



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

sid.inpe.br/mtc-mxx/aaaa/00.00.00.00-XXX

AS ÓRBITAS CONGELADAS E O COMPORTAMENTO DE LONGO PERÍODO DAS ÓRBITAS QUASE CIRCULARES EM UM CAMPO DE GRAVIDADE

Igor Hideki Cabianca Yamamoto

Relatório de Iniciação Científica,
orientado pelo Dr. Helio Koiti Kuga
e pela Dra. Paula Cristiane Pinto
Mesquita Pardal.

URL do documento original:

<LINK>

INPE
São José dos Campos
2018



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

**AS ÓRBITAS CONGELADAS E O COMPORTAMENTO
DE LONGO PERÍODO DAS ÓRBITAS QUASE
CIRCULARES EM UM CAMPO DE GRAVIDADE**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Igor Hideki Cabianca Yamamoto (EEL/USP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: igor.yamamoto@usp.br

Hélio Koiti Kuga (ITA/DCTA, Orientador)
E-mail: helio.kuga@inpe.br

Paula Cristiane Pinto Mesquita Pardal (DEBAS/EEL/USP,
Co-Orientadora)
E-mail: paulapardal@usp.br

INPE
São José dos Campos
2018

Esta ficha será revisada pelo SID.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Yamamoto, Igor H. C.

Cutter As órbitas congeladas e o comportamento de longo período das órbitas quase circulares em um campo de gravidade/ Igor Hideki Cabianca Yamamoto. – São José dos Campos : INPE, 2018.

Relatório Final (Iniciação Científica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2018

Orientador: Hélio Koiti Kuga e Paula Cristiane Mesquita Pardal.

1.Órbitas congeladas. 2.Geopotencial. 3.Órbitas quase circulares

CDU



Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

[Informar aqui sobre marca registrada.](#)

FOLHA DE APROVAÇÃO
CONFECCIONADA PELO SPG E INCLUÍDA PELO SID

RESUMO

Este projeto tinha como objetivo principal estudar uma solução para o comportamento de longo período de uma órbita quase circular em um campo de gravidade. A maior dificuldade deste problema é determinar uma solução válida perto da inclinação crítica (próxima de zero) e que inclua os efeitos de coeficientes do campo de gravidade de ordem mais alta. Uma abordagem simples consiste em linearizar as equações variacionais do movimento e eliminar um grau de liberdade, com uma integral do movimento. As órbitas congeladas correspondem à solução de equilíbrio desta abordagem e também foram estudadas. Satélites em órbitas congeladas, ou seja, com características estacionárias, são de grande interesse para monitoramento remoto, análise topográfica e determinação de níveis oceânicos. A obtenção de um *design* orbital deste tipo deve considerar os efeitos perturbadores, em que a maior parcela é devida ao potencial gravitacional. Aqui, o esse efeito foi analisado por meio do modelo gravitacional terrestre *Joint Gravity Model 2* (JGM-2) e de resultados pseudo-analíticos, baseados nas equações variacionais dos elementos keplerianos de Lagrange, aplicados à equação do potencial perturbador. Assim, foram obtidos perfis de condições e distribuições de parâmetros iniciais, como a excentricidade e o argumento de perigeu, de forma a reduzir o efeito de perturbação gravitacional e a propagação do erro em relação à sua órbita não perturbada (problema de dois corpos). São apresentados os resultados em torno da inclinação crítica (próxima de zero) e as análises referentes ao impacto da inclusão de coeficientes dos harmônicos zonais até ordem e grau mais altos.

Palavras-chave: Órbitas congeladas. Geopotencial. Órbitas quase circulares.

FROZEN ORBITS AND THE BEHAVIOUR OF LONG TERM NEAR-CIRCULAR ORBITS UNDER GRAVITY FIELD

ABSTRACT

This project has as its main purpose the study of a solution for the behaviour of long term near-circular orbits under a gravity field. The main problem is to detect a valid solution near the critical inclination that includes the effect of higher zonal gravitational field coefficients. One simple approach consist of linearizing the dynamical equations of motion and eliminating one degree of freedom through the motion integral. The frozen orbits are the equilibrium solution of such approach and are also studied under this project. Satellites describing frozen orbits, that is, with stationary characteristics, are of great interest for remote monitoring, topographic analysis and determination of oceanic levels. To obtain such orbital design, one must consider the perturbation effects, which are greatly described by the potential perturbation. Here, this effect was analysed through the *Joint Gravity Model 2* and by the use of pseudo-analytic results, based on the Lagrange dynamical equations of keplerian elements, applied to the perturbative potential. Profiles of conditions and initial parameters, such as eccentricity and argument of perigee, were obtained as results, in a way that gravitational perturbative effect and the propagation of error related to its non-perturbated orbit (two-body problem) are both minimized. Here are presented the results around the critical inclination and analyses regarded to the impact of the inclusion of higher degree zonal harmonic coefficients.

Keywords: Frozen Orbits. Geopotential. Near circular orbits.

Lista de Figuras

1	Elementos Keplerianos	4
2	Fluxograma que descreve a sequência realizada para a análise das equações obtidas.	12
3	Análise da excentricidade e do argumento de perigeu da órbita congelada para o modelo lunar semelhante ao inspecionado em [Cook, 1991]	19
4	Análise da excentricidade da órbita congelada para o modelo terrestre JGM2 de ordem 50	20
5	Análise da excentricidade da órbita congelada para o modelo terrestre JGM2 de ordem 55	21
6	Variação do fator de estabilidade em relação à inclinação para ordem 55 .	22
7	Propagação de h e k em função do tempo para um ângulo de 98.38° . . .	22

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Fundamentação Teórica	3
2.1 Introdução ao problema de dois corpos	3
2.2 Elementos Keplerianos	3
2.3 Modelo Gravitacional	4
2.4 Órbitas Congeladas e Variáveis Singulares	5
2.4.1 Solução Analítica das Variáveis Singulares	9
2.4.2 Órbitas Congeladas	10
2.5 Soluções Singulares	11
3 Metodologia	12
3.1 Análise das Equações Obtidas	12
3.2 <i>Scripts</i> de Simulação	12
4 Resultados	19
4.1 Análise de Perfis	19
4.2 Ângulo Crítico	23
5 Conclusão	24
Referências	25

1 Introdução

Atualmente, satélites com órbitas congeladas, ou seja, com características estacionárias, são de grande interesse para monitoramento remoto, análise topográfica e determinação de dados de níveis oceânicos. A obtenção de um *design* orbital deste tipo é feita a partir da consideração de efeitos perturbadores, no qual a maior parcela é devida à perturbação do potencial gravitacional.

