK é diferente dos acoplamentos fraco e forte, uma vez que a

solução da navegação se relaciona através de erros de fase e de frequência do sinal GPS. Tal integração confere maior precisão e maior robustez com sinais fracos e *jamming*. Não obstante, esta configuração também evita o cascadeamento entre dois filtros de kalman. Todavia, demanda uma carga computacional elevada e é mais complexa em relação às demais técnicas de acoplamento SNI /GPS.

Figura 2.7- Esquema de funcionamento de acoplamento ultra-forte.



Fonte: Adaptado de Babu e Wang (2005).

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados neste trabalho são oriundos de uma plataforma inercial de precisão tática de mercado. Esta massa de dados reflete um experimento realizado com o respectivo SNI em uma montanha russa. Esta montanha russa, cujo nome é Montezum, é localizada no Brasil, no parque temático Hopi-Hari, cidade de Vinhedo-SP. O experimento foi conduzido pelo Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), dono da plataforma inercial de classe tática, e as informações coletadas por esta SNI foram obtidas para servir de referência para outros experimentos inerciais do mesmo instituto. O IAE gentilmente proveu os dados com propósitos acadêmicos.

A massa de dados fornecida foi amostrada a 100 Hz. Seu tamanho é de 60.000 amostras. Destas, 14.000 amostras representam uma volta completa na respectiva montanha russa. Cada amostra contém os dados fornecidos pela UMI do SNI (acelerações e velocidades angulares nos 3 eixos) e os resultados de navegação em termos de posição (latitude, longitude e altura), em termos de atitude (arfagem, guinada e rolamento) e em termos de velocidade (velocidade norte, velocidade leste e velocidade baixo). Todavia, a massa de dados não forneceu os dados do GPS do SNI de maneira separada dos resultados de navegação. Ou seja, não há dados de latitude, longitude e de altura diretamente do GPS.

A Montezum, na Figura 3.1, segundo o site Roller Coaster Data Base (<http://rcdb.com>), foi fabricada em 1999 pela empresa Roler Coaster Corporation of America. Possui os seguintes parâmetros:

- Extensão: 1.030,2 m
- Queda: 42,4 m
- Velocidade máxima: 103 km/h

Figura 3.1 - Vista superior da montanha russa Montezum.



Fonte: Hopi-hari (2019).

A localização do ponto de partida do carrinho da montanha russa utilizada para a realização do experimento é dada abaixo:

- Altura acima do nível do mar: 702 m
- Latitude: - 0,4031432 rad
- Longitude: - 0.8205044 rad

Dada a especificação sigilosa da plataforma inercial, bem como a sua característica como produto de grande precisão, considerou-se que todos os

dados de sua UMI não careciam de calibração estática para a sua utilização na implantação dos algoritmos.

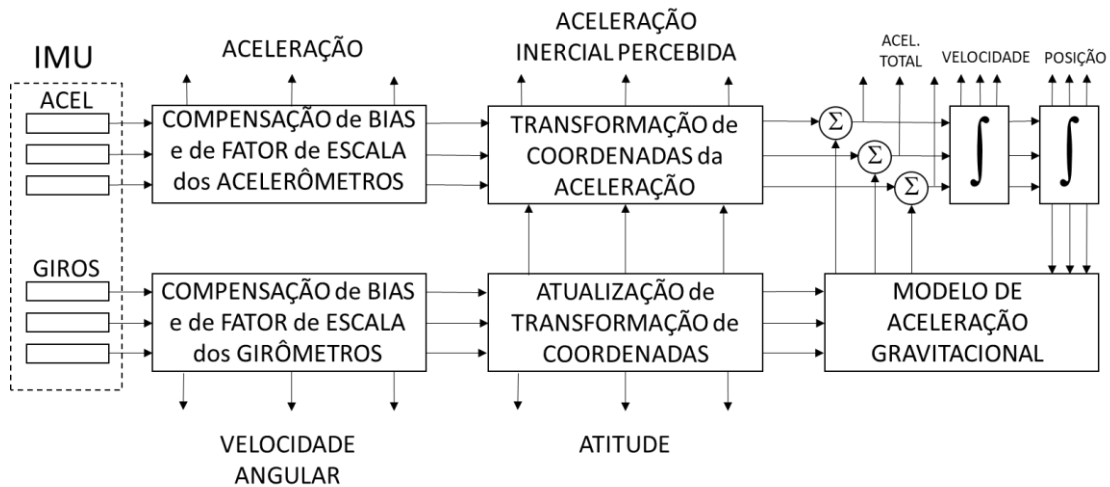
Para a implementação de um algoritmo de navegação inercial, a utilização de dados reais elimina a necessidade de simulação de ruídos, uma vez que eles já contêm ruídos. Não obstante, para a implantação e comparação de métodos de autoalinhamento, a utilização de dados reais permite verificar os efeitos da imprecisão inerente dos sensores inerciais nos resultados.

A implementação da navegação auxiliada por GPS fez uso, além dos dados das tríades acelerométricas e girométricas, dos dados de posição e de velocidade como auxílio. Como nos dados de referência da SNI não existiam dados de GPS nem de posição, nem de velocidade, conforme supracitado, os resultados de posição e de velocidade da referência foram utilizados para simular as informações desejadas de auxílio para a navegação. Para tanto, das 14.000 amostras da referência foram colhidas 700 amostras igualmente espaçadas, de 20 em 20 amostras, para simular o GPS fornecendo dados em uma taxa de 5 Hz.

3.2 Implementação da navegação inercial autônoma

A implementação do algoritmo de navegação puramente inercial, ou navegação inercial autônoma, ou seja, sem *aiding*, deu-se por meio da implementação das equações de descritas no Capítulo 2. O diagrama abaixo ilustra o processo de implementação de um algoritmo de navegação inercial pura.

Figura 3.2. Diagrama do funcionamento de um algoritmo de navegação inercial pura.



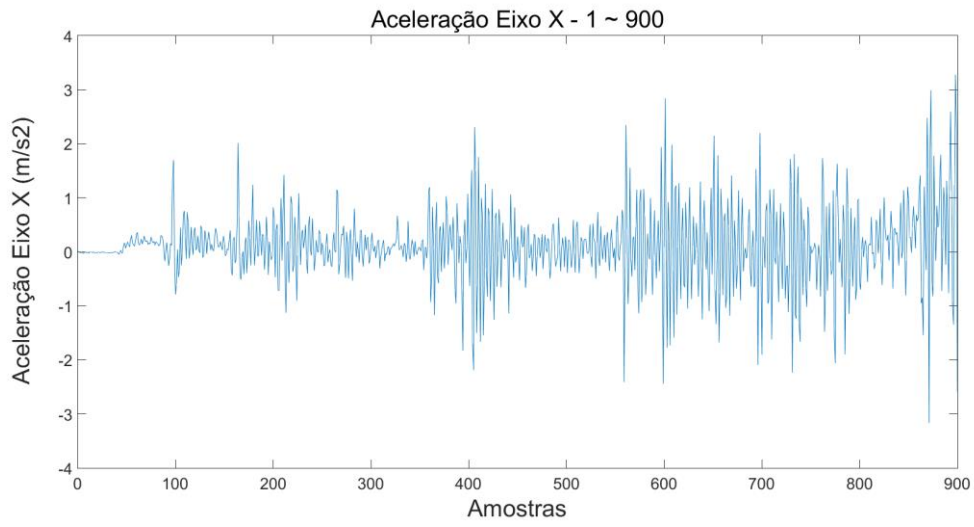
Fonte: Adaptado de Grewal (2013).

3.3 Implementação dos métodos de autoalinhamento

Uma vez implementado o algoritmo de navegação puramente inercial, foi possível a criação de dois programas distintos para a comparação do desempenho dos métodos TRIAD e ON-TRIAD, Silva et al. (2016), na navegação puramente inercial, respectivamente, conforme o método descrito por Castro Leite, Kuga e Leite Filho (2017). Todavia, cada programa utilizará, além os ângulos de euler obtidos por cada método de autoalinhamento, as matrizes de atitude resultantes de cada método.

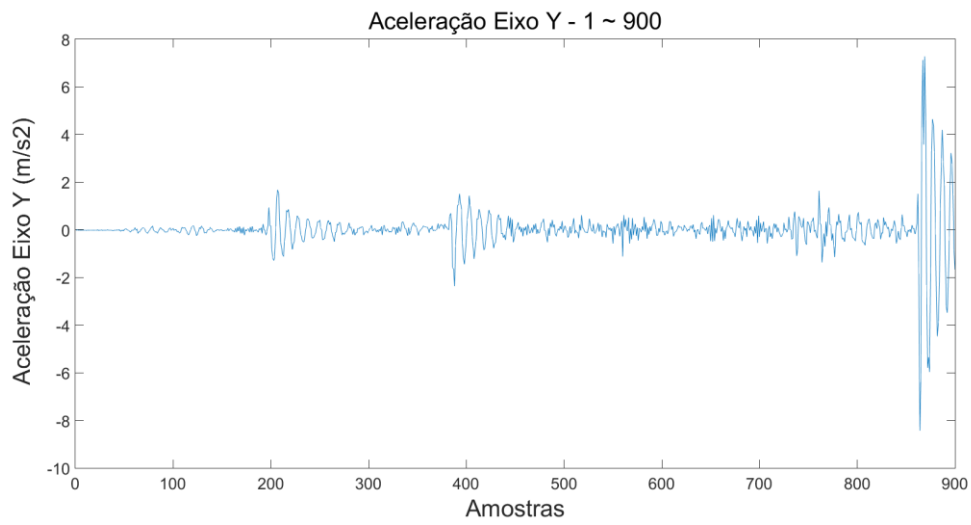
A massa de dados escolhida para a realização dos procedimentos de autoalinhamento foi reavaliada, diferindo do trabalho realizado por Castro Leite et al. (2017), que sugeria a utilização das 800 primeiras amostras. A razão pela qual se optou por uma reavaliação da massa de dados é o erro de normalização, denotado na Equação 2.47. Caso a massa de dados escolhida não corresponda a um estado estacionário do SNI, o erro de normalização poderá resultar em uma matriz de rotação cujo uso levará à divergência na navegação autônoma, sem possibilidades de correção. Desta forma, foram escolhidas para a execução dos métodos TRIAD e ON-TRIAD as 41 primeiras amostras da referida massa de dados.

Figura 3.3 - Dados do acelerômetro eixo X do SNI de referência.



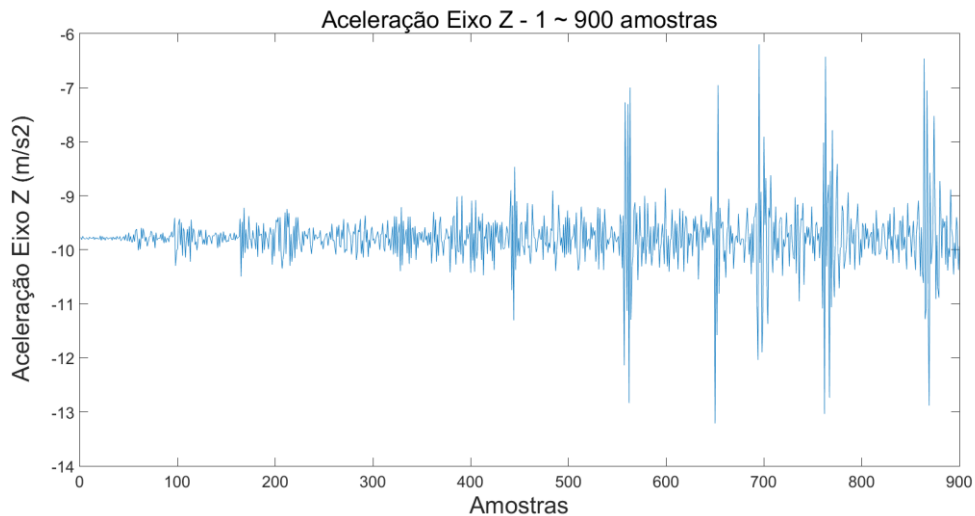
Fonte: Produção do autor.

Figura 3.4 - Dados do acelerômetro eixo Y do SNI de referência.



Fonte: Produção do autor.

Figura 3.5 - Dados do acelerômetro eixo Z do SNI de referência.



Fonte: Produção do autor.

3.4 Implementação de navegação inercial auxiliada por GPS através do FKC

Foi realizada a implementação da navegação inercial auxiliada através do FKC com 15 estados: altura, latitude, longitude, ângulo de arfagem, ângulo de guinada, ângulo de rolamento, velocidade norte, velocidade leste e velocidade baixo, *bias* do acelerômetro eixo X, *bias* do acelerômetro eixo Y, *bias* do acelerômetro eixo Z, deriva do girômetro eixo X, deriva do girômetro eixo Y, deriva do girômetro eixo Z. A implementação da navegação auxiliada fez uso das informações de posição e de velocidade, oriundas do experimento descrito neste capítulo sobre descrição dos dados, simulando o auxílio do GPS a uma frequência de 5 (cinco) Hz.

O vetor de estados de 15 elementos utilizado para esta implementação pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = (\mathbf{p} \ \mathbf{v} \ \boldsymbol{\gamma} \ \mathbf{b} \ \mathbf{u})^T \quad (3.1)$$

Tal que:

$$\mathbf{p} = (\varphi \ \lambda \ h)^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v} = (V_N \ V_E \ V_D)^T \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\phi \ \psi \ \theta)^T \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_z)^T \quad (3.6)$$

Onde \mathbf{p} é o vetor posição dado por latitude, longitude e altura, respectivamente; \mathbf{v} é o vetor velocidade no sistema NED; $\boldsymbol{\gamma}$ é o vetor de atitude dado por rolamento, guinada e arfagem; \mathbf{b} é o vetor que contém os vieses dos acelerômetros; \mathbf{u} é o vetor que contém os vieses dos girômetros.

A matriz de covariância inicial foi definida da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_{k/k} = \text{diag} \begin{pmatrix} 2,45^{-12} \\ 2,45^{-12} \\ 900 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6891^{-6} \\ 6891^{-6} \\ 17^{-4} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \\ 1^{-20} \end{pmatrix}^T \quad (3.7)$$

Onde $diag$ denota uma matriz diagonal com os valores do vetor.

A matriz de estados é determinada a partir das Equações 2.63, 2.64 e 2.65 utilizando o vetor de estado e a matriz de covariância propagados.

O vetor de medidas y_k foi definido da seguinte forma:

$$y_k = (\varphi_{GPS} \quad \lambda_{GPS} \quad h_{GPS} \quad V_{NGPS} \quad V_{EGPS} \quad V_{DGPS})^T \quad (3.8)$$

Onde φ_{GPS} , λ_{GPS} , h_{GPS} , V_{NGPS} , V_{EGPS} e V_{DGPS} são as latitude, longitude, altura, velocidade norte, velocidade leste e velocidade baixo oriundas do GPS, respectivamente.

A matriz de covariância dos erros das medidas R_k foi definida da seguinte forma:

$$R_k = diag(\sigma_{\varphi_{GPS}} \quad \sigma_{\lambda_{GPS}} \quad \sigma_{h_{GPS}} \quad \sigma_{V_{NGPS}} \quad \sigma_{V_{EGPS}} \quad \sigma_{V_{DGPS}}) \quad (3.9)$$

Onde $\sigma_{\varphi_{GPS}}$, $\sigma_{\lambda_{GPS}}$, $\sigma_{h_{GPS}}$, $\sigma_{V_{NGPS}}$, $\sigma_{V_{EGPS}}$ e $\sigma_{V_{DGPS}}$ são os respectivos desvios padrões das latitude, longitude, altura, velocidade norte, velocidade leste e velocidade baixo oriundas do GPS e $diag$ denota uma matriz diagonal com o conteúdo do vetor.

Por consequência, a matriz de observações H_k foi definida da seguinte forma:

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} \\ \mathbf{0}_{3x3} & I_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} & \mathbf{0}_{3x3} \end{pmatrix}^T \quad (3.10)$$

Onde I_{3x3} denota uma matriz identidade 3x3 e $\mathbf{0}_{3x3}$ denota uma matriz 3x3 de elementos nulos.

