

## **TRAJETÓRIAS DE BAIXO EMPUXO PARA ESCAPE DA SUPERFÍCIE DA TERRA**

Relatório final PIBIC

Bolsista: Victor Bitencourt Vaz  
e-mail: victorbvaz@gmail.com

Orientador: Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado  
e-mail: prado@dem.inpe.br

## Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	4
2	OBJETIVO.....	6
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	7
3.1	Modelo de Propulsão L.T. ....	7
3.2	Efeito Kozai .....	12
3.3	Potencial Gravitacional.....	13
3.3.1	Introdução .....	13
3.3.2	Expressão para o potencial gravitacional.....	14
3.3.3	Harmônicos Esféricos .....	17
4	Conclusão.....	21
5	Referências e material de pesquisa.....	22

Figura 1 - Transição de órbitas (Fonte: web).....	7
Figura 1 - Transição de órbitas (Fonte: web).....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
Figura 2 – Elementos orbitais (Fonte: Web).....	12
Figura 3 – Potencial gravitacional num ponto P, devido à ação da massa $dM$ (Fonte: Kuga et al. 2000) .....	14
Figura 4 - Coordenadas esféricas (Fonte: Kuga et al. 2000).....	14
Figura 5 - Polinômios de Legendre de ordem ímpar (Fonte: Kuga et al. 2000) .....	19
Figura 6 - Polinômios de Legendre de ordem par (Fonte: Kuga et al. 2000) .....	19
Figura 7 - Polinômios associados de Legendre (Fonte: Kuga et al. 2000) .....	20

## 1 INTRODUÇÃO

A exploração espacial vem se tornando muito mais presente com o passar dos anos, e cada vez mais temos agências espaciais de diversos países e até mesmo empresas privadas buscando montar seus próprios projetos rumo ao espaço. Missões de pesquisa, mineração espacial, etc, são muitas são as motivações que geram esse movimento.

Devido a esse interesse cada vez maior em deixar nosso planeta começamos a nos deparar com alguns problemas. Realizar uma missão espacial demanda tempo de planejamento, trabalho, pesquisa e, principalmente, muitos recursos, tanto materiais como humanos. Estudar outros corpos celestes traz um grande ganho científico, além de desenvolvimentos tecnológicos que possuem aplicações em muitas outras áreas. Uma tarefa muito importante é estudar o problema de manobras orbitais. Uma manobra orbital tem por objetivo alterar a órbita de um veículo espacial. Elas podem ser divididas em manobras de correção orbital, aonde as amplitudes são pequenas e visam apenas corrigir pequenos desvios devidos a forças não modeladas na dinâmica; e transferências orbitais, onde pretende-se fazer maiores deslocamentos do veículo espacial, como levar um veículo espacial de um corpo celeste para outro. Do ponto de vista do sistema de propulsão a ser utilizado, podemos dividir o problema em manobras impulsivas e contínuas. As manobras impulsivas assumem a existência de um motor de alto empuxo que aplica uma variação de velocidade no veículo espacial que pode ser assumida como instantânea. Sendo assim pode-se modelar o movimento como uma sucessão de órbitas Keplerianas. No caso de manobras contínuas, é assumido que um propulsor aplica essa força ao longo de um ou mais arcos da órbita do veículo espacial. Esse tipo de propulsor utiliza menos combustível, mas leva mais tempo para completar a tarefa. Existe também uma maior complexidade de modelagem, pois esses arcos de propulsão não podem ser representados por órbitas Keplerianas. Esse trabalho estuda justamente essa segunda opção, buscando órbitas de baixo empuxo entre a Terra e a Lua que possam gastar o mínimo de combustível possível. Uma segunda etapa será estudar órbitas em torno da Lua, adicionando ao termo Kepleriano da Lua os harmônicos do seu

potencial gravitacional. Esse modelo gravitacional pode reduzir ou eliminar o Efeito Kozai, que age de forma a perturbar o movimento da espaçonave em determinadas regiões próximas das órbitas polares. Nosso objetivo será entender e essas interações entre os harmônicos do potencial lunar com o efeito Kozai, buscando órbita que tenham maiores durações. Essas órbitas possuem um menor consumo de combustível para manutenção orbital, minimizando assim o custo total da missão.