A concepção de um projeto que levasse um instrumento de análise a um nível de altitude característico do clima espacial já havia sido planejada nos anos do desenvolvimento da própria mecânica orbital. Porém, tal feito foi apenas concluído com a missão Sputnik, em 1957. Assim iniciavam as missões espaciais, para as quais era extremamente necessário o planejamento do *design* orbital, de forma que o objetivo que cada satélite devesse realizar fosse otimizado. Dentre os principais tipos de missões se encontram os satélites de sensoriamento remoto, no qual o principal objetivo é a observação contínua de determinadas características geológicas. Uma condição que existe para a obtenção de tal tipo de satélite é considerar as perturbações orbitais que existem, como a distribuição não uniforme de potencial gravitacional, o arrasto atmosférico e a pressão de radiação.

O efeito de maior influência, como apresentado em [Capderou, 2005], decorre do achatamento do planeta Terra, que ocasiona uma desregulação na descrição do potencial gravitacional terrestre. Desta forma, equações como as apresentadas em [Kaula, 1966] são de grande uso quando se tem o intuito de descrever uma órbita que sofre tal tipo de influência. Ademais, alguns resultados analíticos, como os apresentados em [Brouwer, 1961], já foram desenvolvidos para ordens menores de coeficientes zonais, uma vez que, para corpos semelhantes à Terra, o coeficiente zonal de maior influência é o termo J_2 , sendo portanto os outros termos quase desprezíveis.

Órbitas nas quais não existem variações expressivas na trajetória ao longo do tempo são chamados de *órbitas congeladas*. Porém, para que se possa obtê-las, faz-se necessária a seleção de determinadas condições iniciais, extremamente difíceis de serem obtidas analiticamente, uma vez que as variações de longo período que se desejam minimizar são descritas pelos termos ímpares da expansão do potencial (J_3 , J_5 , etc.), descrito em [Kaula, 1966]. Como tais termos possuem valores da mesma ordem de grandeza, a expansão não pode mais ser truncada em um termo inicial, pois ocasionaria um erro não desprezível. Desta forma, métodos computacionais e iterativos são melhores para descrever tal tipo de órbita, uma vez que o erro obtido é menor que o de qualquer método analítico.

No presente projeto, foi estudado o comportamento de longo período de uma órbita quase circular (excentricidade próxima de zero) em um campo de gravidade, considerando apenas os harmônicos zonais terrestre. Considerar uma órbita quase circular e a influência apenas de termos de longo período simplifica a análise e permite o desenvolvimento

de uma solução direta razoável, apresentada em [Cook, 1991], que também foi estudada. Como resultado, obteve-se um conjunto de perfis de condições iniciais a partir da implementação da solução analítica a um modelo computacional, no qual foi utilizado o modelo terrestre *Joint Gravity Model 2*, que caracterizam valores possíveis de se obter uma órbita congelada.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Introdução ao problema de dois corpos

O problema de dois corpos descreve a dinâmica do movimento de um corpo A quando está sob a influência da força gravitacional de um corpo B . A solução desse problema pode ser apresentada considerando as leis de Kepler e que uma órbita estável seja descrita por uma elipse, cujos parâmetros imprescindíveis para a descrição geométrica são a excentricidade e (medida adimensional do achatamento da elipse) e o semi-eixo maior a (parâmetro que define o tamanho da elipse).

Pela solução de tal problema emerge uma das equações mais famosas do estudo da mecânica orbital: a *equação de Kepler*, uma equação transcendental que associa a anomalia excêntrica (E) com a anomalia média (M) pela relação

$$M = E - e \operatorname{sen} E \quad (1)$$

podendo se definir qualquer órbita sobre o espaço bidimensional a qualquer momento.

2.2 Elementos Keplerianos

O estado de um satélite pode ser representado por uma função $f = f(m)$, de forma que m seja um conjunto de parâmetros. No problema de dois corpos, três parâmetros são introduzidos, sendo eles a anomalia média, o semi-eixo maior e a excentricidade. Para que seja possível a descrição de um satélite em um sistema $O\vec{X}'$ orbitando um corpo em um sistema $O\vec{X}$ sobre qualquer plano de propagação, se faz necessária a introdução de três ângulos, apresentados em [Curtis, 2013], sendo eles

- Ascensão do Nódo ascendente (Ω): ângulo entre o versores \vec{e}_x e \vec{e}_Ω , sendo \vec{e}_Ω o versor que aponta para o ponto no qual a órbita cruza o plano do Equador, a partir do hemisfério sul para o norte.
- Argumento de perigeu (ω): ângulo entre os versores \vec{e}_Ω e $\vec{e}_{x'}$, sendo $\vec{e}_{x'}$ o versor que aponta para o ponto de perigeu
- Inclinação (i): ângulo entre os versores \vec{e}_z e $\vec{e}_{z'}$, sendo $\vec{e}_{z'}$ o versor que aponta para o momento angular do satélite

Os elementos citados junto ao tempo são suficientes para descrever totalmente uma órbita no espaço tridimensional. Assim, o vetor m é da forma

$$m = (a, e, M, \Omega, \omega, i, t) \quad (2)$$

sendo tais elementos denominados *elementos Keplerianos*.