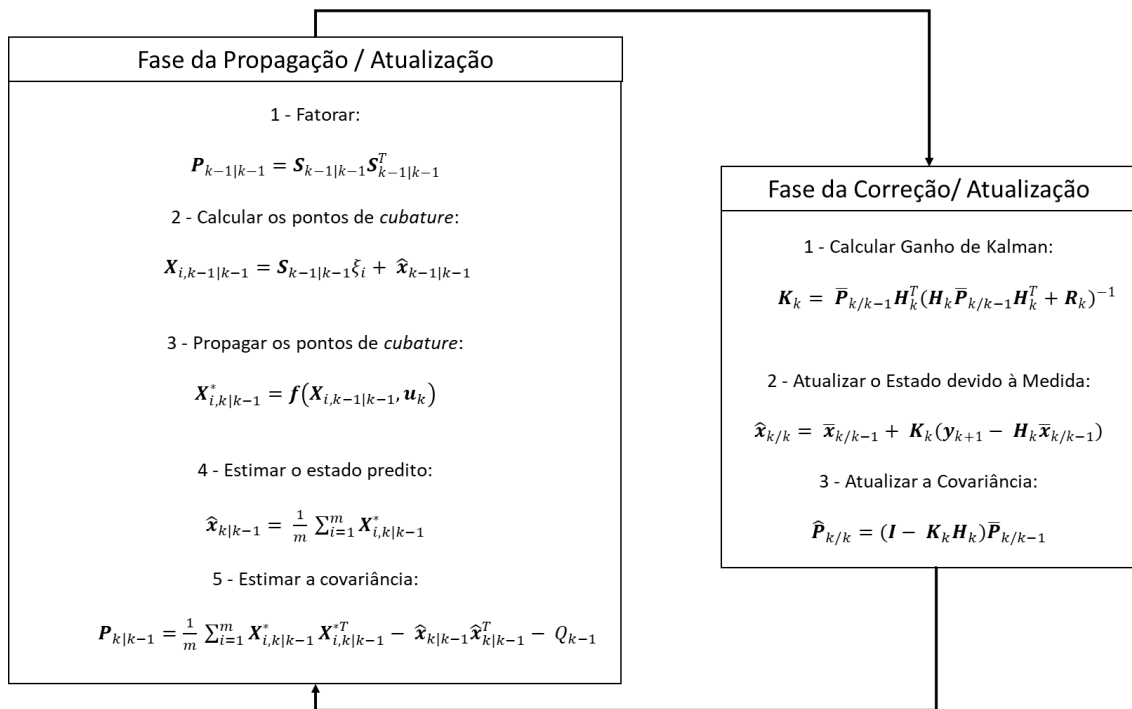
A matriz de covariância \mathbf{Q}_{k-1} foi definida da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \text{diag}(1^{-10} \quad 1^{-18} \quad 0,01 \quad \mathbf{0}_{1 \times 12}) \quad (3.Y)$$

Onde *diag* denota uma matriz diagonal com os valores do vetor e $\mathbf{0}_{1 \times 12}$ denota uma matriz nula de dimensões 1 x 12.

A Figura 3.6 mostra o funcionamento da implementação do FKC para este problema. Realiza-se o ciclo de predição através do filtro de kalman *cubature* e a etapa de atualização feita pelo FK padrão.

Figura 3.6 - Implementação do FKC.



Fonte: Produção do autor.

Como as medidas são lineares em relação ao vetor de estado a ser estimado, a fase de correção do filtro usa as equações convencionais do FK, segundo Kuga (2018).

4 TESTES E RESULTADOS

No Capítulo 3, foram descritos a massa de dados utilizada para os testes dos procedimentos propostos. Neste capítulo serão descritos os testes e respectivos resultados obtidos via aplicação dos procedimentos de:

- Autoalinhamento usando TRIAD e ON-TRIAD
- Navegação inercial usando FKC

4.1 Autoalinhamento

Neste teste, foram utilizadas a parte estática da massa de dados, correspondente à parte inicial dos dados onde virtualmente não havia movimento. Ou seja, as 41 primeiras amostras dos girômetros e acelerômetros, a uma taxa de 100 Hz.

4.1.1 Filtro de mediana

O trabalho de Castro Leite et al. (2017) sugere que, para a obtenção de um melhor resultado, deve ser usado um filtro de mediana (FM) para selecionar as amostras de medidas inerciais a serem utilizadas no autoalinhamento. De acordo com Vasegi (2000), a mediana de um conjunto ímpar de amostras numéricas é insensível à presença de amostras com valores anômalos. A saída do filtro de mediana $y(m)$ em uma janela de $2K + 1$ amostras é dada por:

$$y(m) = [y(m - K), y(m - K + 1), \dots, y(m), \dots, y(m + K)] \quad (4.1)$$

Tal que $y(m - K) < y(m - K + 1)$.

Ou seja, após a ordenação do conjunto de números, em ordem crescente ou decrescente, o valor do meio m corresponde à mediana.

4.1.2 TRIAD

Através da utilização do FM, para selecionar as amostras, e utilizando o método TRIAD, os seguintes parâmetros de autoalinhamento foram obtidos na matriz de atitude:

$$C_n^b = \begin{pmatrix} -0.313590115688387 & -0.895414144909827 & 0.035689546822125 \\ 0.895400543019935 & -0.313601666358557 & -0.000409308970800 \\ 0.001187729361910 & 0.002086164925009 & 0.999901658722769 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

- Norma da matriz de atitude: 1.005036350272818
- Ângulos de euler
 - Rolamento = 0.002086367074036 rad
 - Guinada = 1.907670046067078 rad
 - Arfagem = 0.001187729641165 rad

Notar que a norma desta matriz é de 1.005036350272818. As matrizes de atitudes, por definição, devem ter a sua norma igual a 1.

4.1.3 ON-TRIAD

De maneira análoga à do método TRIAD, a utilização do FM, para selecionar as amostras, utilizando o método ON-TRIAD, os seguintes parâmetros de autoalinhamento foram obtidos:

- Matriz de atitude

$$C_n^b = \begin{pmatrix} -0.330519006028231 & -0.943798019262619 & 0.001576543709628 \\ 0.943798588658127 & -0.330516181027264 & 0.001810559604028 \\ -0.001187729361910 & 0.002086364088783 & 0.999997118187774 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

- Norma da matriz de atitude: 1
- Ângulos de euler

- Rolamento = 0,002086367074036 rad
- Guinada = 1,907650007465274 rad
- Arfagem = 0,001187729641165 rad

Notar que pelo método ON-TRIAD, o valor de guinada é ligeiramente diferente do método TRIAD, corroborando com a Equação 2.48, bem como as matrizes de rotação resultantes. Neste caso, toda a massa de dados (14000 pontos a 100 Hz, ou seja, 140 s) foi utilizada para as comparações. Lembrar que para o autoalinhamento via TRIAD e ON-TRIAD, foram utilizadas somente as primeiras 41 amostras.

4.1.4 Navegação autônoma

De posse das equações de navegação inercial descritas no capítulo 2.2 e de sistemas de coordenadas descritas no capítulo 2.1, foi implementado o algoritmo de navegação puramente inercial. Este algoritmo é de fundamental importância para este trabalho, uma vez que ele é a finalidade dos métodos de autoalinhamento, bem como o alicerce para a implementação de um algoritmo de navegação inercial auxiliada por GPS.

A implementação do algoritmo utilizou as equações diferenciais para a navegação inercial, descritas no Capítulo 2.2. Os parâmetros das equações foram integrados utilizando o método de Adams-Moulton de segunda ordem. Maiores detalhes sobre este método de integração numérica podem ser encontrados em e.g. Henrici (1962).

As condições iniciais de posição utilizadas foram os mesmos parâmetros de latitude, longitude e altura descritos no capítulo 3.1. Foram utilizadas como condições iniciais de velocidade iguais a zero, simulando o carro da montanha russa parado. Os resultados dos métodos de autoalinhamento foram utilizados como as condições iniciais da atitude.

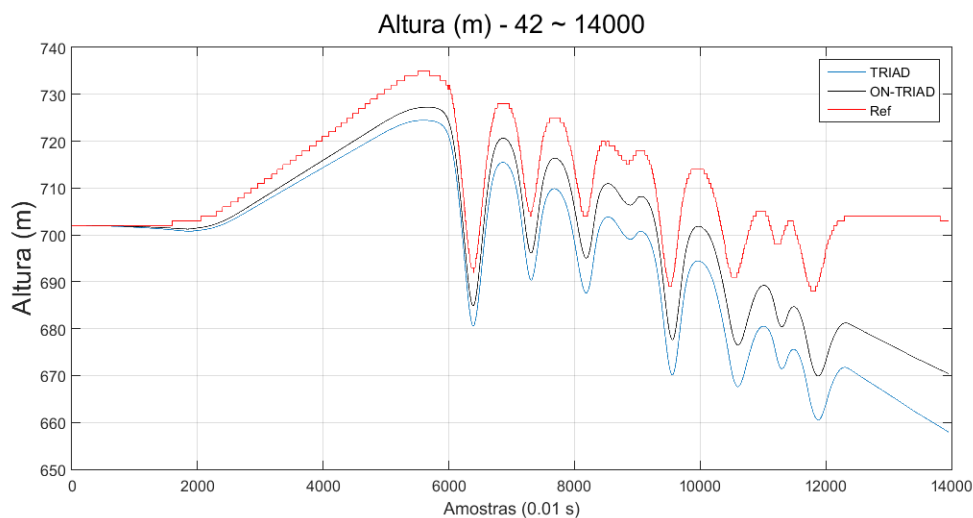
4.1.5 Análise dos resultados

A seguir mostram-se os resultados de navegação autônoma, usando como condição inicial os valores de autoalinhamento dos métodos TRIAD e ON-TRIAD. Os resultados dos navegadores autônomos de referência, do TRIAD e do ON-TRIAD, serão doravante REF, TRIAD e ON-TRIAD, respectivamente. Entende-se como os resultados dos navegadores autônomos de referência os dados da solução de navegação original da massa de dados. No caso, os resultados de posição, de atitude e de velocidade oriundos experimento na montanha russa servirão como gabarito.

A Figura 4.1 mostra o comportamento da altitude (m) ao longo do tempo dos navegadores autônomos da referência REF (vermelho), do TRIAD (azul) e do ON-TRIAD (preto). A Tabela 4.1 mostra valores dos erros em altitude se acumulando ao longo do tempo até 120 s. Por exemplo, a 120 s o TRIAD apresentou um erro de 33 m e o ON-TRIAD de 23 m.

4.1.6 Análise dos resultados em posição

Figura 4.1 - Altura navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

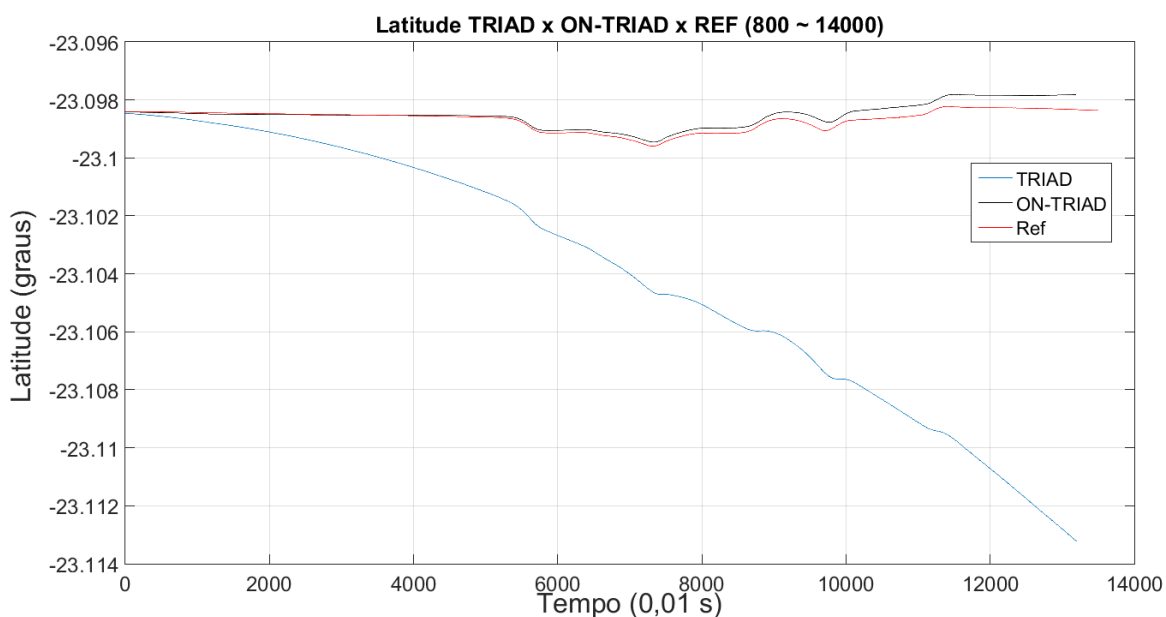
Tabela 4.1 – Erro da Altura (H) ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
H Referência (m)	711	732	718	697
H TRIAD (m)	706,60	720,88	700,42	663,86
H ERRO TRIAD (m)	4,39	11,11	17,57	33,13
H ON-TRIAD (m)	707,58	724,06	707,83	673,15
H ERRO ON-TRIAD (m)	3,41	7,93	10,16	23,84

Fonte: Produção do autor.

De maneira análoga, as figuras 4.2 e 4.3 representam o comportamento da latitude (rad) e da longitude (rad) ao longo do tempo dos navegadores autônomos da referência REF (vermelho), do TRIAD (azul) e do ON-TRIAD (preto). É de se reparar o grande número casas depois da vírgula nos resultados. Dadas as dimensões da Terra, a precisão de, pelo menos 7 (sete) casas decimais é necessária em se tratando de Latitude e de Longitude. A Tabela 4.2 e 4.3 mostram o efeito do autoalinhamento na Latitude na Longitude durante a navegação autônoma. É de se reparar também que valores dos erros em dos erros já se encontram convertidos em metros.

Figura 4.2 - Latitude navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



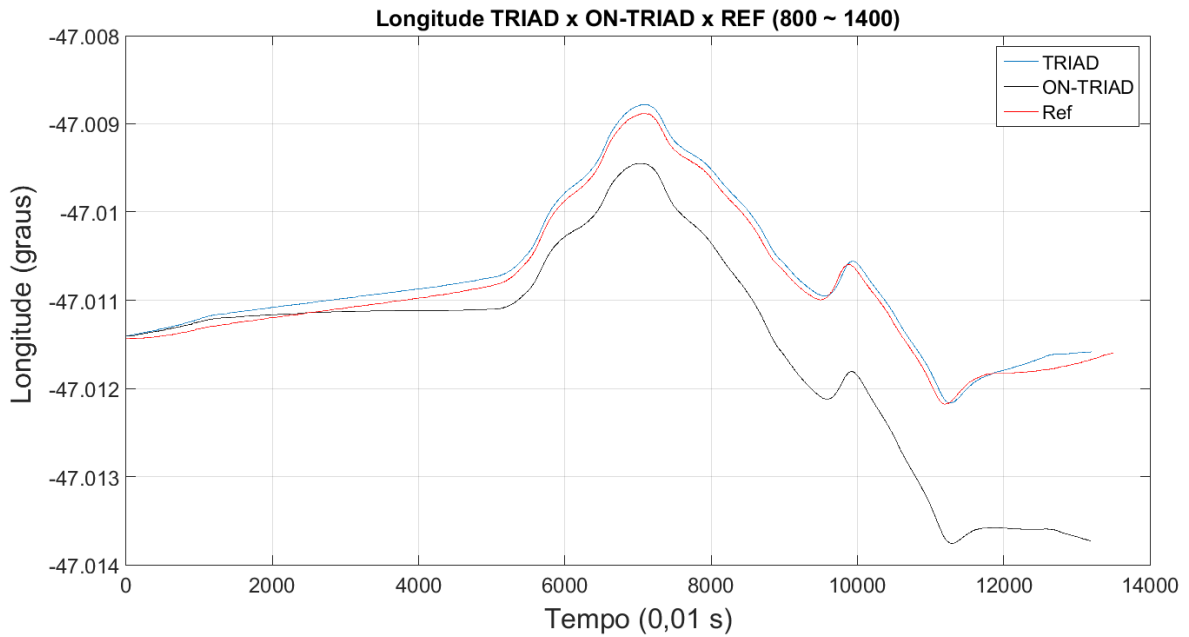
Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.2 – Erro da latitude ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Lat Referência (rad)	-0,40314460	-0,40314695	-0,40315625	-0,40314168
Lat TRIAD (rad)	-0,40315749	-0,40319588	-0,40326517	-0,40333527
Lat ERRO TRIAD (m)	75,61	286,97	638,76	1135,26
Lat ON-TRIAD (rad)	-0,40314501	-0,40314599	-0,40315311	-0,40313633
Lat ERRO ON-TRIAD (m)	2,42	-5,61	-18,38	-31,34

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.3 - Longitude navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

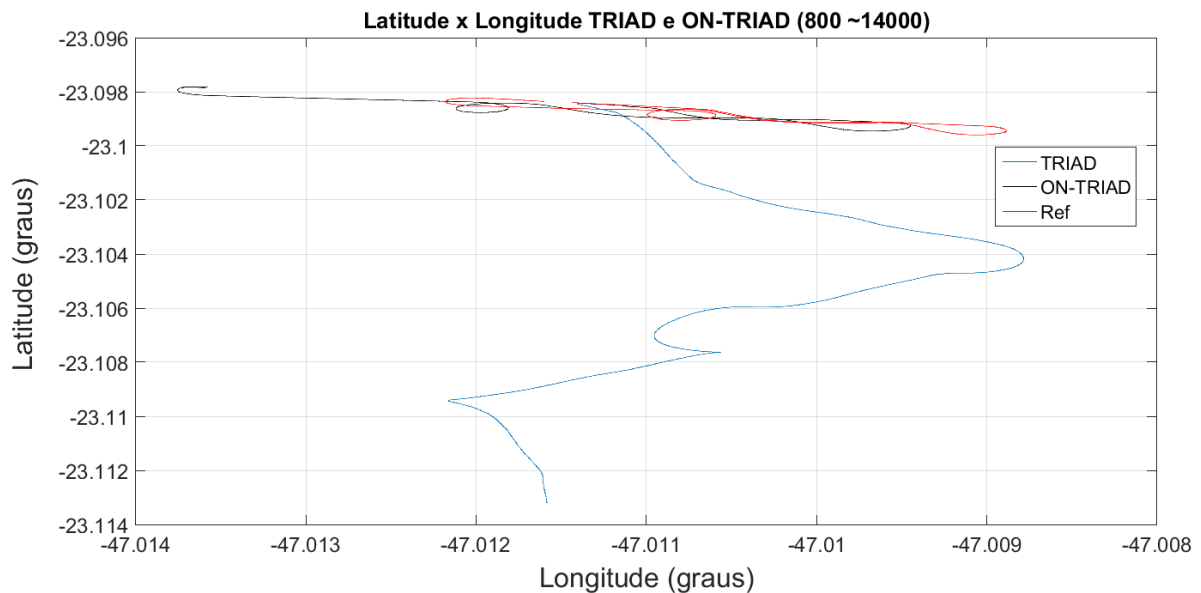
Tabela 4.3 – Erro da longitude ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Long Referência (rad)	-0,82049972	-0,82049238	-0,82047671	-0,82051712
Long TRIAD (rad)	-0,82049769	-0,82049093	-0,82047495	-0,82051697
Long ERRO TRIAD (m)	-12,81	-9,17	-11,14	-0,89
Long ON-TRIAD (rad)	-0,82049939	-0,82049776	-0,82049039	-0,82054457
Long ERRO ON-TRIAD (m)	-2,06	34,10	86,76	174,07

Fonte: Produção do autor.

