1. Publicação nº *INPE-2720-PRE/306*	2. Versão	3. Data *Abril, 1983*	5. Distribuição ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DIN/DPD*	Programa *DENUME/INFORMÁTICA*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

INTERPOLAÇÃO
APROXIMAÇÃO

7. C.D.U.: *519.65*

8. Título *INPE-2720-PRE/306*

UMA FORMA PARA O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE LAGRANGE

10. Páginas: *13*

11. Última página: *A.2*

12. Revisada por

Luiz Alberto Vieira Dias

9. Autoria *Orion de Oliveira Silva*
Heber Martin dos Santos Dias

Assinatura responsável Orion de Oliveira Silva

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

O objetivo deste trabalho é encontrar uma fórmula fechada para o cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador de Lagrange. A motivação para o presente trabalho é facilitar ao usuário colocar o polinômio interpolado de Lagrange na forma $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, *onde o cálculo dos* a_i*'s, são feitos em função dos pontos dados* $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

15. Observações

Este trabalho será apresentado no III Simpósio Castelan em Matemática Aplicada, em Florianópolis.

UMA FORMA PARA O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE LAGRANGE

O. DE OLIVEIRA SILVA E H.M. DOS S. DIAS

INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS - INPE
CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO-CNPq
CAIXA POSTAL 515 - 12200 - SÃO JOSÉ DOS CAMPOS - SP - BRASIL

ABSTRACT

The purpose of this paper is to propose a closed formula for calculation the Lagrange interpolation polynomial coefficients. The overall goal in developing this formula was to simplify to the user the evaluation of individual coefficients a_i *in the interpolating polynomial form* $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, *as a function of given points* $y = f(x_i)$, $i=1,2,\ldots, n$.

UMA FÓRMULA PARA O CÁLCULO DE COEFICIENTES DE LAGRANGE

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é encontrar uma fórmula fechada para o cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador de Lagrange. Devido à complexidade da fórmula, desenvolveu-se um algoritmo para uso em computador. A motivação para o presente trabalho é facilitar ao usuário colocar o polinômio interpolador de Lagrange na forma $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde o cálculo dos a_i's são feitos em função dos pontos dados $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$; o que facilita ao usuário conhecer, por exemplo, a ordem de grandeza de alguns coeficientes, sem ter de desenvolver todo o polinômio.

2. CÁLCULO DOS COEFICIENTES

Dada a fórmula conhecida do polinômio interpolador de Lagrange (Blun (1972), Davis (1963), David e Robert (1972), Carnahan et alii (1969) e Eugene e Hebert (1966)),

$$Pn(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

onde "x_i e x_j" são as coordenadas da função conhecida nos pontos $y_i = f(x_i)$, desenvolver-se a fórmula para n=1, n=2, n=3,... e verificar-se o que acontece com os coeficientes.

Para n=1 tem-se:

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] y_i =$$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 - \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} y_1 =$$

$$= \frac{x(y_0 - y_1)}{x_0 - x_1} + \frac{y_1 x_0 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x - \frac{(x_1 y_0 - x_0 y_1)}{x_0 - x_1}$$

Para n=2 tem-se:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big] y_i =$$

$$= \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)}{(x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)\ (x - x_2)}{(x_1 - x_0)\ (x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)\ (x - x_1)}{(x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)} y_2 =$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} y_0 - \frac{(x_0 - x_2)(x - x_0)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x_0 - x_1)(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} y_2 = \frac{(x_1 - x_2)y_0 - (x_0 - x_2)y_1 + (x_0 - x_1)y_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} x^2 -$$

$$- \left(\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)y_0 - (x_0 - x_2)(x_0 + x_2)y_1 + (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)y_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \right) x +$$

$$+ \left(\frac{(x_1 - x_2)(x_1\ x_2)y_0 - (x_0 - x_2)(x_0\ x_2)y_1 + (x_0 - x_1)(x_0\ x_1)y_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \right)$$

