



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/05.20.14.34-TDI

## PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANO EM SISTEMAS ESTELARES BINÁRIOS

Gerson de Oliveira Barbosa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Othon Cabo Winter, aprovada em 30 de maio de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3TBC8D8>>

INPE  
São José dos Campos  
2019

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):**

### **Presidente:**

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

### **Membros:**

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/05.20.14.34-TDI

## PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANO EM SISTEMAS ESTELARES BINÁRIOS

Gerson de Oliveira Barbosa

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Othon Cabo Winter, aprovada em 30 de maio de 2019.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/3TBC8D8>>

INPE  
São José dos Campos  
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Barbosa, Gerson de Oliveira.

B234p Pontos de equilíbrio lagrangiano em sistemas estelares binários / Gerson de Oliveira Barbosa. – São José dos Campos : INPE, 2019.

xvi + 61 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/05.20.14.34-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2019.

Orientadores : Drs. Elbert Einstein Nehrer Macau, e Othon Cabo Winter.

1. Sistemas binários. 2. Pontos de equilíbrio. 3. Coorbitais. 4. Zonas habitáveis. 5. Exoplanetas. I.Título.

CDU 519.63:524.38

---



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Gerson de Oliveira Barbosa**

Título: "PONTOS DE EQUILÍBRIO LAGRANGIANO EM SISTEMAS ESTELARES BINÁRIOS"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Mestre** em  
**Computação Aplicada**

Dr. Lamartine Nogueira Frutuoso  
Guimarães



Presidente / INPE / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

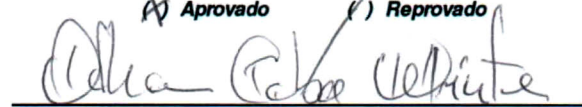


Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. Othon Cabo Winter




Orientador(a) / UNESP / Guaratinguetá - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Dra. Priscilla Andressa de Sousa Silva



Convidado(a) / UNESP / São João da Boa Vista - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado  Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 30 de maio de 2019



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Geraldo Cotta e Janaína Fabrício, meus irmãos Daniele, Bruno e Leandro e amigos, em especial os que estiveram comigo durante todo o período de mestrado, Carlos Romani, Leonardo Vieira e Paulo Barchi. Agradeço também meus orientadores Elbert Macau e Othon Winter, que sempre me apoiaram em meu trabalho, minha namorada Ana Luiza e toda sua família por todo apoio nesse período.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. A pesquisa contou com recursos computacionais fornecidos pelo projeto temático FAPESP proc. 2016/24561-0 e do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiados pela FAPESP (proc. 2013/07375-0).





## RESUMO

Atualmente existem aproximadamente 3700 exoplanetas confirmados, dos quais por volta de 170 pertencem aos sistemas múltiplos ou binários. Além disso, mais de 50% de todas as estrelas do tipo-Sol presentes em nossa galáxia estão nestes tipos de sistemas. No caso de sistemas binários, existem planetas detectados em dois tipos de órbitas: (1) *P-type*, em que as estrelas estão mais próximas, com períodos orbitais de algumas semanas ou dias, nos quais os planetas estão orbitando o centro de massa comum entre elas; (2) *S-type*, caso em que as estrelas estão amplamente separadas, possuindo períodos orbitais de centenas de anos, nos quais os planetas orbitam apenas uma das estrelas do par. Em alguns sistemas binários, planetas gigantes em órbitas P-type estão dentro da Zona Habitável do sistema, o que dificulta ou impossibilita a formação de um planeta rochoso dentro dessa região, eliminando a possibilidade de existência de vida como a conhecemos. Porém, um planeta coorbital a esse gigante, estaria também dentro dessa Zona Habitável. Nesse trabalho, estudamos a localização e a estabilidade dos pontos de equilíbrio Lagrangianos em sistemas binários com planetas em órbitas P-type. Em nosso primeiro estudo de estabilidade, por meio numérico, conseguimos mostrar que os pontos  $L_4$  e  $L_5$  existem e são estáveis por mais de  $10Myr$ . A partir disso exploramos em duas etapas o comportamento desses pontos. Na primeira, através de um modelo aproximado, que substitui o efeito gravitacional de um par binário por apenas uma estrela achatada, encontramos novamente estabilidade em regiões próximas aos pontos verticais. Além disso, encontramos o limite de confiança desse modelo. Na segunda parte do trabalho, a partir das equações de movimento de uma partícula ao redor de sistemas binários com planetas hospedeiros, exploramos as curvas de velocidade zero e as configurações dois pontos de equilíbrio verticais.

Palavras chave: Sistemas binários. Pontos de equilíbrio. Coorbitais. Zonas habitáveis. Exoplanetas.



# LAGRANGIAN EQUILIBRIUM POINTS IN BINARY STELLAR SYSTEMS

## ABSTRACT

Currently we have approximately 3700 confirmed exoplanets, of which about 170 are in multiple systems (three stars or more) or binary (two stars). In addition, more than 50% of all Sun-like stars in our galaxy are in these types of systems. In the case of binary systems, there are planets detected in two types of orbits: (1) P-type, in which the stars are closest, with orbital periods of a few weeks or days, and the planets are orbiting the common center of mass between them; (2) S-type orbits, in which case the stars are widely separated, having orbital periods of hundreds of years, and the planets are orbiting only one of the stars of the pair. In some binary systems, giant planets in P-type orbits are within the system's Livable Zone, which makes it difficult or impossible to form a rocky planet within that region, eliminating the possibility of life as we know it. However, a planet coorbital to this giant, could be inside the Habitable Zone. Thus, in this work, we study the location and stability of Lagrangian equilibrium points in binary systems with planets in P-type orbits. In our first numerical study of stability, we have been able to show that points L4 and L5 exist and are stable for more than 10 Myr. From this, we explore the behavior of these points in two steps. In the first step, through an approximate model, which replaces the gravitational effect of a binary pair by only a flattened star, we again find stability in regions close to the vertical points. In addition, we have found the confidence limit of this model. In the second part of the work, from the equations of motion of a particle around binary systems with host planets, we explore the velocity zero curves and the two vertical equilibrium points configurations.

Keywords: Binary systems. Equilibrium points. Coorbitals. Habitable zones. Exoplanets.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Resultado do teste de estabilidade na região coorbital do sistema Kepler-1647. . . . .	5
2.1 Uma visão do plano orbital dos corpos e da partícula mostrando a relação entre as coordenadas do referencial inercial $(I, J, K)$ e o sistema referencial girante $(x, y, z)$ da partícula no ponto $P$ . . . . .	13
2.2 Curvas de velocidade zero para dois valores distintos da constante de Jacobi. . . . .	19
2.3 Forças gravitacionais sofridas por uma partícula $P$ de massa desprezível devido à atração de duas massas $m_1$ e $m_2$ . . . . .	20
2.4 Geometria do balanço das forças. . . . .	21
2.5 Localização dos pontos Lagrangianos de equilíbrio e as curvas de velocidade zero associadas para $\mu_2 = 0.2$ . . . . .	25
2.6 Esquema hipotético de órbitas ferradura e girino. . . . .	26
3.1 Dinâmica hipotética de uma órbita entre dois corpos massivos. . . . .	27
3.2 Localização dos setores em torno de $L_4$ e $L_5$ onde as partículas foram inicialmente distribuídas. . . . .	30
3.3 Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na <i>simulação 1</i> . . . . .	31
3.4 Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na <i>simulação 2</i> . . . . .	32
3.5 Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na <i>simulação 3</i> . . . . .	32
3.6 Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na <i>simulação 4</i> . . . . .	33
3.7 Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo $J_2$ representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de $2 R_{star}$ . . . . .	35
3.8 Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo $J_2$ representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de $4 R_{star}$ . . . . .	36
3.9 Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo $J_2$ representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de $8 R_{star}$ . . . . .	37

3.10	Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo $J_2$ representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de $16 R_{star}$ . . . . .	38
4.1	Visão do plano orbital do par binário (A e B). . . . .	42
4.2	Curvas de velocidade zero para dois valores distintos da constante de Jacobi com $\mu = 0.15$ . . . . .	48
4.3	Instantâneos do movimento orbital das primárias referentes ao caso b da Figura 4.2. . . . .	49
4.4	Pontos de equilíbrio com $a_{bin} = 0$ . . . . .	51
4.5	Pontos de equilíbrio com $a_{bin} = 0.05$ . . . . .	52
4.6	Pontos de equilíbrio com $a_{bin} = 0.1$ . . . . .	53
4.7	Pontos de equilíbrio com $a_{bin} = 0.135$ . . . . .	53
4.8	Curvas de velocidade zero para um sistema com razão de massa entre a soma das massas das primárias pela massa do planeta igual a $\mu = 0.15$ . .	54

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Tabela contendo os elementos keplerianos e físicos dos corpos do sistema binário Kepler-1647 (KOSTOV et al., 2016) . . . . .	3
1.2 Sistemas binários próximos (P-type) com planetas hospedeiros confirmados.	6
3.1 Valores obtidos do $J_2$ para cada configuração distinta. Onde $R_{star}$ corresponde ao raio das estrelas. . . . .	29
3.2 Comparação entre o número de ejeções e colisões com o planeta. . . . .	34





## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	3
1.2 Objetivos . . . . .	6
<b>2 CONCEITOS PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 Sistemas Binários . . . . .	9
2.2 Problema Restrito de Três Corpos . . . . .	10
2.2.1 Introdução . . . . .	10
2.2.2 Equações de movimento . . . . .	11
2.2.3 Integral de Jacobi . . . . .	17
2.2.4 Pontos de Equilíbrio Lagrangiano . . . . .	20
2.2.5 Localização dos Pontos de Equilíbrio . . . . .	23
2.2.6 Órbitas Ferradura e Girino . . . . .	26
<b>3 MODELO APROXIMADO</b> . . . . .	<b>27</b>
3.1 Modelagem dos sistemas - Condições iniciais . . . . .	28
3.2 Resultados das simulações . . . . .	30
3.3 Conclusão . . . . .	39
<b>4 PROBLEMA CIRCUMBINÁRIO RESTRITO DE QUATRO CORPOS</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1 Equações de movimento . . . . .	41
4.2 Constante de movimento no problema de quatro corpos . . . . .	46
4.3 Localização dos pontos de equilíbrio verticais em sistemas binários . . . . .	50
4.4 Conclusão . . . . .	54
<b>5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>57</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Após descobertas de exoplanetas em sistemas binários, questões referentes a possível existência de planetas rochosos (como Mercúrio, Vênus, Terra e Marte) e, consequentemente vida, tornaram-se mais frequentes (LÉGER et al., 1996; ANGEL; WOOLF, 1996; JAKOSKY, 1998; DICK, 2001; CLELAND; CHYBA, 2002; ISENBARGER et al., 2008). Atualmente existem 3.916 exoplanetas confirmados em mais de 2.900 (NASA, 2019) sistemas estelares, em sua maioria descobertos pela sonda *Kepler* (BORUCKI et al., 2010) e sua sucessora *K-2* (HOWELL et al., 2014). Entretanto, sistemas como o nosso, com uma estrela central, não são os únicos. Por volta de 50% de todas as estrelas do tipo Sol presentes em nossa galáxia estão em sistemas múltiplos de pelo menos três estrelas ou binários (RAGHAVAN et al., 2010).

Apesar dessa abundância, no caso de binários, existem catalogados cem sistemas com planetas confirmados, dos quais 21 possuem planetas com órbitas circunbinárias (CB), também conhecidos como órbitas *P-type*, ou seja, orbitando o centro de massa do par estelar. Outro tipo de órbita planetária em sistemas binários, ocorre em casos em que as estrelas estão afastadas uma da outra e os planetas do sistema estão em órbita de apenas uma de suas componentes estelares, conhecidas como órbitas *S-type*. Porém, nenhum dos planetas detectados é rochoso. Por outro lado, trabalhos recentes (QUINTANA; LISSAUER, 2006; QUINTANA; LISSAUER, ; HAGHIGHIPOUR; RAYMOND, 2007; QUINTANA et al., 2007) exploram a formação de planetas CB rochosos e mostram que sua formação é possível.

Planetas terrestres ou rochosos são formados através de um processo chamado acreção (WETHERILL, 1980; WÄNKE; DREIBUS, 1988; WEIDENSCHILLING, 2000). Acreção é quando partículas sólidas microscópicas que se condensam. Essas partículas microscópicas são capazes de se unir através de forças eletrostáticas e não por atração gravitacional, por serem muito pequenas. Mas, à medida que sua massa aumenta, suas forças gravitacionais aumentam e aceleram seu crescimento. Logo tornam-se grandes o suficiente para serem considerados planetesimais, que continuarão a crescer, passando por embriões. Em seguida os encontros gravitacionais entre planetesimais resultam em uma mudança de suas órbitas ou em colisões entre eles. Os maiores sobrevivem e crescem, se tornando planetas terrestres.

Outra dúvida que surge, é referente a possibilidade de que esses planetas rochosos possam abrigar vida em sistemas binários. Em Kaltenegger e Haghighipour (2013), Haghighipour e Kaltenegger (2013), foi proposto um modelo generalizado para o cálculo da Zona Habitável (HZ) em sistemas binários, definida como uma região

circunstelar na qual um planeta com massa similar a da Terra, com atmosfera composta por  $CO_2 - H_2O - N_2$ , possa sustentar água líquida em sua superfície (HUANG, 1959; HART, 1978; KASTING et al., 1993; UNDERWOOD et al., 2003; SELSIS et al., 2007; KALTENEGGER; SASSELOV, 2011; KOPPARAPU et al., 2013; KOPPARAPU et al., 2014). Portanto, um planeta rochoso com massa similar a da terra dentro dessa região, poderia abrigar vida como a conhecemos.

Mesmo possuindo HZ bem definidas, outras circunstâncias podem impedir a formação ou a estabilidade de planetas rochosos em sistemas binários. Em Barbosa et al. (2019), um estudo sobre a formação de planetas tipo Terra, dentro da HZ de sistemas binários, mostrou que planetas hospedeiros dos sistemas, em sua totalidade gigantes gasosos, exercem um papel fundamental nesse processo. Planetas próximos ao disco de matéria<sup>1</sup>, exercem uma forte interação gravitacional perturbadora, ejetando material do disco e conseqüentemente impossibilitando a formação de um planeta com massa da Terra. Por outro lado, alguns sistemas como *Kepler-16* (DOYLE et al., 2011) e *Kepler-1647* (KOSTOV et al., 2016) possuem um gigante gasoso dentro de sua HZ, e com a predominância gravitacional desses planetas, a formação de planetas rochosos em sua vizinhança acaba sendo dificultada. Porém, satélites naturais ou corpos coorbitais a esses planetas, poderiam estar dentro da HZ.

Satélites naturais, com exceção de Mercúrio e Vênus, estão presentes em todos os planetas do sistema solar, totalizando 158 satélites. No caso de corpos coorbitais, Júpiter é o principal exemplo de um astro que compartilha sua órbita com outros corpos, os chamados *Troianos*. Esses corpos são asteróides situados ao redor de certos pontos de equilíbrio da órbita,  $L_4$  e  $L_5$ , também conhecidos por *pontos de equilíbrio Lagrangianos*, em homenagem ao matemático *Joseph-Louis Lagrange*. Lagrange descobriu a existência desses pontos especiais próximos a um sistema de dois corpos massivos. Isso ocorre devido ao cancelamento da aceleração centrípeta por forças gravitacionais dos dois corpos. No total, existem 5 pontos de equilíbrio, os então convencionados  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$ . Os pontos colineares,  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , são conhecidos por pontos de equilíbrio Eulerianos, pois foram descobertos pelo matemático *Leonhard Paul Euler*. Mas nem todos pontos são estáveis, apenas  $L_4$  e  $L_5$  podem ser estáveis, dependendo da razão de massa entre os corpos maiores. Mais detalhes sobre esse assunto serão discutidos em seções seguintes.

---

<sup>1</sup>Um disco de matéria é uma acumulação de massa em forma de toro ou anel, composta de gás, poeira, planetesimais, asteroides ou fragmentos de colisões. Esses pequenos corpos possuem órbita ao redor de componentes estelares ou até mesmo um planeta gigante, como no caso dos anéis de Saturno (WYATT, 2008).

Apesar de ainda não terem sido detectados, exoplanetas coorbitais, também conhecidos como “Planetas troianos”, alguns estudos, a partir de investigações dinâmicas, mostram que isso não é impossível (NAUENBERG, 2002; LAUGHLIN; CHAMBERS, 2002; DVORAK et al., 2004; SCHWARZ et al., 2007). Em relação a sistemas binários, Schwarz et al. (2009), a partir de integrações numéricas, mostra que sistemas em que o parâmetro  $\mu \leq 0.04$  ( $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ , onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas das estrelas e  $m_1 > m_2$ ), possuem capacidade de abrigar planetas nos pontos de equilíbrio  $L4$  e  $L5$  das duas estrelas.

## 1.1 Motivação

Foi mostrado no trabalho de Haghighipour e Kaltenegger (2013), que alguns sistemas CB possuem uma vasta HZ, com planetas gigantes internos a essa região. Nesses casos, em Barbosa et al. (2019), é mostrado que por se tratarem de planetas gigantes, a instabilidade gravitacional causada por esse planeta impossibilita em alguns casos a formação de planetas com massa suficiente para serem considerados tipo Terra dentro da HZ.

Apesar de um planeta muito massivo comprometer a formação de planetas em órbitas próximas, outros corpos podem compartilhar a mesma órbita com esse planeta, como satélites e corpos coorbitais. A dúvida que surgiu foi: existem regiões estáveis coorbitais a esses planetas gigante?

Tabela 1.1 - Tabela contendo os elementos keplerianos e físicos dos corpos do sistema binário Kepler-1647 (KOSTOV et al., 2016)

Dados das estrelas - Kepler-1647(AB)	
$a_{bin}$ (semieixo maior)	0.1276 $au$
$e_{bin}$ (excentricidade)	0.1602
Período orbital	$\approx 11$ dias
$M_A$ (massa)	1.22 $M_{\odot}$
$M_B$ (massa)	0.97 $M_{\odot}$
Dados do planeta - Kepler-1647b	
$a$ (semieixo maior)	2.7205 $au$
$e$ (excentricidade)	0.0581
$i$ (inclinação relativa)	2.9855°
$m$ (massa)	483 $M_{\oplus} = 1.5 M_{júpiter}$

A inclinação  $i$  do planeta é relativa ao plano orbital da binária.