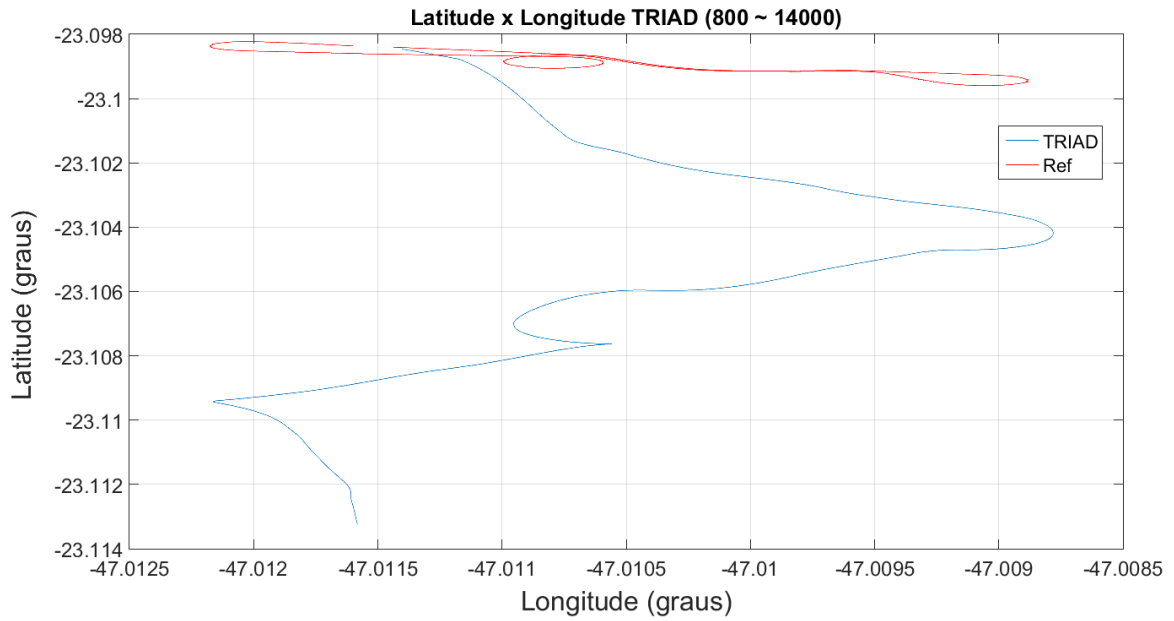
A visualização dos resultados de Latitude por Longitude, em radiano, oriundos da navegação autônoma em posição, fornece o real erro em posição horizontal que a navegação autônoma obteve. Como o desempenho de navegação autônoma foi muito distinto entre os métodos de Autoalinhamento, a Figura 4.4 não foi suficiente para uma comparação visual satisfatória. As Figuras 4.5 e 4.6, representam, respectivamente, a influência dos métodos TRIAD e ON-TRIAD no desempenho da navegação autônoma em Latitude x Longitude. Comparando as figuras 4.5 e 4.6, é possível ver que o desempenho relativo ao ON-TRIAD é muito superior ao TRIAD.

Figura 4.4 - Lat x Long navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



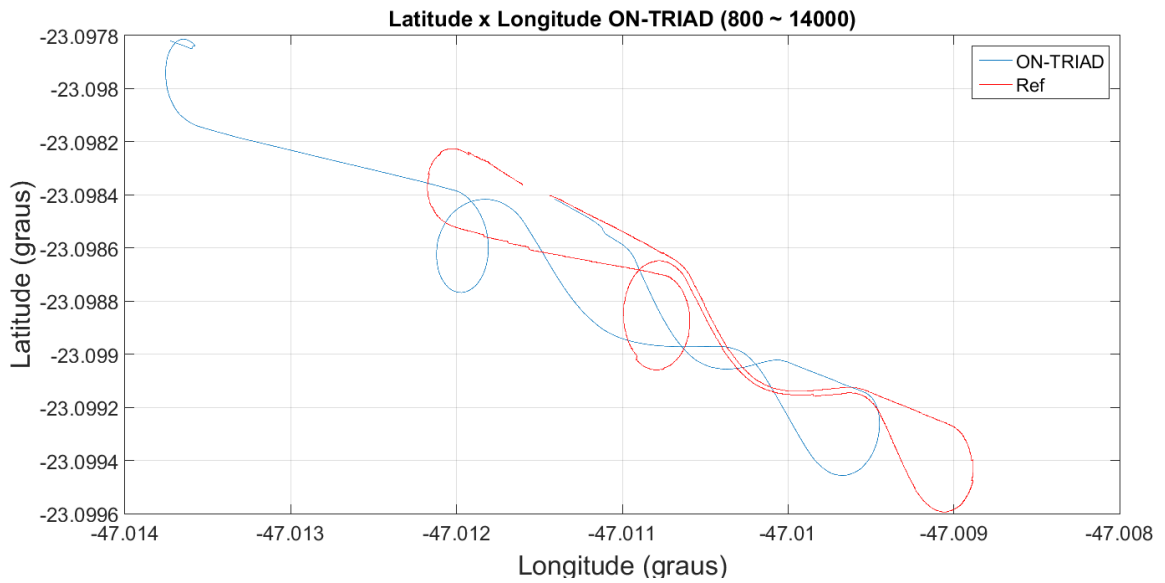
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.5 - Lat x Long navegação autônoma REF x TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.6 - Lat x Long navegação autônoma REF x ON-TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

A Tabela 4.4 mostra valores para o erro horizontal acumulado ao longo do tempo. Os erros foram calculados através da lei dos cossenos de trigonometria esférica, segundo as equações abaixo.

$$\cos(dif) = \text{sen}(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi_{REF}) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi_{REF}) \cdot \cos(\lambda_{REF} - \lambda) \quad (4.4)$$

$$\text{Erro}_{\text{posição horizontal}} = R_t \cdot \text{acos}(dif) \quad (4.5)$$

Nota-se o progressivo aumento ao longo do tempo, bem como o maior erro acumulado pelo TRIAD (1135m) em relação ao ON-TRIAD (176m), aos 120s. Nota-se também a comprovação do desempenho superior que o alinhamento com o método ON-TRIAD causa em navegação autônoma em comparação com o método TRIAD.

Tabela 4.4 – Erro da posição horizontal ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Erro Posição Horizontal TRIAD (m)	83,07	312,19	694,78	1234,74
Erro Posição Horizontal ON-TRIAD (m)	3,25	32,15	82,71	164,61

Fonte: Produção do autor.

4.1.7 Análise dos resultados em atitude

As Figuras 4.7, 4.8, e 4.9 mostram as curvas dos ângulos de euler (guinada, arfagem e rolamento), dos navegadores autônomos de referência REF, do TRIAD, e do ON-TRIAD. Nota-se visualmente que as diferenças são pouco perceptíveis. As Tabelas 4.5, 4.6, e 4.7 mostram valores dos erros nos ângulos de euler ao longo do tempo do TRIAD e ON-TRIAD em relação às referências. Notam-se que os erros se mantiveram sempre abaixo de 2 centésimos de

radianos (da ordem de 1 grau, que foi o pior resultado) em todos os ângulos em ambos os métodos, com o método ON-TRIAD apresentando consistentemente melhores resultados que o TRIAD.

Figura 4.7 - Yaw navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



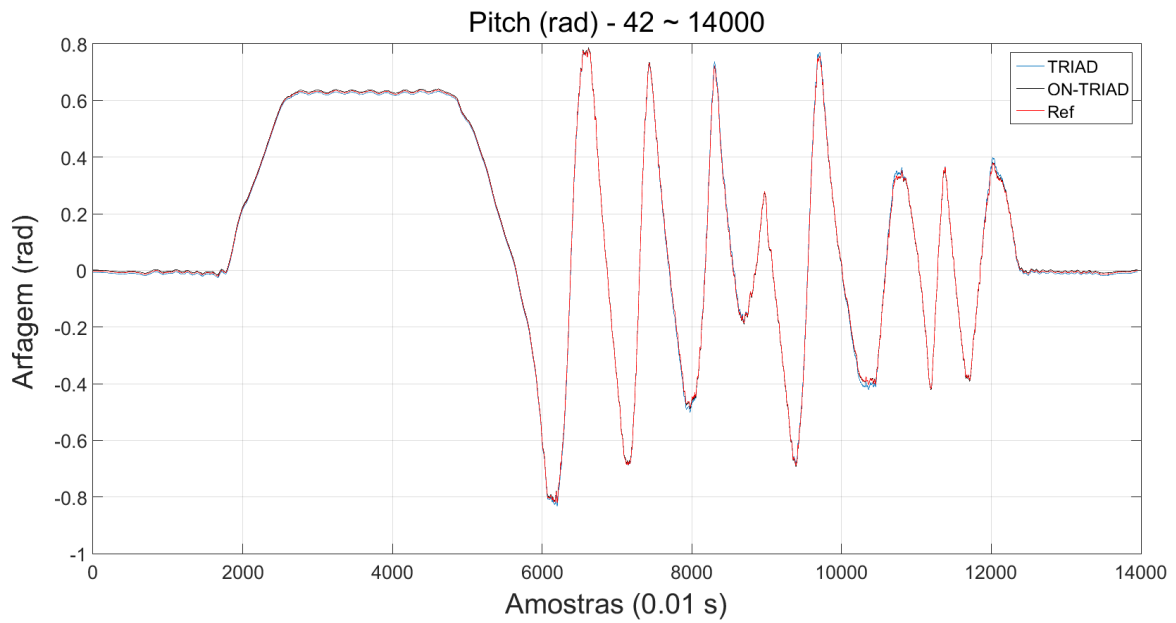
Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.5 – Erro do ângulo Yaw ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Yaw Ref	1,9064	1,9198	-1,6356	-0,1144
Erro Yaw TRIAD (rad)	-0,0112	0,0158	0,0065	0,0042
Erro Yaw ON-TRIAD (rad)	0,0006	0,0045	0,0028	0,0041

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.8 - Pitch navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



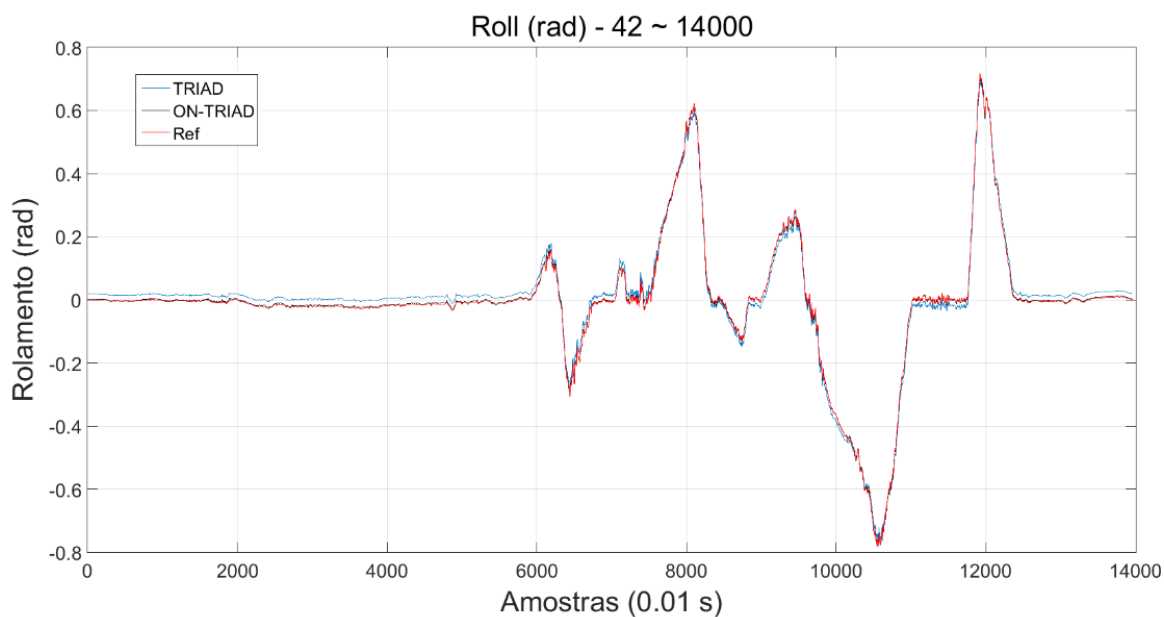
Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.6 – Erro do ângulo Pitch ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Pitch Ref	0,6332	-0,6071	0,2012	0,3423
Erro Pitch TRIAD (rad)	0,004	0,0047	0,0032	-0,0188
Erro Pitch ON-TRIAD (rad)	-0,0034	-0,0034	0,0042	-0,000925

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.9 - Roll navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.7 – Erro do ângulo Roll ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
Roll Ref	-0,0233	0,0392	0,0049	0,6353
Erro Roll TRIAD (rad)	-0,0234	-0,0230	0,0195	0,0043
Erro Roll ON-TRIAD (rad)	-0,0034	-0,0033	0,0012	0,0045

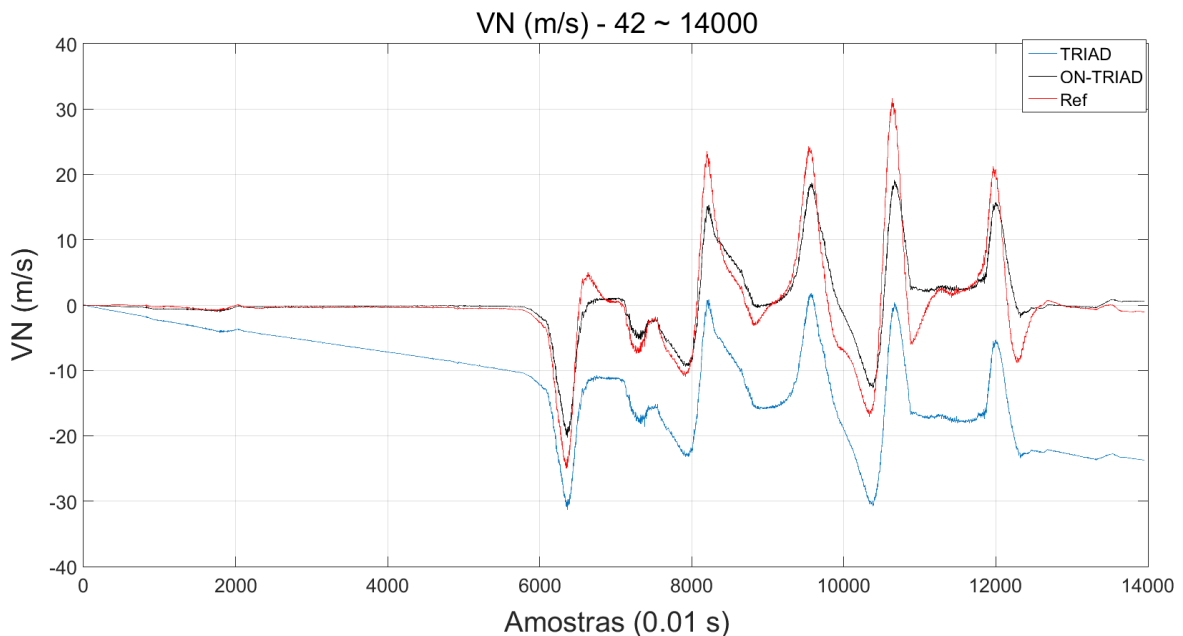
Fonte: Produção do autor.