## 2 OBJETIVO

Esse trabalho dá sequência aos estudos realizados no ano de 2018 se aproveitando das técnicas e conhecimentos obtidos para realizar algumas aplicações no que tange às manobras espaciais utilizando o método de propulsão de baixo empuxo, que, como vimos anteriormente, é capaz de otimizar o uso de combustível e baratear o custo das missões. O estudo será dividido nas seguintes etapas:

- Para formular nosso problema será feita uma breve análise do método de propulsão de baixo empuxo (L.T.) com o intuito de utilizar um procedimento analítico para encontrar um valor que seja otimizado para a economia de combustível.

- Apresentar e entender o Efeito Lidov-Kozai, que será fundamental para nossas simulações uma vez que queremos analisar sua interação com os harmônicos gravitacionais.

- Estudar determinados tipos de órbitas afim de determinar como as variações em sua inclinação modificam a trajetória do corpo.

- Determinar o potencial gravitacional lunar e seus harmônicos, tanto de termos menores quanto de termos mais elevados, para descobrir de que maneira cada termo, em um modelo mais completo, interage com o Efeito Lidov-Kozai.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo será detalhada cada uma das etapas mencionadas anteriormente. Tal como o intuito por trás de cada uma delas e os métodos utilizados.

#### 3.1 Modelo de Propulsão L.T.

Nessa etapa será feita uma análise do modelo de propulsão elétrica de baixo empuxo, que consiste em nada mais que um método capaz de minimizar o gasto do combustível de uma missão espacial.

Assumindo uma transferência de espaçonave utilizando o modelo descrito anteriormente entre duas orbitas dadas em um determinado tempo, o modelo do problema de dois corpos e um empuxo de energia limitada.

A equação do movimento com baixo empuxo é

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) + \vec{g}$$

Enquanto a potência para esse caso é

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\alpha^2}{W_e} dt$$

O problema é encontrar o vetor de empuxo de uma espaçonave entre duas orbitas dadas pelos elementos orbitais das orbitas final e inicial, em um determinado tempo T e minimizar o gasto de combustível.

Valores de contorno:

Assumindo o

vetor  $y_0$  dado

vetor  $y_f$  não dado.

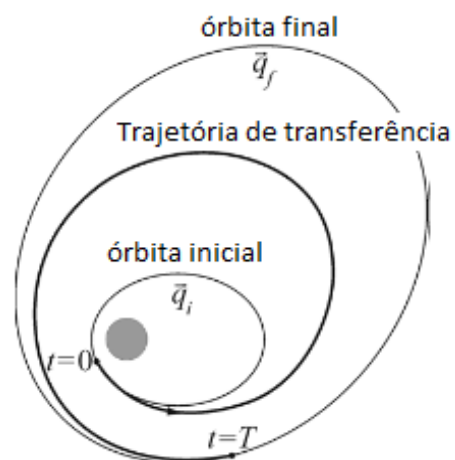


Figura 1 - Transição de órbitas (Fonte: web)

Assumindo uma distância pequena entre orbitas inicial e final e definindo o vetor

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{y}_i(t)$$

A equação do movimento linearizada é

$$\dot{\vec{\xi}} = F\vec{\xi} + \vec{g}$$

onde a matriz F é calculada na órbita inicial. A solução da equação anterior é dada pela fórmula de Cauchy

$$\vec{\xi} = \int_0^t \Phi(t, \tau) \vec{g} d\tau$$

Onde  $\Phi(t, \tau)$  é a matriz de transição de estado.