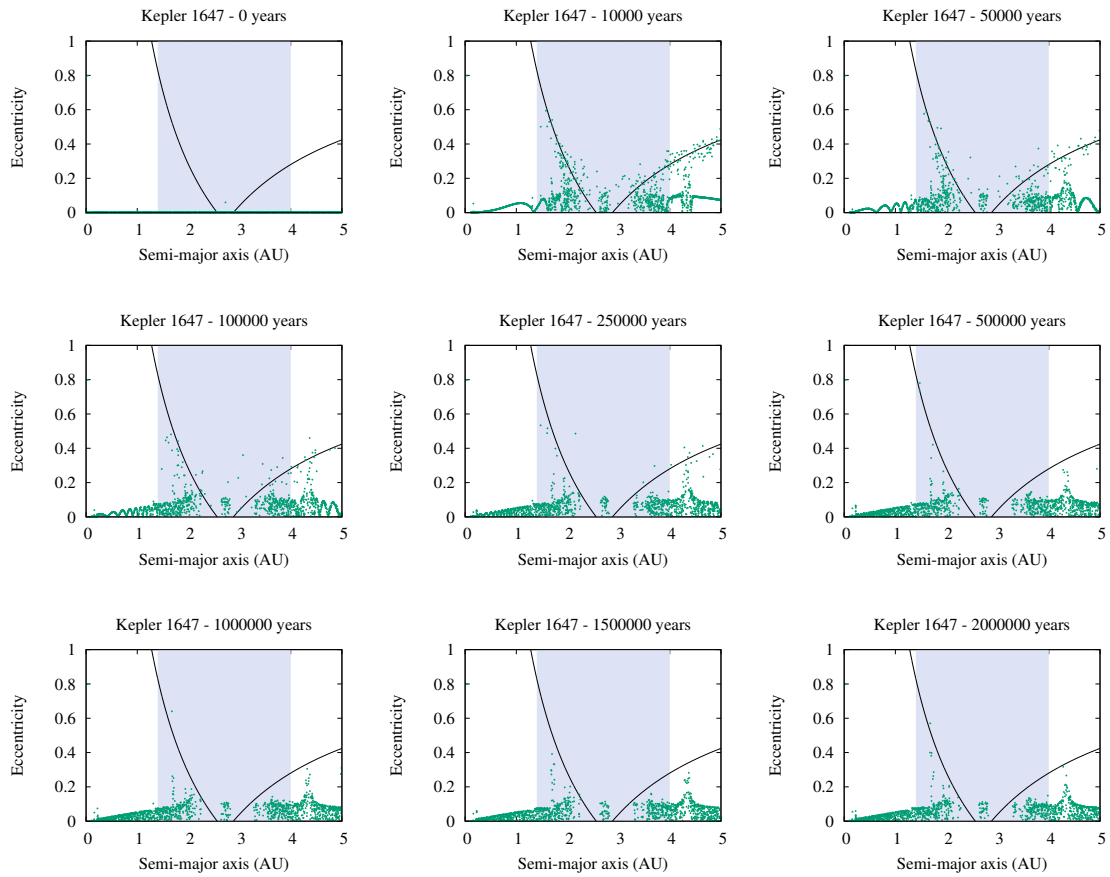
Fonte: Produção do autor.

Movidos por essa questão, realizamos um estudo de estabilidade através de simulações numéricas para checar a existência de pontos de equilíbrio estáveis coorbitais ao planeta. Escolhemos o sistema *Kepler-1647* (KOSTOV et al., 2016) para estudar essas regiões. Esse sistema possui o maior planeta confirmado em sistemas CB, com massa de  $1.5M_{jup}$ . O par binário possui semieixo maior igual a  $0.1276au$ . Os dados do sistema utilizados na simulação estão na Tabela 1.1, que mostra os elementos físicos e orbitais das estrelas e do planeta hospedeiro do sistema.

Distribuímos aleatoriamente um disco circumbinário de 2.000 partículas de teste na HZ do sistema, que possui limites interno e externo, respectivamente iguais a  $1.51AU$  e  $3.75AU$ . Essas partículas interagem gravitacionalmente somente com as estrelas e o planeta, porém, somente são afetadas por eles, não causando nenhum efeito gravitacional sobre os mesmos.

Podemos ver na Figura 1.1 que partículas sobrevivem coorbitalmente por pelo menos 2 milhões de anos, o que indica a existência de estabilidade nessa região onde se localizam os pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$ . Por outro lado, pensando em um contexto de formação planetária, muitas questões ainda necessitam ser respondidas, tais como, qual o limite de massa que sobrevive nessa região? Quais são os limites interno e externo dessas regiões? Qual efeito é causado na região com parâmetros estelares diferentes? Essas e muitas outras dúvidas nos motivam a realizar o presente trabalho. A maior delas é referente a existência de pontos de equilíbrio nesses tipos de sistemas.

Figura 1.1 - Resultado do teste de estabilidade na região coorbital do sistema Kepler-1647.



As linhas pretas são o semieixo maior do planeta hospedeiro do sistema em função da excentricidade. A da direita dada por  $a = [a_p(1 + e_p)]/(1 - e)$  e a da esquerda por  $a = [a_p(1 - e_p)]/(1 + e)$ , onde  $a_p$  e  $e_p$  são o semieixo maior e a excentricidade do planeta respectivamente.

Fonte: Produção do autor.

## 1.2 Objetivos

O grande objetivo deste trabalho é mapear de forma generalizada, por meios teóricos e numéricos, a existência de pontos de equilíbrio, similares aos que conhecemos em nosso sistema solar, em sistemas binários. Como mencionado anteriormente, estamos interessados apenas nos sistemas *P-type*, em que as estrelas estão próximas uma da outra, com períodos orbitais de poucos dias e com um planeta gigante gasoso orbitando o centro de massa do par (DOYLE et al., 2011; KOSTOV et al., 2016; WELSH et al., 2012; WELSH et al., 2015; KOSTOV et al., 2014; OROSZ et al., 2012).

Tabela 1.2 - Sistemas binários próximos (P-type) com planetas hospedeiros confirmados.

Sistemas	Ano de descoberta	Número de planetas
DP Leo	2009	1
FW Tauri	2013	1
HD 106906	2013	1
HU Aqr	2011	1
Kepler-16	2011	1
Kepler-34	2012	1
Kepler-35	2012	1
Kepler-38	2012	1
Kepler-47	2012	2
Kepler-413	2013	1
Kepler-451	2015	1
Kepler-453	2014	1
Kepler-1647	2015	1
NN Ser AB	2010	2
NY Vir AB	2011	2
OGLE-2007-BLG-349	2016	1
PSR B1620-26	2003	1
Ross 458	2010	1
Roxs 42	2013	1
RR Cae	2012	1
SR 12 AB	2011	1

Fonte: Produção do autor.

A Tabela 1.2 mostra todos os sistemas binários com órbitas P-type que possuem planetas confirmados até o momento.



Assim, subdividimos nosso objetivo principal em duas partes:

- **Limites de confiabilidade da representação gravitacional de um par binário por uma estrela com achatamento**

Simulando o efeito gravitacional da segunda estrela, utilizaremos um coeficiente de achatamento  $J_2$  na estrela primária, fazendo com que o sistema fique com apenas uma estrela com massa igual a soma do par. Além do tempo de processamento ser muito menor, estudar as localizações dos pontos de equilíbrio em um sistema com apenas uma estrela é uma tarefa mais simples e conhecida. Contudo, o objetivo é verificar os limites de confiabilidade do modelo a partir de integrações numéricas.

Para isso iremos confrontar resultados numéricos de duas configurações distintas. Em um dos casos, utilizamos um sistema binário com duas estrelas de mesma massa, e um planeta com massa igual a de Júpiter. No outro caso, vamos utilizar apenas uma estrela com um respectivo valor de  $J_2$ , que reproduza o efeito gravitacional da companheira estelar, e o mesmo planeta tipo Júpiter.

- **Investigar o problema circumbinário restrito de quatro corpos: encontrando os pontos  $L_4$  e  $L_5$  através das equações de movimento de uma partícula ao redor de sistemas binários.**

O modelo aproximado da representação gravitacional de uma estrela companheira por um termo  $J_2$ , possui naturalmente seus limites. Desse modo, é necessário encontrar as equações de movimento de um corpo orbitando um sistema binário que possua um planeta hospedeiro. Com essas equações poderemos encontrar além dos pontos de equilíbrio mais precisamente, explorar a diferença da configuração das curvas de velocidade zero em relação às curvas do problema restrito de três corpos a partir da constante de Jacobi. Portanto, esse segundo objetivo é determinar de forma analítica as posições e o comportamento dos pontos de equilíbrio em sistemas CB.



## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

A existência de planetas gigantes em sistemas binários, dentro de suas HZ, dificulta ou até mesmo impossibilita a formação de planetas nessas regiões. Por outro lado, um hipotético planeta coorbital a esse gigante, conseqüentemente estaria também dentro da HZ. Neste trabalho, vamos estudar, a existência de pontos de equilíbrio em sistemas binários.

O trabalho tem dois enfoques; (1) análise dinâmica de sistemas binários através de integrações numéricas; (2) análise dinâmica dos sistemas, porém, utilizando métodos analíticos combinados com numéricos.

Nesta seção, abordaremos os conceitos necessários para a compreensão do presente texto.

### 2.1 Sistemas Binários

Estrelas binárias é um sistema estelar que consiste de duas estrelas descrevendo órbitas fechadas ao redor do centro de massa comum, sobre influência gravitacional mútua. A estrela mais brilhante é chamada de primária enquanto a de menor brilho é denominada secundária. As estrelas são denotadas por A e B, respectivamente. No caso das estrelas possuírem o mesmo brilho, a classificação é dada pela data de descoberta.

O par binário pode ser classificado com respeito a sua órbita, se baseando na distância entre as componentes, relativa aos seus tamanhos. Com isso, as estrelas ficam divididas em dois tipos, *Wide Binaries* e *Close Binaries*. *Wide binaries* são estrelas que possuem periastro estelar (a maior aproximação entre as estrelas) muito grande, chegando a milhares de AU. Essas evoluem separadamente, causando pouco impacto em sua companheira (JIANG; TREMAINE, 2010). Por outro lado, as *Close binaries* possuem apoastro estelar (maior separação entre as estrelas) pequeno, com período orbital de apenas poucos dias. Por estarem tão próximas, a evolução das estrelas do par está intimamente ligada (HILDITCH, 2001).

Outra classificação é dada pelo método de detecção. São elas:

- a) *Binárias Visuais*: estrelas cuja duplicidade é observada por um telescópio. Para que isso aconteça, a separação angular entre as componentes de estrelas deve ser suficiente para que a resolução angular do telescópio seja capaz de detectar o par. À medida que telescópios maiores e mais poderosos são

criados, o número de binárias visuais tende a aumentar.

- b) *Binárias Astrométricas*: um sistema estelar binário no qual a estrela primária, ou mais brilhante, é diretamente observável e tem mudanças periódicas em sua posição em relação às estrelas de fundo, indicando a influência gravitacional de uma estrela secundária em órbita que não é diretamente observável.
- c) *Binárias Espectroscópicas*: A maioria dos sistemas binários foi detectada pelo efeito *Doppler* em suas linhas espectrais. Se um sistema binário não for resolvido em seus componentes, o espectro obtido a partir dele será na verdade uma combinação dos espectros de cada uma das estrelas componentes. Como estas estrelas orbitam uma à outra, uma estrela, A, pode estar se movendo em nossa direção enquanto a outra, B, pode estar se afastando. O espectro de A será, portanto, deslocado para o azul para frequências mais altas (comprimentos de onda mais curtos), enquanto o espectro de B será deslocado para o vermelho (*redshifted*). Se as estrelas estão se movendo através da nossa linha de visão, então não há mudança de Doppler para que as linhas permaneçam em suas posições médias. Enquanto as estrelas continuam orbitando, A irá retroceder de modo que suas linhas espectrais se movam em direção ao extremo vermelho do espectro e B se mova em direção ao azul.
- d) *Binárias Eclipsantes*: O último método de detecção de um sistema binário depende da medição fotométrica. Muitas estrelas mostram uma mudança periódica em sua magnitude aparente. Isso pode ocorrer devido a dois motivos principais. Pode ser uma única estrela que sofre uma mudança em sua luminosidade intrínseca. Essas estrelas são chamadas de variáveis pulsantes. A segunda possibilidade é que, na verdade, é um sistema binário no qual o plano orbital se encontra de ponta a ponta para que as estrelas componentes se eclipssem periodicamente.

## 2.2 Problema Restrito de Três Corpos

### 2.2.1 Introdução

O modelo considera a interação gravitacional entre três corpos, levando em conta que um deles tem massa desprezível em relação aos outros dois. Se dois dos corpos estão em órbita circular, coplanar ao redor do baricentro comum entre eles e a massa

do terceiro corpo é muito pequena para afetar o movimento dos outros dois, então, o problema do movimento do terceiro corpo é chamado de *problema circular, coplanar restrito de três corpos*. O problema restrito de três corpos no sistema solar fornece um bom entendimento do comportamento qualitativo de certos sistemas, levando em conta a hierarquia das massas e órbitas dos corpos envolvidos.

Nesta seção, descrevemos as equações de movimento, os pontos de equilíbrio e suas localizações e a integral de Jacobi no problema de três corpos. Todas as equações e desenvolvimentos a seguir são adaptações de Murray e Dermott (1999), capítulo 3.

### 2.2.2 Equações de movimento

Consideramos o movimento de uma partícula de massa desprezível se movendo sobre influência gravitacional de dois corpos com massas  $m_1$  e  $m_2$ . Assumimos que os dois maiores corpos estão em órbita circular centralizada no baricentro comum entre eles e que ambos agem gravitacionalmente sobre a partícula, porém a mesma não influencia os dois corpos.

Consideramos um sistema de coordenadas  $I, J$  e  $K$  no referencial inercial, estando assim, o centro de massa dos corpos na origem do sistema, como mostrado na Figura 2.1. O eixo  $I$  está ao longo da linha que liga  $m_1$  a  $m_2$  em  $t = 0$ ,  $J$  é perpendicular a  $I$ , formando assim o plano orbital dos corpos, e  $K$  é perpendicular ao plano  $I - J$  ao longo do vetor momento angular. As coordenadas dos dois corpos massivos são  $(I_1, J_1, K_1)$  e  $(I_2, J_2, K_2)$ . Os dois corpos possuem separação constante e mesma velocidade angular sobre o outro e seu centro de massa comum. A unidade de massa do sistema é convenientemente escolhida de tal modo que  $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$ . Assumindo que  $m_1 > m_2$ , e definindo

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.1)$$

as massas dos dois corpos são

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu} \quad e \quad \mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu}, \quad (2.2)$$

onde  $\bar{\mu} = 1/2$  e  $G = 6.67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$  é a *constante gravitacional universal*. A unidade de comprimento é escolhida de tal modo que a separação entre os dois corpos massivos seja uma unidade. Consequentemente, o movimento médio  $n$  das

duas massas, também é uma unidade. As coordenadas da partícula no referencial inercial são  $(I, J, K)$ . Assim, aplicando a forma vetorial da lei da gravitação, as equações de movimento da partícula são:

$$\ddot{I} = \mu_1 \frac{I_1 - I}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{I_2 - I}{|\vec{r}_2|^3}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{J} = \mu_1 \frac{J_1 - J}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{J_2 - J}{|\vec{r}_2|^3}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{K} = \mu_1 \frac{K_1 - K}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{K_2 - K}{|\vec{r}_2|^3}, \quad (2.5)$$

e, a partir da Figura 2.1,

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(I_1 - I)^2 + (J_1 - J)^2 + (K_1 - K)^2}, \quad (2.6)$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(I_2 - I)^2 + (J_2 - J)^2 + (K_2 - K)^2}. \quad (2.7)$$

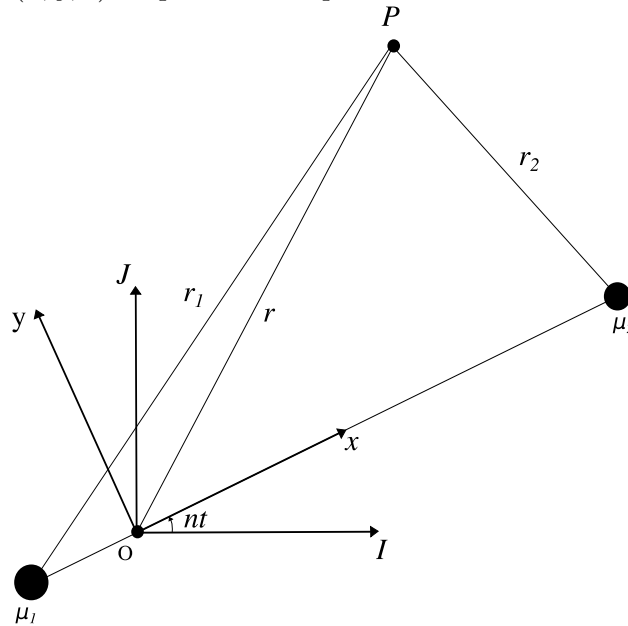
Sabendo que os corpos massivos estão se movendo em órbitas circulares, então a distância entre eles é constante e se movem em torno do centro de massa comum com velocidade angular constante e movimento médio  $n$ . Vamos considerar um sistema referencial girante  $(x, y, z)$ , onde a origem é a mesma do sistema  $(I, J, K)$ , no qual as posições dos corpos massivos são fixas, para isso, o sistema está girando com uma taxa constante  $n$  na direção positiva, como na Figura 2.1. A direção do eixo  $x$  é escolhida de tal maneira que as duas massas sempre estão ao longo dele com coordenadas  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$ . Assim, a partir da eq. (3.2) e seguindo a Figura 2.1, temos

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.8)$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.9)$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas da partícula em relação ao sistema referencial girante.

Figura 2.1 - Uma visão do plano orbital dos corpos e da partícula mostrando a relação entre as coordenadas do referencial inercial  $(I, J, K)$  e o sistema referencial girante  $(x, y, z)$  da partícula no ponto  $P$ .



A origem de ambos sistemas  $O$  está localizada no centro de massa dos dois corpos.  $K$  e  $z$  coincidem com o eixo de rotação e a pequena flecha indica a direção positiva do eixo de rotação.

Fonte: Produção do autor.