4.1.8 Análise dos resultados em velocidade

As Figuras. 4.10, 4.11 e 4.12 mostram os gráficos de velocidade nas direções NED (norte, leste, “down” ou nadir) para os navegadores de referência REF, do TRIAD e do ON-TRIAD. Na Figura 4.10 nota-se que a velocidade norte fornecida pelo TRIAD se descola notavelmente da referência REF e do ON-TRIAD. Nas Figuras 4.11 e 4.12 não se notam visualmente discrepâncias de monta.

As Tabelas 4.8, 4.9, e 4.10 mostram os erros ao longo do tempo para as velocidades nas direções NED para os navegadores REF, TRIAD e ON-TRIAD. A Tabela 4.8 mostra erros enormes do TRIAD (até 25 m/s) comparados com os do ON-TRIAD (4 m/s), que corrobora o descolamento observado na Figura 4.10 (gráfico de erros na velocidade norte). Já as Tabelas 4.9 e 4.10, para as direções leste e nadir, não mostram grandes diferenças nos erros entre o TRIAD e ON-TRIAD. É de se especular que o grande erro em velocidade norte deve ter acarretado o erro horizontal enorme (1135 m) apresentado pelo TRIAD (Tabela 4.4). Por outro lado, uma espécie de erros de fase em longitude e latitude se mostra de maneira pronunciada na Figura 4.6, de erros horizontais do ON-TRIAD, acarretados provavelmente pelos erros nas velocidades norte e leste. Erros em longitude estão maiores que erros em latitude comparados à REF mostrando que erros na velocidade leste afetaram em maior grau a longitude, que a velocidade norte na latitude.

Figura 4.10 - VN navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



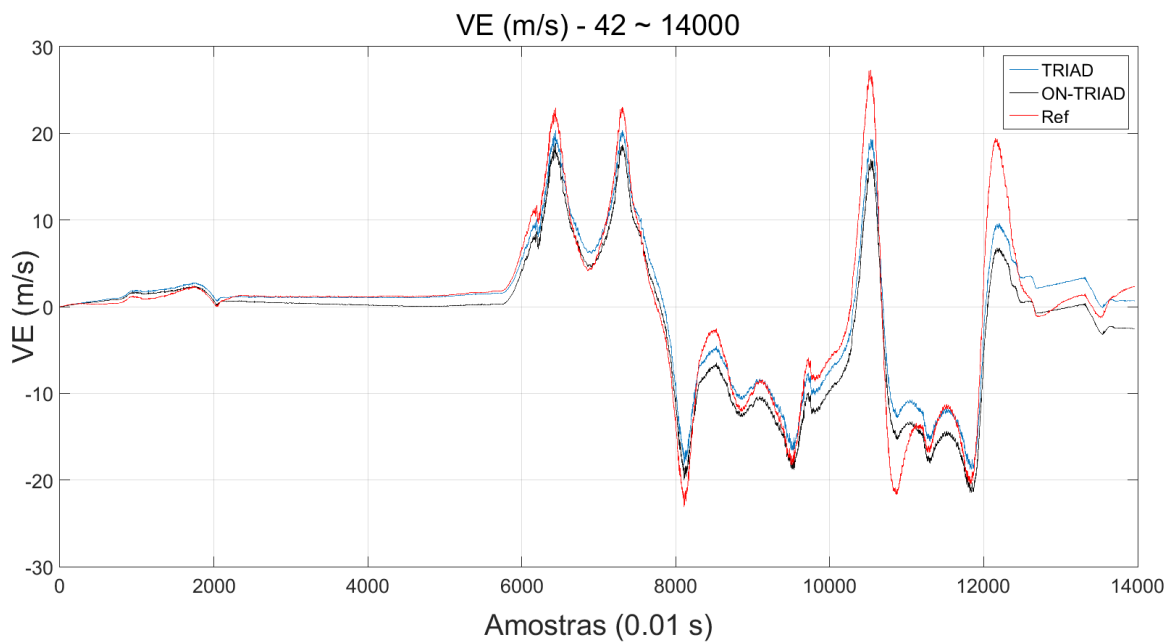
Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.8 – Erro da velocidade norte ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
VN Ref	-0,3602	-2,6568	-0,2133	19,4640
Erro TRIAD (m/s)	5,1335	9,5759	15,4273	25,0810
Erro ON-TRIAD (m/s)	-0,1500	-0,8796	-0,3723	4,0076

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.11 - VE navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



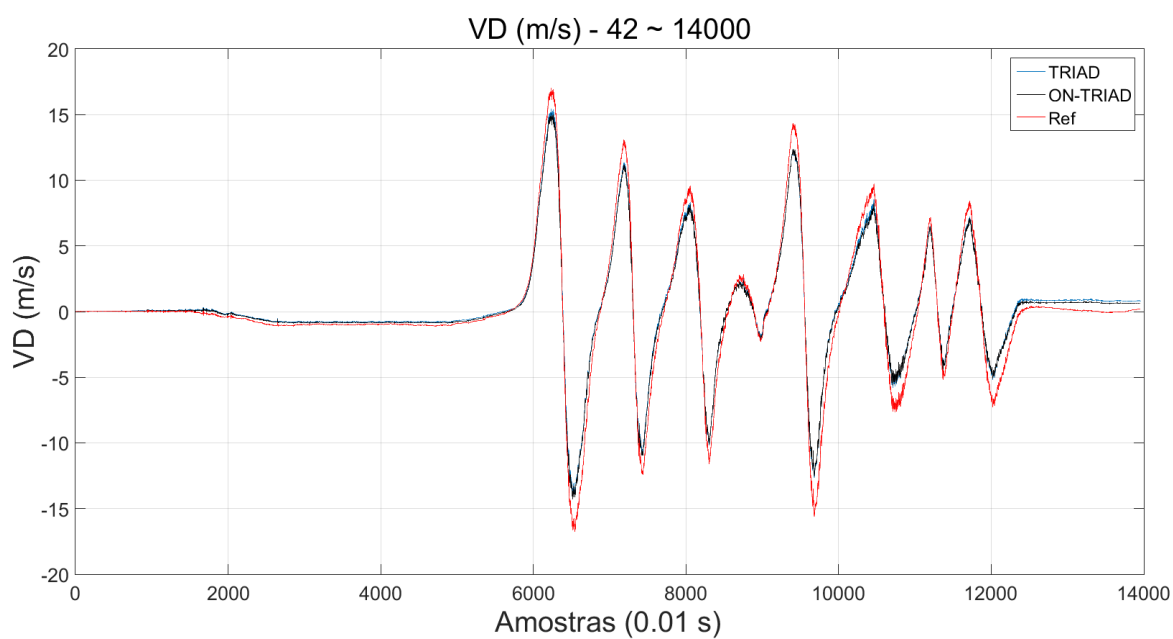
Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.9 – Erro da velocidade leste ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
VE Ref	1,1413	6,8746	-10,0656	3,8135
Erro TRIAD (m/s)	0,0639	1,1742	-0,5251	6,7710
Erro ON-TRIAD (m/s)	0,7310	2,5085	1,5120	9,5136

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.12 - VD navegação autônoma REF x TRIAD x ON-TRIAD.



Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.10 - Erro da velocidade down (baixo) ao longo do tempo.

Tempo (s)	30	60	90	120
VD Ref	-0,9867	4,4171	-1,8909	-6,8618
Erro TRIAD (m/s)	-0,2151	0,3518	-0,2915	-1,9929
Erro ON-TRIAD (m/s)	-0,1635	0,4834	-0,1894	-2,1111

Fonte: Produção do autor.

4.2 Navegação inercial auxiliada por GPS através do FKC

Nesta seção apresentam-se os resultados de navegação inercial auxiliada. O filtro de fusão de dados adotado foi o FKC, cujo algoritmo foi detalhado no Capítulo 2. As equações de mecanização foram utilizadas, na sua forma estocástica, para representar a dinâmica não-linear do FKC e são utilizadas no ciclo de propagação (“*time update*”) do estado e da covariância. Foi o conjunto de medidas de posição e de velocidade para compor a navegação inercial auxiliada:

A utilização de medidas de posição e/ou de velocidade é típico de navegação inercial auxiliada por GPS, e foram emuladas através da massa de dados utilizada (descrição no Capítulo 3). A partir da massa de dados original a 100 Hz foram separadas as medidas de posição e velocidade a 5 Hz, a fim de simular realisticamente os dados GPS.

O FKC foi então implementado para processar as medidas e realizar o ciclo de atualização (“*measurement update*”) do filtro.

Os resultados da implementação do algoritmo de navegação auxiliada com FKC apresentaram resultados consistentes com o funcionamento esperado. Os dados processados acompanharam as respectivas informações da referência, com algumas particularidades a serem detalhadas. É importante dizer que os resultados não apresentaram descontinuidade em relação à referência. As

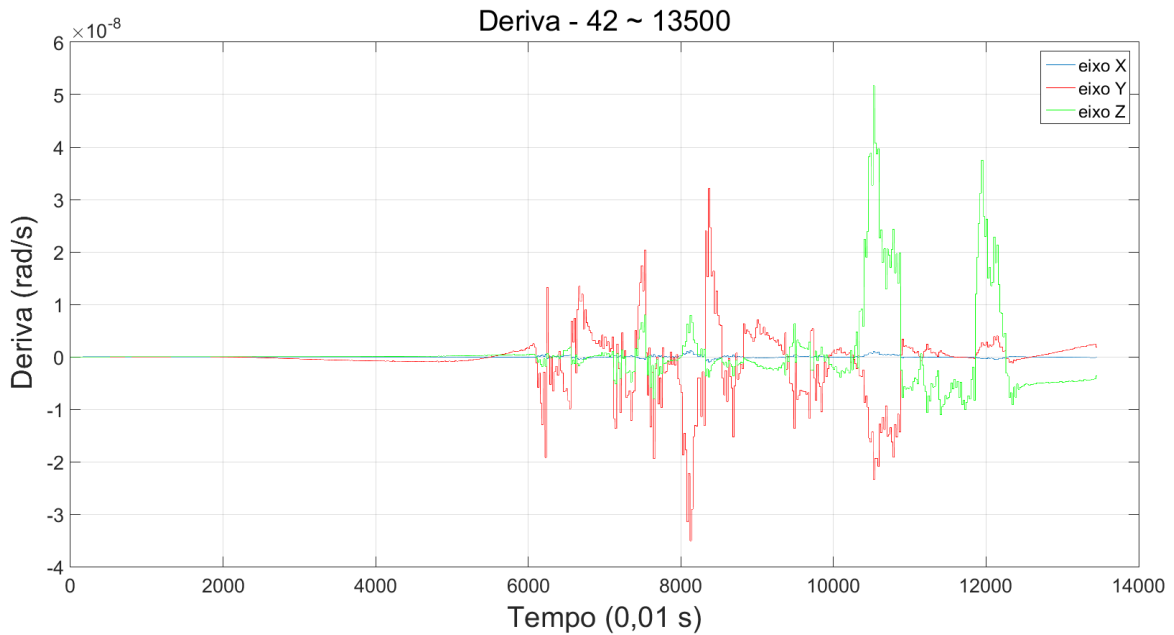
seções a seguir se dedicam a explicar, em mais detalhes, os proventos do algoritmo implementado.

4.2.1 Resultados da estimação de Bias e Derivas

Conforme descrito no Capítulo 2, o FKC foi implementado com 15 estados (posição, velocidade, atitude, derivas dos girômetros, vieses dos acelerômetros). Em geral necessitam-se estimar essas derivas e “*bias*es” em sensores inerciais de baixa precisão, e.g. UMI-MEMS (Unidade de Medidas Inerciais MEMS) para assegurar robustez e precisão ao filtro. No caso da navegação inercial, sabendo tratar-se de sensores inerciais da classe tática (de razoável para alta qualidade), não se esperam grandes derivas ou vieses estimados, principalmente as estáticas (“turn-on” ou instabilidade). Por outro lado, em situações de alta dinâmica, com manobras e giros bruscos como os da massa de dados que refletem a trajetória de uma montanha russa, devem aparecer saltos de “*bias*es” dinâmicos que o FKC tentará rastrear e compensar adequadamente.

As estimações de deriva (*bias* dos girômetros), corroboraram a qualidade dos sensores inerciais de classe tática. Não houve constatação de deriva estática no três girômetros. Conforme a Figura 4.13 mostra, todos os girômetros apresentaram variações na deriva dinâmica, após os 6 mil pontos, onde aconteceram várias manobras tanto de atitude quanto de trajetória (e.g. curvas, acelerações, frenagens, aclives e declives). As estimativas das derivas chegaram a atingir magnitudes em torno da grandeza de 5×10^{-8} rad/s, ao longo da execução do teste.

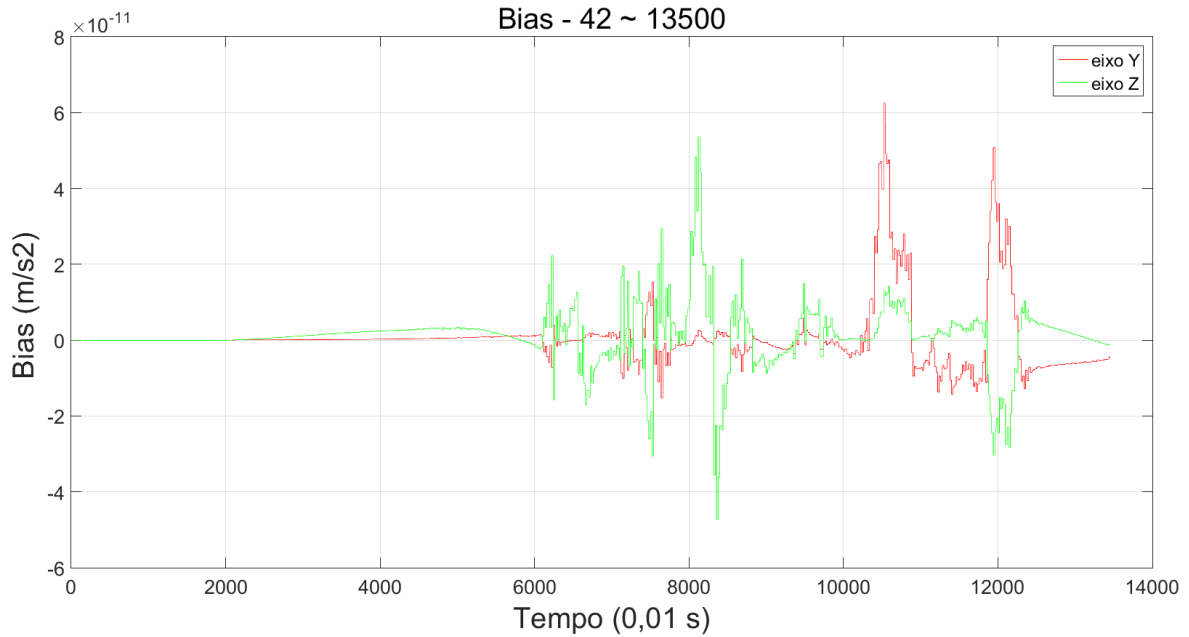
Figura 4.13 - Deriva X, Y e Z, navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

Dada a Figura 4.14, as estimações de *bias* dos acelerômetros mostraram que os acelerômetros do eixo Y e do eixo Z apresentaram comportamento semelhante entre si. Pode-se afirmar que, assim como as derivas dos girômetros, que os *bias* dos acelerômetros dos eixos Y e Z corroboram com sensores inerciais de classe tática, apresentando grandeza da ordem de 10^{-11} m/s². Estas medidas de estimacão podem ser consideradas como nulas, uma vez que $1 \mu\text{g}$ é da ordem de 10^{-5} m/s². O comportamento do bias do acelerômetro no eixo X será mostrado na figura seguinte.

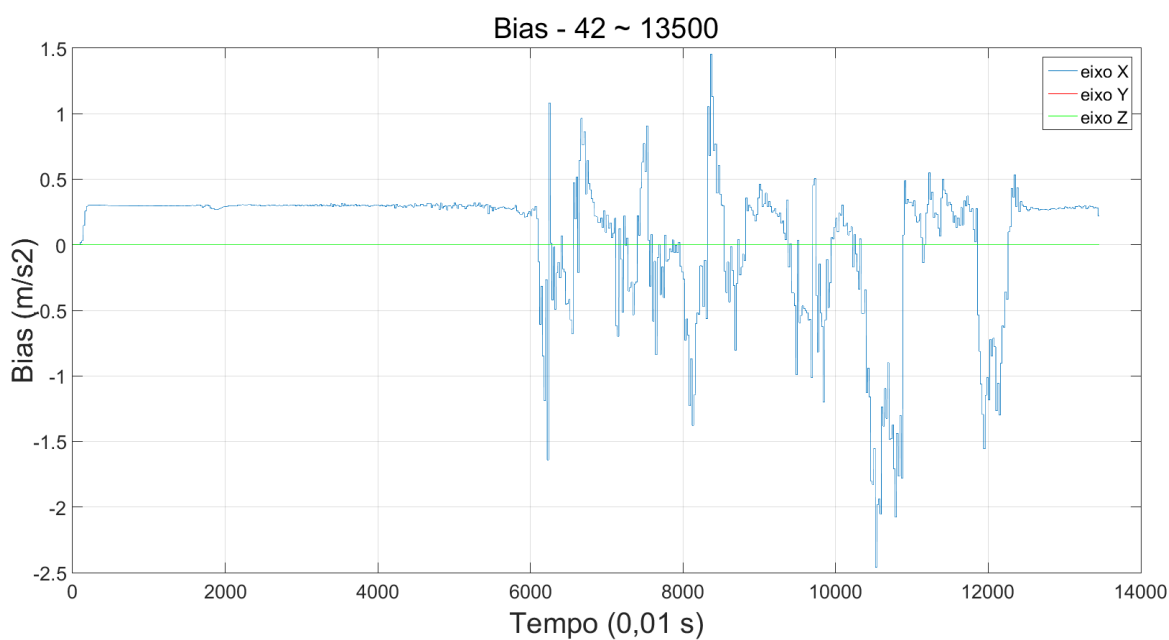
Figura 4.14 - Bias Y, Z navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

Por outro lado, pode-se inferir que acelerômetro do eixo X, observando a Figura 4.15, apresenta um *bias* estático da ordem de $0,3 \text{ m/s}^2$ chegando a atingir 2 m/s^2 na fase de manobras (*bias* dinâmico). Os outros eixos (Y e Z) estão muito abaixo da escala e foram retratados na Figura 4.14. É de se observar que tanto o *bias* do acelerômetro do eixo X, assim como os outros *bias* e derivas dos sensores do UMI, apresentam variações relevantes em suas estimações a partir do primeiro minuto de execução do algoritmo. Este fato pode ser atribuído à dinâmica agressiva do experimento (choques), bem como acelerações e velocidades angulares não modeladas.