Fonte: *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Curtis

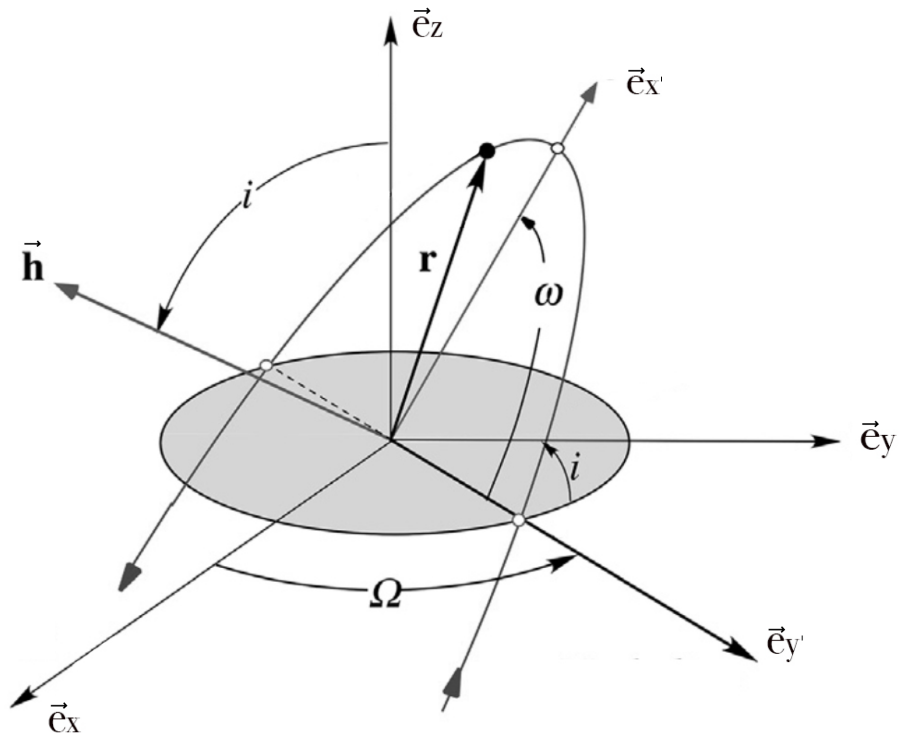


Figura 1: Elementos Keplerianos

2.3 Modelo Gravitacional

O potencial gravitacional real pode ser descrito através do potencial obtido pela resolução do problema de dois corpos e de um potencial R , chamado de *potencial perturbador*. Assim,

$$U = \frac{\mu}{r} + R \quad (3)$$

sendo μ o produto da constante universal da gravitação e a massa do corpo (GM) e r , a distância do satélite até a origem do sistema de coordenada adotado.

O potencial R , assim como apresentado em [Kaula, 1966], é dado por

$$R = \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_e}{r} \sum_{p=0}^n \bar{P}_{np}(\text{sen } \rho) (\bar{C}_{np} \cos m\theta + \bar{S}_{np} \text{sen } m\theta) \quad (4)$$

sendo

- a_e o raio equatorial do centro do corpo
- r a distância
- ρ a latitude
- θ a longitude
- \bar{C}_{np} e \bar{S}_{np} os coeficientes harmônicos normalizados de grau n e ordem l
- $\bar{P}_{np}(\text{sen } \rho)$ o polinômio de Legendre normalizado

2.4 Órbitas Congeladas e Variáveis Singulares

A equação do potencial R associada aos elementos keplerianos foi desenvolvida em [Kaula, 1966] e é apresentada como

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_{em}}{a} \right)^n \bar{F}_{n0p}(i) G_{np(2n-p)}(e) S_{n0pq}(\omega, M) \quad (5)$$

sendo

$$S_{n0pq} = C_{n0} \begin{pmatrix} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M] \\ \text{sen}[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M] \end{pmatrix} \begin{matrix} n=\text{par} \\ n=\text{impar} \end{matrix} \quad (6)$$

Como mostrado em [Capderou, 2005], a Eq.(5) pode apresentar comportamento de curto período, associado à anomalia média, bem como comportamento de longo período, associado ao argumento de perigeu. As variações de longo período podem ser descritas através da consideração de uma *função perturbação média*, que possui todos os termos associados à variação secular mediados ao longo do período de uma órbita. Uma vez que a variação de curto período está associada à anomalia média M , então a média é tomada para um intervalo de variação de $M \in [0, 2\pi]$. Desta forma, se a média do elemento S_{n0pq}

é representado como S_{n0pq}^{ave} e $S_{n0pq}^{ave}(\omega, M) 2\pi = \int_0^{2\pi} S_{n0pq}(\omega, M) dM$, então

$$S_{n0pq}^{ave} = \frac{\bar{C}_{n0}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M] \\ \text{sen}[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M] \end{pmatrix}_{n=impar}^{n=par} dM =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } n-2p+q \neq 0, \\ \bar{C}_{n0} \begin{pmatrix} \cos[(n-2p)\omega] \\ \text{sen}[(n-2p)\omega] \end{pmatrix}_{n=impar}^{n=par}, & \text{se } n-2p+q = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Por fim, retiram-se todos os termos associados a M , reduzindo então a Eq.(5) à Eq.(8). Essa equação, como apresentada em [Cook, 1991], é de grande importância pois descreve a variação do potencial perturbador em função dos termos de variação de longo período. Desta forma, pode ser avaliada a variação dos elementos keplerianos através das equações planetárias de Lagrange.

$$R_{ave} = V = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=0}^n \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_{em}}{a}\right)^n \bar{F}_{n0p}(i) G_{np(2n-p)}(e) \bar{C}_{n0} \begin{pmatrix} \cos[(n-2p)\omega] \\ \text{sen}[(n-2p)\omega] \end{pmatrix}_{n=impar}^{n=par} \quad (8)$$

Em [Rosborough e Ocampo, 1992] são apresentadas as equações de planetárias de Lagrange como

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial M} \quad (9)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial \omega} \quad (10)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \text{sen } i} \frac{\partial V}{\partial i} \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \text{sen } i} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \text{sen } i} \frac{\partial V}{\partial \Omega} \quad (12)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \text{sen } i} \frac{\partial V}{\partial i} \quad (13)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial V}{\partial a} \quad (14)$$

Primeiramente, é notável que a Eq.(8) é da forma $V = V(i, e, \omega)$ e, portanto, independe do nó ascendente e da anomalia média. Isto implica que a derivação parcial da mesma em relação a estas variáveis é nula e a variação temporal de tais coordenadas pode ser desconsiderada. Ainda, como para o estudo são consideradas apenas variações de

longo período, considera-se a variação da anomalia média como sendo nula. As equações planetárias de Lagrange se reduzem para [Cook, 1991]

$$\frac{de}{dt} = -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial \omega} \quad (15)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial V}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial V}{\partial i} \quad (16)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial V}{\partial \omega} \quad (17)$$