Essas coordenadas podem ser relacionadas com o sistema referencial inercial utilizando uma simples matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Diferenciando duas vezes cada lado da eq. (2.10), temos

$$\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{J} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

e

$$\begin{pmatrix} \ddot{I} \\ \ddot{J} \\ \ddot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Note que trocando os sistemas referenciais, foram introduzidos  $n\dot{x}$  e  $n\dot{y}$ , termos relacionados com a aceleração de Corioli, e  $n^2x$  e  $n^2y$ , termos relacionados à aceleração centrífuga nas equações de movimento. Agora, substituindo  $I, J, K, \dot{I}, \dot{J}$  e  $\ddot{K}$ , as equações (2.3), (2.4) e (2.5) se tornam

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\text{sen}(nt) = \\ \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3} \right) \cos(nt) + \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) y \text{sen}(nt), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\text{sen}(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) = \\ \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3} \right) \text{sen}(nt) - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) y \cos(nt), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\ddot{z} = - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) z. \quad (2.15)$$

Multiplicando a eq. (2.13) por  $\cos(nt)$ , e a eq. (2.14) por  $\text{sen}(nt)$



$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos^2(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt)\sin(nt) =$$

$$\left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3}\right)\cos^2(nt) + \left(\frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)y\cos(nt)\sin(nt), \quad (2.16)$$

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin^2(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt)\sin(nt) =$$

$$\left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3}\right)\sin^2(nt) - \left(\frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)y\cos(nt)\sin(nt), \quad (2.17)$$

somando os produtos, teremos

$$2(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) = 2\left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3}\right). \quad (2.18)$$

Agora, multiplicando a eq. (2.13) por  $-\sin(nt)$  e a eq. (2.14) por  $\cos(nt)$ , teremos

$$-(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin(nt)\cos(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\sin^2(nt) =$$

$$-\left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3}\right)\sin(nt)\cos(nt) - \left(\frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)y\sin^2(nt), \quad (2.19)$$

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt)\sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos^2(nt) =$$

$$\left(\mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3}\right)\cos(nt)\sin(nt) - \left(\frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)y\cos^2(nt), \quad (2.20)$$

e somando os produtos, teremos

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\left(\frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)y. \quad (2.21)$$

Finalmente, dividindo os dois lados da eq. (2.18) por 2, as equações de movimento

da partícula no sistema referencial girante se tornam

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = \left( \mu_1 \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_2|^3} \right), \quad (2.22)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) y, \quad (2.23)$$

$$\ddot{z} = - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) z. \quad (2.24)$$

Lembrando que as coordenadas dos dois corpos massivos são  $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$ , podemos substituí-las nas equações (2.22) e (2.23), e assim, escrever as equações de movimento como

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left( \mu_1 \frac{x + \mu_2}{|\vec{r}_1|^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{|\vec{r}_2|^3} \right), \quad (2.25)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) y, \quad (2.26)$$

$$\ddot{z} = - \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) z. \quad (2.27)$$

Essas acelerações também podem ser escritas como o gradiente de uma função escalar  $U$ :

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.28)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.29)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.30)$$

Onde  $U = U(x, y, z)$  é dada por

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|} \quad (2.31)$$

Na equação acima, o termo  $x^2 + y^2$  é o potencial centrífugo,  $1/r_1$  e  $1/r_2$  são potenciais gravitacionais, e as derivadas parciais dão origem as forças centrífuga e gravitacional, respectivamente.

Os termos  $-2n\dot{y}$  e  $2n\dot{x}$  nas equações 2.28 e 2.29 são os termos de *Corioli's*, que dependem da velocidade da partícula no referencial girante. A força de Corioli's resultante forma um ângulo reto com a velocidade e, portanto, não exerce trabalho.

Definimos, por convenção em mecânica celeste  $U^* = -U$ , de modo que as equações de movimento se tornam

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = -\frac{\partial U^*}{\partial x}, \quad (2.32)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{\partial U^*}{\partial y}, \quad (2.33)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U^*}{\partial z}. \quad (2.34)$$

### 2.2.3 Integral de Jacobi

Multiplicando as equações 2.28, 2.29 e 2.30 por  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$  respectivamente e somando os dois lados das equações, teremos

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}. \quad (2.35)$$

Agora integrando no tempo a equação 2.35, teremos

$$\int \left[ \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) \frac{dx}{dt} + \left( \frac{d^2y}{dt^2} \right) \frac{dy}{dt} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} \right) \frac{dz}{dt} \right] dt = \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (2.36)$$

Lembrando que  $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}$ , teremos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + C_1 = U + C_2. \quad (2.37)$$

Usando  $-C_j = 2(C_2 - C_1)$ , finalmente teremos

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = 2U - C_j, \quad (2.38)$$

onde  $C_j$  é uma constante de integração. Podemos escrever a equação 2.38 como o quadrado da velocidade de uma partícula no sistema girante,

$$v^2 = 2U - C_j, \quad (2.39)$$

ou utilizando a equação 2.31, podemos escrever a equação 2.39 como

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|} \right) - \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \quad (2.40)$$

Este resultado foi obtido pela primeira vez por **Jacobi (1836)** e é conhecido como *integral de Jacobi*.

A maior utilidade da constante de Jacobi é localizar onde a velocidade da partícula é igual a zero, nesse caso teríamos

$$C_j = 2U \quad (2.41)$$

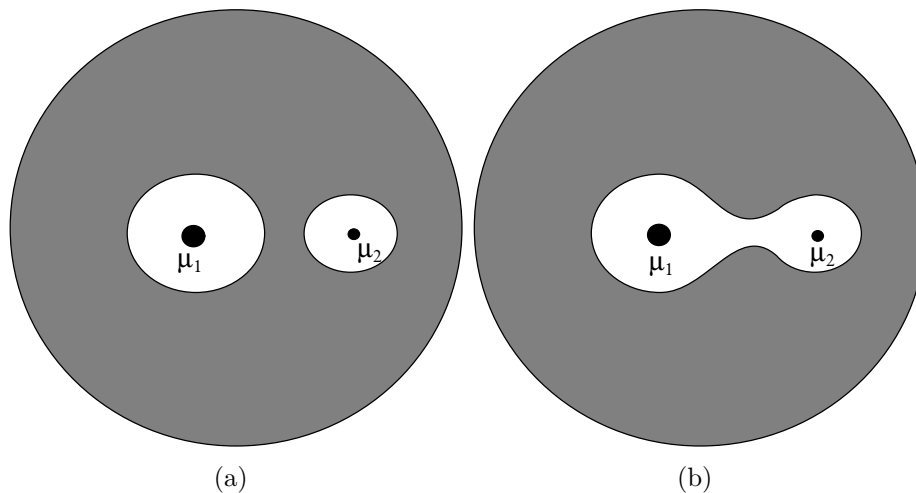
ou

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{\mu_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\mu_2}{|\vec{r}_2|} \right). \quad (2.42)$$

A equação 2.42 define um conjunto de superfícies para valores particulares de  $C_j$ . Essas superfícies são conhecidas como *superfícies de velocidade zero*. Elas desempe-

tenham um papel importante na análise dos limites do movimento da partícula. Esse conjunto de superfícies quando interceptado pelo plano  $xy$ , forma um conjunto de *curvas de velocidade zero*. A Figura 2.2 mostra um exemplo dessas curvas para o caso de  $\mu_2 = 0.2$  e  $n = 1$ . A equação 2.38 mostra que  $2U$  deve ser sempre maior ou igual a  $C_j$ , pois se não, a velocidade seria complexa. Com isso a equação 2.42 define também limites em que o movimento da partícula não é possível. Contudo, a existência da constante de Jacobi nos mostra que o movimento não pode ser resolvido para condições iniciais arbitrárias da partícula, ou seja, define regiões do plano  $xy$  onde a partícula não pode estar.

Figura 2.2 - Curvas de velocidade zero para dois valores distintos da constante de Jacobi.



Em (a),  $C_j = 3.9$  e em (b),  $C_j = 3.7$ . As áreas sombreadas denotam regiões de movimento impossível para uma partícula.

Fonte: Produção do autor.

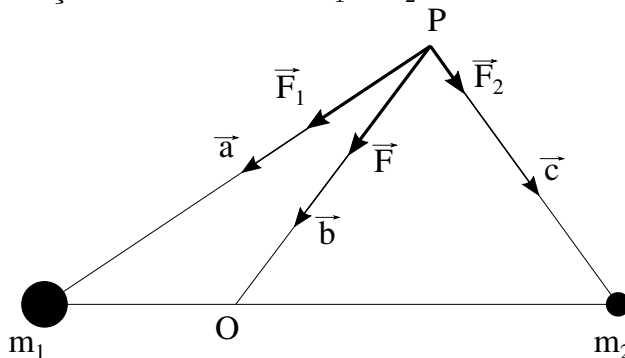
As regiões sombreadas na Figura 2.2 denotam posições onde o movimento da partícula é impossível. Na subfigura (a), podemos ver que uma partícula com uma dada  $C_j$  orbitando  $\mu_1$ , na região não sombreada, nunca orbitaria  $\mu_2$  ou escaparia do sistema tendo em vista que ela deveria atravessar a região de movimento impossível. O reverso acontece para uma partícula orbitando  $\mu_1$ . Em (b), uma partícula orbitando  $\mu_1$  pode também eventualmente orbitar  $\mu_2$ , porém, nunca escapar do sistema.

## 2.2.4 Pontos de Equilíbrio Lagrangiano

No modelo descrito anteriormente, existem *pontos de equilíbrio* que são posições de uma partícula  $P$  no sistema inercial, com velocidade apropriada, de modo a estar estacionária no sistema girante.

Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores posição que denotam as localizações da massa  $m_1$ , o centro de massa  $O$  e a localização da massa  $m_2$  respectivamente, em relação a posição da partícula  $P$ , como na Figura 2.3.

Figura 2.3 - Forças gravitacionais sofridas por uma partícula  $P$  de massa desprezível devido à atração de duas massas  $m_1$  e  $m_2$ .



O ponto  $O$  denota o centro de massa comum entre as massas.

Fonte: Produção do autor.

A posição do centro de massa  $O$  é dada por

$$\vec{b} = \frac{m_1 \vec{a} + m_2 \vec{c}}{m_1 + m_2} \quad \text{ou} \quad m_1(\vec{a} - \vec{b}) = m_2(\vec{b} - \vec{c}). \quad (2.43)$$

Fazendo o produto vetorial da segunda forma da equação 2.43 por  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , temos

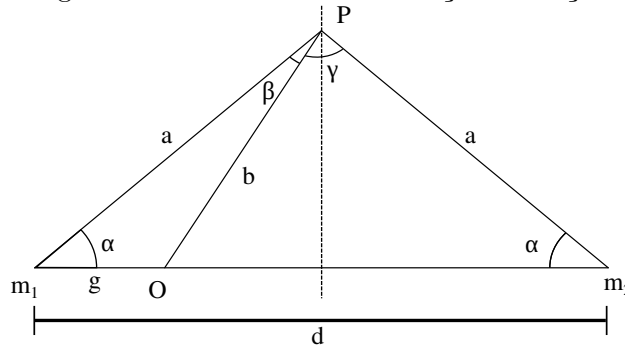
$$m_2(\vec{F}_1 \times \vec{c}) + m_1(\vec{F}_2 \times \vec{a}) = 0. \quad (2.44)$$

Sabendo que o ângulo entre  $\vec{F}_1$  e  $\vec{c}$  é o oposto do ângulo entre  $\vec{F}_2$  e  $\vec{a}$ , desse modo podemos escrever a equação 2.44 na forma escalar como

$$m_2 F_1 c = m_1 F_2 a. \quad (2.45)$$

Substituindo as forças gravitacionais,  $F_1 = Gm_1/a^2$  e  $F_2 = Gm_2/c^2$ , na equação 2.45, temos que  $a = c$ . Portanto, o triângulo formado pelas duas massas e a partícula é um triângulo isósceles. Isto implica que a mediatriz da linha que une  $m_1$  e  $m_2$  intercepta  $P$  (linha tracejada na Figura 2.4).

Figura 2.4 - Geometria do balanço das forças.



Onde  $P$  denota a localização de uma partícula com massa desprezível em um ponto de equilíbrio. A linha tracejada denota a mediatriz da linha que une  $m_1$  e  $m_2$  e passa por  $P$ .

Fonte: Produção do autor.

Para balancear a aceleração centrífuga de  $P$  com a força por unidade de massa direcionada para o centro de massa, temos

$$n^2 b = F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma, \quad (2.46)$$

onde  $\beta$  é o ângulo entre  $\vec{F}_1$  e  $\vec{b}$  e  $\gamma$  o ângulo entre  $\vec{F}_2$  e  $\vec{b}$ , como na Figura 2.4. Assim sendo,

$$n^2 = \frac{G}{a^2 b^2} (m_1 b \cos \beta + m_2 b \cos \gamma). \quad (2.47)$$

Utilizando os segmentos dos triângulos formados por  $O$ ,  $P$  e as duas massas, temos

$$\begin{aligned} b \cos \beta &= a - g \cos \alpha, \\ b \cos \gamma &= a - (d - g) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde  $d$  é a distância entre as massas,  $g$  é a distância entre  $m_1$  e  $O$ , e

$$\cos\alpha = \frac{d}{2a}. \quad (2.49)$$

Utilizando a definição de centro de massa e os segmentos dos triângulos, temos

$$\begin{aligned} g &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}d, \\ d - g &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}d. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto, a equação 2.47 se torna

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3 b^2} \left( a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \right). \quad (2.51)$$

E a partir da *lei dos cossenos*,

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag\cos\alpha = a^2 + g^2 - gd. \quad (2.52)$$

Substituindo nessa equação a expressão de  $g$  a partir da equação 2.50, e arranjando os termos, o que resulta

$$b^2 = a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2. \quad (2.53)$$

E com isso a equação 2.51 se torna

$$n^2 = G \frac{m_1 + m_2}{a^3}. \quad (2.54)$$

Com isso, a partir da *terceira lei de Kepler* de movimento planetário,  $n^2 = G(m_1 + m_2)/d^3$ , o que nos faz concluir que  $a = d$ .

Portanto, no caso de um sistema de forças gravitacionais exercidas por  $m_1$  e  $m_2$ , temos um ponto de equilíbrio no vértice de um triângulo equilátero oposto ao lado



que é formado pela linha que liga as massas  $m_1$  e  $m_2$ . Outro ponto de equilíbrio está abaixo dessa linha, também no vértice de outro triângulo equilátero em que a mesma linha que liga  $m_1$  e  $m_2$  seja um dos lados, estando assim, os dois pontos sobre o eixo de simetria dos triângulos. Esses são os *pontos de equilíbrio lagrangiano*  $L_4$  e  $L_5$ , respectivamente. Além desses dois pontos, existem outros três colineares a  $m_1$ ,  $O$  e  $m_2$ , conhecidos como  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ .

### 2.2.5 Localização dos Pontos de Equilíbrio

Assumindo que os movimentos de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  estão confinados no plano  $xy$  e assumindo a unidade de distância como a separação fixa entre os corpos massivos.

Seguindo o exemplo de Brouwer e Clemence (1961), vamos reescrever  $U$  de uma forma diferente com o intuito de facilitar os cálculos. A partir das definições de  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  nas equações 2.8 e 2.9 e lembrando que  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , temos

$$\mu_1|\vec{r}_1|^2 + \mu_2|\vec{r}_2|^2 = x^2 + y^2 + \mu_1\mu_2, \quad (2.55)$$

e portanto

$$U = \mu_1 \left( \frac{1}{|\vec{r}_1|} + \frac{|\vec{r}_1|^2}{2} \right) + \mu_2 \left( \frac{1}{|\vec{r}_2|} + \frac{|\vec{r}_2|^2}{2} \right) - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2. \quad (2.56)$$

A vantagem dessa equação é que a dependência de  $x$  e  $y$  foi removida, e com isso as derivadas parciais se tornam mais simples. Outro fato é que  $r_1$  e  $r_2$  são sempre quantidades positivas, diferentemente de  $x$  e  $y$ .

Agora considerando as equações 2.28 e 2.29, com  $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ . Para encontrar as localizações dos pontos de equilíbrio devemos resolver o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_1|} \frac{\partial |\vec{r}_1|}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_2|} \frac{\partial |\vec{r}_2|}{\partial x} = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_1|} \frac{\partial |\vec{r}_1|}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_2|} \frac{\partial |\vec{r}_2|}{\partial y} = 0 \quad (2.58)$$

usando a forma de  $U = U(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)$ , introduzida na equação 2.56. Calculando as

derivadas parciais, podemos escrever as equações para a localização dos pontos de equilíbrio como

$$\mu_1 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_1|^2} + |\vec{r}_1| \right) \frac{x + \mu_2}{|\vec{r}_1|} + \mu_2 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_2|^2} + |\vec{r}_2| \right) \frac{x - \mu_1}{|\vec{r}_2|} = 0, \quad (2.59)$$

$$\mu_1 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_1|^2} + |\vec{r}_1| \right) \frac{y}{|\vec{r}_1|} + \mu_2 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_2|^2} + |\vec{r}_2| \right) \frac{y}{|\vec{r}_2|} = 0. \quad (2.60)$$

Examinando as equações 2.57 e 2.58, é possível perceber a existência da solução trivial em

$$\frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_1|} = \mu_1 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_1|^2} + |\vec{r}_1| \right) = 0, \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial |\vec{r}_2|} = \mu_2 \left( -\frac{1}{|\vec{r}_2|^2} + |\vec{r}_2| \right), \quad (2.61)$$

dados  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = 1$  em nosso sistema de unidades. Usando as equações 2.8 e 2.9, que implica em

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1, \quad (x - \mu_1)^2 + y^2 = 1 \quad (2.62)$$

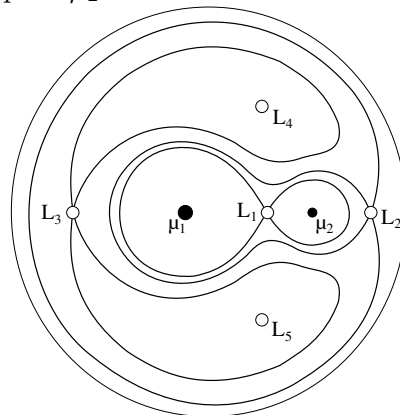
com as duas soluções

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.63)$$

Cada um dos dois pontos definidos por essas equações formam um triângulo equilátero com as massas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Esses são os *pontos lagrangianos triangulares* citados na seção anterior como  $L_4$  e  $L_5$ . É claro, a partir da equação 2.60, que  $y = 0$  é uma simples solução da equação 2.58, implicando que os pontos de equilíbrio restantes estão ao longo do eixo x e satisfazendo a equação 2.57. Existem três soluções correspondentes aos *pontos de lagrangianos equilíbrio colineares*, denotados por  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Como em nosso trabalho estamos interessados nos pontos de equilíbrio triangulares, não iremos demonstrar as localizações dos pontos colineares. Para detalhes sobre as localizações dos pontos colineares, veja em Murray e Dermott (1999) pág. 78-80. As localizações de todos pontos lagrangianos e as curvas de velocidade zero para três valores críticos da constante de Jacobi para  $\mu_2 = 0.2$ , são mostradas na Figura 2.5.

Na Figura 2.5,  $L_1$  possui o maior valor para a constante de Jacobi,  $C_j = 3.805$  e está localizado em um ponto crítico mais interno da curva. Fazendo uma comparação com a Figura 2.2, podemos perceber que  $L_1$  separa as trajetórias confinadas a orbitar em torno de  $\mu_1$  ou de  $\mu_2$ , daquelas que podem orbitar ambas as massas. O ponto  $L_2$ , tem  $C_j = 3.552$  e é outro ponto de sela na curva de velocidade zero. Uma partícula com  $C_j < C_{L_2}$  poderia orbitar nas regiões interiores ou exteriores do plano. Duas ramificações das curvas de velocidade zero também se encontram no ponto  $L_3$  ( $C_j = 3.197$  para o mesmo  $\mu_2$ ). Os pontos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$  possuem os menores valores para a constante de Jacobi ( $C_j = 2.84$ ), se uma partícula possuir  $C_j < C_{L_{4,5}}$ , então não existirão regiões impossíveis no plano para a partícula. Isso não implica que a partícula poderá viajar para todos pontos do plano, apenas que a constante de Jacobi não preve limites para o movimento.