Para n=3 tem-se:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \Big[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big] y_i =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 - \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} y_2 - \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0-x_3)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} y_3 =$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} y_0 -$$

$$- \frac{(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} y_2 -$$

$$- \frac{(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} y_3 =$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)y_0-(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)y_1+(x_0-x_1)(x_0-x_3)(x_1-x_3)y_2-(x_0-x_3)(x_0-x_2)(x_1-x_2)y^3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_2-x_3)} x^3 -$$

$$- \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)[x_1+x_2+x_3]y_0-(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)[x_0+x_2+x_3]y_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} + \\ & + \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_3)(x_1-x_3)[x_0+x_1+x_3]y_2-(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)[x_0+x_1+x_2]y_3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{aligned} \right\} x^2 +$$

$$+ \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)[x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3]y_0-(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_3)[x_0x_2+x_0x_3+x_2x_3]y_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} + \\ & + \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_3)(x_1-x_3)[x_0x_1+x_0x_3+x_1x_3]y_2-(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1\ x_2)[x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2]y_3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{aligned} \right\} x -$$

$$- \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x_1\ x_2)(x_1\ x_3)(x_2\ x_3)[x_1x_2x_3]y_0-(x_0\ x_2)(x_0\ x_3)(x_2\ x_3)[x_0x_2x_3]y_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \\ & + \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_3)(x_1-x_3)[x_0x_1x_3]y_2+(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)[x_0x_1x_2]y_3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_2-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{aligned} \right\} .$$

o que leva à fórmula:

$$C(i) = \frac{(-i)^i}{\prod\limits_{\substack{k=0\\ \ell=0\\ k<\ell}}^{n} (x_k - x_\ell)} \left[\sum_{v=0}^{n} (-1)^v \left(\prod_{\substack{j=0\\ m=0\\ j<m\\ j\neq v\\ m\neq v}}^{n} (x_j - x_m) \right) y_v \, C^i_{A-x_v} \right],$$

onde $i=0,\ldots,n$, $A = \{x_1,\ldots,x_n\}$ e

$$C^0_{A-x_v} = 1 ,$$

$$C^1_{A-x_v} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{v-1} + x_{v+1} + \ldots + x_n,$$

$$C^2_{A-x_v} = x_0 x_1 + x_0 x_2 + \ldots + x_0 x_{v-1} + x_0 x_{v+1} + \ldots + x_0 x_n +$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_{v-1} + x_1 x_{v+1} + \ldots + x_1 x_n + \ldots +$$

$$x_{n-1} x_n$$

$$\vdots$$

$$C^n_{A-x_v} = x_0 x_1 \ldots x_{v-1} x_{v+1} \ldots x_n.$$

Por indução, provar-se-á que a fórmula acima é válida para qualquer número de termos.

Seja n=1

$$C(0) = \frac{1}{(x_0 - x_1)} y_0 - y_1$$

$$C(1) = \frac{1}{(x_0 - x_1)} (y_0 x_1 - x_0 y_1),$$ então para n=1 esta fórmula é verdadeira.

Supõe-se que a fórmula abaixo é válida para n=h.

$$C(i) = \frac{(-1)^i}{\prod\limits_{\substack{k=0\\ \ell=0\\ k<\ell}}^{h} (x_k - x_\ell)} \left[\sum_{v=0}^{h} (-1)^v \left(\prod_{\substack{j=0\\ j<m\\ j\neq v\\ m\neq v}}^{h} (x_j - x_m) \right) y_v \, C^i_{A-x_v} \right], \quad (A)$$

onde i=0,...,h e $A = \{x_i,\ldots,x_h\}$. Provar-se-á que ela é válida para n=h+1, ou seja:

$$C(i) = \frac{(-1)^i}{\prod\limits_{\substack{k=0\\ \ell=0\\ k<\ell}}^{h+1} (x_k - x_\ell)} \left[\sum_{v=0}^{h+1} (-1)^v \left(\prod_{\substack{j=0\\ m=0\\ j<m\\ j\neq v\\ m\neq v}}^{h+1} (x_j - x_m) \right) y_v \, C^i_{A-x_v} \right],$$

onde i=0,...,h+1 e $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_h, x_{h+1}\}$.

Acrescentando-se o termo x_{h+1} à Fórmula A, tem-se que: i=1,..., h+1, $A = \{x_1, \ldots, x_{h+1}\}$, e

$$C(i) = \frac{(-1)^i}{\prod\limits_{\substack{k=0\\ \ell=0\\ k<\ell}}^{h+1} (x_k - x_\ell)} \left[\sum_{v=0}^{h+1} (-1)^v \left(\prod_{\substack{j=0\\ m=0\\ j<m\\ j\neq v}}^{h+1} (x_j - x_m) \right) y_v \, C^i_{A-x_v} \right],$$

que tem a mesma forma de c(i) quando i=1,...,h.