Figura 4.15 - Bias X, Y, Z navegação auxiliada FKC.



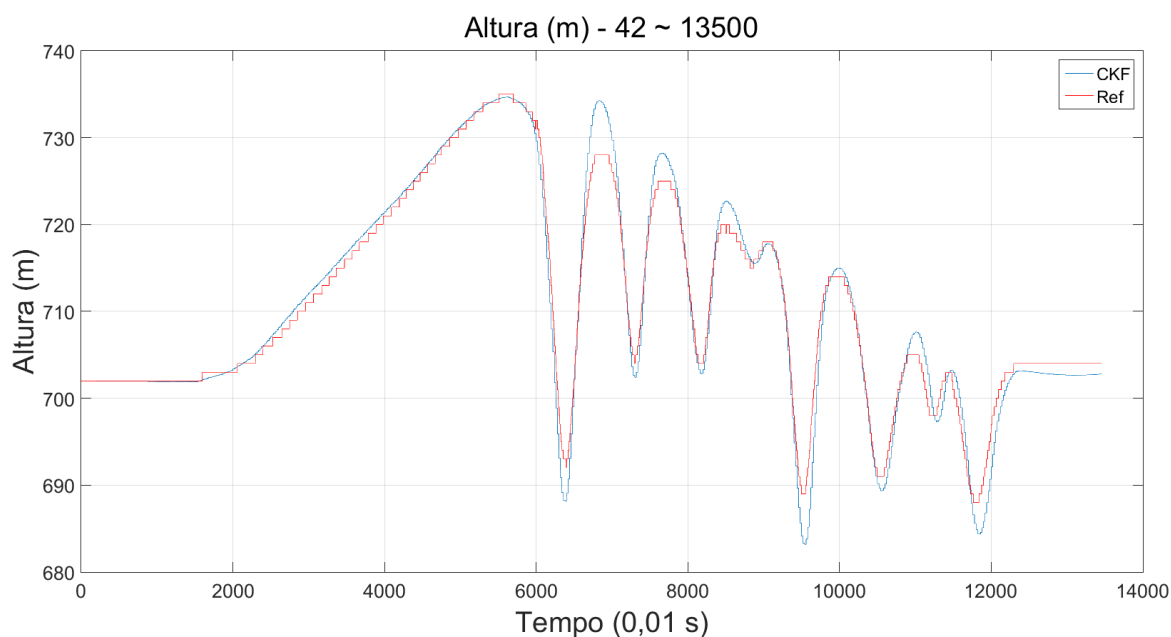
Fonte: Produção do autor.

4.2.2 Resultado em posição

Esta seção mostra os resultados do FKC processando as medidas emuladas de GPS correspondentes à posição e à velocidade. Relativo a posição, a navegação auxiliada com o FKC apresentou um desempenho satisfatório. Não houve presença de crescimento do erro de posição em função do tempo, tanto para a altura, quanto para a latitude e longitude. Em todos os casos, houve um resultado de navegação, em posição, coerente com os valores de referência.

No caso da altura, ao compararmos o desempenho da altura estimada com a altura da referência, foram obtidos os resultados na Tabela 4.11.

Figura 4.16 - Altura navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

O valor do erro máximo da altura em relação à plataforma de referência está dentro da margem de erro esperada (5 m na horizontal, 8 m na vertical), tomando como referência o GPS comercial típico (TRIMBLE). Como não foram utilizadas as medidas diretas do GPS que a plataforma de referência utilizou, mas sim o produto de sua navegação auxiliada, pode-se considerar que o desempenho da navegação implementada em altura foi bom, uma vez que a navegação da referência também incorpora erros ao processo.

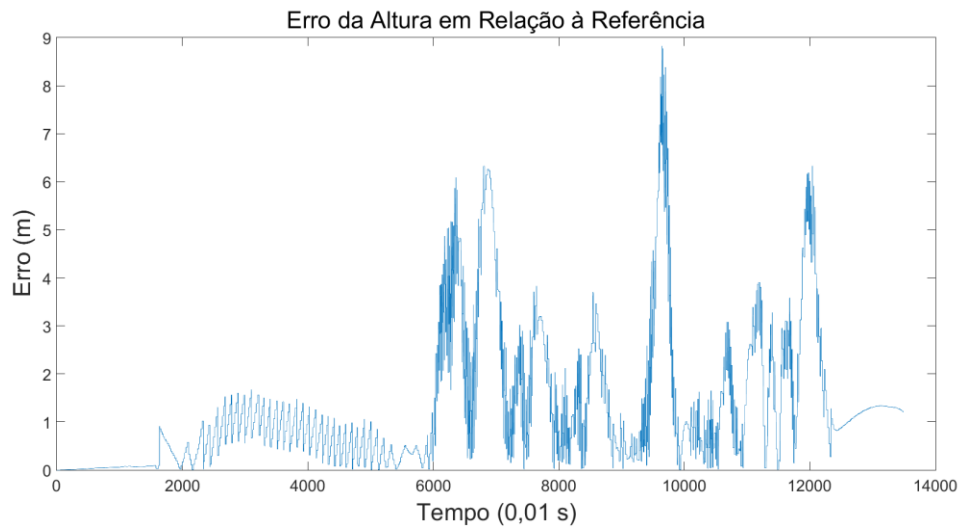
Tabela 4.11 – Erros altura navegação auxiliada.

Erro Médio Altura (m) em módulo	1,31
Desvio Padrão Erro Médio Altura Módulo (m)	1,45
Erro Máximo Altura (m)	8,82
Erro Médio Altura (m)	-0,06
Desvio Padrão Erro Médio Altura Módulo (m)	1,96

Fonte: Produção do autor.

Ao observarmos o erro da altura em relação à referência, fica evidente o aumento dos erros em função da dinâmica do percurso. No caso, a partir do ponto 6000 do gráfico, que, segundo a Figura 4.16, inicia-se a primeira descida da montanha russa e, portanto, ilustra a dinâmica agressiva do percurso.

Figura 4.17 - Erro da altura navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

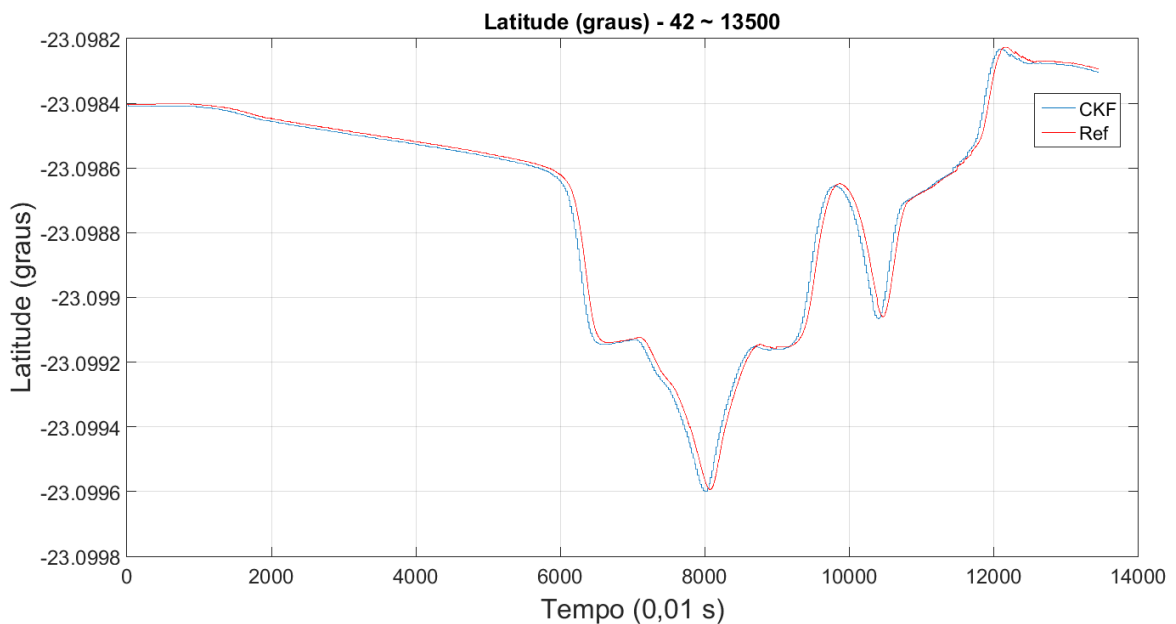
No caso da latitude e da longitude, ao compararmos o desempenho das suas respectivas estimações com os valores da referência, chegamos a conclusões semelhantes às da análise feita em relação à altura. Tanto latitude (Figura 4.18) quanto longitude (Figura 4.19) apresentam resultados que acompanham a referência, sem apresentar erros crescentes. A Tabela 4.12. contém algumas medidas de desempenho.

Tabela 4.12 – Erros latitude e longitude na navegação auxiliada FKC.

Unidades	Radianos	Metros
Erro Médio Latitude em Módulo	$3,4885997 \cdot 10^{-7}$	2.045
Desvio Padrão Erro Latitude em Módulo	$4,16700800 \cdot 10^{-7}$	2,443
Erro Médio Longitude em Módulo	$7,2193286 \cdot 10^{-7}$	4.576
Desvio Padrão Erro Longitude em Módulo	$7,12342776 \cdot 10^{-7}$	4,515
Erro Médio Latitude	$-0,96209036 \cdot 10^{-7}$	-0,564
Desvio Padrão Erro Latitude	$5,34878485 \cdot 10^{-7}$	3,136
Erro Médio Longitude	$3,59292858 \cdot 10^{-7}$	2,278
Desvio Padrão Erro Longitude	$9,48449777 \cdot 10^{-7}$	6,012
Erro Máximo Latitude	$2.4351867 \cdot 10^{-6}$	14.279
Erro Máximo Longitude	$2.7835890 \cdot 10^{-6}$	17.646

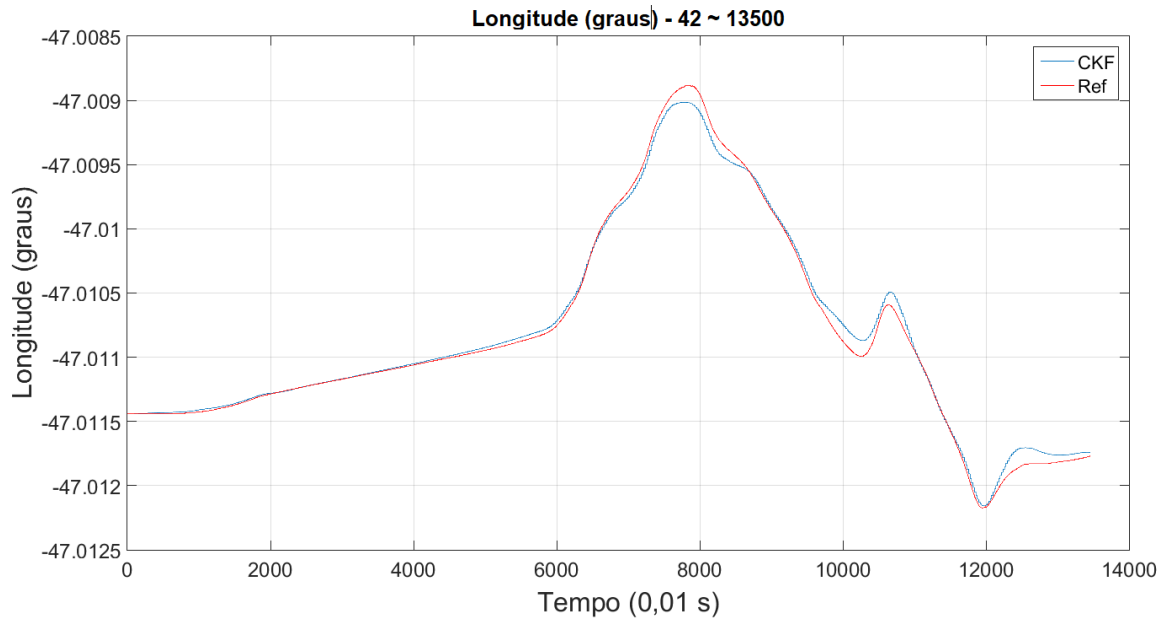
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.18 - Latitude navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

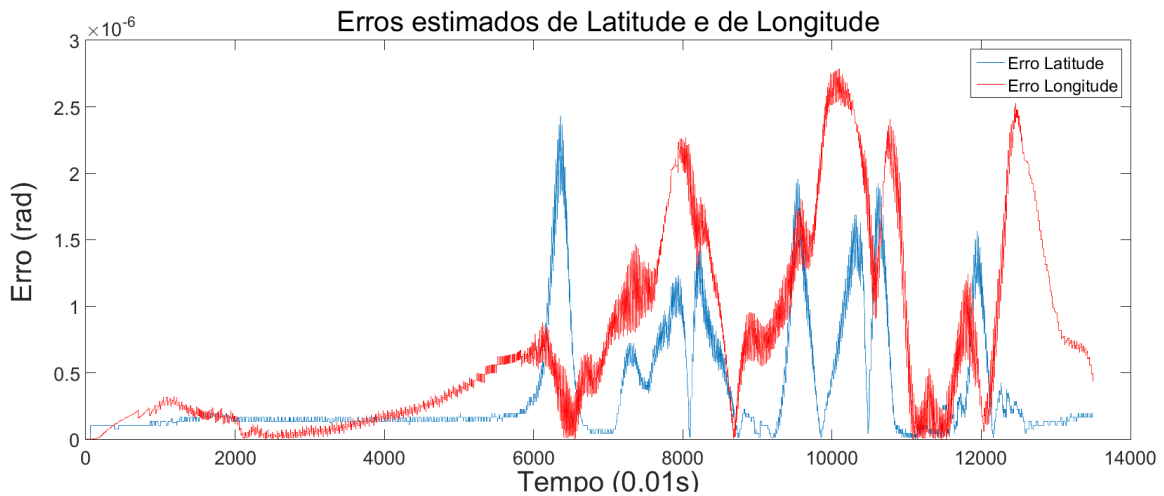
Figura 4.19 - Longitude navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

A Tabela 4.12 evidencia que os resultados das estimações de latitude e de longitude, de maneira independente, estão dentro do nível de erro esperado para um GPS comercial (no caso, 5 m). Todavia os erros máximos excederam esta métrica. Da mesma forma que o erro relativo a estimação da altura, os erros das estimações de latitude e de longitude tiveram um maior valor a partir do ponto 6000 do gráfico, a partir de onde a dinâmica se torna mais agressiva. É de se observar também na Figura 4.20. que os respectivos erros máximos das latitude e longitude não ocorrem no mesmo instante, mas sim em instantes diferentes.

Figura 4.20 - Erros latitude e longitude navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

É possível concluir que as estimações em posição tiveram um resultado satisfatório. Todos os erros tiveram um aumento em sua amplitude expressivo no intervalo de tempo onde predominaram manobras, para todos os parâmetros de posição. Fato que evidencia a influência da dinâmica mais agressiva no desempenho da navegação auxiliada por GPS com FKC.