Figura 2.5 - Localização dos pontos Lagrangianos de equilíbrio e as curvas de velocidade zero associadas para  $\mu_2 = 0.2$ .

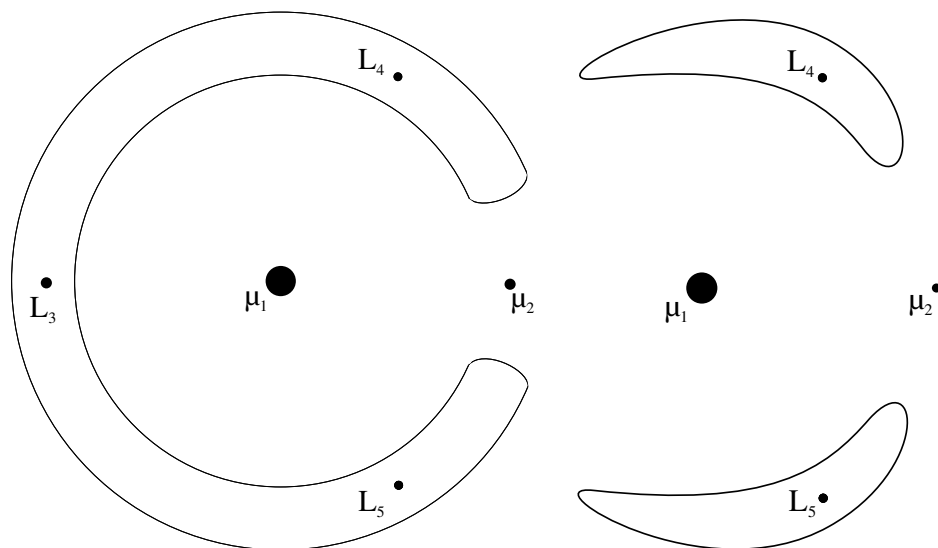


A Figura mostra as curvas de velocidade zero para três valores críticos da constante de Jacobi que passa através dos pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ .

Fonte: Produção do autor.

Apesar de conhecermos a existência dos pontos de equilíbrio, nem todos são estáveis. Os pontos de equilíbrio colineares são sempre instáveis. Entretanto, com condições iniciais especiais podemos encontrar órbitas estáveis e periódicas na vizinhança desses pontos de equilíbrio (SZEBEHELY; PETERS, 1967). Como exemplo temos a sonda espacial *SOHO* que foi colocada na vizinhança de  $L_1$  do sistema Terra-Sol para observar o Sol. Já os pontos  $L_4$  e  $L_5$  podem ser estáveis.

Figura 2.6 - Esquema hipotético de órbitas ferradura e girino.



(a) Órbita tipo Ferradura.

(b) Órbita tipo Girino.

A curva circunscrita aos pontos  $L_4$ ,  $L_3$  e  $L_5$  é chamada de órbita ferradura, enquanto em b), as curvas ao redor de  $L_4$  e  $L_5$  são chamadas de órbitas girino e  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as massas dos primários.

Fonte: Produção do autor.

## 2.2.6 Órbitas Ferradura e Girino

Partículas estão ao redor dos pontos de equilíbrio  $L_4$ ,  $L_3$  e  $L_5$  de um dado sistema, possuem órbitas do tipo *ferradura* (Figura 2.6a). Porém, quando estão ao redor de  $L_4$  ou  $L_5$ , possuem órbitas do tipo *girino* (Figura 2.6b). Embora Lagrange tenha descrito o movimento dos corpos ao redor desses pontos de equilíbrio em 1788, quando publicou sua obra *Analytical Mechanics*, apenas em 1906 um corpo mostrando esse tipo de movimento foi descoberto por *Max Wolf* (NICHOLSON, 1961). Ele encontrou um asteroide ao redor do ponto  $L_4$  de Júpiter no sistema Sol-Júpiter. Partículas que estão nesses tipos de órbitas são também conhecidas como partículas coorbitais, pois dividem a mesma órbita com um outro corpo.

Júpiter tem atualmente 4.595 objetos ao redor de  $L_4$  e 2.434 ao redor de  $L_5$ <sup>1</sup>. Porém, Júpiter não é o único a possuir corpos coorbitais, outros exemplos como Marte<sup>2</sup>, Netuno e até mesmo sistemas de satélites coorbitais, como no caso de Saturno, possuem corpos com esse tipo de movimento.

<sup>1</sup><http://www.cfa.harvard.edu/iau/lists/JupiterTrojans.html>

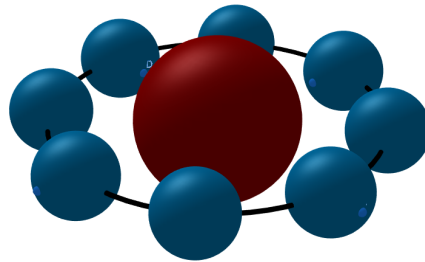
<sup>2</sup><http://www.cfa.harvard.edu/iau/lists/MarsTrojans.html>

### 3 MODELO APROXIMADO

Em sistemas CB, a proximidade do par estelar implica em curto período orbital das estrelas. Em casos extremos, como a classe rara de binárias ultracompactas conhecidas como estrelas *AM CVn* ou como binárias de período ultra curto, onde os períodos orbitais variam entre 5 e 65 minutos (WARNER, 1995; NELEMANS, 2004). Desse modo, estrelas pertencentes a estes tipos de sistemas, possuem velocidade orbital muito alta. Desse modo, se observarmos hipoteticamente esse sistema a uma longa distância, seria impossível identificar o par binário, e sim, iríamos observar algo como um elipsoide.

Como mencionado no capítulo 1, encontramos um coeficiente de achatamento que será inserido em apenas uma estrela, com massa igual a soma das massas do par binário, que forneça um efeito gravitacional de ambas. Desse modo, ao invés de duas estrelas em nossos sistemas, teremos apenas uma. Utilizando o integrador de N-corpos, *MERCURY* (CHAMBERS, 1999), confrontaremos resultados obtidos nas integrações numéricas de simulações utilizando um corpo achatado com seu respectivo par binário.

Figura 3.1 - Dinâmica hipotética de uma órbita entre dois corpos massivos.



Representação 3-D de um corpo menor em azul girando ao redor de um corpo maior em vermelho.

Fonte: Produção do autor.

Em Amarante e Hamilton (2015), foi proposto um modelo a partir dos coeficientes geopotenciais (KAULA, 1968), que considera o efeito de Caronte girando ao redor de Plutão como um toro de massa, como ilustrado na Figura 3.1. Nesse modelo, a estrutura hipotética de Plutão com seu “toro” de massa (Caronte), afeta gravitacio-

nalmente suas luas aproximadamente como um corpo achatado com um certo termo  $J_2$ . Neste modelo, o coeficiente pode ser encontrado a partir de

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{M} \left( \frac{a_{bin}}{R} \right)^2, \quad (3.1)$$

onde  $m$  e  $M$  são as massas do menor e maior corpo respectivamente (Plutão e Caronte) e  $R$  é o raio do maior corpo. Em nosso caso, utilizamos a equação 3.1, onde o maior corpo será a estrela primária e o menor a secundária,  $R$  será o raio das estrelas e  $a_{bin}$  o semi eixo maior das binárias em relação ao centro de massa comum entre elas.

Desse modo, abordaremos este problema usando os seguintes passos:

### 3.1 Modelagem dos sistemas - Condições iniciais

Para checar os limites e a confiabilidade da aproximação proposta, realizamos um conjunto de 4 simulações numéricas. Nessas simulações, estarão presentes o par binário, um planeta hipotético tipo Júpiter e um disco circumbinário de partículas. Como estamos interessados nos pontos Lagrangianos de equilíbrio  $L_4$  e  $L_5$ , as partículas serão distribuídas apenas nessas regiões.

As massas das estrelas do par,  $M_A$  e  $M_B$ , são iguais a  $1/2 M_\odot$ , enquanto o planeta, tendo em vista que todos exoplanetas detectados e confirmados em sistemas binários se tratam de gigantes gasosos, adotaremos um tipo Júpiter, ou seja, mesma massa de Júpiter ( $\approx 1.898e27Kg$ ). Além da massa, o semieixo maior do planeta  $a_p$  (referente ao centro de massa comum das estrelas), também será igual ao de Júpiter ( $\approx 5.2AU$ ), enquanto a excentricidade e inclinação referente ao plano da binária, iguais a 0. A excentricidade, e a inclinação das estrelas também serão iguais a 0.

Variamos o semieixo maior das estrelas ( $a_{bin}$ ), o que resultará em diferentes valores de  $J_2$ . Em cada caso, iremos comparar os resultados das simulações com duas estrelas e um copo achatado, de modo que possamos checar os limites de confiabilidade da aproximação. Como dito anteriormente, testaremos 4 casos. Nessas situações  $a_{bin}$  é igual a  $2 R_{star}$ ,  $4 R_{star}$ ,  $8 R_{star}$  e  $16 R_{star}$ , onde  $R_{star}$  é o raio das estrelas. O raio é encontrado utilizando a mesma densidade média solar ( $1.41g/cm^3$ ) e assumindo ambas esféricas. Assim, o semieixo maior das estrelas ( $a_{bin}$ ) e o coeficiente de achatamento  $J_2$  relativo a cada  $a_{bin}$ , podem ser vistos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Valores obtidos do  $J_2$  para cada configuração distinta. Onde  $R_{star}$  corresponde ao raio das estrelas.

Simulação	$a_{bin}$ (AU)	$J_2$ Efetivo
1	$2 R_{star}$	2
2	$4 R_{star}$	8
3	$8 R_{star}$	32
4	$16 R_{star}$	128

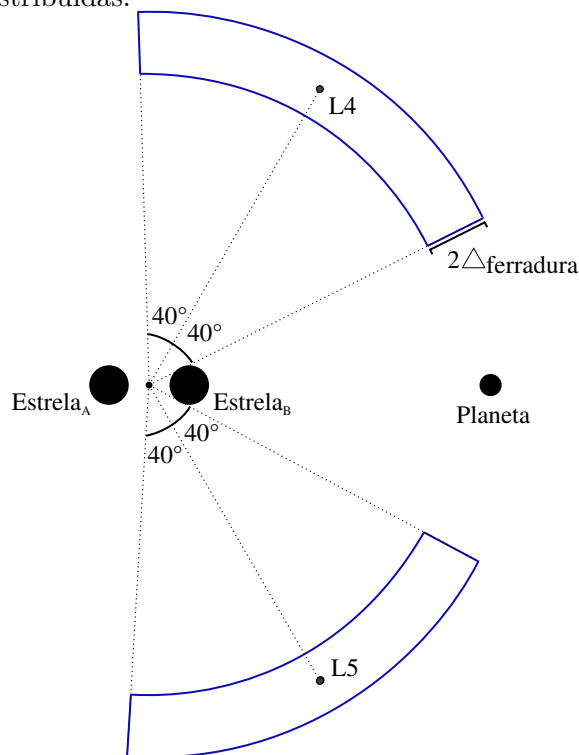
Fonte: Produção do autor.

Serão distribuídas 400 partículas aleatoriamente em um setor circular ao redor de  $L_4$  e outras 400 em torno de  $L_5$ , totalizando 800 partículas. O setor é delimitado por um arco de  $80^\circ$ , centrado no ponto Lagrangiano ( $60^\circ$  e  $300^\circ$  no sentido anti horário), e os raios orbitais extremos da maior órbita em ferradura, como pode ser visto na Figura 3.2. A metade da largura da maior órbita em ferradura é dada por [Dermott e Murray \(1981\)](#) como

$$\Delta_{ferradura} = \frac{1}{2} \mu_2^{\frac{1}{3}} a_2, \quad (3.2)$$

onde  $\mu_2$  e  $a_2$  são a razão de massa do planeta com a somatória das massas das estrelas e o semieixo maior do planeta, respectivamente. As posições das partículas são as mesmas em todas as simulações de 1 a 4. Também foi considerado que as partículas não interagem gravitacionalmente entre si e que tem massa desprezível, fazendo com que somente sofram efeitos gravitacionais das estrelas e do planeta. Como estamos interessados apenas na região coorbital, definimos como ejeção, distância mínima e máxima para uma partícula ser removida da simulação, 4 e 6 AU respectivamente. Todas as simulações numéricas foram realizadas utilizando o pacote MERCURY ([CHAMBERS, 1999](#)).

Figura 3.2 - Localização dos setores em torno de  $L_4$  e  $L_5$  onde as partículas foram inicialmente distribuídas.



Cada setor é delimitado por um arco de  $80^\circ$ , centrado no ponto Lagrangeano, e os raios orbitais extremos da maior órbita ferradura. A metade da largura da maior órbita em ferradura,  $\Delta_{ferradura}$ , é dada pela equação 3.2.

Fonte: Produção do autor.

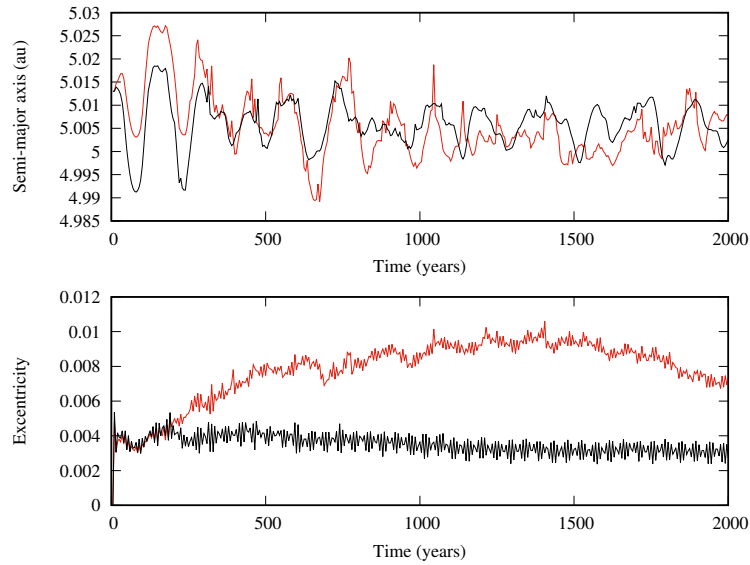
### 3.2 Resultados das simulações

As Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 mostram as séries temporais do semieixo maior e excentricidade média das partículas para cada simulação. Para cada intervalo de tempo igual a cinco anos, calculamos a média do semieixo maior, subfigura superior, e da excentricidade, subfigura inferior, de todas as partículas. As linhas vermelhas de cada subfigura são referentes a resultados de simulações com duas estrelas e as pretas são referentes a apenas uma estrela achatada.

A Tabela 3.2, apresenta o número de colisões e ejeções de cada simulação. Esses números são dados em relação ao tempo final de integração de cada caso (tempos finais de cada simulação também podem ser vistos nas Figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10). Como dito anteriormente, serão excluídas da simulação, partículas que seus semieixos maiores ultrapassem  $6 au$  ou que sejam inferiores a  $4 au$ . As colisões mencionadas



Figura 3.3 - Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na *simulação 1*.



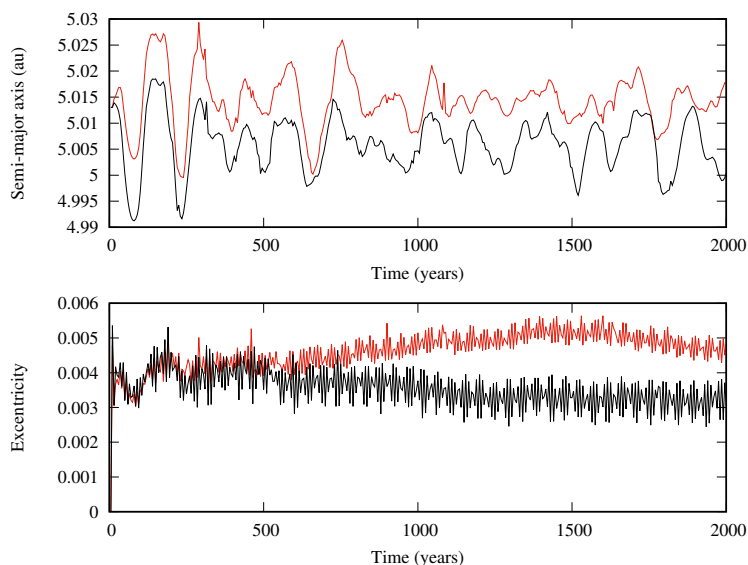
Onde  $a_{bin} = 2 R_{stars}$ , de cima para baixo respectivamente. A linha preta se refere aos resultados das simulações utilizando o modelo aproximado com uma estrela achatada enquanto a linha vermelha ao sistema com um par binário.

Fonte: Produção do autor.

na tabela são referentes a colisões com o planeta hospedeiro do sistema, tendo em vista que uma partícula é considerada ejetada antes mesmo de chegar próximo ao corpo central e colisões entre as mesmas não são consideradas em nosso programa.

As Figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 a seguir, mostram a evolução orbital das simulações de 1 a 4, respectivamente. Nessas figuras podemos ver a evolução dinâmica das partículas de teste, sendo o semieixo maior no eixo horizontal e a excentricidade no eixo vertical. Em todas as figuras mencionadas temos duas colunas, sendo a coluna da esquerda referente a simulações com duas estrelas e a coluna da direita simulações referentes a sistemas com uma estrela com seu respectivo coeficiente de achatamento  $J_2$ , com cada linha indicando o mesmo instante de tempo. A Figura 3.7 apresenta tempo final de integração de 1.690 anos, a Figura 3.8 de 3.785 anos e as Figuras 3.9 e 3.10 de 5.000 anos.

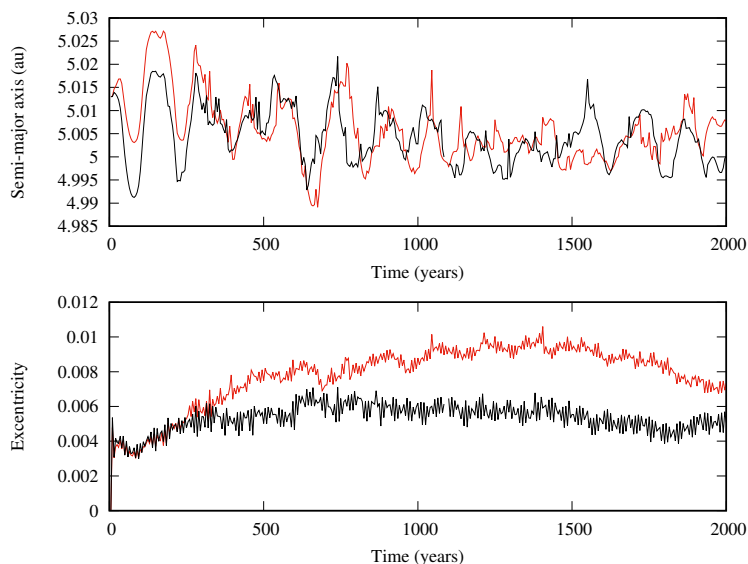
Figura 3.4 - Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na *simulação 2*



Onde  $a_{bin} = 4 R_{stars}$ , de cima para baixo respectivamente. A linha preta se refere aos resultados das simulações utilizando o modelo aproximado com uma estrela achatada enquanto a linha vermelha ao sistema com um par binário.