As Eq.(15) e Eq.(17) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \ln|\cos i| + C &= \frac{1}{2} \ln|1-e^2| \\ e^C \cos i &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \\ \cos i \sqrt{1-e^2} &= \frac{1}{e^C} = \cos i_o \sqrt{1-e_o^2} \end{aligned}$$

em que i_o e e_o são a inclinação e a excentricidade iniciais, respectivamente. Como, do problema de dois corpos, $H = \sqrt{a\mu(1-e^2)}$ e $\frac{H_z}{H} = \cos i$, sendo H o momento angular e H_z a projeção do momento angular na direção do eixo z . Assim

$$\cos i \sqrt{a\mu(1-e^2)} = H_{oz} \quad (18)$$

em que, supondo que não há variação no momento angular, H_{oz} se mantém constante. Como a inclinação é da forma $i = i(e)$, o grau de liberdade decresce para dois e as equações necessárias para a descrição do modelo se reduzem apenas às equações em que ocorre variação temporal da excentricidade e do argumento de perigeu. Desta forma, as equações variacionais no tempo de tais parâmetros podem ser expressas como expansão em séries por meio da derivação parcial da Eq.(8). Porém, as mesmas apresentam fatores na forma $\frac{1}{e}$, evidenciando, para o estudo de órbitas quase-circulares, uma singularidade quando e tende a zero. Tal singularidade pode ser evitada através da substituição de variáveis

$$h = e \sin \omega \quad (19)$$

$$k = e \cos \omega \quad (20)$$

As coordenadas h e k são chamadas de *elementos equinociais* e são também denominadas no trabalho de [Cook, 1991] como *coordenadas da órbita congelada* ou *variáveis singulares*.

Um conjunto de equações obtidas através da linearização em respeito às variáveis singulares podem ser determinadas. Para finalidade de aplicação a modelos gravitacionais terrestres, houve a necessidade de normalizar alguns termos não originalmente normalizados. Tal normalização foi feita através do produto (ou divisão, quando é feita em relação aos termos J_n) dos elementos pelo fator 21 apresentado em [Eckman, 2011].

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)\xi_m}{(n+m)!}}, \quad \xi_m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ 2, & \text{se } m \geq 1, \end{cases} \quad (21)$$

Para o caso específico da análise zonal,

$$N_{n0} = N_n = \sqrt{(2n+1)} \quad (22)$$

Assim, o conjunto de equações como resultado da linearização são dadas por

$$\frac{dk}{dt} = \tau + (\eta - \epsilon)h \quad (23)$$

$$\frac{dh}{dt} = (\eta + \epsilon)k \quad (24)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \epsilon(i) = & -\alpha \sum_{n=2, \text{par}}^{\infty} \left(\frac{a_{em}}{a}\right)^n \bar{J}_n \left[\sum_{\beta=0}^{n/2} \frac{1}{2} n(n+1) \bar{A}_\beta^n \text{sen}^{n-2\beta} i \right] \\ & + \alpha \sum_{n=2, \text{par}}^{\infty} \left(\frac{a_{em}}{a}\right)^n \bar{J}_n \cos^2 i \left[\sum_{\beta=0}^{n/2-1} (n-2\beta) \bar{A}_\beta^n \text{sen}^{n-2\beta-2} i \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tau(i) = \alpha \sum_{n=3, \text{impar}}^{\infty} \left(\frac{a_{em}}{a}\right)^n \bar{J}_n \left[\sum_{\beta=0}^{(n-1)/2} (n-1) \bar{D}_\beta^n \text{sen}^{n-2\beta} i \right] \quad (26)$$

$$\eta(i) = \alpha \sum_{n=4, \text{par}}^{\infty} \left(\frac{a_{em}}{a}\right)^n \bar{J}_n \left[\sum_{\beta=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \bar{E}_\beta^n \text{sen}^{n-2\beta} i \right] \quad (27)$$

em que α é movimento médio e os termos \bar{A}_β^n , \bar{D}_β^n e \bar{E}_β^n são dados por

$$\bar{A}_\beta^n = \frac{(2n - 2\beta)!(-1)^\beta}{\beta!(n - \beta)! \left[\left(\frac{n}{2} - \beta\right)!\right]^2 2^{2n-2\beta}} N_n \quad (28)$$

$$\bar{D}_\beta^n = \frac{(2n - 2\beta)!(-1)^\beta}{\beta!(n - \beta)! \left(\frac{n-1}{2} - \beta\right)! \left(\frac{n+1}{2} - \beta\right)! 2^{2n-2\beta}} N_n \quad (29)$$

$$\bar{E}_\beta^n = \frac{(2n - 2\beta)!(-1)^\beta}{\beta!(n - \beta)! \left(\frac{n-2}{2} - \beta\right)! \left(\frac{n+2}{2} - \beta\right)! 2^{2n-2\beta}} N_n \quad (30)$$

2.4.1 Solução Analítica das Variáveis Singulares

Em [Cook, 1991] é desenvolvida a solução analítica de h e k , onde, dependendo do valor da grandeza $\Gamma^2 = \eta^2 - \epsilon^2$, denominada *fator de segurança*, dois resultados são possíveis. Tal desenvolvimento é feito a partir da substituição da função h por

$$h^* = h + \frac{\tau}{\eta - \epsilon} \quad (31)$$

possibilitando que possa ser adotada uma representação matricial na forma

$$\begin{bmatrix} \frac{dh^*}{dt} \\ \frac{dk}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta + \epsilon \\ \eta - \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^* \\ k \end{bmatrix} \quad (32)$$

Desta forma, duas soluções são obtidas:

- Para valores em que Γ^2 é menor que zero, as soluções tanto para h quanto para k se encontram na forma senoidal, dadas pelas equações

$$h(t) = \left(\frac{\tau}{\eta - \epsilon}\right) (\cos \Gamma t - 1) + h_0 \cos \Gamma t - k_0 \left(\frac{\Gamma}{\eta - \epsilon}\right) \text{sen } \Gamma t \quad (33)$$

$$k(t) = \left(\frac{\tau}{\Gamma}\right) \text{sen } \Gamma t - h_0 \left(\frac{\Gamma}{\eta + \epsilon}\right) \text{sen } \Gamma t + k_0 \cos \Gamma t \quad (34)$$

Tal resultado é de extrema importância, pois aponta para uma variação convergente em um grande domínio temporal devido à natureza das funções senoidais.

- Para valores em que Γ^2 é maior que zero, as soluções de h e k se encontram na forma exponencial, e são dadas por

$$h(t) = \left(\frac{\tau}{\eta - \epsilon}\right) \left[\frac{1}{2} (e^{\Gamma t} + e^{-\Gamma t}) - 1\right] + \frac{h_o}{2} (e^{\Gamma t} + e^{-\Gamma t}) + \frac{h_o}{2} \left(\frac{\eta + \epsilon}{\Gamma}\right) (e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}) \quad (35)$$

$$k(t) = \frac{\tau}{2\Gamma} (e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}) + \frac{h_o}{2} \left(\frac{\Gamma}{\eta + \epsilon}\right) (e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}) + \frac{k_o}{2} (e^{\Gamma t} + e^{-\Gamma t}) \quad (36)$$

Tal resultado representa uma propagação não convergente, o que aponta à parâmetros indesejados na configuração do *design* orbital para órbitas congeladas.