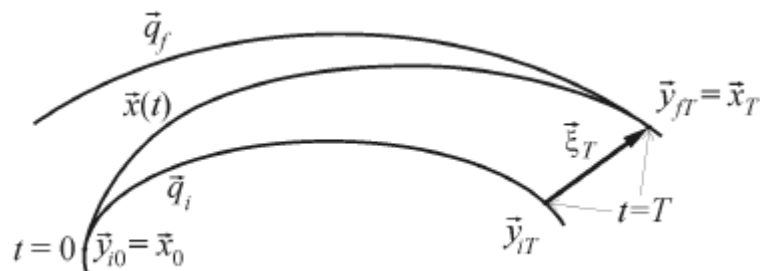
A equação linearizada do movimento não é independente, pois a matriz F é uma função do tempo. Então a Hamiltoniana do problema linearizado é:

$$H = -\frac{\alpha^2}{2W_e} + \vec{p}^T F \vec{\xi} + \vec{p}_v^T \vec{\alpha} + p_t$$

Onde

$$\vec{p} = \{\vec{p}_r, \vec{p}_v\}$$

Agora utilizando a variável associada  $P_t$  na equação  $t = 1$ , fazendo assim o sistema independente no tempo.



A otimização do vetor de empuxo é dada pelo valor máximo da Hamiltoniana é

$$\vec{\alpha} = W_e \vec{p}_v$$



O vetor  $p$  satisfaz a equação variacional

$$\dot{\bar{p}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -\bar{p}^T F$$

A matriz constante de transição é dada pelas equações das matrizes é a solução geral para a equação anterior. Então

$$\bar{p} = \Psi^T \bar{\beta}$$

onde  $\beta$  é um vetor constante de 6 dimensões. O vetor  $\bar{p}_v$  pode ser representado como

$$\bar{p}_v = \Psi_v^T \bar{\beta}$$

Utilizando as equações anteriores e as propriedades das matrizes  $\Phi$ ,  $\Psi$ , a equação

$$\bar{\xi} = \int_0^t \Phi(t, \tau) \bar{g} d\tau$$

Se torna

$$\bar{\xi} = \Phi S \bar{\beta}$$

Onde

$$S = S(0, t) = \int_0^t W_e \Psi_v \Psi_v^T d\tau, \quad S_T = S(0, T)$$

Graças as equações apresentadas anteriormente serem capazes de encontrar o vetor empuxo otimizado  $e$  e o vetor de estado da trajetória de transferência devemos encontrar o vetor  $\bar{\beta}$ .

Desde que o vetor de estado final não é dado a condição transversal é

$$\bar{p}_T = \bar{p}(T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{q}_{fT}}{\partial \bar{y}_{fT}} \end{pmatrix}^T \bar{\sigma}$$

Onde  $\sigma$  é qualquer vetor constante de 5 dimensões. Já que estamos admitindo órbitas muito próximas podemos tomar sua razão como sendo numericamente igual a U, onde temos

$$U = U(t) = \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{y}_i}$$

E a equação de  $P_T$  se torna

$$\bar{p}_T \approx U_T^T \bar{\sigma}, \quad U_T = U(T) = \frac{\partial \bar{q}_{iT}}{\partial \bar{y}_{iT}}$$

Definindo agora o vetor

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}(t) &= \bar{q}_f(t) - \bar{q}_i(t), \\ \Delta \bar{q}_T &= \Delta \bar{q}(T) \approx U_T \bar{\xi}_T, \quad \bar{\xi}_T = \bar{\xi}(T) = \bar{y}_{fT} - \bar{y}_{iT} \end{aligned}$$

Temos também que

$$\Delta \bar{q}_T = \frac{\partial \bar{q}_{iT}}{\partial \bar{q}_{i0}} \Delta \bar{q}_0, \quad \Delta \bar{q}_0 = \Delta \bar{q}(0)$$

Utilizando as equações anteriores chegamos a seguinte relação

$$\Delta \bar{q}_0 = U_0 S_T \bar{\beta}$$

Onde

$$U_0 = U(0) = \frac{\partial \bar{q}_{i0}}{\partial \bar{y}_{i0}}$$

Para  $t = T$  a equação de  $U_T$  nos leva a

$$\Psi_T^T \bar{\beta} = U_T^T \bar{\sigma}$$

Onde  $\Psi_T = \Psi(T, 0)$ . Da equação anterior obtemos a seguinte relação para  $\bar{\beta}$ .