Fonte: Produção do autor.

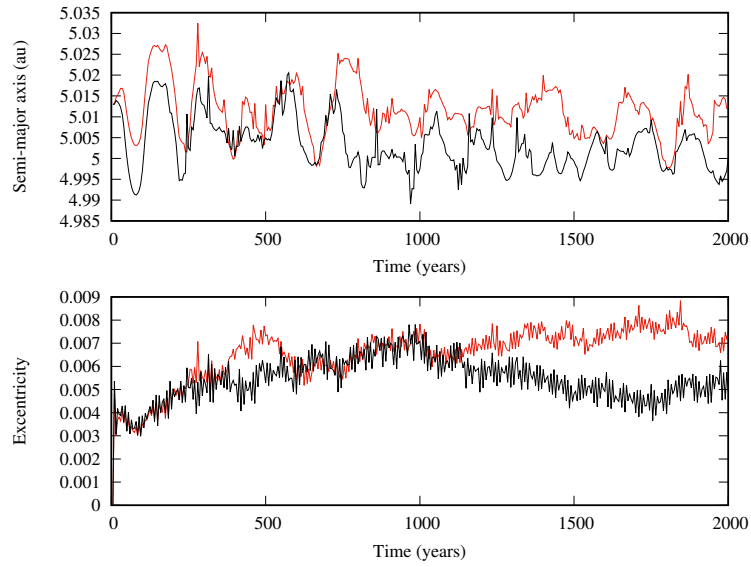
Figura 3.5 - Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na *simulação 3*.



Onde  $a_{bin} = 8 R_{stars}$ , de cima para baixo respectivamente. A linha preta se refere aos resultados das simulações utilizando o modelo aproximado com uma estrela achatada enquanto a linha vermelha ao sistema com um par binário.

Fonte: Produção do autor.

Figura 3.6 - Comparação entre as séries temporais do semieixo maior médio e excentricidade média das partículas na *simulação 4*.



Onde  $a_{bin} = 16 R_{stars}$ , de cima para baixo respectivamente. A linha preta se refere aos resultados das simulações utilizando o modelo aproximado com uma estrela achatada enquanto a linha vermelha ao sistema com um par binário.

Fonte: Produção do autor.

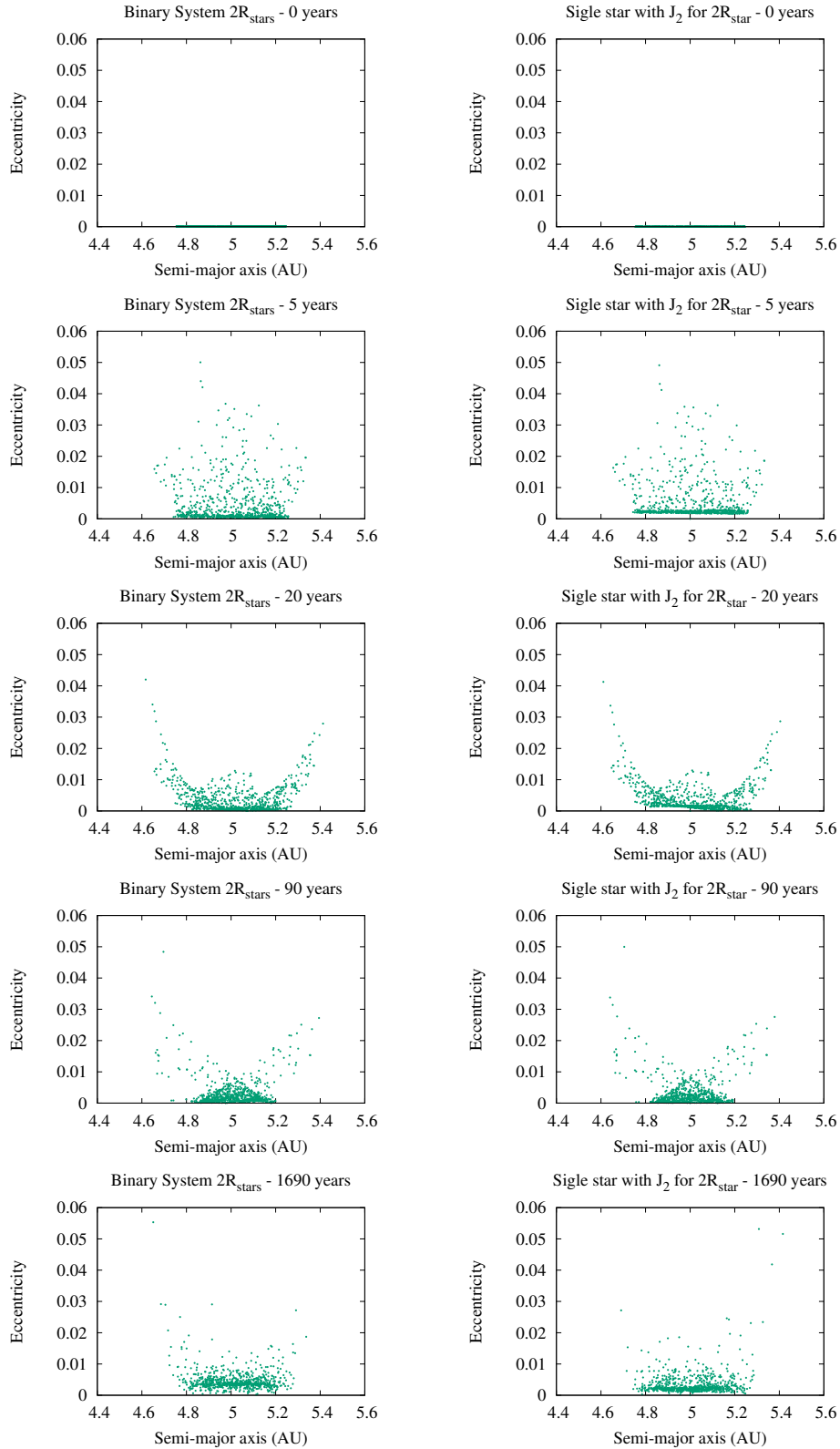
Tabela 3.2 - Comparação entre o número de ejeções e colisões com o planeta.

Simulação 1 - $a_{bin} = 2 R_{star}$		
	Duas estrelas	Uma estrela com $J_2$
Número de colisões	1	1
Número de ejeções	48	45
Simulação 2 - $a_{bin} = 4 R_{star}$		
	Duas estrelas	Uma estrela com $J_2$
Número de colisões	1	1
Número de ejeções	66	60
Simulação 3 - $a_{bin} = 8 R_{star}$		
	Duas estrelas	Uma estrela com $J_2$
Número de colisões	2	14
Número de ejeções	63	45
Simulação 4 - $a_{bin} = 16 R_{star}$		
	Duas estrelas	Uma estrela com $J_2$
Número de colisões	6	13
Número de ejeções	64	51

Na tabela está representado o sistema com duas estrelas (binárias) e uma estrela apenas com o termo  $J_2$  efetivo.

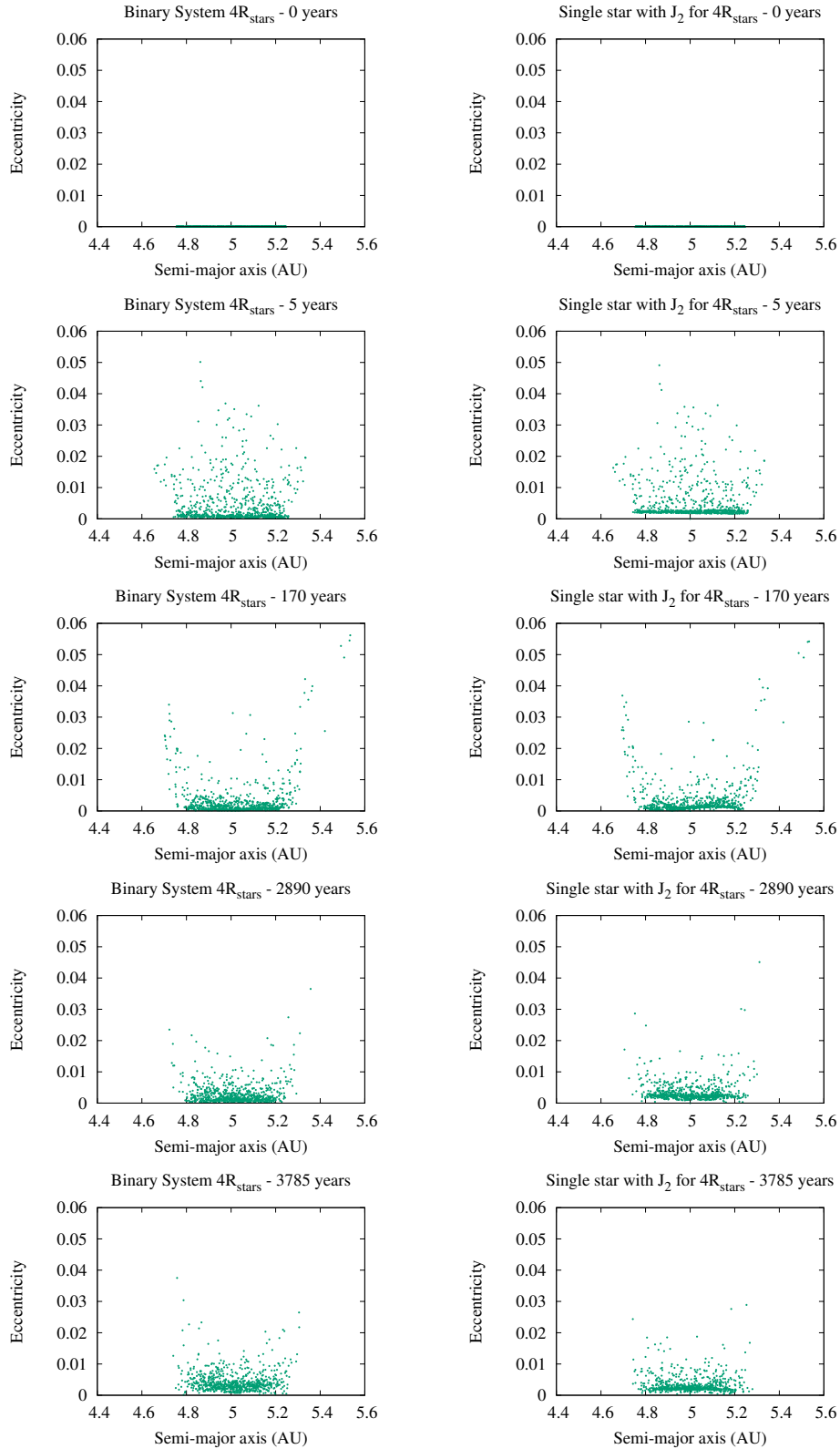
Fonte: Produção do autor.

Figura 3.7 - Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo  $J_2$  representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de  $2R_{star}$ .



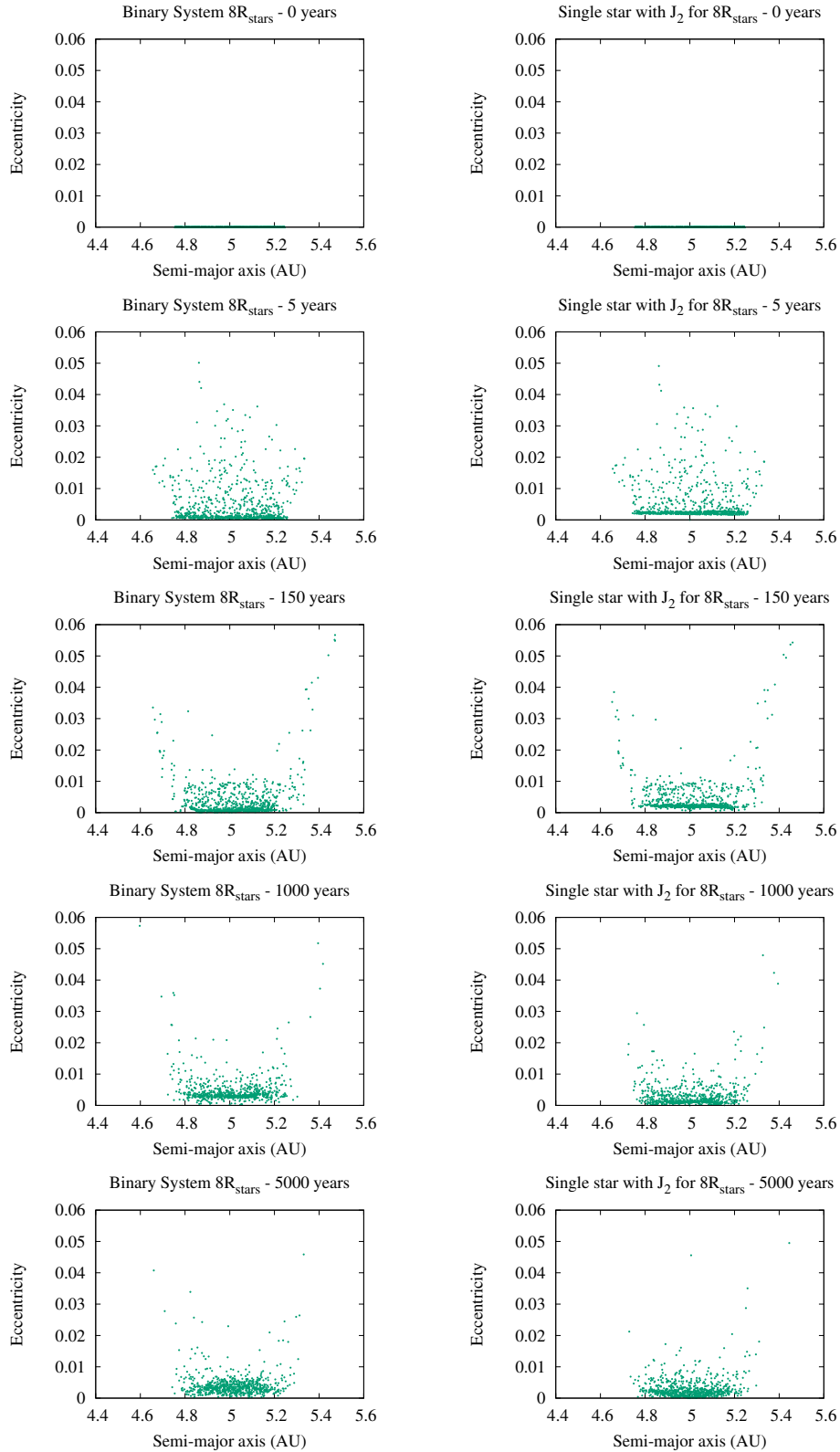
Fonte: Produção do autor.

Figura 3.8 - Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo  $J_2$  representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de  $4 R_{star}$ .



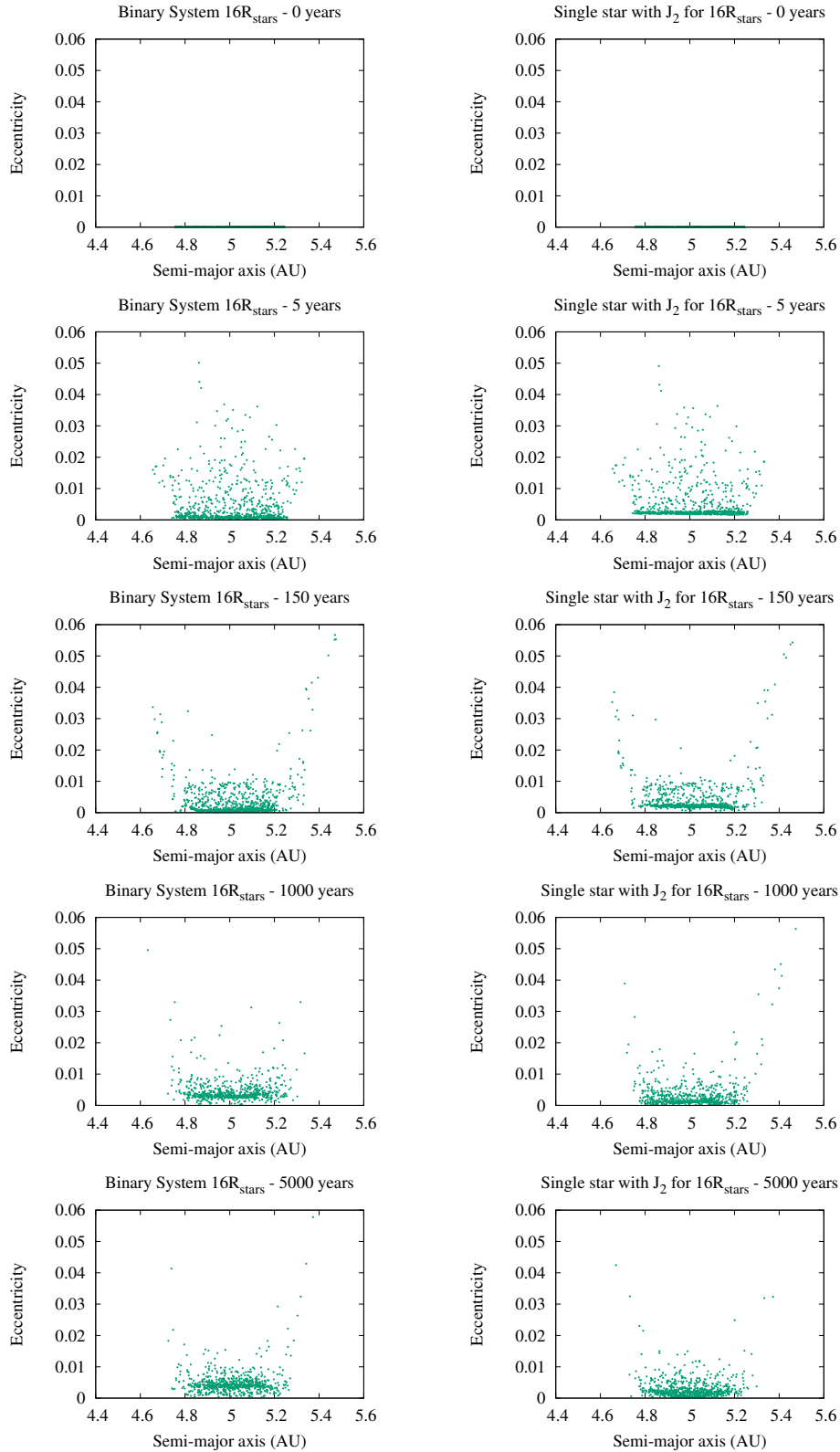
Fonte: Produção do autor.