Além desta prova, testou-se a precisão dos cálculos por computador e fez-se um programa para o cálculo de vários valores de f(x) usando o processo de Lagrange e o processo desenvolvido neste artigo (ver Apêndice A).

3. CONCLUSÃO

Esta fórmula facilita ao usuário colocar o polinômio interpolador de Lagrange na forma $y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Deve-se notar que a programação da fórmula exige um algoritmo recursivo e demorado. Para polinômios de grau baixo, a fórmula pode ser desenvolvida de modo que sua avaliação por computador seja relativamente fácil e rápida. No caso de quererer apenas alguns coeficientes, ou para calcular ordens de grandezas entre eles, a fórmula aqui proposta apresenta vantagens sobre o cálculo de todo o polinômio de Lagrange e, além disso, calcula os coeficientes desejados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLUN, E.K. - Numerical Analysis and Computation Theory and Practice - Addison Wesley. Massachusetts - California - 1972.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O. Applied Numerical Methods. John Wiley & Sons. New York - 1969.

DAVID, M.Y.; ROBERT, T.G. - A Survey of Numerical Mathematics - - Addison - Wesley. Massachusetts. California - vol. 1-1972.

DAVIS, P.J. - Interpolation & Aproximation. Dover Publications - - New York. 1963.

EUGENE, I.; HEBERT, B.K. - Analysis of Numerical Methods. John Wiley. New York. 1966.

APÊNDICE A

RESULTADOS DO PROGRAMA DE DEMONSTRACAO
======================================

POLINOMIO

```
P(X)=    -0.000000000129 X ** 12 +     0.000000022581 X ** 11 +    -0.000001738345 X ** 10 +
          0.000077844705 X **  9 +    -0.002249484976 X **  8 +     0.043979305067 X **  7 +
         -0.592621098751 X **  6 +     5.502531552630 X **  5 +   -34.415482771452 X **  4 +
        137.750313303197 X **  3 +  -315.233455047459 X **  2 +   316.321579130391 X **  1 +
          8.000000000009 X **  0 +
```

RESULTADOS COMPARATIVOS

I	X (I)	Y (I)	P (X(I))
0	3.000000000	8.000000000	8.000000000
1	5.000000000	44.000000000	43.999906698
2	7.000000000	74.000000000	73.999730336
3	9.000000000	102.000000000	101.999410881
4	11.000000000	128.000000000	127.998875649
5	13.000000000	152.000000000	151.998037447
6	15.000000000	177.000000000	176.996810342
7	17.000000000	200.000000000	199.995109998
8	20.000000000	223.000000000	222.991400706
9	22.000000000	246.000000000	245.988032992
10	25.000000000	268.000000000	267.981246920
11	27.000000000	290.000000000	289.975380110
12	30.000000000	312.000000000	311.965430279

```
FOR I:=0 STEP 1 UNTIL 12 DO
  BEGIN
    PP:=1$
    FOR J:=0 STEP 1 UNTIL 12 DO
      BEGIN
        IF I NEQ J THEN
          PP:= PP*(A- X(J))/(X(I)-X(J))
      END$
    P:=P + PP*Y(I)$
  END$

END$

>
                 12                    11                      10
P =( - 1537302873*A   + 268112838604*A   - 20640300861656*A   + 924292065203704

       9                     8                      7
   *A   - 26709345264044342*A   + 522189943351571752*A   - 703583822048992444*

    6                         5                        4
   A   + 65335110969119644696*A   - 40863354091514209726*A   +

                          3                        2
   16355697311220147300000*A   - 3749936393000527886500*A   +

   3755856293041441050000*A + 949353037143040600000)/11573537964268000000
>
          11        10         9          8             7            6
PP=(A*(A    - 171*A   + 13022*A   - 582348*A   + 16974654*A   - 338234274*A   +

                5              4                3                  2
     4695241928*A   - 45344068452*A   + 298102920505*A   - 1269425776075*A   +

     3137821409250*A - 3411483075000))/27374579500000

>
ENTERING LISP...
$??????? LISP (4/1/79)
EVAL:
>
```