$$\bar{\beta} = \Phi_T^T U_T^T \bar{\sigma}$$

Substituindo temos

$$\Delta \bar{q}_0 = U_0 S_T (U_T \Phi_T)^T \bar{\sigma} = U_0 S_T U_0^T Q^T \bar{\sigma}$$

Da equação anterior finalmente obtemos os valores desejados

$$\bar{\beta} = U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

Onde

$$V = U_0 S_T U_0^T$$

É uma matriz de quinta ordem

Então as equações dão

$$\bar{\alpha} = W_e \Psi_v^T U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

$$\bar{x} = \bar{y}_i + \Phi S U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

De acordo com a equação

$$\bar{x}_0 = \bar{y}_{i0}, \quad \bar{x}_T = \bar{y}_{fT}$$

O vetor de estado de inserção na órbita final pode ser achado da seguinte maneira

$$\bar{y}_{fT} = \bar{y}_{iT} + \Phi_T S_T U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

Agora utilizando a equação do empuxo chegamos ao seguinte resultado

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T W_e \Delta \bar{q}_0^T V^{-1} U_0 \Psi_v \Psi_v^T U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0 dt$$

$$J = \frac{1}{2} \Delta \bar{q}_0^T V^{-1} U_0 S U_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

$$J = \frac{1}{2} \Delta \bar{q}_0^T V^{-1} \Delta \bar{q}_0$$

### 3.2 Efeito Kozai

Aqui cabe uma introdução ao Efeito Kozai, que, mais adiante será objeto de estudo no movimento de uma espaçonave em torno da Lua. Na mecânica celeste, esse efeito é um fenômeno da dinâmica que afeta a trajetória da órbita de um sistema binário perturbado por um terceiro corpo distante sobre certas condições.

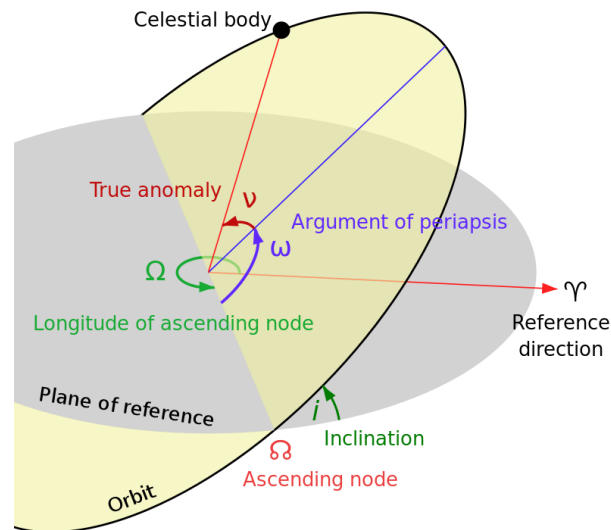


Figura 2 – Elementos orbitais (Fonte: Web)

Esse efeito faz com que o argumento do pericentro oscile entre um valor constante, o que leva a uma troca periódica entre a excentricidade e a inclinação. O processo ocorre em escalas de tempo muito maiores do que o período orbital. Ele é capaz de transformar uma órbita quase circular de forma que altera sua excentricidade e também consegue transformar uma órbita com uma inclinação inicialmente moderada em um movimento prógrado ou retrógrado.

### 3.3 Potencial Gravitacional

#### 3.3.1 Introdução

Antes de adicionar perturbações ao sistema Lua – espaçonave iremos em primeiro lugar formular a teoria do potencial gravitacional, para, em seguida introduzir o conceito de harmônicos esféricos. A passagem a seguir trata de um potencial genérico, que pode posteriormente ser adaptado ao caso lunar.