Figura 3.9 - Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo  $J_2$  representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de  $8R_{star}$ .



Fonte: Produção do autor.

Figura 3.10 - Comparação entre um sistema binário e um sistema singular com termo  $J_2$  representando o efeito da segunda estrela que possui semieixo maior de  $16R_{star}$ .



Fonte: Produção do autor.



### 3.3 Conclusão

- a) *Simulação 1*: Com o baixo valor do semieixo maior das estrelas, o que reflete fisicamente em duas estrelas se tangenciando externamente, o coeficiente de achatamento consegue suprir de forma satisfatória a ausência da companheira estelar, tendo em vista que não existe diferença entre o número de colisões entre os dois casos, e a de ejeções é igual a 3 partículas a mais no caso em que temos duas estrelas, como pode ser visto na Tabela 3.2. Na Figura 3.7, onde é mostrada a evolução do semieixo maior e a excentricidade das partículas no mesmo instante de tempo para os dois casos, o comportamento dinâmico é extremamente parecido nos dois casos. A diferença no número de ejeções, sendo esse número maior nas simulações com duas estrelas, pode ser explicado pela Figura 3.3. Nela podemos perceber que a excentricidade média das partículas é menor no caso em que temos apenas uma estrela, isso faz com que as partículas não escapem facilmente da região coorbital.
- b) *Simulação 2*: Nesta simulação, o semieixo maior das estrelas do par binário é maior, sendo ele  $a_{bin} = 4 R_{stars}$ . Novamente, não existe diferença entre o número de colisões nos dois casos. Em relação ao número de ejeções, temos uma diferença de 6 partículas ejetadas a mais no caso em que temos duas estrelas, como pode ser visto na Tabela 3.2. Ainda assim, comparando os resultados mostrados na Figura 3.8, podemos perceber que a evolução dinâmica das partículas é bem similar nos dois casos. A diferença no número de ejeções, pode ser explicado pela Figura 3.4, onde a excentricidade das partículas no caso em que temos apenas uma estrela é menor, o que promove um menor número de ejeções das partículas em relação ao caso com duas estrelas.
- c) *Simulação 3*: Com o aumento do semieixo maior ( $a_{bin} = 8 R_{stars}$ ), a diferença cresce consideravelmente. Para o número de colisões, temos uma diferença de 12 partículas que colidiram a mais, no caso em que temos apenas uma estrela. Já o número de ejeções, é maior no caso em que temos duas estrelas, sendo essa diferença igual a 18 partículas. Isso nos mostra, a partir dos nossos resultados, que o modelo possui menor diferença nesses números para  $a_{bin} \leq 4 R_{stars}$ . Na Figura 3.9, também é possível perceber que o comportamento das partículas vai se tornando cada vez mais distinto com o passar do tempo.

d) *Simulação 4*: Nesse caso ( $a_{bin} = 16 R_{stars}$ ), a diferença entre o número de colisões e ejeções é um pouco menor do que no caso anterior, 7 e 13 respectivamente. Apesar disso, podemos ver na Figura 3.10 que existe uma grande diferença entre as posições das partículas no mesmo instante de tempo. Podemos concluir, que a diferença entre o número de colisões e ejeções nesse caso não é tão grande, pois a alta separação das estrelas exerça uma forte perturbação no movimento do planeta e das partículas, causando um maior número de colisões e de ejeções. Por sua vez, o mesmo ocorre com o alto valor do  $J_2$  que representa essa separação, porém, isso apenas indica que os dois casos possuem bastante perturbação e não que os dois se comportam da mesma forma.

Em todos os casos podemos perceber que o número de ejeções é maior nas simulações com duas estrelas. Isso ocorre devido ao fato de que nas simulações com duas estrelas, o fim de cada período orbital do par binário perturba o disco aumentando a excentricidade das partículas, fazendo com que as mesmas sejam ejetadas. O que não ocorre com apenas uma estrela achatada, que possui efeito gravitacional constante sobre as partículas, seja qual for a posição de um corpo em órbita da mesma.

O modelo aproximado, se mostra bastante eficiente para sistemas com pequenas separações entre as estrelas. Para estrelas com separações maiores que 4 raios estelares, o modelo começa a apresentar diferenças consideráveis nos resultados.

Em integradores numéricos, o baixo valor do semieixo maior das estrelas faz com que o passo do integrador seja muito pequeno, tendo em vista que o período orbital das estrelas seja de poucos dias. Dessa forma, em um estudo de formação planetária nesse tipo de sistema, onde simulações numéricas precisam ser integradas por de centenas de milhões de anos, com um passo do integrador muito pequeno, as simulações podem levar meses para acabar. Já com o modelo, a mesma simulação leva apenas alguns dias. Em nosso caso, para a simulação 1, em que as estrelas possuem semieixo maior de apenas dois raios estelares, o caso em que temos duas estrelas, a integração numérica levou aproximadamente 15 dias para integrar 1690 anos. Já o caso em que temos apenas um estrela achatada, a mesma simulação levou apenas 2 horas.

## 4 PROBLEMA CIRCUMBINÁRIO RESTRITO DE QUATRO CORPOS

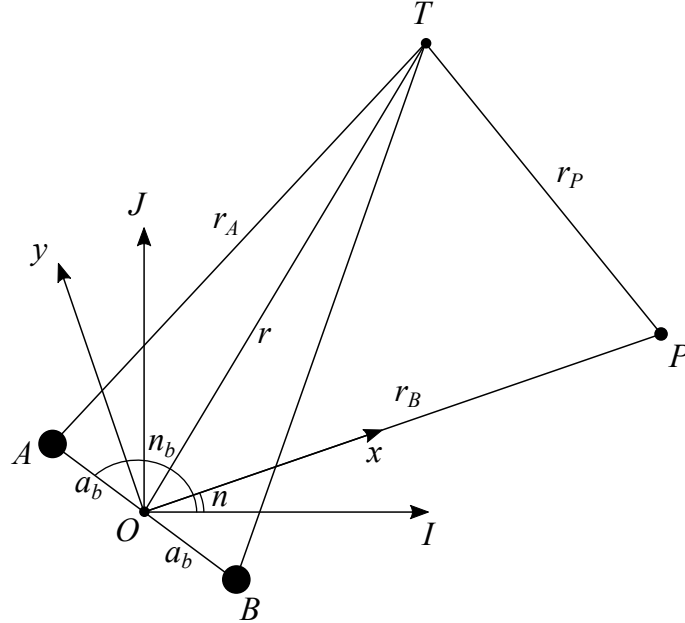
No capítulo anterior verificamos que a aproximação proposta nesse trabalho possui limites. Portanto, nessa seção estamos interessados em estudar os pontos verticais de equilíbrio Lagrangianos de forma analítica. Especificamente, buscamos encontrar em um sistema com duas estrelas e um planeta, posições e velocidades adequadas em um referencial inercial, onde um quarto corpo estaria em equilíbrio em um sistema girante. Estendemos nossa análise para considerar a interação gravitacional entre quatro corpos, de modo que o quarto corpo possua massa desprezível em relação aos outros três.

Se dois corpos primários possuem órbita circular e coplanar em torno do centro de massa comum entre eles, outro corpo menos massivo mais afastado, também com órbita circular e coplanar ao redor do centro de massa dos primários e um quarto corpo com massa desprezível em relação aos outros três, o problema do movimento do quarto corpo será chamado aqui de *problema circumbinário restrito de quatro corpos*. Nessa seção descrevemos as equações de movimento do problema circumbinário de quatro corpos, discutiremos a localização dos pontos verticais de equilíbrio Lagrangianos e analisaremos o papel da, constante de movimento, *integral de Jacobi*.

### 4.1 Equações de movimento

Consideramos o movimento de uma partícula de massa desprezível movendo-se sob influência gravitacional de três corpos com massas  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_P$ , referentes aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  na Figura 4.1, respectivamente. Assumimos que os dois corpos primários mais massivos  $m_A$  e  $m_B$  estão em órbitas circulares ao redor do centro de massa comum entre eles e que o terceiro corpo menos massivo e mais afastado  $m_P$ , também em órbita circular ao redor do centro de massa dos primários, e que os mesmos exercem força na partícula, entretanto a partícula não exerce nenhuma força sobre os três. Também assumimos que a massa  $m_A$  e  $m_B$  são iguais e que a massa  $m_p \ll m_A$  e  $m_B$ , com isso, assumiremos que o centro de massa dos três corpos massivos é o centro de massa dos primários.

Figura 4.1 - Visão do plano orbital do par binário (A e B).



Esse plano contém um planeta e uma partícula com massa desprezível, representados respectivamente por  $P$  e  $T$ , nesse plano é mostrada a relação entre as coordenadas do referencial inercial  $(I, J, K)$  e o sistema referencial girante  $(x, y, z)$  da partícula  $T$ . A origem de ambos sistemas  $O$ , está localizada no centro de massa dos dois corpos. Os eixos  $K$  e  $z$  coincidem com o eixo de rotação.

Fonte: Produção do autor.

Consideramos um sistema de coordenadas  $I, J$  e  $K$  no referencial inercial onde o centro de massa dos corpos se encontra na origem na origem  $O$ , conforme a Figura 4.1. O eixo  $I$  está sobre a linha que liga  $m_A, m_B$  e  $m_P$  em  $t = 0$ , o eixo  $J$  é perpendicular a  $I$ , formando assim o plano orbital dos corpos. Por fim,  $K$  é perpendicular ao plano  $I - J$  ao longo do vetor momento angular. As coordenadas dos três corpos massivos no sistema inercial são  $(I_1, J_1, K_1)$ ,  $(I_2, J_2, K_2)$  e  $(I_3, J_3, K_3)$ . Os dois corpos mais internos ( $A$  e  $B$ ) possuem separação constante e mesma velocidade angular sobre o outro e seu centro de massa. O corpo mais afastado,  $P$ , também possui distância do centro de massa e velocidade angular constantes. Desse modo, o movimento médio de  $m_P$  é dado por  $n$  e o de  $m_A$  e  $m_B$  dado por  $n_b$ , respectivamente. As coordenadas da partícula  $T$  no referencial inercial são  $(I, J, K)$ . Finalmente, aplicando a forma vetorial da lei da gravitação universal, as equações de movimento da partícula são

$$\ddot{\vec{I}} = Gm_A \frac{\vec{I}_1 - \vec{I}}{|\vec{r}_A|^3} + Gm_B \frac{\vec{I}_2 - \vec{I}}{|\vec{r}_B|^3} + Gm_P \frac{\vec{I}_3 - \vec{I}}{|\vec{r}_P|^3}, \quad (4.1)$$

$$\ddot{J} = Gm_A \frac{J_1 - J}{|\vec{r}_A|^3} + Gm_B \frac{J_2 - J}{|\vec{r}_B|^3} + Gm_P \frac{J_3 - J}{|\vec{r}_P|^3}, \quad (4.2)$$

$$\ddot{K} = Gm_A \frac{K_1 - K}{|\vec{r}_A|^3} + Gm_B \frac{K_2 - K}{|\vec{r}_B|^3} + Gm_P \frac{K_3 - K}{|\vec{r}_P|^3}, \quad (4.3)$$

e, a partir da Figura 4.1,

$$|\vec{r}_A| = \sqrt{(I_1 - I)^2 + (J_1 - J)^2 + (K_1 - K)^2}, \quad (4.4)$$

$$|\vec{r}_B| = \sqrt{(I_2 - I)^2 + (J_2 - J)^2 + (K_2 - K)^2}, \quad (4.5)$$

$$|\vec{r}_P| = \sqrt{(I_3 - I)^2 + (J_3 - J)^2 + (K_3 - K)^2}. \quad (4.6)$$

Note que essas equações são também válidas no problema geral de quatro corpos, tendo em vista que não assumimos nada de especial até o momento. Sabendo que as estrelas estão em órbitas circulares ao redor do centro de massa comum entre elas, com mesmo raio orbital constante igual a  $a_b$  (ver Figura 4.1), as posições das estrelas no sistema inercial são  $(I_1, J_1, K_1) = (a_b \cos(n_b t), a_b \sin(n_b t), 0)$  e  $(I_2, J_2, K_2) = (a_b \cos(n_b t + \pi), a_b \sin(n_b t + \pi), 0)$ .

Se os dois corpos primários estão em órbitas circulares, então a distância entre eles não é alterada, com seu movimento ao redor do centro de massa comum entre eles com uma velocidade angular fixa. O mesmo ocorre com o terceiro corpo mais afastado, que também possui distância ao centro de massa fixa  $a_p$ , com velocidade angular  $n$  também fixa. Nessas circunstâncias, é natural considerar o movimento da partícula em um sistema referencial girante no qual a localização da terceira massa  $m_P$  é também fixa e as posições dos corpos primários girando com movimento médio relativo ao movimento do terceiro corpo. Vamos considerar um novo sistema referencial girante  $(x, y, z)$ , com mesma origem que a do sistema  $I, J$ , no qual a posição do corpo  $m_P$  é fixa, para isso, o sistema está girando com uma taxa constante  $n$  na direção antihorária (ver Figura 4.1). A direção do eixo  $x$  é escolhida de tal maneira que a massa  $m_P$  sempre está ao longo dele com coordenadas  $(x_3, y_3, z_3) = (a_p, 0, 0)$ . Temos também, as coordenadas dos corpos primários  $A$  e  $B$ , nesse sistema,

iguais a  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ , a partir de uma simples matriz de rotação,

$$\begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

temos que  $(x_1, y_1, z_1) = (a_b \cos((n_b - n)t), a_b \text{sen}((n_b - n)t), 0)$  e  $(x_2, y_2, z_2) = (a_b \cos((n_b - n)t + \pi), a_b \text{sen}((n_b - n)t + \pi), 0)$ . Assim, a partir da Figura 4.1, temos

$$|r_A^{\vec{}}| = \sqrt{(x - a_b \cos((n_b - n)t)^2 + (y - a_b \text{sen}((n_b - n)t)^2 + z^2}, \quad (4.8)$$

$$|r_B^{\vec{}}| = \sqrt{(x - a_b \cos((n_b - n)t + \pi)^2 + (y - a_b \text{sen}((n_b - n)t + \pi)^2 + z^2}, \quad (4.9)$$

$$|r_P^{\vec{}}| = \sqrt{(x - a_p)^2 + y^2 + z^2}, \quad (4.10)$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas da partícula no sistema referencial girante. Essas coordenadas podem ser relacionadas com o sistema referencial inercial utilizando novamente a mesma matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Agora diferenciando duas vezes cada lado da equação 4.11, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{J} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

e

$$\begin{pmatrix} \ddot{I} \\ \ddot{J} \\ \ddot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\text{sen}(nt) & 0 \\ \text{sen}(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Como na seção 2.2.2, os termos  $n\dot{x}$  e  $n\dot{y}$  (a aceleração de Corioli) e  $n^2x$  e  $n^2y$  (aceleração centrífuga) são inseridos. Agora, substituindo  $I, J, K, \ddot{I}, \ddot{J}$  e  $\ddot{K}$ , as equações 4.1, 4.2 e 4.3 se tornam

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\text{sen}(nt) = \\ \left[ \frac{Gm_A(x_1 - x)}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B(x_2 - x)}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P(x_3 - x)}{|\vec{r}_P|^3} \right] \cos(nt) + \\ \left[ \frac{Gm_A(y - y_1)}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B(y - y_2)}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P(y - y_3)}{|\vec{r}_P|^3} \right] \text{sen}(nt), \quad (4.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\text{sen}(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) = \\ \left[ \frac{Gm_A(x_1 - x)}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B(x_2 - x)}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P(x_3 - x)}{|\vec{r}_P|^3} \right] \text{sen}(nt) + \\ \left[ \frac{Gm_A(y_1 - y)}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B(y_2 - y)}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P(y_3 - y)}{|\vec{r}_P|^3} \right] \cos(nt), \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{Gm_A}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P}{|\vec{r}_P|^3} \right] z. \quad (4.16)$$

Multiplicando a equação 4.14 por  $\cos(nt)$ , e a equação 4.15 por  $\text{sen}(nt)$  em seguida somando os resultados e multiplicando a equação 4.14 por  $-\text{sen}(nt)$  e a equação 4.15 por  $\cos(nt)$  e novamente somando os produtos, as equações de movimento da partícula no sistema girante se tornam

$$\ddot{x} - n\dot{y} - n^2x = Gm_A \frac{x_1 - x}{|\vec{r}_A|^3} + Gm_B \frac{x_2 - x}{|\vec{r}_B|^3} + Gm_P \frac{x_3 - x}{|\vec{r}_P|^3}. \quad (4.17)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = Gm_A \frac{y_1 - y}{|\vec{r}_A|^3} + Gm_B \frac{y_2 - y}{|\vec{r}_B|^3} + Gm_P \frac{y_3 - y}{|\vec{r}_P|^3}. \quad (4.18)$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{Gm_A}{|\vec{r}_A|^3} + \frac{Gm_B}{|\vec{r}_B|^3} + \frac{Gm_P}{|\vec{r}_P|^3} \right] z. \quad (4.19)$$

Essas equações também podem ser escritas como o gradiente de uma função escalar  $U$ :

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.20)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.21)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.22)$$

Onde  $U = U(x, y, z)$  é dado por

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{Gm_A}{|\vec{r}_A|} + \frac{Gm_B}{|\vec{r}_B|} + \frac{Gm_P}{|\vec{r}_P|}. \quad (4.23)$$

## 4.2 Constante de movimento no problema de quatro corpos

Como no problema restrito de três corpos clássico, podemos encontrar uma constante de integração a partir da função escalar  $U$ . Para isso, vamos multiplicar a equação 4.20 por  $\dot{x}$ , a equação 4.21 por  $\dot{y}$  e a 4.22 por  $\dot{z}$  e somando todos esses produtos, temos

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}. \quad (4.24)$$

O que pode ser integrado para resultar

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U + C_j, \quad (4.25)$$

onde  $C_j$  é a constante de integração. Escrevendo  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$ , ou seja, o quadrado da velocidade da partícula no sistema girante, temos



$$v^2 = 2U - C_j \quad (4.26)$$

ou ainda, utilizando a equação 4.23,

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{Gm_A}{|\vec{r}_A|} + \frac{Gm_B}{|\vec{r}_B|} + \frac{Gm_P}{|\vec{r}_P|} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \quad (4.27)$$

Isso demonstra que a quantidade  $2U - v^2 = C_j$  é uma constante de movimento. Essa é a integral de *Jacobi*, chamada também constante de *Jacobi* ou em alguns casos como *integral da energia relativa*. É importante ressaltar que essa não é a integral da energia, pois no problema restrito a energia e o momento angular não são conservados.