2.4.2 Órbitas Congeladas

Como já comentado, o desenvolvimento das variáveis h e k foi feito com a finalidade de permitir a análise do *design* orbital para órbitas semi-circulares (quando a excentricidade tende a zero). Assim, assumindo variação nula de tais termos ao longo do tempo, a solução para tais variáveis é obtida quando as Eq.(23) são igualadas a zero. Desta forma,

$$0 = \tau + (\eta - \epsilon)h \quad (37)$$

$$0 = (\eta + \epsilon)k \quad (38)$$

e, imediatamente obtem-se a solução $k = 0$ e $h = \frac{-\tau}{\eta - \epsilon}$. Portanto, se os parâmetros h e k descrevem órbitas congeladas, sendo aqui representado por \check{h} e \check{k} , então

$$\check{h} = \frac{-\tau}{\eta - \epsilon} \quad (39)$$

$$\check{k} = 0 \quad (40)$$

Pelas Eq.(19), h e k são da forma $h = h(e, \omega)$ e $k = k(e, \omega)$, então os elementos keplerianos e e ω devem ser postos de forma que as Eq.(37) e Eq.(38) possam descrever a órbita desejada. Isso é feito quando $\text{sen } \omega = 1$, de forma que, se \check{e} e $\check{\omega}$ são a excentricidade e argumento do perigeu da órbita congelada, respectivamente, então

$$\check{e} = \frac{\tau}{\eta - \epsilon} \left(\frac{-1}{\text{sen } \omega} \right)$$

Como $e > 0$, então o termo associado ao seno do argumento de perigeu deve ser da forma $\omega = \omega(\eta, \epsilon)$. Então, as coordenadas da órbita congelada são descritas pelas relações

$$\check{e} = \left| \frac{\tau}{\eta - \epsilon} \right| \quad \check{\omega} = \begin{cases} 90^\circ, & \text{se } \epsilon > \eta, \\ 270^\circ, & \text{se } \epsilon < \eta, \end{cases} \quad (41)$$

Assim, a configuração de uma órbita congelada semi-circular pode ser obtida quando $\check{e} = 0$. E como solução imediata, obtém-se $\tau(i) = 0$, i.e.,

$$\sum_{n=3, \text{impar}}^{\infty} \left(\frac{a_{em}}{a} \right)^n \bar{J}_n \left[\sum_{\beta=0}^{(n-1)/2} (n-1) \bar{D}_\beta^n \text{sen}^{n-2\beta} i \right] = 0 \quad (42)$$

cuja solução trivial ocorre para $i = 0$, solução essa que gera singularidades na Eq.(16). Portanto, as coordenadas das órbitas congeladas são obtidas a partir da solução numérica Eq.(42) e dependem apenas dos termos zonais ímpares.

A solução numérica pode fornecer um determinado número de possíveis lugares de órbita congelada. Porém, ainda se faz necessário analisar o fator de segurança Γ^2 , pois o mesmo determina se a solução de h e k convergirá ou não. Portanto, as órbitas congeladas serão *estáveis* para valores em que $\eta^2 - \epsilon^2 < 0$ e *instáveis* para $\eta^2 - \epsilon^2 > 0$.

2.5 Soluções Singulares

Existem alguns valores para η e ϵ nos quais as soluções analíticas não são válidas, pois representam coordenadas singulares na solução da matriz da Eq.(32). Para contornar tal singularidade, retorna-se ao conjunto de equações previamente linearizadas. Com isso, as singularidades ocorrem para valores nos quais

- $\eta = \epsilon$, em que as equações ficam na forma

$$\frac{dh}{dt} = 2\eta k \qquad \frac{dk}{dt} = \tau \qquad (43)$$

que possui como solução

$$k(t) = \tau t + k_o \qquad h(t) = \eta\tau t^2 + 2\eta k_o t + h_o \qquad (44)$$

Para este caso é possível obter a configuração de órbita congelada para valores nos quais $k(t) = 0$, ou seja, para quando $\eta = \epsilon$ e ω é 90° ou 270° , existe uma órbita congelada para qualquer excentricidade.

- $\eta = -\epsilon$, em que as equações ficam na forma

$$\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \frac{dk}{dt} = \tau + 2\eta h \qquad (45)$$

e as soluções são da forma

$$h(t) = h_o \qquad k(t) = (\tau + 2\eta h_o)t + k_o \qquad (46)$$

ou seja, uma vez que o parâmetro $k(t)$ se mantém constante, uma órbita congelada ocorre para qualquer valor de k .

3 Metodologia

3.1 Análise das Equações Obtidas

As equações desenvolvidas no Capítulo 2 podem apenas ser analisadas de forma não analítica, ou seja, deve-se resolver as equações Eq.(23) numericamente. Desta forma, o fluxograma 3.1 demonstra qual a sequência realizada para a obtenção dos dados e realização das simulações computacionais.

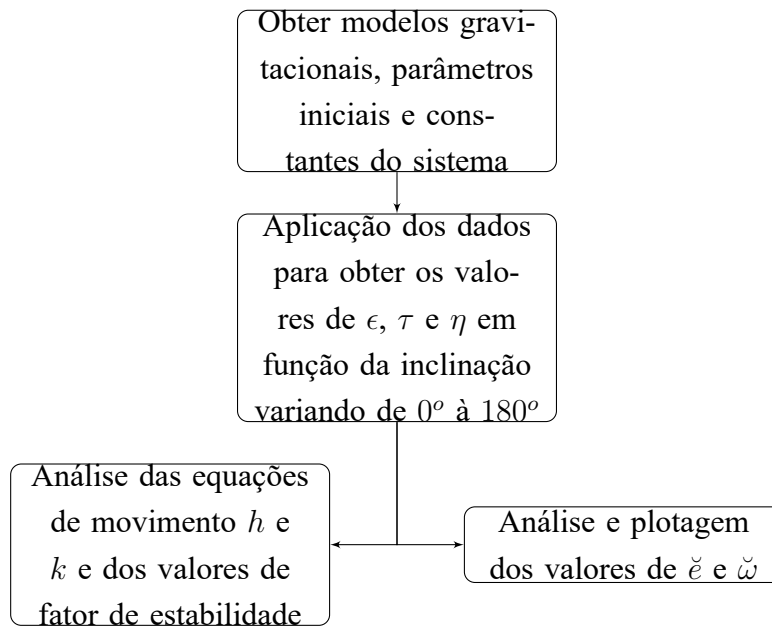


Figura 2: Fluxograma que descreve a sequência realizada para a análise das equações obtidas.