Sabemos que a teoria da Gravitação Universal de Newton é válida para corpos cuja massa seja concentrada em seu centro de massa, segundo ela, sabemos que um corpo pontual de massa  $m$  é atraído por uma massa  $M$  com uma força dada por:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional universal,  $r$  é a distância entre as duas massas  $m$  e  $M$ . Essa força atua na direção do raio vetor unitário  $\hat{r}$  e age de maneira a unir os dois corpos.

O potencial criado pela massa  $M$  é dado por:

$$U = \frac{GM}{r}$$

Agora, generalizando para qualquer distribuição de massa não uniforme, devemos considerar a atração de cada elemento de massa  $dM$  exerce sobre a massa de prova.

$$U = G \int \frac{dM}{r}$$

Onde a integral deve ser realizada sobre todo volume do corpo de massa  $M$ , e utilizando  $r$  como a distância do ponto  $P$  ao elemento de massa  $dM$ . E sendo  $r$ :

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

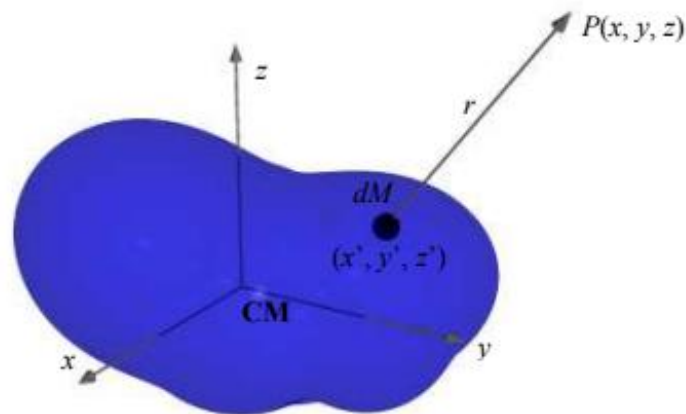


Figura 3 – Potencial gravitacional num ponto P, devido à ação da massa  $dM$  (Fonte: Kuga et al. 2000)

### 3.3.2 Expressão para o potencial gravitacional

Como queremos estudar o potencial gravitacional da Lua, é necessário estudar o potencial gravitacional entre dois corpos não esféricos e com distribuição de massa heterogênea. O objetivo é chegar, trabalhando com o sistema de coordenadas esféricas, à formula do potencial gravitacional.

Considerando agora dois pontos  $P$  e  $P'$  dados em coordenadas esféricas  $P(r, \theta, \lambda)$  e  $P_0(r_0, \theta_0, \lambda_0)$  como vemos na figura 3, onde  $r'$  é a distância,  $\theta$  a latitude e  $\lambda$  a longitude. O ângulo  $\Psi$  entre os vetores  $P$  e  $P'$  pode ser obtido diretamente pelo produto escalar entre os dois vetores:

$$\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda')$$

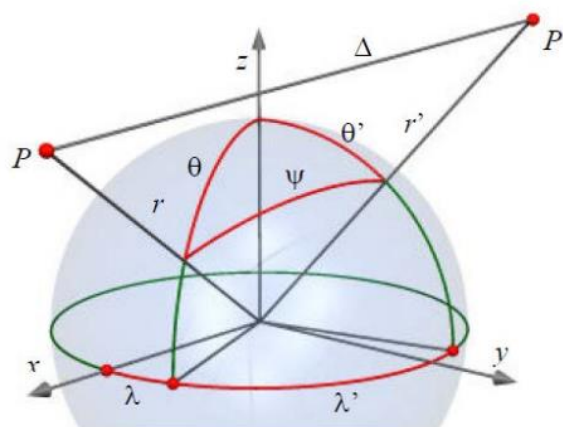


Figura 4 - Coordenadas esféricas (Fonte: Kuga et al. 2000)

A distância  $\Delta$  é dada por:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros e invertendo  $\Delta$ , obtemos:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \Psi + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