A medição da posição e velocidade da partícula em qualquer sistema de referência determina o valor da constante de Jacobi associada ao movimento da partícula. A existência do momento angular e das integrais de energia no problema de dois corpos permite-nos resolver o movimento de uma massa em relação à outra. A constante de Jacobi é a única integral do movimento no problema dos três corpos. Podemos usá-la para determinar regiões das quais o movimento da partícula é proibido. (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Como na seção anterior, a constante de Jacobi é útil para nos mostrar a localização onde a velocidade da partícula é zero. Nesses casos temos

$$2U = C_j \quad (4.28)$$

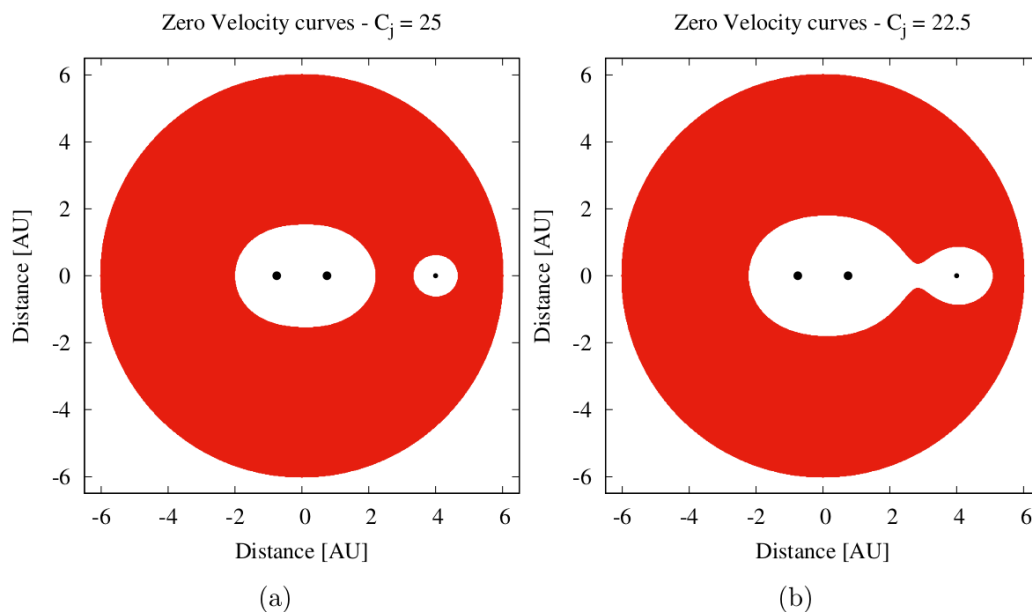
ou

$$n^2(x^2 + y^2) + 2 \left( \frac{Gm_A}{|\vec{r}_A|} + \frac{Gm_B}{|\vec{r}_B|} + \frac{Gm_P}{|\vec{r}_P|} \right) = C_j. \quad (4.29)$$

A equação 4.29 define um conjunto de superfícies para valores particulares de  $C_j$ . Essas superfícies, conhecidas como *superfícies de velocidade zero*, desempenham um papel importante na imposição de limites sobre o movimento da partícula. Para simplificar, vamos apenas considerar o plano  $x - y$ . Nesse caso, a intersecção das superfícies de velocidade zero com o plano  $x - y$  produzem um conjunto de *curvas de*

*velocidade zero*. A Figura 4.2 mostra dois exemplos dessas curvas. Nesse exemplos temos os primários com a mesma massa e a razão entre a soma das massas das primárias pela massa do terceiro corpo igual a  $\mu = 0.15$ . A partir da equação 4.25, fica claro que nós devemos sempre ter  $2U \geq C_j$ , pois ao contrário disso, teríamos a velocidade  $v$  sendo complexa. Portanto, a equação 4.29 define os limites das regiões onde o movimento da partícula é possível, ou em outras palavras, regiões excluídas. Porém, o problema restrito de quatro corpos não possui solução analítica para quaisquer condições iniciais arbitrárias, a existência da integral de Jacobi nos permite apenas encontrar regiões do plano  $x - y$  onde a partícula não pode estar.

Figura 4.2 - Curvas de velocidade zero para dois valores distintos da constante de Jacobi com  $\mu = 0.15$ .



Onde  $\mu$  é a razão entre a soma das massas primárias e a massa do planeta. Em (a),  $C_j = 25$  e em (b),  $C_j = 22.5$ . As áreas em vermelho denotam regiões de movimento impossível para uma partícula.

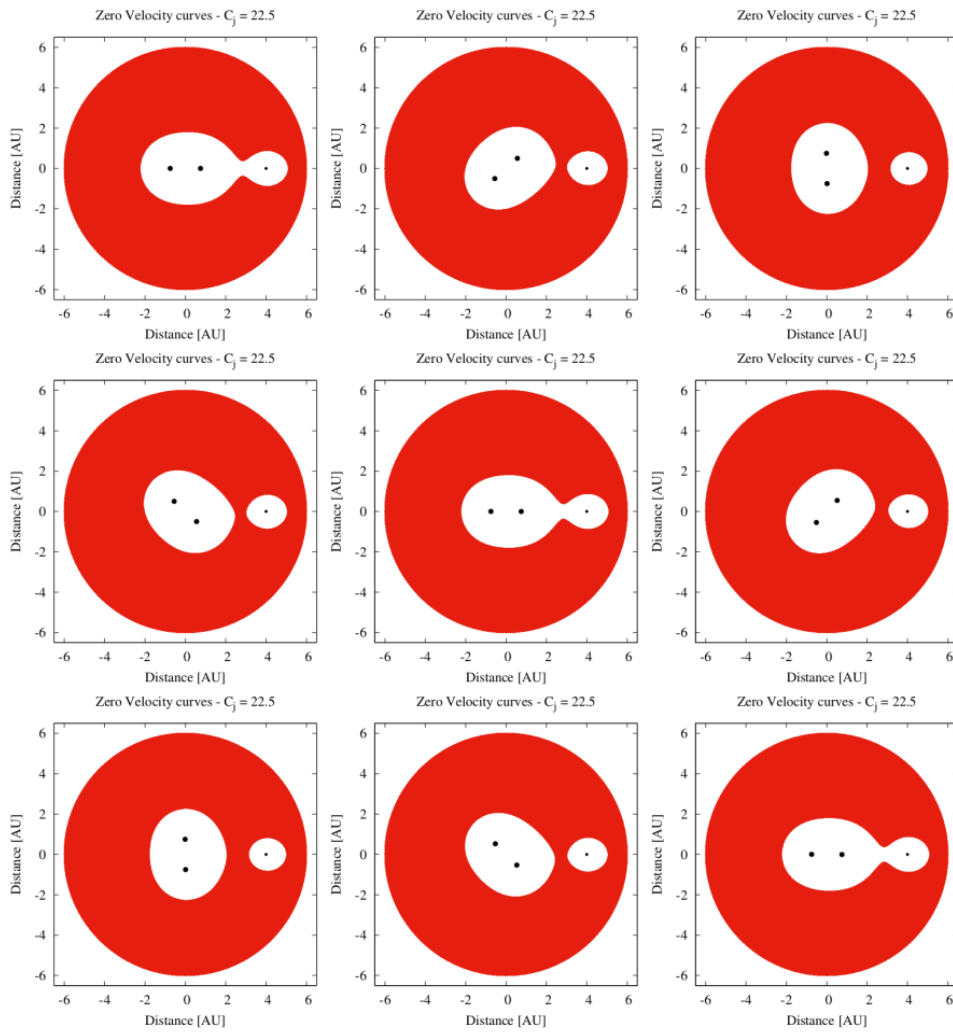
Fonte: Produção do autor.

As áreas vermelhas na Figura 4.2 denotam regiões onde o movimento da partícula é impossível. Podemos ver, por exemplo, na Figura 4.2a, que se uma partícula com esse valor de  $C_j$  estiver em órbita na região branca ao redor da massa de um dos componentes primários, ou até mesmo de ambas, então ela nunca poderá orbitar a massa menor mais afastada da direita ou escapar do sistema, já que teria que

atravessar a região proibida. O análogo acontece na Figura 4.2b, nesse caso, uma partícula orbitando qualquer componente primário ou até mesmo ambos, pode também eventualmente orbitar a menor massa a direita, do mesmo modo que, a mesma nunca poderia escapar desse sistema.

Diferentemente do problema restrito de três corpos, o que ocorre na Figura 4.2b não é definitivo, tendo em vista que mesmo no sistema girante os primários estão girando, fazendo com que a transferência orbital seja possível em alguns momentos do período orbital das primárias, como pode ser visto na Figura 4.3. Quando as primárias estão colineares ao terceiro corpo, ou bem próximo disso, essa transferência é possível.

Figura 4.3 - Instantâneos do movimento orbital das primárias referentes ao caso b da Figura 4.2.



Fonte: Produção do autor.

### 4.3 Localização dos pontos de equilíbrio verticais em sistemas binários

Embora o problema bicircular restrito de quatro corpos não seja integrável, podemos encontrar várias soluções especiais. Isto pode ser conseguido procurando pontos onde a partícula tem velocidade zero e aceleração zero no sistema girante. Tais pontos são chamados de pontos de equilíbrio do sistema. Para que os resultados sejam facilmente associados a sistemas existentes reais, utilizaremos parâmetros orbitais e físicos das estrelas e do planeta, factíveis com sistemas conhecidos.

Seja um sistema estelar binário *P-type*, com um planeta gigante hospedeiro tipo Júpiter orbitando o centro de massa dessas estrelas sistema e conseqüentemente o par binário. A zona habitável desse tipo de sistema é um disco circunstelar. Mesmo que o planeta possua uma órbita de modo que ele esteja sempre dentro desse disco, ele não pode ser considerado habitável pois se trata de um tipo Júpiter. Porém, um planeta tipo Terra localizado em um dos pontos de equilíbrio verticais,  $L_4$  ou  $L_5$ , compartilharia a mesma órbita que o planeta hospedeiro, e do mesmo modo, estaria interno à região habitável. Com isso, nesse trabalho estamos atrás da existência de pontos de equilíbrio verticais em sistemas binários.

Na seção anterior, encontramos as equações de movimento de uma partícula nesse tipo de sistema. Embora em nossas suposições consideramos que essa partícula possuía massa desprezível, de que modo não perturbar o movimento dos corpos primários, as localizações dos pontos de equilíbrio encontradas através dessas equações, podem nos oferecer boas informações, como também ocorre no problema restrito de três corpos.

No sistema referencial girante, uma partícula em equilíbrio possui  $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ . Desse modo, as equações 4.17 e 4.18 se tornam

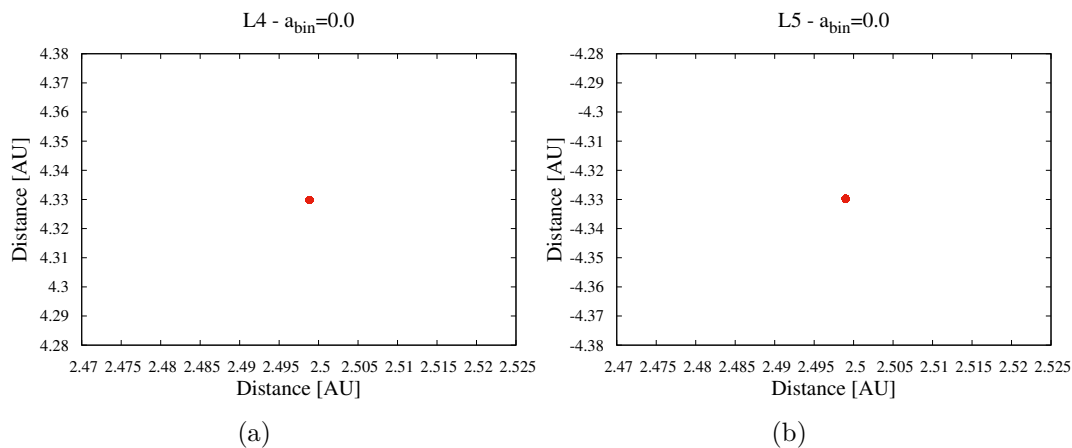
$$Gm_A \frac{x_1 - x}{|r_A|^3} + Gm_B \frac{x_2 - x}{|r_B|^3} + Gm_P \frac{x_3 - x}{|r_P|^3} + n^2 x = 0, \quad (4.30)$$

$$Gm_A \frac{y_1 - y}{|r_A|^3} + Gm_B \frac{y_2 - y}{|r_B|^3} + Gm_P \frac{y_3 - y}{|r_P|^3} + n^2 y = 0. \quad (4.31)$$

Para encontrar as localizações dos pontos de equilíbrio, devemos resolver essas equações não lineares simultâneas. Diferentemente do problema restrito de três corpos, não é possível encontrar as soluções triviais nesse sistema de equações não lineares formado por 4.30 e 4.31. Desse modo, utilizaremos o método de *Newton* para encon-

trarmos as soluções. De agora em diante, assumimos novamente que todo movimento está confinado ao plano  $x - y$ .

Figura 4.4 - Pontos de equilíbrio com  $a_{bin} = 0$ .



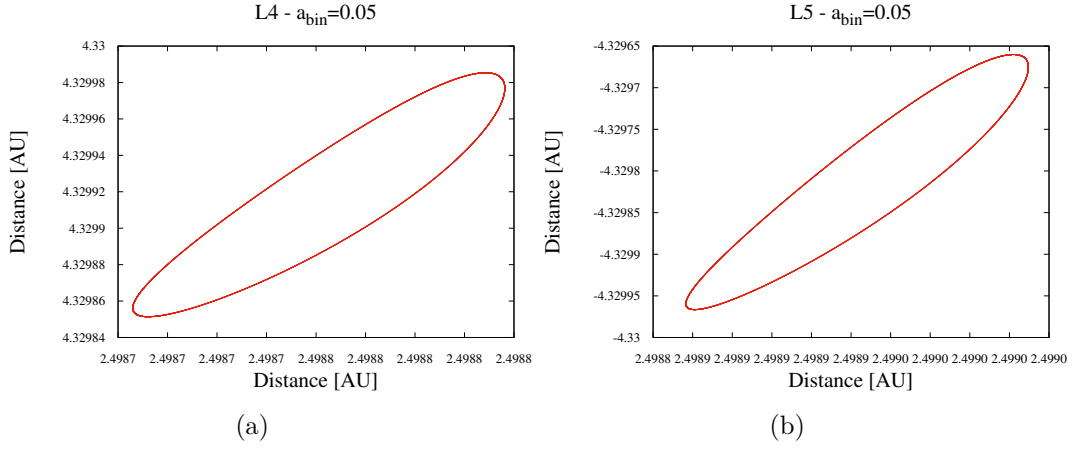
Em vermelho, temos o ponto de equilíbrio em cada subfigura (a) e (b).

Fonte: Produção do autor.

Para localizarmos os pontos, utilizamos um sistema com duas estrelas de mesma massa igual a  $0.5 M_{\odot}$ . O planeta é um tipo Júpiter, ou seja, possui mesma massa de Júpiter e o mesmo semieixo maior ( $\approx 5.0 au$ ). Desse modo, a razão de massa entre a soma das massas das estrelas e do planeta é igual a  $\mu \approx 10^{-3}$ . Como estamos tratando de um problema bicircular restrito de quatro corpos, como enunciado anteriormente, as excentricidades das estrelas e do planeta são iguais a zero e as inclinações dos mesmos também. Como mostrado na seção anterior, mesmo no sistema girante com o planeta fixo, as estrelas continuam se movendo com movimento médio relativo ao do planeta. Com isso, devemos aplicar o método de Newton ao longo de todo período orbital das estrelas, tendo em vista que cada posição distinta das estrelas no sistema girante, promove uma nova localização dos pontos de equilíbrio.

Variamos o semieixo maior das estrelas ( $a_{bin}$ ) para verificarmos o comportamento dos pontos de equilíbrio. Naturalmente, quando aproximamos  $a_{bin}$  para zero, temos um ponto de equilíbrio exatamente na mesma localização do  $L_4$  e  $L_5$  do problema restrito de três corpos, como pode ser visto na Figura 4.4.

Figura 4.5 - Pontos de equilíbrio com  $a_{bin} = 0.05$ .



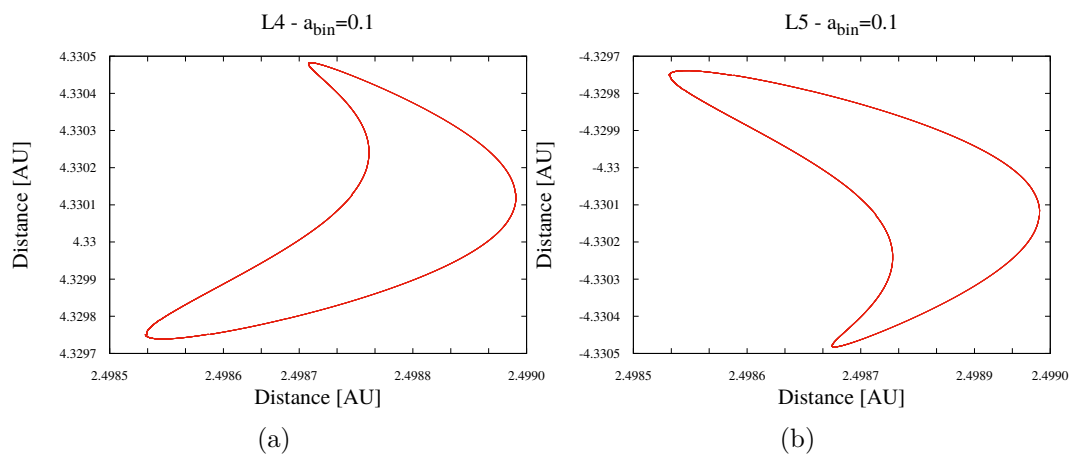
Em vermelho, temos os pontos de equilíbrio em cada passo da integração em cada subfigura (a) e (b).

Fonte: Produção do autor.

A medida que o valor de  $a_{bin}$  aumenta para 0.05, como pode ser visto na Figura 4.5, podemos perceber que para cada instante do período orbital, temos um ponto. A localização desses pontos no plano orbital, formam uma curva contínua. Ao passo que aumentando o valor do semieixo maior, essa curva altera sua forma, como podemos ver na Figura 4.6 em que o valor de  $a_{bin} = 0.1$ , mas ainda mantendo uma curva contínua. Com mais um pequeno aumento no valor de  $a_{bin}$ , como podemos observar na Figura 4.7, a curva deixa de ser contínua. Valores maiores que o caso anterior acentuam ainda mais essa descontinuidade, gerando pontos de equilíbrio espalhados.