3.2 Scripts de Simulação

Para o estudo em questão, foi utilizado como plataforma de programação o software MATLAB®. O *script* que analisa os parâmetros mencionados no fluxograma 3.1 para o modelo gravitacional terrestre é listado a seguir.

```
1 % simulacao.m
2
3 clc;
4 close all;
5
6 % Declaracao do modelo que sera utilizado para analise
7 var = ' ';
8 var = parametros(var);
9
```

```

10 declaracao de ordem
11 ordem = ;
12
13 aem = var.aem;
14 mu = var.mu;
15 a = var.a;
16 MM = var.MM;
17 p = size(Jn);
18
19 imin= ;
20 imax= ;
21 epsilon = 0;
22 tau = 0;
23 eta = 0;
24 k = 0;
25
26
27 % Determinacao iterativa de epsilon
28 for i =1:180
29     V2 = 0;
30     f2 = 0;
31     t2 = 0;
32     for n = 2:2:ordem
33         C = ((n/2)-1);
34         D = n/2;
35         for g = 0:C
36             f = (n-2*g)*Anb(g,n)*(sind(i))^(n-2*g-2);
37             f2 = f2 + f;
38         end
39         for k = 0:D
40             t = (1/2)*n*(n+1)*Anb(k,n)*(sind(i))^(n-2*k);
41             t2 = t2 + t;
42         end
43
44         V = ((aem/a)^n)*f2*Jn(n)*Nn(n)*(cosd(i))^2-((aem/a)^n)*Jn(n)*Nn
(n)*t2;
45         V2 = V2 + V;
46     end
47     epsilon(i) = V2*MM;
48 end
49
50 % Determinacao iterativa de tau
51 for i =1:180
52     V2 = 0;
53     f2 = 0;
54     t2 = 0;

```

```

55     for n = 3:2:ordem
56         C = ((n-1)/2);
57         D = n/2;
58         for g = 0:C
59             f = (n-1)*Dnb(g,n)*(sind(i))^(n-2*g);
60             f2 = f2 + f;
61         end
62
63         V = f2*((aem/a)^n)*Jn(n)*Nn(n);
64         V2 = V2 + V;
65     end
66     tau(i) = V2*MM;
67 end
68
69 % Determinacao iterativa de eta
70 for i =1:180
71     V2 = 0;
72     f2 = 0;
73     t2 = 0;
74     for n = 4:2:ordem
75         C = ((n-2)/2);
76         D = n/2;
77         for g = 0:C
78             f = (1/2)*(n-1)*(n-2)*Enb(g,n)*(sind(i))^(n-2*g);
79             f2 = f2 + f;
80         end
81
82         V = f2*((aem/a)^n)*Jn(n)*Nn(n);
83         V2 = V2 + V;
84     end
85     eta(i) = V2*MM;
86 end
87
88 % Armazenamento dos valores obtidos na variavel universal COEF
89 COEF(1,:) = tau;
90 COEF(2,:) = eta;
91 COEF(3,:) = epsilon;

```

No código apresentado, é chamada uma matriz $J(n)$ que possui os valores dos coeficientes harmônicos zonais do modelo gravitacional utilizado em questão, e o mesmo deve ser configurado antes de ser aplicado ao código. Ainda, como o método analítico não utiliza os termos $J(0)$ e $J(1)$, a matriz $J(n)$ deve começar com $n = 1$.

O modelo que será analisado deve ser declarado na linha 9, tendo como opções os modelos declarados no arquivo *parametros.m*, em que, para a finalidade de tal projeto, os modelos configurados foram apenas o *CBERS2* e *BF*. O modelo *BF* descreve um modelo lunar semelhante ao utilizado no trabalho de [Cook, 1991] e a justificativa de sua imple-

mentação é devido a motivos de validação do código desenvolvido. Já o modelo *CBERS2* é utilizado com base nos parâmetros terrestres e elementos keplerianos do satélite CBERS2. Qualquer modelo no qual se deseja observar o comportamento de longo período de órbitas quase circulares pode ser analisado com a implementação dos scripts mencionados após devida configuração do modelo gravitacional e de valores de parâmetros.

```

1 % parametros.m
2
3 function var = parametros(varr)
4
5 var = varr;
6
7 if strcmp(var, 'CBERS2')
8     var = Modelos;
9     var.Nome = 'CBERS2';
10    var.a = 7150.5*10^3;
11    var.aem = 6378.137*10^3;
12    var.mu = 3.986*10^14;
13    var.MM = 0.0010;
14 elseif strcmp(var, 'BF')
15     var = Modelos;
16     var.Nome = 'Bills-Ferrari';
17     var.a = 1888.09*10^3;
18     var.aem = 1737.53*10^3;
19     var.mu = 4902.799*10^9;
20     var.MM = 8.5347e-04;
21 end

```

A estruturação dos dados foi feita na forma de classe, na qual é descrita pelo arquivo *Modelos.m*

```

1 classdef Modelos
2
3     properties
4         Nome
5         a
6         aem
7         mu
8         MM
9     end
10 end

```

A plotagem dos perfis que serão mencionados no item Resultados foi feita com o uso de três *scripts*: *plotagem_e_omega.m*, *plotagem_fs.m* e *plotagem_h_k.m*. Os mesmos são apresentados a seguir.

```

1 % plotagem_e_omega.m
2

```

```

3  clc;
4  close all;
5
6  ax = gca;
7
8  hold on
9  yyaxis left
10 plot(imin:imax,COEF_2(1,imin:imax), 'k-');
11 ylim([0 0.01]);
12 ylabel(' \color{black}Excentricidade (e) ');
13 ax.YColor = 'k';
14
15 yyaxis right
16 plot(imin:imax,COEF_2(2,imin:imax), 'k—');
17 ylim([0 360]);
18 ylabel('Argumento de Perigeu (\omega)');
19 yticks([0 90 180 270 360])
20 hold off
21
22 xlabel('Inclinacao (i)');
23 title('Variacao de Excentricidade (e) e Arumento de Perigeu (\omega)
        por Inclinacao (i)');
24 ax.YColor = 'k';