Trabalhando com  $\frac{1}{\Delta}$  em uma série de potência em relação a  $\frac{r'}{r}$ , teremos:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left\{ P_0(\cos \Psi) + \frac{r'}{r} P_1(\cos \Psi) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos \Psi) + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Psi)$$

Onde  $P_n(\cos \Psi)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ , são os polinômios de Legendre. Ao substituímos esta expressão no potencial de elemento de massa  $dM$  obtém-se:

$$U_{dM} = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \Psi)$$

O teorema da adição de Legendre nos diz que:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda')$$

onde  $\delta_{m0}$  é a função delta de Kronecker e  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre. Utilizando a relação com os ângulos complementares  $\varphi$  e  $\varphi_0$  de  $\theta$  e  $\theta_0$ , podemos escrever:

$$U_{dM} = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) P_{nm}(\sin \phi') \cos m(\lambda - \lambda')$$

$$U_{dM} = f(r, \phi, \lambda, r', \phi', \lambda')$$

No caso da Lua, além de não ser um corpo completamente esférico, ainda apresenta enormes concentrações de massa em determinados pontos, tais concentrações tornam sua distribuição muito heterogênea. Sendo assim, só é possível obter seu potencial através de aproximações, que por sua vez são feitas com a utilização de séries. Agora integrando o potencial do diferencial de massa obtemos uma expressão em coordenadas esféricas envolvendo série de potência e os polinômios de Legendre.

$$U = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi)$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0}) (n-m)!}{a_e^n M (n+m)!} \int_M r'^m P_{nm}(\sin \phi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dM$$

Com  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  sendo os coeficientes harmônicos esféricos e  $P_{nm}(\sin \varphi)$  sendo os polinômios associados de Legendre. Aqui vale observar que em um espaço retilíneo a série de Fourier apresenta uma representação melhor, já em uma superfície esférica uma série de harmônicos esféricos oferece uma melhor representação.



### 3.3.3 Harmônicos Esféricos

O potencial gravitacional obedece à equação de Laplace,  $\nabla^2 U = 0$ , que representada em coordenadas esféricas é:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0$$

Utilizando  $U(r, \theta, \lambda) = R(r)Y(\theta, \lambda)$ . Podemos separar a equação diferencial em duas:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0$$

Onde  $(n+1)$  é a constante de separação. A solução em  $R$  leva a:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$$

$A = 0$  representa a função do potencial fora do corpo, enquanto  $B = 0$  representa o potencial dentro do corpo. Calculando o potencial na superfície do corpo, será dado pelo próprio valor  $Y$ , então temos  $A = 0$  e  $B = a_e^{n+1}$ . Assim, a função  $R$  fica:

$$R(r) = \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1}$$

Admite-se que  $Y(\theta, \lambda)$  também possa ter separação de variáveis, na forma:

$$Y(\theta, \lambda) = P(\cos \theta)\Lambda(\lambda)$$

Escolhendo uma constante de separação  $m^2$  e substituindo  $Y$  na equação diferencial, chega-se a:

$$\frac{d^2 P}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0$$

$$\frac{d^2 A}{d\lambda^2} + m^2 A = 0$$

Supondo a seguinte solução para a série de funções temos:

$$A(\lambda) = C \cos m\lambda + S \sin m\lambda$$

A partir da análise dessa solução,  $m$  deve ser inteiro, utilizando  $x = \cos \theta$ , a primeira equação fica:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

A partir da equação anterior os Polinômios de Legendre são obtidos para o caso da solução  $m = 0$ , dados pela fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Para  $m \neq 0$  a solução torna-se uma Função Associada de Legendre de ordem  $n$  e grau  $m$ , dada por:

$$P_{nm}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n$$

Relacionando as Funções Associadas com os Polinômios de Legendre obtemos:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

Ilustrações e gráficos do desenvolvimento dos harmônicos esféricos podem ser observados em Kuga e Carrara (2000). Podemos notar que a equação do potencial gravitacional é capaz de descrevê-lo a partir dos coeficientes

harmônicos esféricos, onde notamos que os termos dependem de  $n$  e  $m$ . Quanto maior for a expansão dos termos de ordem  $n$  e  $m$ , maior será a quantidade de termos a serem considerados e, se confiáveis, maior será a precisão que alcançaremos. Os termos  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são coeficientes harmônicos esféricos, que são obtidos através de medições espaciais e quanto mais deles houver maior é a precisão do modelo.