Na Figura 4.8 podemos observar um conjunto de curvas onde a velocidade da partícula é igual a zero. Nesse exemplo, a razão de massa entre a somatória das massas das primárias pela massa do planeta é  $\mu = 0.15$  e cada linha vermelha representa um conjunto de posições onde a velocidade é zero referente a um valor da constante de Jacobi, que variou de 20 a 40.

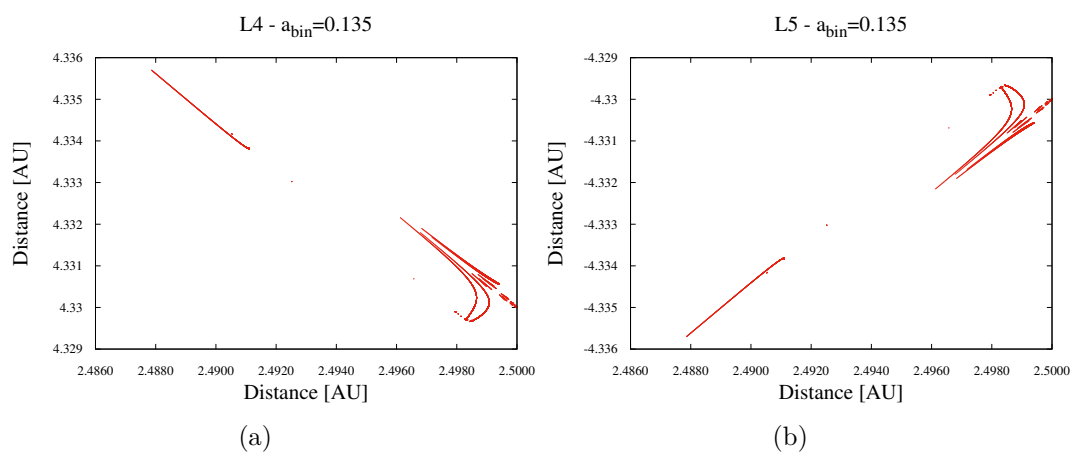
Figura 4.6 - Pontos de equilíbrio com  $a_{bin} = 0.1$



Em vermelho, temos os pontos de equilíbrio em cada passo da integração em cada subfigura (a) e (b).

Fonte: Produção do autor.

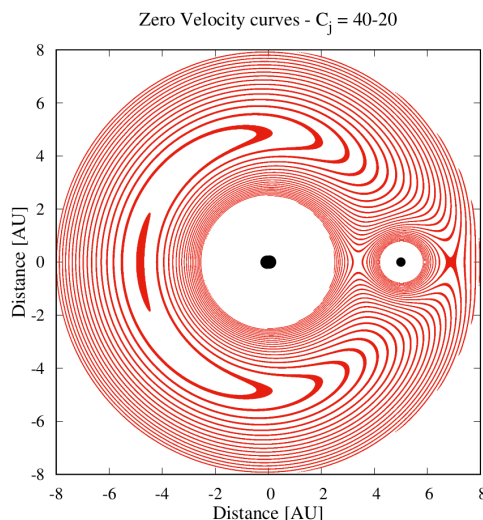
Figura 4.7 - Pontos de equilíbrio com  $a_{bin} = 0.135$ .



Em vermelho, temos os pontos de equilíbrio em cada passo da integração em cada subfigura (a) e (b).

Fonte: Produção do autor.

Figura 4.8 - Curvas de velocidade zero para um sistema com razão de massa entre a soma das massas das primárias pela massa do planeta igual a  $\mu = 0.15$ .



Na figura, cada linha em vermelho está associado a um valor da constante de Jacobi, que variou de 20 a 40.

Fonte: Produção do autor.

#### 4.4 Conclusão

Os resultados obtidos a partir de nossas equações de movimento, nos permitem checar de forma abrangente as localizações dos pontos de equilíbrio. As superfícies de velocidade zero obtidas através da integral de Jacobi, nos mostram que em relação ao problema restrito de três corpos, nosso problema possui diferenças importantes em relação ao problema de três corpos. Em nosso caso, por não se tratar de uma posição estática das estrelas, para checar a posição em que uma partícula pode ou não estar, deve ser levado em conta todo o período orbital das estrelas, pois a região proibida também não é estática.

Também a partir das mesmas equações, podemos notar que existem pontos de equilíbrio em sistemas binários. Porém, esses pontos não são estáticos. Em cada ponto do período orbital das estrelas, um novo ponto de equilíbrio surge. Em três casos, como pode ser visto nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, podemos perceber que esses pontos formam uma curva contínua. Já no caso em que temos semieixo maior igual  $1.35 au$ , que pode ser visto na Figura 4.7, a curva produzida pelos pontos de equilíbrio deixa de ser contínua. Em outras palavras, para essa curva ser fechada, a separação das estrelas possui um limite.



## 5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

No estudo realizado, exploramos existência dos pontos de equilíbrio Lagrangiano, com ênfase nos pontos triangulares  $L_4$  e  $L_5$ , de duas maneiras distintas. Verificamos primeiramente a capacidade de tratar o caso de uma maneira mais simples e computacionalmente menos custosa e em seguida, de forma analítica e numérica, buscamos encontrar as localizações desses pontos através das equações de movimento de uma partícula orbitando um sistema binário.

Na primeira parte do trabalho, utilizamos um modelo que nos permite aproximar o efeito gravitacional de um par de estrelas por apenas uma estrela achatada. Esse achatamento reproduz o efeito gravitacional de uma companheira binária, tendo em vista que o foco de nosso trabalho são sistemas binários próximos, ou seja, em que o período orbital das estrelas seja de poucos dias. Desse modo, calculamos um termo de achatamento  $J_2$  para cada um de nossos casos (esses casos possuem  $a_{bin} = 2, 4, 8$  e  $16$  raios das estrelas) de teste, variando a separação das estrelas. Para validar a capacidade do modelo, distribuímos um disco com mesmas condições iniciais das partículas de teste em um sistema com duas estrelas de mesma massa e em um outro sistema com apenas uma estrela achatada com um certo coeficiente de achatamento que fornece um efeito gravitacional equivalente ao das duas estrelas. Em seguida, encontramos as equações de movimento de uma partícula de massa desprezível em órbita de um sistema binário. Esse sistema também possui um planeta orbitando o centro de massa das estrelas, de modo que sua presença não perturbe o par binário. A partir disso, na primeira parte utilizamos o pacote computacional MERCURY (CHAMBERS, 1999), e simulamos por alguns milhares de anos cada caso e comparamos a evolução dinâmica das partículas e os resultados obtidos em cada um dos casos.

Já na segunda parte do trabalho, encontramos de forma genérica as equações de movimento da partícula e conseqüentemente a integral de Jacobi, que nos possibilitou explorar as superfícies onde o movimento da partícula eram proibidas, além de proporcionar o estudo da variação dessas regiões ao longo do período orbital das estrelas. Ainda nessa etapa, também a partir das equações de movimento, encontramos e investigamos as localizações dos pontos de equilíbrio.

Foi possível verificar na primeira etapa de nosso trabalho, que o modelo que aproxima um par binário para uma estrela achatada é muito mais eficiente no ponto de vista computacional em todos os casos em que realizamos as comparações, principalmente nos casos em que a separação entre as estrelas é menor. Isso ocorre devido ao

curto passo que o integrador numérico utiliza. O passo é calculado a partir do menor período orbital dos corpos da simulação, e como no caso em que a separação das estrelas é de apenas  $a_{bin} = 2$  raios das estrelas, o que fisicamente representaria estrelas encostadas uma na outra, o passo foi extremamente pequeno. Em contrapartida, como o modelo aproximado só utiliza uma estrela, a diferença no custo computacional entre os casos de comparação é substancial, dado que o corpo mais próximo foi o de uma partícula a aproximadamente 5 au. Entretanto, a aproximação possui certas limitações. Quando a separação das estrelas passa de 4 raios, a diferença na evolução dinâmica das partículas e no número de colisões e ejeções se torna muito alto. Ainda assim, o modelo pode ser útil em muitos casos, principalmente em casos que a separação das estrelas é pequena. Pois, o modelo é mais preciso e o ganho computacional é alto.

Na segunda etapa de nosso trabalho, conseguimos encontrar a partir de nossas equações de movimento, os pontos de equilíbrio por meios numéricos. Diferentemente dos pontos de equilíbrio encontrados no problema restrito de três corpos, temos um ponto de equilíbrio para cada instante do período orbital das estrelas. As posições desses pontos formam curvas no plano orbital. Estas curvas são contínuas até certos valores do semieixo maior das estrelas, quando esse valor é ultrapassado, essa continuidade se quebra (ver Figura 4.7). Apesar da existência desses pontos, não sabemos a capacidade de corpos massivos permanecerem estáveis nessas regiões.

Em trabalhos futuros, pretendemos estudar mais a fundo as soluções das equações de movimento da partícula. Nessa análise, é importante verificar a estabilidade dessas regiões e qual sua relação com a massa da partícula. Um fator importante, seria inserir a perturbação causada pelo planeta no movimento das primárias e como isso modificaria as configurações dos pontos de equilíbrio encontrados. Com isso, poderemos de forma mais concreta, verificar a possibilidade de um sistema binário possuir um planeta troiano.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMARANTE, A.; HAMILTON, D. Stability of coorbital objects around the pluto-charon binary. In: ANNUAL DPS MEETING. **Proceedings...** [S.l.], 2015. p. 47. [27](#)
- ANGEL, J. R. P.; WOOLF, N. J. Searching for life on other planets. **Scientific American**, v. 274, n. 4, p. 60–66, 1996. [1](#)
- BARBOSA, G. O.; WINTER, O. C.; AMARANTE, A.; IZIDORO, A.; DOMINGOS, R. d. C. Earth-size formation in the habitable zone of binary stars systems. *In preparation*, 2019. [2](#), [3](#)
- BORUCKI, W. J. et al. Kepler planet-detection mission: introduction and first results. **Science**, v. 327, n. 5968, p. 977–980, 2010. [1](#)
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. **Methods of celestial mechanics**. [S.l.]: New York: Academic Press, 1961. 257–260 p. [23](#)
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 304, n. 4, p. 793–799, 1999. [27](#), [29](#), [55](#)
- CLELAND, C. E.; CHYBA, C. F. Defining "life". **Origins of Life and Evolution of the Biosphere**, v. 32, n. 4, p. 387–393, 2002. [1](#)
- DERMOTT, S. F.; MURRAY, C. D. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits: I. theory. **Icarus**, v. 48, n. 1, p. 1–11, 1981. [29](#)
- DICK, S. J. **Life on other worlds: the 20th-century extraterrestrial life debate**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. [1](#)
- DOYLE, L. R. et al. Kepler-16: a transiting circumbinary planet. **Science**, v. 333, n. 6049, p. 1602–1606, 2011. [2](#), [6](#)
- DVORAK, R.; PILAT-LOHINGER, E.; SCHWARZ, R.; FREISTETTER, F. Extrasolar trojan planets close to habitable zones. **Astronomy & Astrophysics**, v. 426, n. 2, p. L37–L40, 2004. [3](#)
- HAGHIGHIPOUR, N.; KALTENEGGER, L. Calculating the habitable zone of binary star systems. ii. p-type binaries. **The Astrophysical Journal**, v. 777, n. 2, p. 166, 2013. [1](#), [3](#)

- HAGHIGHIPOUR, N.; RAYMOND, S. N. Habitable planet formation in binary planetary systems. **The Astrophysical Journal**, v. 666, n. 1, p. 436, 2007. 1
- HART, M. H. The evolution of the atmosphere of the Earth. **Icarus**, v. 33, n. 1, p. 23–39, 1978. 2
- HILDITCH, R. W. **An introduction to close binary stars**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. 9
- HOWELL, S. B. et al. The k2 mission: characterization and early results. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 126, n. 938, p. 398, 2014. 1
- HUANG, S.-S. Occurrence of life in the universe. **American Scientist**, v. 47, n. 3, p. 397–402, 1959. 2
- ISENBARGER, T. A.; CARR, C. E.; JOHNSON, S. S.; FINNEY, M.; CHURCH, G. M.; GILBERT, W.; ZUBER, M. T.; RUVKUN, G. The most conserved genome segments for life detection on earth and other planets. **Origins of Life and Evolution of Biospheres**, v. 38, n. 6, p. 517–533, 2008. 1
- JACOBI, C. De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. **Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik**, v. 15, p. 101–124, 1836. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/146954>>. 18
- JAKOSKY, B. **The search for life on other planets**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. 1
- JIANG, Y.-F.; TREMAINE, S. The evolution of wide binary stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 401, n. 2, p. 977–994, 2010. 9
- KALTENEGGER, L.; HAGHIGHIPOUR, N. Calculating the habitable zone of binary star systems. i. s-type binaries. **The Astrophysical Journal**, v. 777, n. 2, p. 165, 2013. 1
- KALTENEGGER, L.; SASSELOV, D. Exploring the habitable zone for Kepler planetary candidates. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 736, n. 2, p. L25, 2011. 2
- KASTING, J. F.; WHITMIRE, D. P.; REYNOLDS, R. T. Habitable zones around main sequence stars. **Icarus**, v. 101, n. 1, p. 108–128, 1993. 2

- KAULA, W. M. **An introduction to planetary physics-The terrestrial planets**. [S.l.]: New York: Wiley, 1968. 27
- KOPPARAPU, R. K.; RAMIREZ, R.; KASTING, J. F.; EYMET, V.; ROBINSON, T. D.; MAHADEVAN, S.; TERRIEN, R. C.; DOMAGAL-GOLDMAN, S.; MEADOWS, V.; DESHPANDE, R. Habitable zones around main-sequence stars: new estimates. **The Astrophysical Journal**, v. 765, n. 2, p. 131, 2013. 2
- KOPPARAPU, R. K.; RAMIREZ, R. M.; SCHOTTELKOTTE, J.; KASTING, J. F.; DOMAGAL-GOLDMAN, S.; EYMET, V. Habitable zones around main-sequence stars: dependence on planetary mass. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 787, n. 2, p. L29, 2014. 2
- KOSTOV, V. B. et al. Kepler-413b: a slightly misaligned, neptune-size transiting circumbinary planet. **The Astrophysical Journal**, v. 784, n. 1, p. 14, 2014. 6
- \_\_\_\_\_. Kepler-1647b: the largest and longest-period kepler transiting circumbinary planet. **The Astrophysical Journal**, v. 827, n. 1, p. 86, 2016. xiii, 2, 3, 4, 6
- LAUGHLIN, G.; CHAMBERS, J. E. Extrasolar trojans: the viability and detectability of planets in the 1: 1 resonance. **The Astronomical Journal**, v. 124, n. 1, p. 592, 2002. 3
- LÉGER, A.; MARIOTTI, J.-M.; MENNESSON, B.; OLLIVIER, M.; PUGET, J.; ROUAN, D.; SCHNEIDER, J. Could we search for primitive life on extrasolar planets in the near future? **Icarus**, v. 123, n. 2, p. 249–255, 1996. 1
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. 11, 24, 47
- NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA). **Exoplanet exploration - planets beyond our solar systems**. 2019. 1
- NAUENBERG, M. Stability and eccentricity for two planets in a 1: 1 resonance, and their possible occurrence in extrasolar planetary systems. **The Astronomical Journal**, v. 124, n. 4, p. 2332, 2002. 3
- NELEMANS, G. Am cvn stars. **arXiv preprint astro-ph/0409676**, 2004. 27
- NICHOLSON, S. B. The trojan asteroids. **Leaflet of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 8, p. 239, 1961. 26

- OROSZ, J. A. et al. The neptune-sized circumbinary planet kepler-38b. **The Astrophysical Journal**, v. 758, n. 2, p. 87, 2012. 6
- QUINTANA, E. V.; ADAMS, F. C.; LISSAUER, J. J.; CHAMBERS, J. E. Terrestrial planet formation around individual stars within binary star systems. **The Astrophysical Journal**, v. 660, n. 1, p. 807, 2007. 1
- QUINTANA, E. V.; LISSAUER, J. J. Terrestrial planet formation in binary star systems. In: HAGHIGHIPOUR, N. (Ed.). **Planets in binary star systems**. [S.l.: s.n.]. 1
- \_\_\_\_\_. Terrestrial planet formation surrounding close binary stars. **Icarus**, v. 185, n. 1, p. 1–20, 2006. 1
- RAGHAVAN, D.; MCALISTER, H. A.; HENRY, T. J.; LATHAM, D. W.; MARCY, G. W.; MASON, B. D.; GIES, D. R.; WHITE, R. J.; THEO, A. A survey of stellar families: multiplicity of solar-type stars. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 190, n. 1, p. 1, 2010. 1
- SCHWARZ, R.; DVORAK, R.; SÜLI, Á.; ÉRDI, B. Survey of the stability region of hypothetical habitable trojan planets. **Astronomy & Astrophysics**, v. 474, n. 3, p. 1023–1029, 2007. 3
- SCHWARZ, R.; SÁ $\frac{1}{4}$ LI, Á.; DVORAK, R. Dynamics of possible trojan planets in binary systems. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 398, n. 4, p. 2085–2090, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15248.x>. 3
- SELSIS, F.; KASTING, J.; LEVRARD, B.; PAILLET, J.; RIBAS, I.; DELFOSSE, X. Habitable planets around the star gliese 581? **Astronomy & Astrophysics**, v. 476, n. 3, p. 1373–1387, 2007. 2
- SZEBEHELY, V.; PETERS, C. F. Complete solution of a general problem of three bodies. **The Astronomical Journal**, v. 72, p. 876, 1967. 25
- UNDERWOOD, D. R.; JONES, B. W.; SLEEP, P. N. The evolution of habitable zones during stellar lifetimes and its implications on the search for extraterrestrial life. **International Journal of Astrobiology**, v. 2, n. 4, p. 289–299, 2003. 2
- WÄNKE, H.; DREIBUS, G. Chemical composition and accretion history of terrestrial planets. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 325, n. 1587, p. 545–557, 1988. 1

WARNER, B. The *am canum venaticorum* stars. **Astrophysics and Space Science**, v. 225, n. 2, p. 249–270, Mar 1995. ISSN 1572-946X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00613240>>. 27

WEIDENSCHILLING, S. J. Formation of planetesimals and accretion of the terrestrial planets. **Space Science Reviews**, v. 92, n. 1-2, p. 295–310, 2000. 1

WELSH, W. F. et al. Transiting circumbinary planets kepler-34 b and kepler-35 b. **Nature**, v. 481, n. 7382, p. 475, 2012. 6

\_\_\_\_\_. Kepler 453 b the 10th kepler transiting circumbinary planet. **The Astrophysical Journal**, v. 809, n. 1, p. 26, 2015. 6

WETHERILL, G. W. Formation of the terrestrial planets. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 18, n. 1, p. 77–113, 1980. 1

WYATT, M. C. Evolution of debris disks. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 46, p. 339–383, 2008. 2