```

```

1  % plotagem_fs.m
2
3  clc;
4  close all;
5
6  ax = gca;
7
8  plot(imin:imax,COEF_2(3,imin:imax), 'k-');
9  xlim([40 140]);
10 ylabel(' \color{black}Fator de estabilidade ');
11 ax.YColor = 'k';
12
13 xlabel('Inclinacao (i)');
14 title('Variacao do Fator de Estabilidade em Funcao da Inclinacao');

```

```

1  % plotagem_h_k.m
2
3  close all;
4  clear h;
5  clear k;
6  clear l;
7
8  % Declaracao do angulo analisado e do erro minimo para consideracao de

```

```

Gamma = 0
9 i = ;
10 emin = ;
11
12 % Valores iniciais de h e k
13 h0= ;
14 k0= ;
15
16 % Tempo final e passo
17 tf= ;
18 passo= ;
19
20 j = ;
21 l = 1:passo:tf;
22
23 Gamma = COEF_2(3,i);
24 Lambda = sqrt(abs(Gamma));
25 k1 = (COEF(1,i)/(COEF(2,i) - COEF(3,i)));
26 k2 = Lambda/(COEF(1,i) - COEF(3,i));
27 k3 = (COEF(1,i)/Lambda);
28 k4 = Lambda/(COEF(1,i) + COEF(3,i));
29
30
31 for t = 1:passo:tf
32     j = 1 + j;
33     if Gamma <= -emin
34         h(j) = k1*cos(Lambda*t-1)+h0*cos(Lambda*t)-k0*k2*sin(Lambda*t);
35         k(j) = k3*sin(Lambda*t)-h0*k4*sin(Lambda*t)+k0*cos(Lambda*t);
36         titulo = 'Variacao senoidal de h e k por tempo (s)';
37     elseif Gamma > emin
38         h(j) = k1*((1/2)*(exp(Lambda*t)+exp(-Lambda*t)-1))+h0*(exp(Lambda
39         *t)+exp(-Lambda*t))+(k0/2)*(1/k4)*(exp(Lambda*t)-exp(-Lambda*t));
40         k(j) = (1/2)*k3*(exp(Lambda*t)-exp(-Lambda*t))+(h0/2)*k4*(exp(
41         Lambda*t)-exp(-Lambda*t))+(k0/2)*(exp(Lambda*t)+exp(-Lambda*t));
42         titulo = 'Variacao exponencial de h e k por tempo (s)';
43     elseif Gamma > -emin && COEF(2,i) > 0 && COEF(3,i) > 0
44         h(j) = COEF(1,i)*COEF(2,i)*t^2+2*COEF(2,i)*k0*t+h0;
45         k(j) = COEF(1,i)*t+k0;
46         titulo = 'Variacao quadratica e linear de h e k por tempo (s)';
47     end
48 end
49
50 plot(1,h,'k-')
51 hold on
52 plot(1,k,'k-');
53 ylabel('Valores de h e k');

```

```

52 xlabel('Tempo (s)');
53 legend('h(t)', 'k(t)');
54 title(['%s', titulo]);

```

Ainda, existe a referência de termos como A_β^n , D_β^n e E_β^n , no qual o fator de normalização N_n foi colocado para fora. Tais fatores são listados a seguir como funções externas escritas também em MATLAB®.

```

1 function j = Anb(m,n)
2
3 j = (factorial(2*n-2*m)*(-1)^m)/(factorial(m)*factorial(n-m)*factorial
  ((n/2)-m)^2*2^(2*n-2*m));

```

```

1 function j = Dnb(m,n)
2
3 b=factorial(((n-1)/2)-m);
4 c = factorial(((n+1)/2)-m);
5
6 j = (factorial(2*n-2*m)*(-1)^m)/(factorial(m)*factorial(n-m)*b*c*2^(2*n
  -2*m));

```

```

1 function j = Enb(m,n)
2
3 a = factorial(2*n-2*m);
4 b = factorial(n-m);
5 c = factorial(((n-2)/2)-m);
6 d = factorial(((n+2)/2)-m);
7 e = 2^(2*n-2*m);
8
9 j = (a*(-1)^m)/(factorial(m)*b*c*d*e);

```

```

1 function j = Nn(n)
2
3 j = sqrt((2*n+1));

```


4 Resultados

4.1 Análise de Perfis

A análise das equações obtidas foi feita com a implementação dos códigos já descritos. Como validação, foi utilizado o mesmo modelo aplicado originalmente em [Cook, 1991], que utiliza o modelo gravitacional *Bills-Ferrari* de ordem 16. Assim, utilizando como parâmetros iniciais os mesmos fornecidos em [BILLS and FERRARI, 1980] para o raio equatorial lunar, parâmetro gravitacional, e um semi-seixo maior de 1888 km, foi obtido a Figura 3.