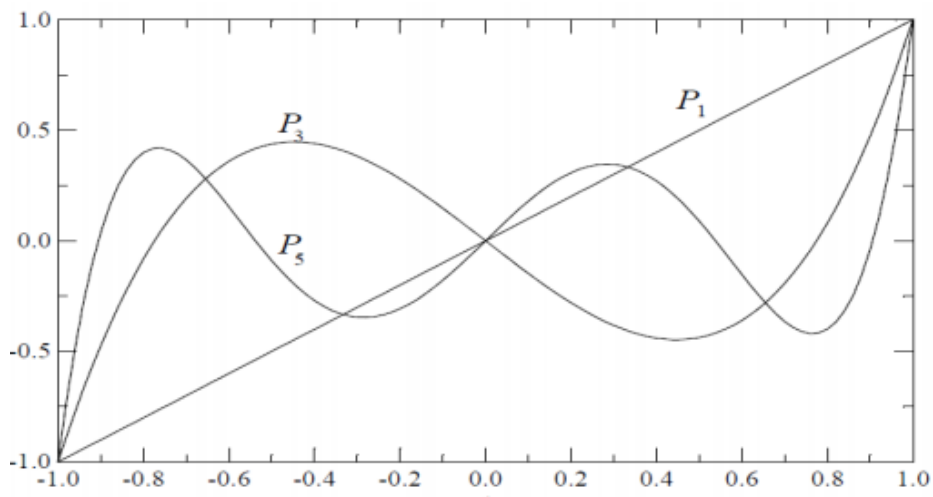


Figura 5 - Polinômios de Legendre de ordem ímpar (Fonte: Kuga et al. 2000)

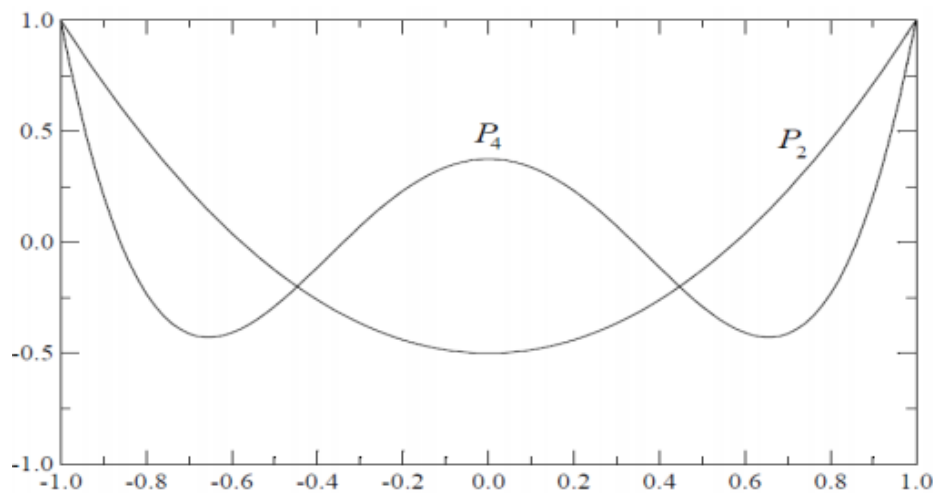


Figura 6 - Polinômios de Legendre de ordem par (Fonte: Kuga et al. 2000)