4.2.3 Resultado em atitude

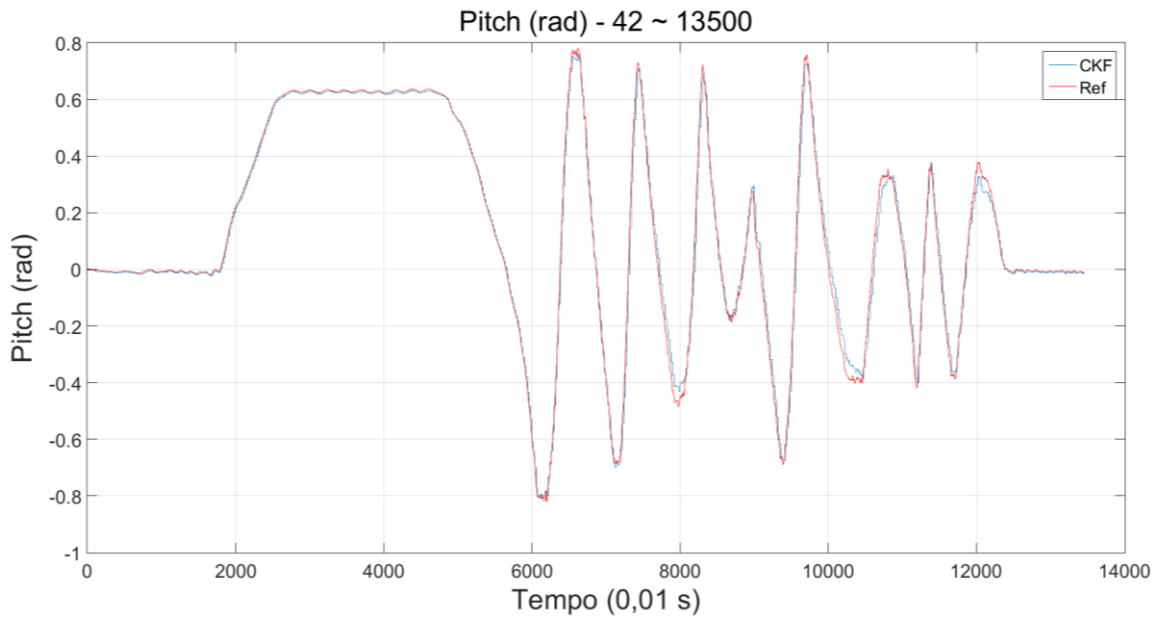
Os resultados da navegação auxiliada por posição e velocidade com o FKC, relativos à atitude, apresentaram um desempenho satisfatório. Não houve presença de crescimento do erro da atitude em função do tempo, tanto para a arfagem, guinada e rolamento. O desempenho do ângulo de rolamento, em relação à referência, merece análise à parte. A Tabela 4.13 resume o desempenho de cada um dos ângulos de euler durante a execução da navegação.

Tabela 4.13 – Erros de atitude navegação auxiliada.

Parâmetro	Radianos	Graus
Erro Médio Pitch em módulo	0,0199806	1,14480448
Desvio Padrão Erro Pitch em módulo	0,02462399	1,41085071
Erro Médio Yaw em módulo	0,0286859	1,6435810
Desvio Padrão Erro Yaw em módulo	0,17136615	9,81855752
Erro Médio Roll em módulo	0,04201785	2,4074455
Desvio Padrão Erro Roll em módulo	0,02416725	1,38468166
Erro Médio Pitch	-0,00131362	-0,07526491
Desvio Padrão Erro Pitch	0,03168389	1,18153536
Erro Médio Yaw	-0,01006145	-0,57647881
Desvio Padrão Erro Yaw	0,17428169	9,98560571
Erro Médio Roll	-0,01515015	-0,86803977
Desvio Padrão Erro Roll	0,04645000	2,63818452
Erro Máximo Pitch	0,1704255	9,7646667
Erro Máximo Yaw	0,2454268	14,0619254
Erro Máximo Roll	0,1608332	9,2150668

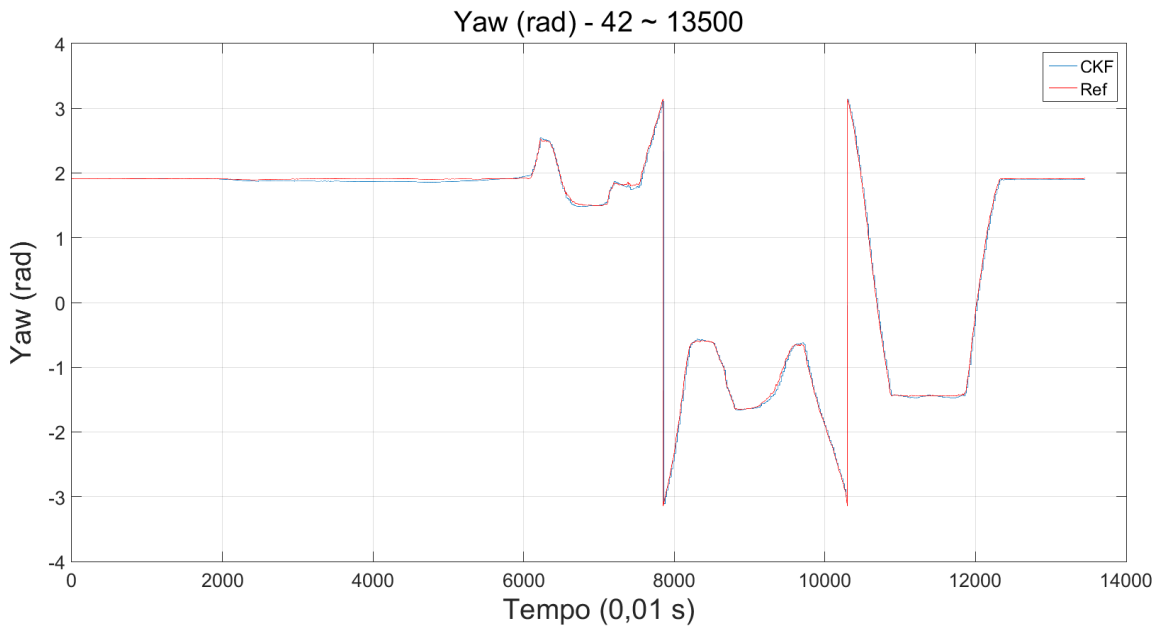
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.21 - Pitch (Arfagem) navegação auxiliada FKC.



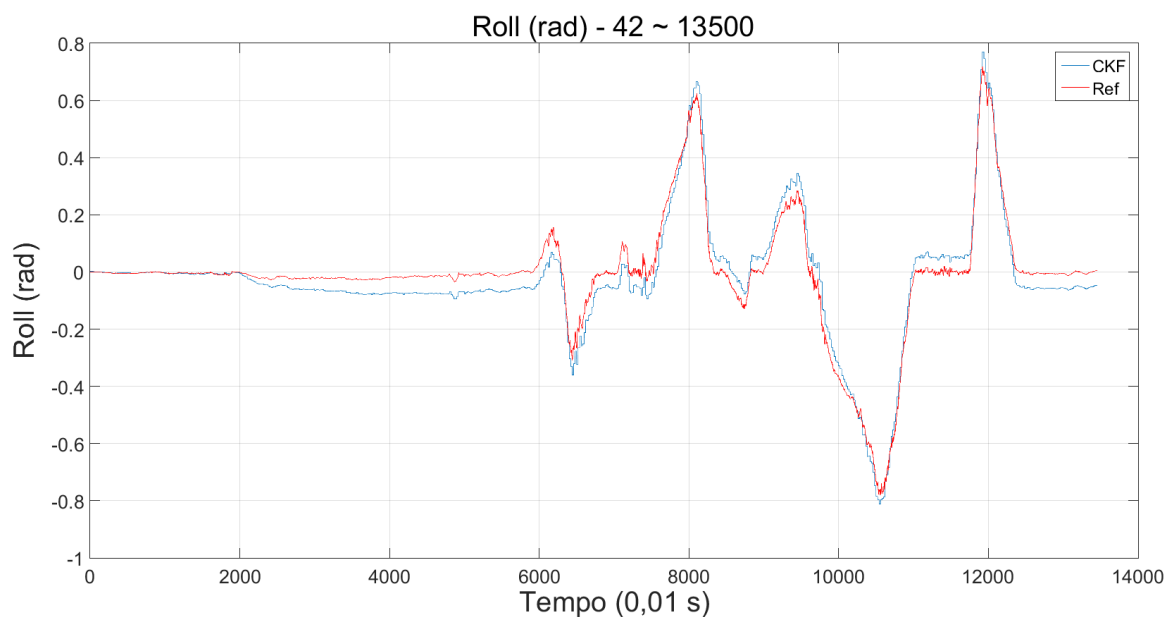
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.22 - Yaw (Guinada) navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

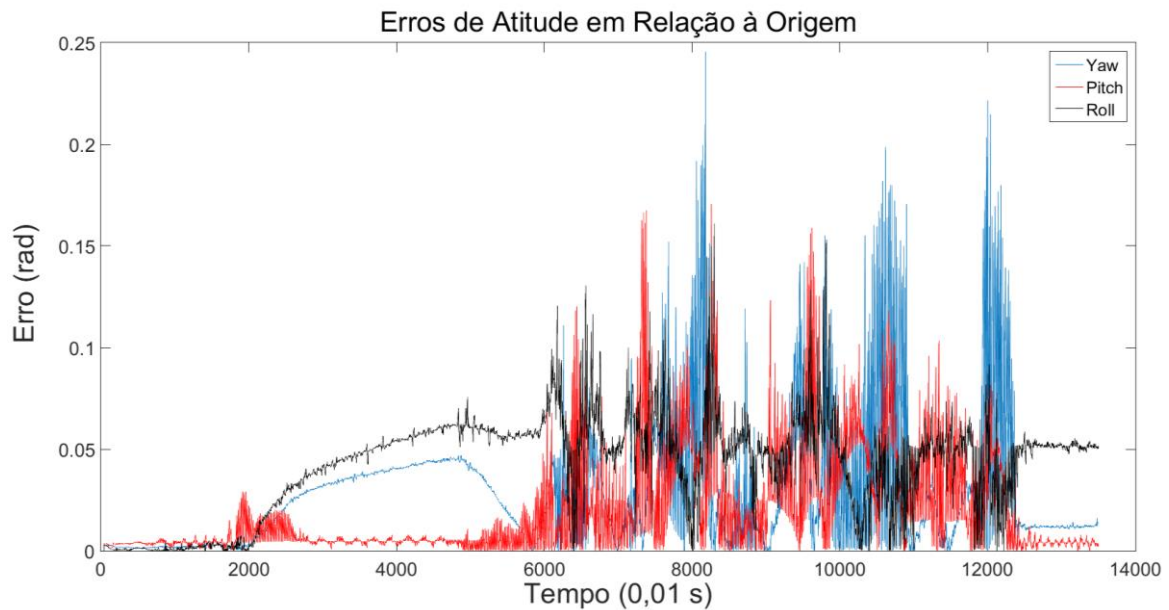
Figura 4.23 - Roll (Rolamento) navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

Os resultados, tanto de guinada quanto de rolamento apresentam apresentam no início um *offset* (quase imperceptível visualmente) em relação à referência, que desaparece antes do 6000 pontos. Nas estimativas de rolamento (Figura 4.23), este patamar se mantém ao longo de todo o percurso. Já na estimativa de guinada (Figura 4.22), este patamar recua para um nível próximo ao original antes do início da dinâmica mais agressiva do percurso. Analisando os erros, fica claro que, assim como em posição, os maiores erros se encontram nas transições mais bruscas, ou seja, a partir 60 segundos (6000 amostras). Estes erros certamente seriam mitigados se fosse possível amostrar dados GPS com taxas maiores que os 5 Hz emulados, mas tornaria as análises irrealísticas (receptores GPS não provêem dados a taxas altas como 100 Hz, sem auxílio de interpolação).

Figura 4.24 - Erros atitude navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

É possível concluir que as estimações em atitude tiveram um resultado satisfatório. Apesar de um erro médio superior a 1 grau, como visto na Tabela 4.13, todas as estimações de ângulos de euler apresentaram comportamentos seguindo a referência, apresentando um pequeno atraso em movimentos mais rápidos, fato observado em todos os ângulos de euler.

4.2.4 Resultado em velocidade

As velocidades estimadas, resultados da navegação auxiliada com FKC auxiliada por posição e velocidade, forneceram resultados coerentes com com resultados de posição e de atitude previamente apresentados. Da mesma forma que as estimações citadas, as de estimações de velocidade não apresentaram erros crescentes e acompanharam as curvas de velocidade de referência. Os resultados das velocidades, em geral, apresentaram as maiores discrepâncias em relação à diferença do que posição e atitude. Tal fato é explicado como consequência da massa de dados utilizada. A velocidade da referência não é direta do GPS, mas sim emulada dos resultados da navegação inercial da plataforma de referência. Ou seja, pode ter incorporado um nível maior de erros ao processo. Não obstante, elas apresentam ruídos que podem não ter sido

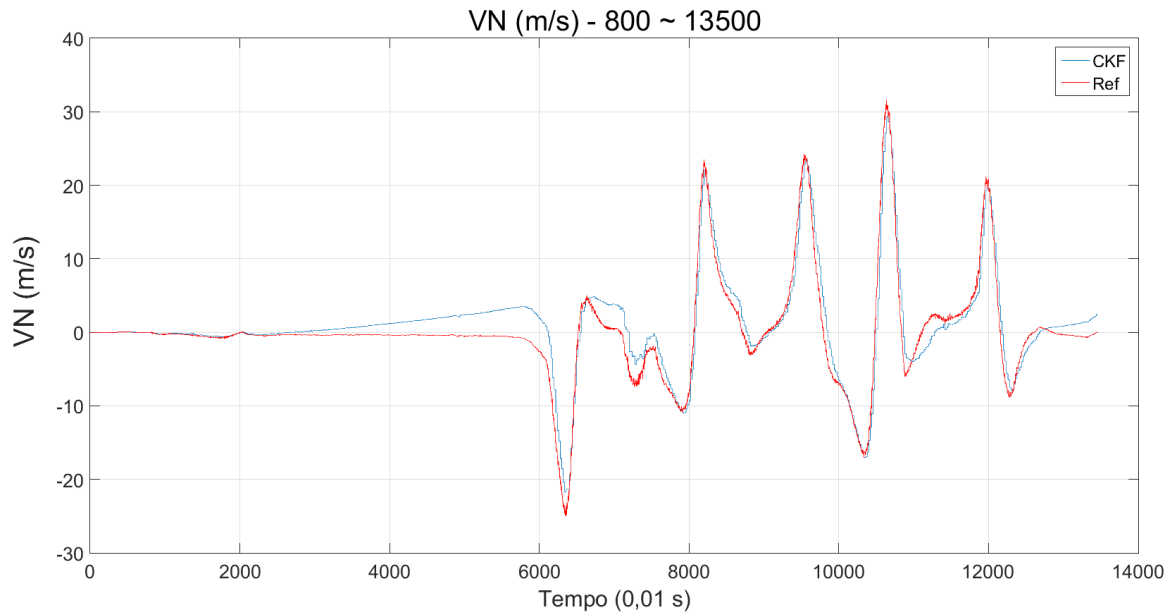
modelados no FKC. Os resultados quantitativos podem ser observados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Erros de velocidade navegação auxiliada.

Parâmetro	Velocidade (m/s)	Desvio Padrão (m/s)
Erro VN em módulo	1,63	1,48
Erro VN	0,88	2,02
Erro VE em módulo	0,77	0,89
Erro VE	0,39	1,11
Erro VD em módulo	0,58	0,76
Erro VD	0,31	0,91
Erro Máximo VN	10,18	N/A
Erro Máximo VE	7,68	N/A
Erro Máximo VD	6,21	N/A

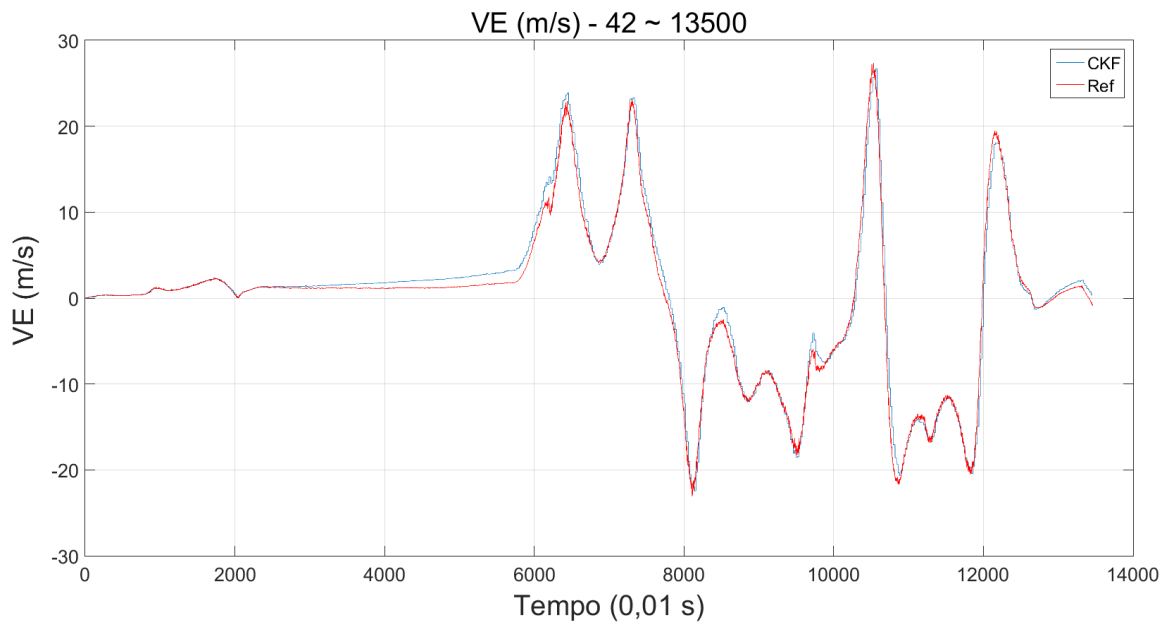
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.25. VN (Velocidade Norte) navegação auxiliada FKC.



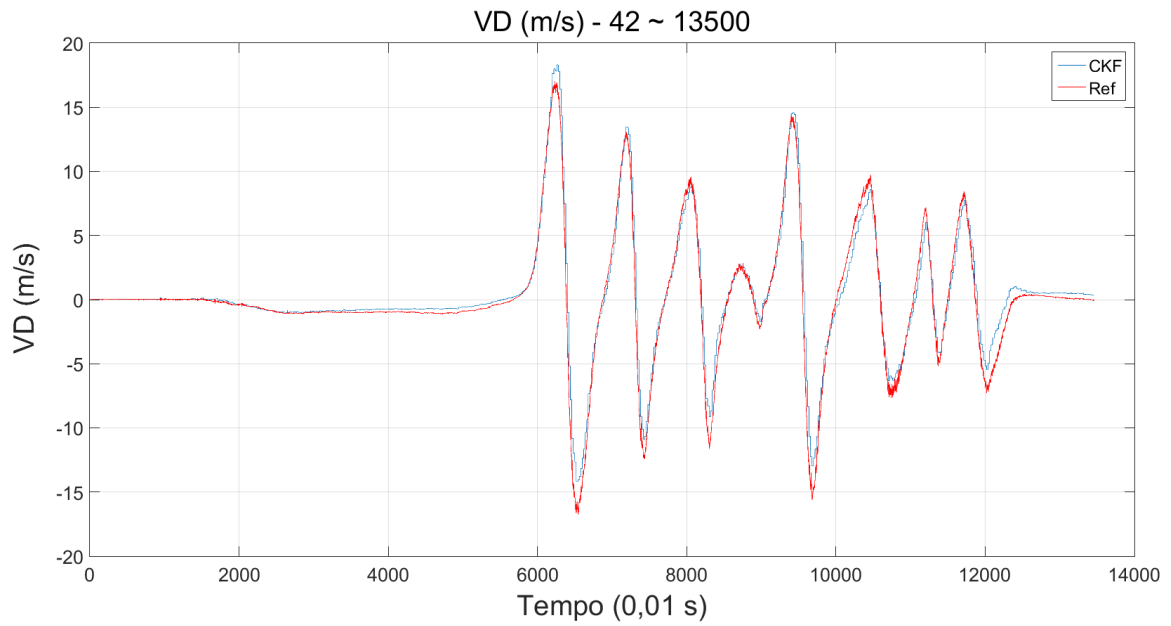
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.26 - VE (Velocidade Leste) navegação auxiliada FKC.



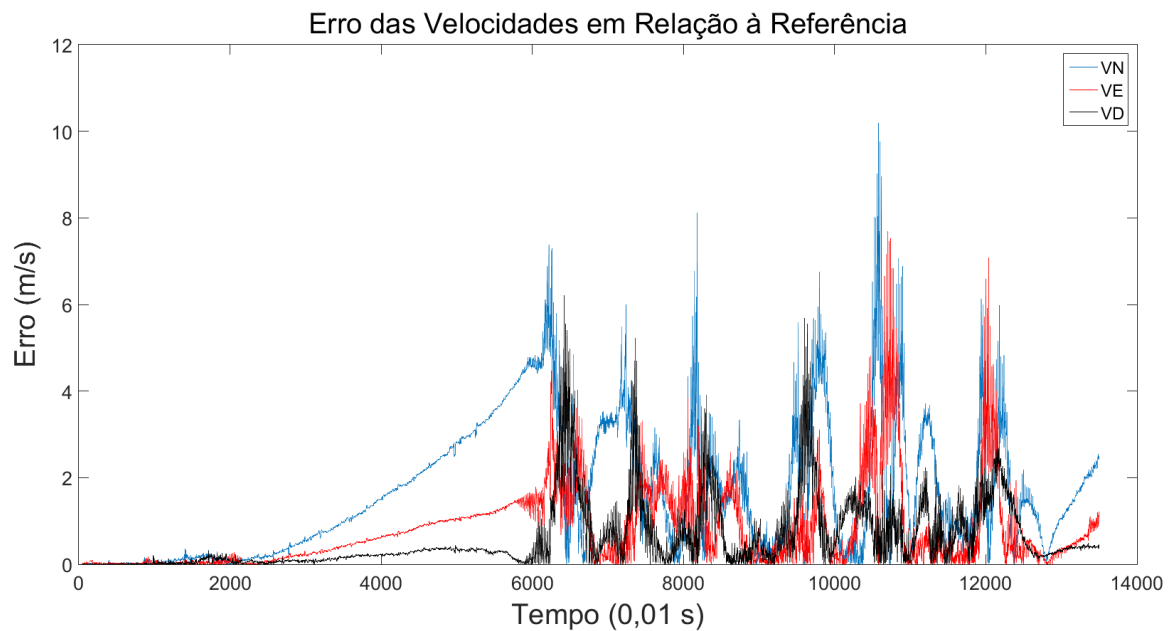
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.27 - VD (Velocidade Down) navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.28 - Erros das velocidades navegação auxiliada FKC.



Fonte: Produção do autor.

Observando as estimações de velocidade, é possível concluir que a navegação inercial auxiliada teve um resultado satisfatório. Todos as estimações de ângulos velocidade apresentaram comportamentos seguindo a referência, apresentando um pequeno atraso em movimentos mais rápidos. Fato observado em todas as velocidades. Apenas a velocidade na direção norte, VN, apresentou erros mais acentuados fora do trecho de dinâmica agressiva. Fato que pode ser explicado observando o acoplamento de VN com o ângulo de YAW.

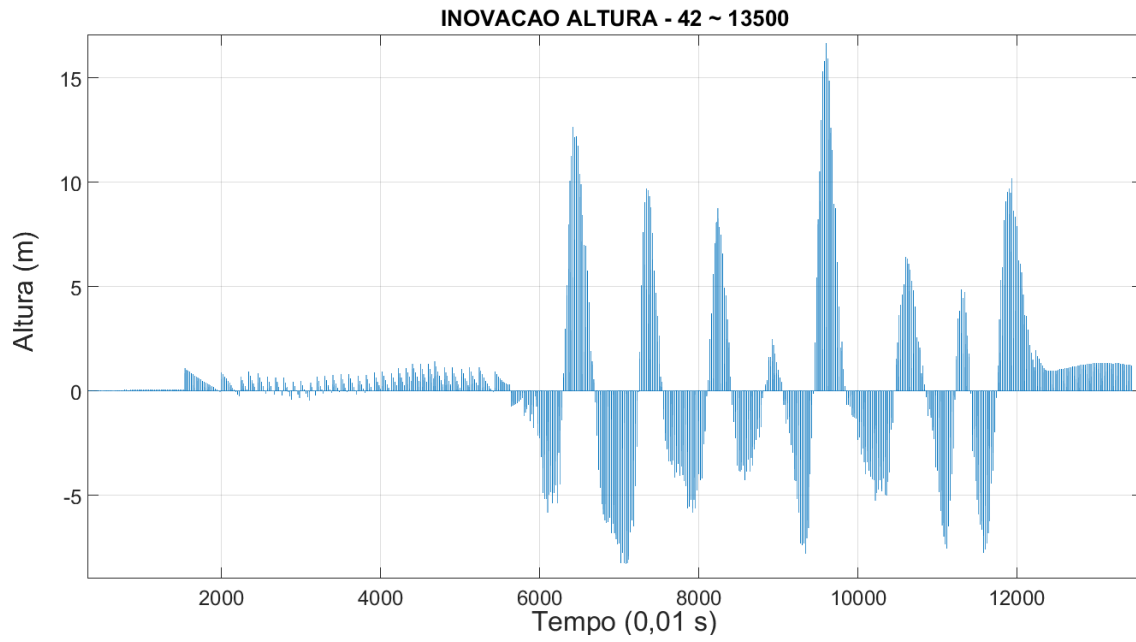
4.2.5 Análise de resíduos

Esta seção mostra os resíduos típicos, bem como analisa as estatísticas resultantes da utilização do filtro de kalman *cubature* FKC no problema de aplicação. Os resíduos mostrados se referem à chamada sequência de inovação, que são a diferença entre as observações (medidas) e os valores dessas observações calculadas pelo filtro, antes do ciclo de atualização do filtro ("Measurement Update").

4.2.5.1 Resíduos de posição

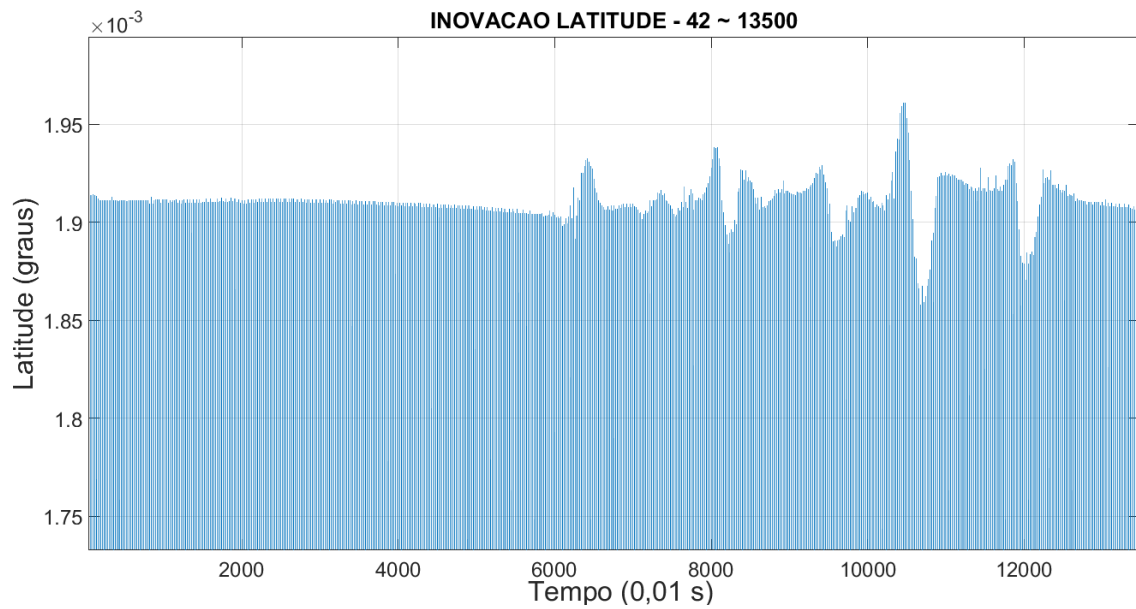
As Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 mostram os resíduos em altitude (m), longitude (graus) e latitude (graus). Notam-se 2 regiões distintas, onde até cerca de 6000 pontos (60 s) a dinâmica do problema é considerada lenta e de pouca variação; e a partir daí até o final a dinâmica é rápida, onde nota-se nitidamente o aparecimento de curvas bruscas e subidas e descidas do veículo de navegação.

Figura 4.29 - Resíduos de altitude.



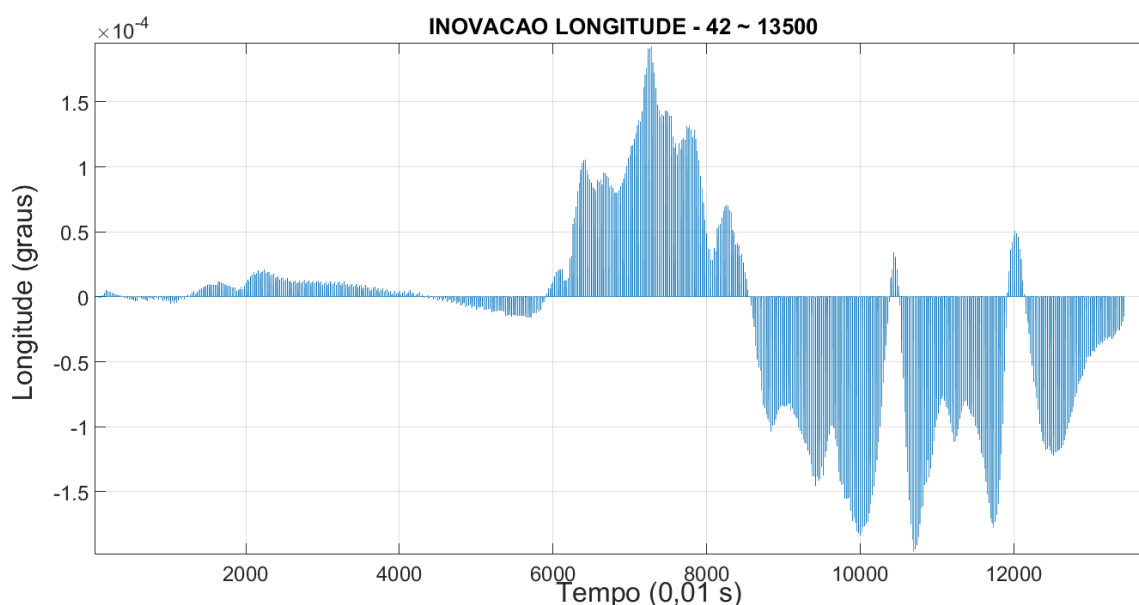
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.30 - Resíduos de latitude.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.31 - Resíduos de longitude.



Fonte: Produção do autor.

A Tabela 4.15 mostra as estatísticas dos resíduos de posição, onde estão os valores das médias e os respectivos desvios-padrão. O resíduo que cobre o intervalo completo não é um bom indicativo, para o problema, devido as oscilações bruscas que ocorrem. Optou-se, conforme comentado na análise das Figuras, dividir as estatísticas em 2 intervalos: dinâmica lenta (0 a 6000 pontos) e dinâmica rápida (6000 pontos até o fim). Nota-se que a dinâmica lenta apresenta pequenas amplitudes de desvio-padrão: 0,35 em altitude e $6,19 \times 10^{-6}$ (graus) em longitude (aproximadamente 0,68 m). Por outro lado, no intervalo de dinâmica rápida, os desvios-padrão foram de maior magnitude: 2,71 m em altitude e $54,25 \times 10^{-6}$ (graus) em longitude (aproximadamente 6 m), com resíduos atingindo oscilações de até 22,26 m. Tratando-se de latitude, os intervalos de dinâmica lenta e de dinâmica rápida apresentaram os desvios padrões na mesma ordem de grandeza. Respectivamente, $9,55 \times 10^{-4}$ (graus) (aproximadamente 106 m) e $8,57 \times 10^{-4}$ (graus) (aproximadamente 95 m).

Tabela 4.15 – Análise dos resíduos em posição.

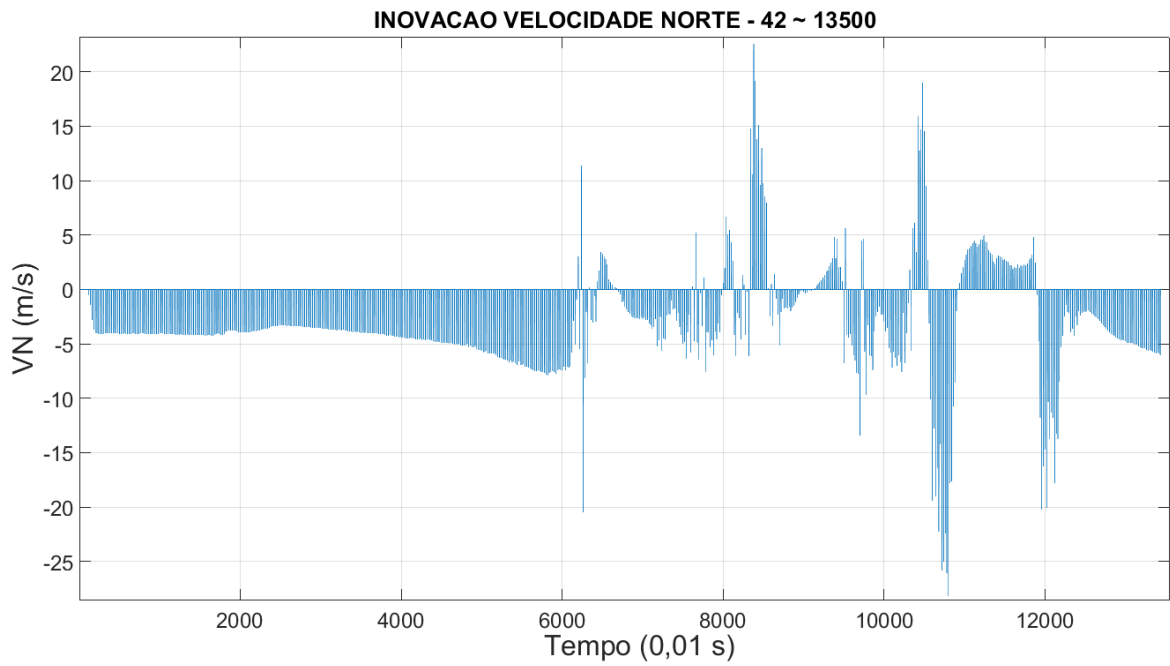
Parâmetro	Resíduos	Resíduos Dinâmica Lenta	Resíduos Dinâmica Rápida
Altura (m)	0,12 ± 2,71	0,14 ± 0,35	0,06 ± 2,71
Latitude (10⁻⁴ graus)	9,5537469 ± 9,557563	9,547875 ± 9,555936	5,333894 ± 8,577698
Longitude (10⁻⁶ graus)	-7,493168 ± 54,496717	1,213318 ± 6,190961	-8,029412 ± 54,258522

Fonte: Produção do autor.