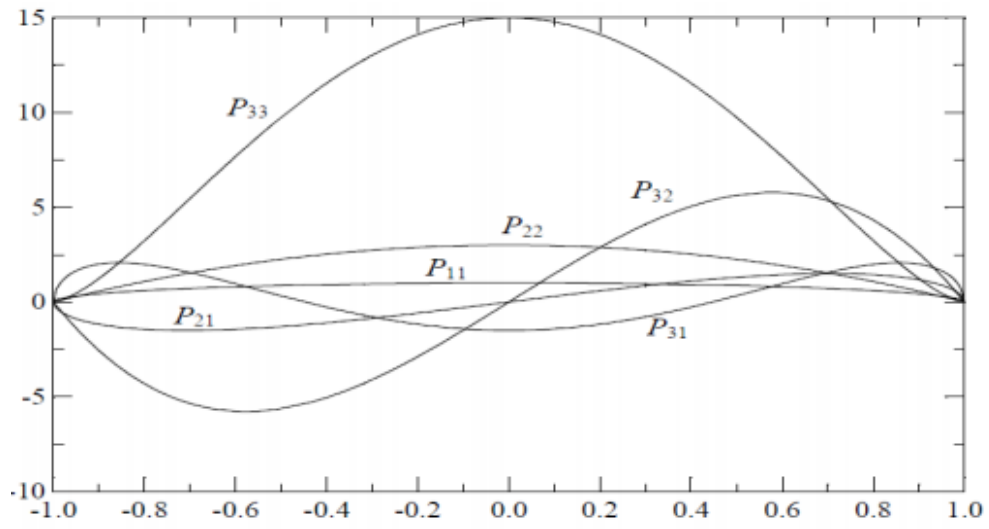


Figura 7 - Polinômios associados de Legendre (Fonte: Kuga et al. 2000)

## **4 CONCLUSÃO**

Esse relatório apresentou as atividades desenvolvidas, no período de 01 de agosto de 2018 a 23 de julho de 2019, relacionadas ao projeto “Trajetórias De Baixo Empuxo Para Escape Da Superfície Da Terra”. No período a que se refere esse relatório, pode-se concluir que, apesar de ter grande parte das atividades realizadas, não foi possível completar o projeto dentro desse período pois programação das equações de movimento está atrasada, atualmente a pesquisa encontra-se em andamento.

## 5 REFERÊNCIAS E MATERIAL DE PESQUISA

- 1- ANTÔNIO F. B. A. PRADO **Minimum Fuel Trajectories for the Lunar Polar Orbiter**
- 2- BARBOSA, G.; SUKHANOV, A.; ANTÔNIO F. B. A. PRADO, OTHON C. WINTER, MARTINS J., ELBERT M.; **Estimation of the Radiation Hazard to a Spacecraft Passing the Van Allen Belts in a Low Thrust Transferer**
- 3- ANTÔNIO D. C. J.; **CURSO DE DINÂMICA ORBITAL E CONTROLE – TEORIA DO POTENCIAL**
- 4- APOSTILA CAPÍTULO 5.; **GRAVITATIONAL FIELDS AND POTENTIAL**
- 5- CARL D. MURRAY, STANLEY F. DERMOTT; **SOLAR SYSTEM DYNAMICS**
- 6- KONOPLIV, A. S.; ASMAR, S. W.; CARRANZA, E.; SJOGREN, W. L.; YUAN, D. N. **Recent Gravity Models as a Result Of The Lunar Prospector Mission**. Icarus, vol. 150, p. 1-18, 2001.
- 7- KUGA, H.K.; RAO, K.R.; CARRARA, V. **Satélites Artificiais Movimento Orbital**. INPE. Março de 2000.
- 8- RAMANAN, R.V.; ADIMURTHY, V. **An Analysis of near Circular Lunar Mapping Orbits** Journal of Earth System Science, Vol. 114, No. 6, 2005, pp. 619-626.
- 9- CARVALHO, Rafael Cunha de **Potencial gravitacional lunar – Guaratinguetá**, 2015.
- 10- **Os mascons ou anomalias gravitacionais da Lua** – Disponível em <http://www.astronoo.com/pt/artigos/lua-mascons.html> – Acesso em 13 de julho de 2019.