4.2.5.2 Resíduos de velocidade

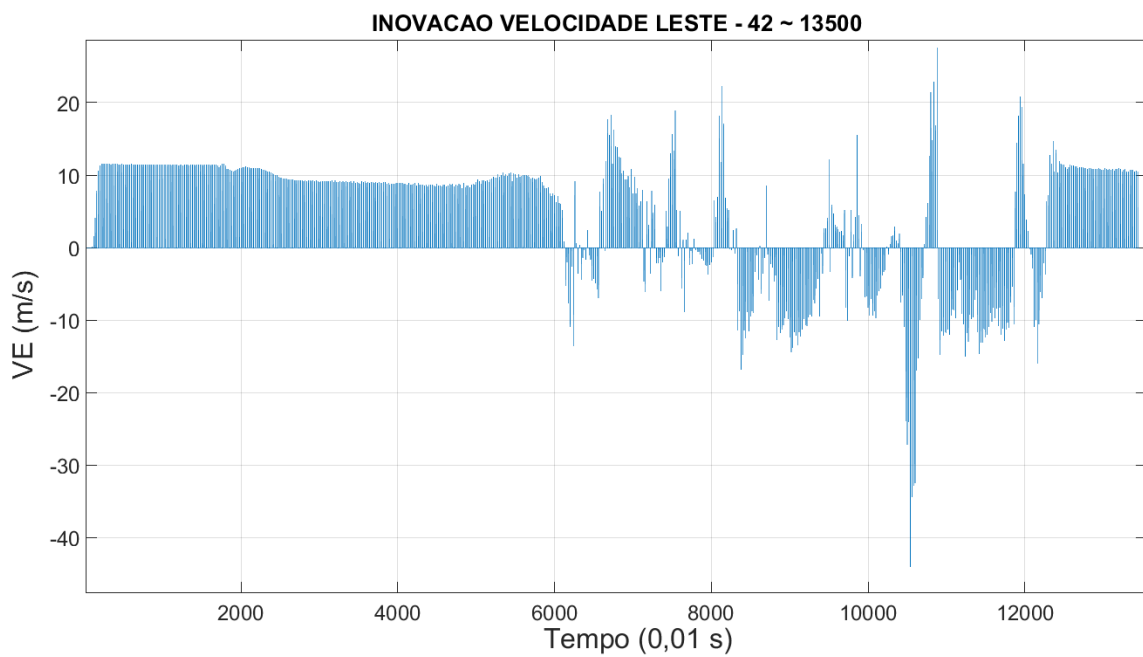
As Figuras 4.32, 4.33, e 4.34 mostram os resíduos em VN (m/s), VE (m/s) e VD (m/s). Da mesma forma que os resultados em posição, notam-se as 2 regiões distintas, onde até cerca de 6000 pontos (60 s) e a partir daí até o final. Da mesma forma que a posição, na fase de dinâmica rápida se nota nitidamente o aparecimento de curvas bruscas e subidas e descidas do veículo de navegação.

Figura 4.32 - Resíduos de velocidade norte.



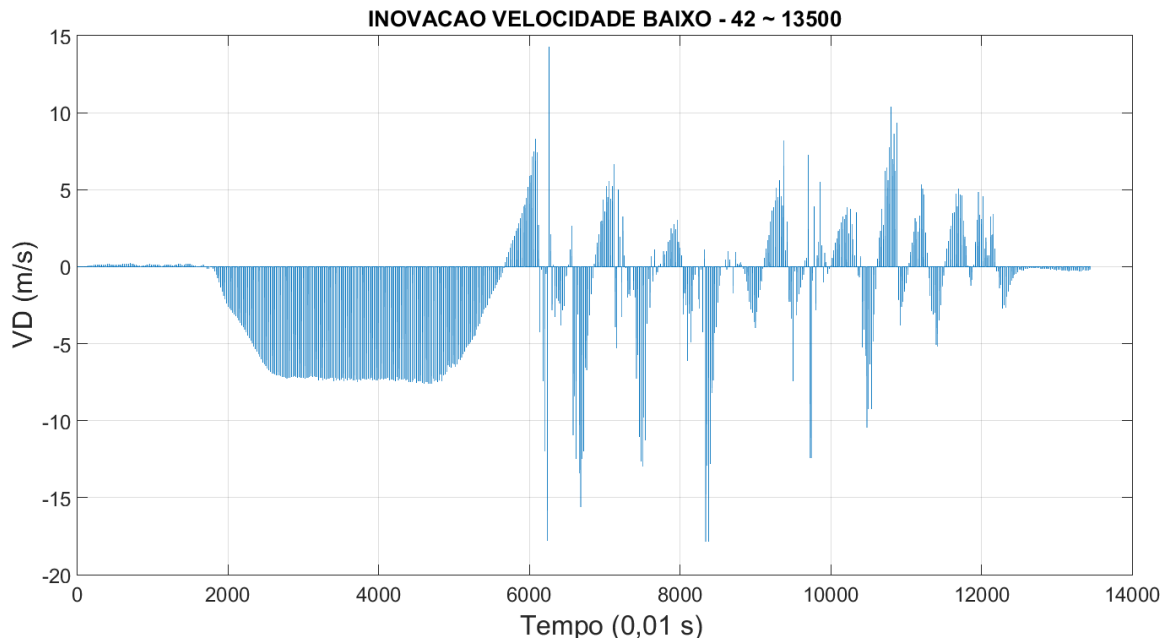
Fonte: Produção do autor.

Figura 4.33 - Resíduos de velocidade leste.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.34 - Resíduos de velocidade baixo.



Fonte: Produção do autor.

A Tabela 4.16 mostra as estatísticas dos resíduos de velocidade, onde estão os valores das médias e os respectivos desvios-padrão. Optou-se por exibir a Tabela 4.16 com a mesma lógica da Tabela 4.15. No intervalo de dinâmica lenta (0 a 6000 pontos) nota-se que o desvio padrão apresenta menores amplitudes do que na dinâmica rápida em VN (2,40 m/s na lenta contra 3,59 m/s na rápida) e VE (5,01 m/s na lenta contra 5,40 m/s na rápida). VD, apresentou o comportamento oposto às VN e VE. No caso o desvio padrão de VD na parte rápida foi de 3,08 m/s e na parte lenta foi de 2,33 m/s. Em todos os casos de velocidade, a diferença das magnitudes dos desvios padrões dos resíduos da fase lenta e da fase rápida foi muito menor se comparado às de posição.

Tabela 4.16 – Análise dos resíduos em velocidade.

Parâmetro	Resíduos	Resíduos Dinâmica Lenta	Resíduos Dinâmica Rápida
VN (m/s)	-1,59 ± 3,93	-2,21 ± 2,40	-0,61 ± 3,59
VE (m/s)	2,11 ± 6,80	4,85 ± 5,01	-0,03 ± 5,40
VD (m/s)	-0,93 ± 3,21	-1,86 ± 3,08	-0,10 ± 2,33

Fonte: Produção do autor.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho concluiu seu objetivo demonstrando o conhecimento adquirido e construído sobre métodos para diminuir erros de navegação inercial. No caso:

- Autoalinhamento grosseiro;
- Navegação puramente inercial;
- Navegação inercial auxiliada por GPS com FKC.

Todos os temas foram de significativa importância e são complementares. Para que seja possível fazer navegação puramente inercial, é necessária a realização de autoalinhamento. De maneira análoga, para fazer navegação inercial auxiliada por GPS, é necessário navegação puramente inercial.

Os raciocínios tiveram como ponto de partida uma massa de dados adequada ao estudo de navegadores inerciais. Conforme mencionado no Capítulo 3, foram utilizados dados reais oriundos de um SNI de precisão tática em uma montanha-russa. O trajeto de uma montanha russa é ideal para testar um navegador inercial, pois tem variação de movimentos em todas as direções e ângulos a serem avaliados, além de passarem sempre pelo mesmo local, com o mesmo começo e final, fornecendo repetibilidade e confiabilidade sobre os dados.

O estudo de autoalinhamento grosseiro, apesar do nome, ainda é atual e possui alta aplicabilidade em sistemas que necessitam de uma resposta rápida. Por exemplo, sistemas bélicos. Este trabalho, concentrou-se em comparar de métodos clássicos e de vanguarda de autoalinhamento grosseiro. Não obstante, aliou-o a um método numérico para a filtragem da massa de dados. Como resultado, esta comparação mostrou que, em 41 segundos, é possível realizar um autoalinhamento com a seguinte qualidade: em 30 segundos de navegação puramente inercial, obteve um erro menor do que 4 metros. Tanto em posição horizontal, quanto em vertical.

De uma maneira mais ampla, o estudo comparativo de autoalinhamento grosseiro mostrou que o método ON-TRIAD é mais eficiente do que o método

TRIAD para a realização de navegação puramente inercial. Em termos de posição, a navegação inercial que fez uso do alinhamento inicial pelo método ON-TRIAD apresentou um erro, em geral, dez vezes menor do que os erros da navegação inercial autônoma que utilizou o método TRIAD para o seu respectivo alinhamento inicial. Já em relação aos resultados de atitude, os resultados foram muito próximos da referência, bem como entre si. Neste caso, os efeitos do método ON-TRIAD na navegação ainda foram ligeiramente superiores ao método TRIAD. Em termos de velocidade, os resultados oriundos do ON-TRIAD foram mais regulares do que os apresentados pelo TRIAD.

A implementação a solução de navegação auxiliada por GPS teve seus desafios próprios, a começar da escolha do filtro e do seu respectivo acoplamento. Tendo em vista a evolução da tecnologia que propicia cada mais sensores portáteis, a escolha de uma ferramenta para fusão de dados capaz de lidar com múltiplas dimensões se fez necessária. A escolha do filtro de kalman *cubature* foi a ferramenta escolhida. Não apenas para uma suprir uma necessidade real, mas também por ser uma técnica nova e capaz de lidar com medidas tanto lineares, quanto não-lineares. A escolha do acoplamento fraco para a construção da solução foi feita por dois motivos. O primeiro é a massa de dados não fornecer dados que possibilitassem implementar acoplamento forte. O segundo é devido ao o FKC ser mais robusto para sistemas com dinâmica não linear. Tal robustez do filtro o qualificaria para lidar melhor com o problema do cascadeamento de filtros de kalman que este tipo de acoplamento apresenta.

Desta forma, foi desenvolvido, como maior contribuição deste trabalho, um filtro não-linear de fusão de dados baseado no filtro de kalman *cubature*, para implementar a navegação inercial auxiliada. Este filtro é considerado robusto, com pouca carga computacional adicional e apropriado para navegação em tempo real. Considerou-se as medidas externas típicas de receptores GPS (posição, velocidade) e sensores (atitude) para avaliar o desempenho do navegador auxiliado. De acordo com os testes realizados, é possível concluir que a implementação do algoritmo de navegação auxiliada por GPS, feita com FKC, foi bem-sucedida. Erros médios da ordem de 2,63 m, 0,99 m/s, 1,72 graus foram obtidos. Todos os dados estimados apontam que o maior causador de erros é a dinâmica agressiva das manobras radicais da montanha russa. Como

o veículo que carregou experimento com a plataforma não disponha de amortecedores, parte da dinâmica agressiva pode ser atribuído aos choques sofridos, tanto do veículo com os trilhos da montanha-russa, quanto dos impactos do experimento com o veículo. Resultados melhores podem ser obtidos mediante estudos mais aprofundados da calibração deste FKC.

5.1 Trabalhos Futuros

A conclusão deste trabalho abre espaço a sua continuidade na forma de estudos em três áreas específicas:

- Autoalinhamento fino, de posse do conhecimento das ferramentas de alinhamento grosseiro, bem como de filtragem de kalman,
- Estudos mais aprofundados da calibração e implantação do FKC, com acoplamento fraco, com um número maior de dimensões a serem incorporadas ao filtro. Como magnetômetro e altímetro.
- Implementação de Navegação Auxiliada por GPS com acoplamento forte e outros sensores, utilizando os conhecimentos adquiridos sobre FKC.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARASARATNAM, I.; HAYKIN, S. Cubature Kalman filters. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, 2009.

BABU, R.; WANG, J.; **Ultra-tight GPS/INS/PL integration: Kalman Filter Performance Analysis**. Hong Kong: GNSS, 2005. p. 8-10.

BALLET, R. **A visual inertial navigation method for stable aerial platforms**. 2017. 72p. Dissertação (Mestrado em Sistema e Mecatrônica Aeroespacial) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2017.

BIEZAD, D. J. **Integrated navigation and guidance systems**. Reston, VA: AIAA, 1999.

BRITTING, K. R. **Inertial navigation system analysis**. New York: Wiley, 1971.

BRITTING, K. R. **Self-alignment techniques: inertial navigation systems analysis**. [S.I.]: Artech House, 1971. p.198-216.

BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. **Introduction to random signals and applied Kalman filtering**. New York: Wiley, 1997.

CASTRO LEITE, L. K.; KUGA, H. K.; LEITE FILHO, W.C. Comparing two methods of coarse self-alignment using high accuracy SINS. In: IBERIAN-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 38., 2017. **Proceedings...** 2017.

EINWOEGERER, W. **Mecanização de central de navegação inercial com dados a partir da integração de IMU MEMS e receptor GPS**. 2009. 145 p. (INPE-15763-TDI/1506). Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

FARRELL, J. A. **Aided navigation GPS with high rate sensors**. [S.I.]: McGraw-Hill, 2008.

FARRELL, J. A.; BARTH, M. **The Global Position System and inertial navigation**. New York, NY: McGraw-Hill, 2008.

GARCIA, R. V.; PARDAL, P. C. P. M.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. Non-linear filtering for sequential spacecraft attitude estimation with real data: cubature Kalman filter, unscented Kalman filter and cubature Kalman filter. **Advances in Space Research**, v. 63, p. 1038-1050, 2019.

GELB, A. **Applied optimal estimation**. Cambridge: MIT Press, 1974.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Kalman filtering theory and practice: using MATLAB**. New York: John Wiley & Sons, 2001.

- GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; ANDREWS, A. P. **Global positioning systems, inertial navigation, and integration**. New York: Wiley, 2001.
- GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P; BARTONE, C. G. **Global navigation satellite systems, inertial navigation, and integration**. New York: John Wiley & Sons, 2013. 561p.
- HENRICI, P. K. **Discrete variable methods in ODEs**. New York: John Wiley, 1962.
- JIANG, Y. F. Error analysis of analytic coarse alignment methods. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems**, v. 34, n. 1, p. 334-337, 1998.
- JULIER, S.; UHLMAN, J. Unscented filtering and nonlinear estimation. **Proceedings of IEEE**, v. 92, n. 3, p. 401-422, 2004.
- KUGA, H. K. **Noções práticas de técnicas de estimação**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, 2005. Notas de aula.
- KUGA, H. K. **Filtragem de Kalman não-linear** [comunicação pessoal]. Mensagem recebida por Leonardo Kameyama de Castro Leite em 05 nov. 2018.
- LI, C.; GE, Q. SCKF for MAV attitude estimation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING CYBERNETICS, 2011, Guilin China. **Proceedings...** 2011. p. 1313-1318.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. New York: Academic, 1979.
- SARKKA, S.; SOLIN, A. On continuous-discrete Cubature Kalman filtering. **IFAC Proceedings**, v.45, n.16, p. 1221-1226, 2012.
- SILVA, F. O.; HEMERLY, E. M; LEITE FILHO, W. C. Error analysis of analytical coarse alignment formulation for stationary SINS. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems** , v.52, n.4, p.1777-1796, 2016.
- TITTERTON, D. H.; WESTON, J. L. **Strapdown inertial navigation technology**. 2.ed. [S.l.]: The Institution of Electrical Engineers, 2004.
- TRIMBLE. **Trimble condor series GPS modules**: user guide. Disponível em: <http://trl.trimble.com/docushare/dsweb/Get/Document-482603/CONDOR_UG_2C_75263-00.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2019.
- VASEGI, S. V. **Impulse noise**: advanced digital signal processing and noise reduction. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. p. 365.

XIAOJUN, T.; ZHENBAO, L.; JIASHENG, Z. Square root quaternion cubature filtering for spacecraft attitude estimation. **Acta Astronautica**, v.76, p.84-94, 2012.

ZHANG, L.; YANG, H.; LU, H.; ZHANG, S.; CAI, H.; QIAN, S. Cubature Kalman filtering for relative spacecraft attitude and position estimation. **Acta Astronautica**, v.105, n.1, p. 254-264, 2014.

ZHAO, Y. Performance evaluation of Cubature Kalman filter in a GPS/IMU tightly-coupled navigation system. **Signal Processing**, v.119, p. 67-79, 2016.