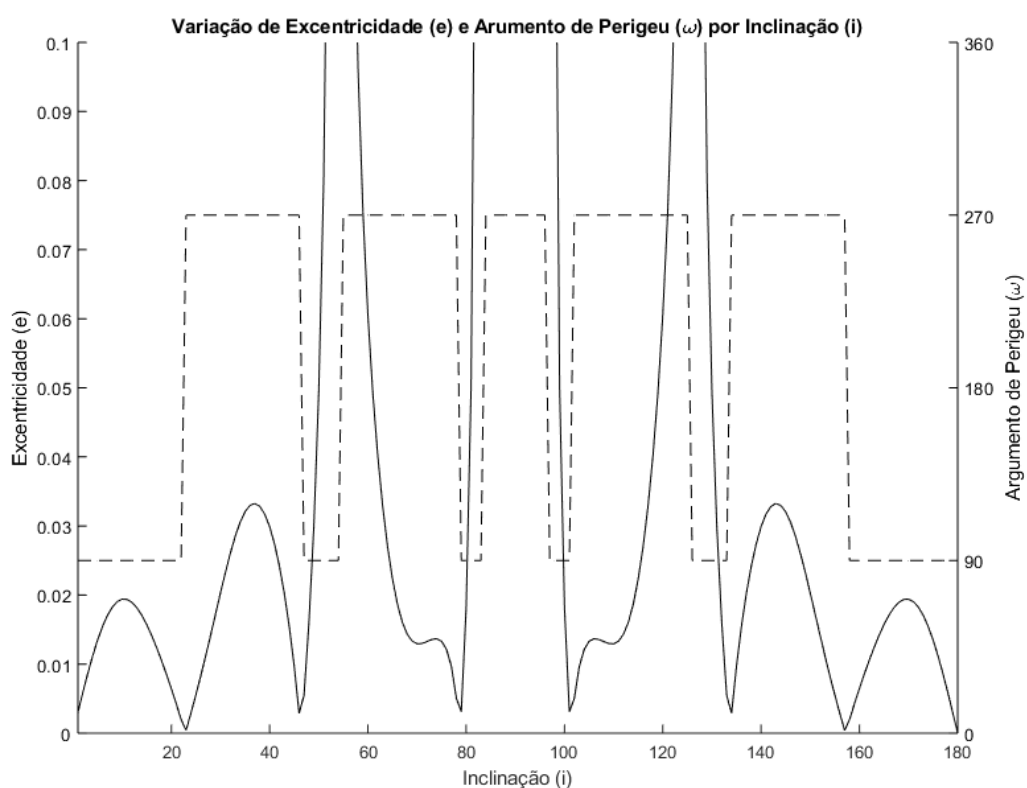


Figura 3: Análise da excentricidade e do argumento de perigeu da órbita congelada para o modelo lunar semelhante ao inspecionado em [Cook, 1991]

Na Figura 3 é possível notar que alguns pontos tendem a zero, os quais são soluções reais da relação 42 e concordam com os resultados obtidos no trabalho de [Cook, 1991]. Em relação ao perfil da curva, nem todos os pontos são exatamente iguais, o que pode partir da escolha de diferentes parâmetros iniciais que não puderam ser determinados apropriadamente uma vez que na obra original não foram especificados.

Uma vez validados os códigos desenvolvidos, de forma que pudessem fornecer ite-

rativamente as soluções para a equação Eq.(42), eles foram aplicados para um modelo terrestre utilizando-se o modelo gravitacional *Joint Gravity Model 2*, um modelo de coeficientes harmônicos que atinge ordem 70 [Barthelmes, 2016]. Para o valor do raio equatorial terrestre foi usado $a_{em} = 6378.137\text{km}$ e como parâmetro gravitacional foi usado $\mu = 0.39860 \times 10^6\text{km}^3\text{s}^{-2}$ [Williams, 2018]. Ainda, foi utilizado o satélite CBERS2 para se obter o valor do semi-eixo maior. Tal valor foi de $a = 7150.5\text{km}$ [Peat, 2018]. Assim, as Figuras 4 e 5 apresentam a variação da excentricidade bem como o argumento de perigeu da órbita congelada em função da inclinação para o modelo terrestre, sendo que a primeira utiliza coeficientes harmônicos zonais até ordem 50 e a segunda até 55.

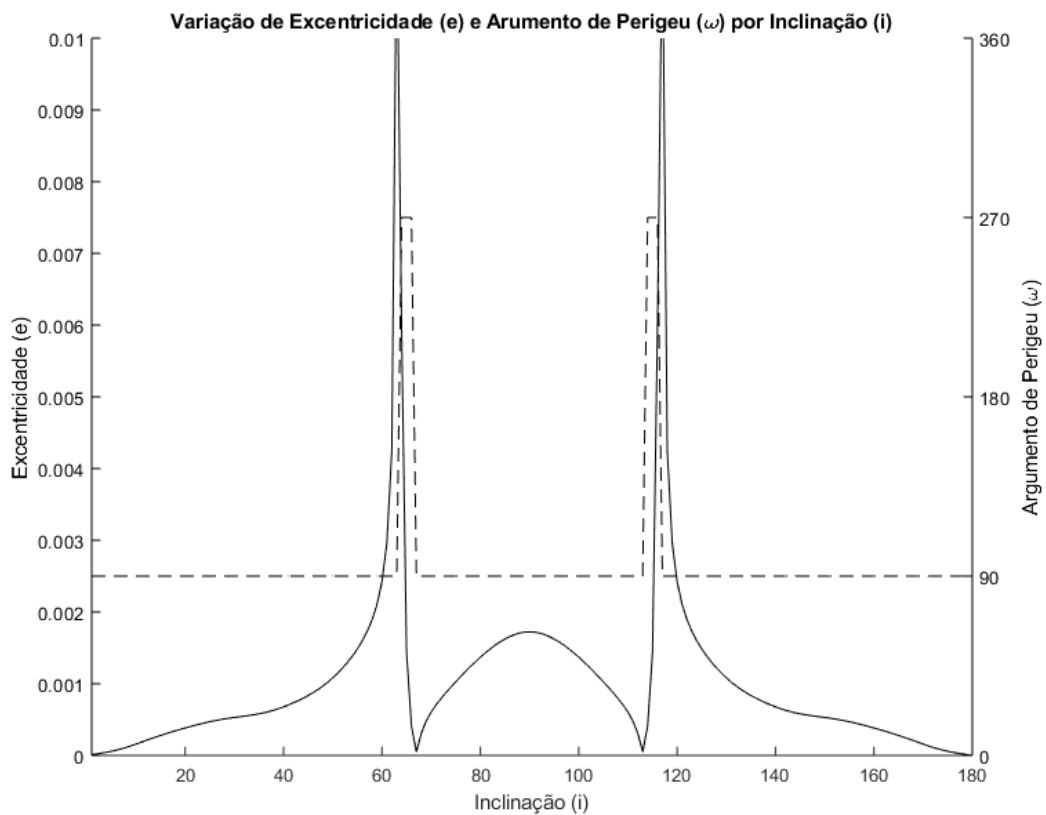


Figura 4: Análise da excentricidade da órbita congelada para o modelo terrestre JGM2 de ordem 50

Pelas Figuras, é possível notar algumas ranhuras no intervalo de inclinação de 70° a 110° quando se utiliza uma ordem maior. Tal fato decorre do aumento do número de raízes reais para a equação Eq.(42) no intervalo dado de inclinação. Conforme aumenta-se a ordem da análise, mais evidentes se tornam as ranhuras, de forma que para ordem 70 tal perfil não possui um aspecto contínuo e os resultados se tornam divergentes. Para ambas as Figuras, porém, é possível notar que a excentricidade tende a valores extremamente reduzidos para uma inclinação de 67° , sendo uma solução real, e portanto uma órbita con-

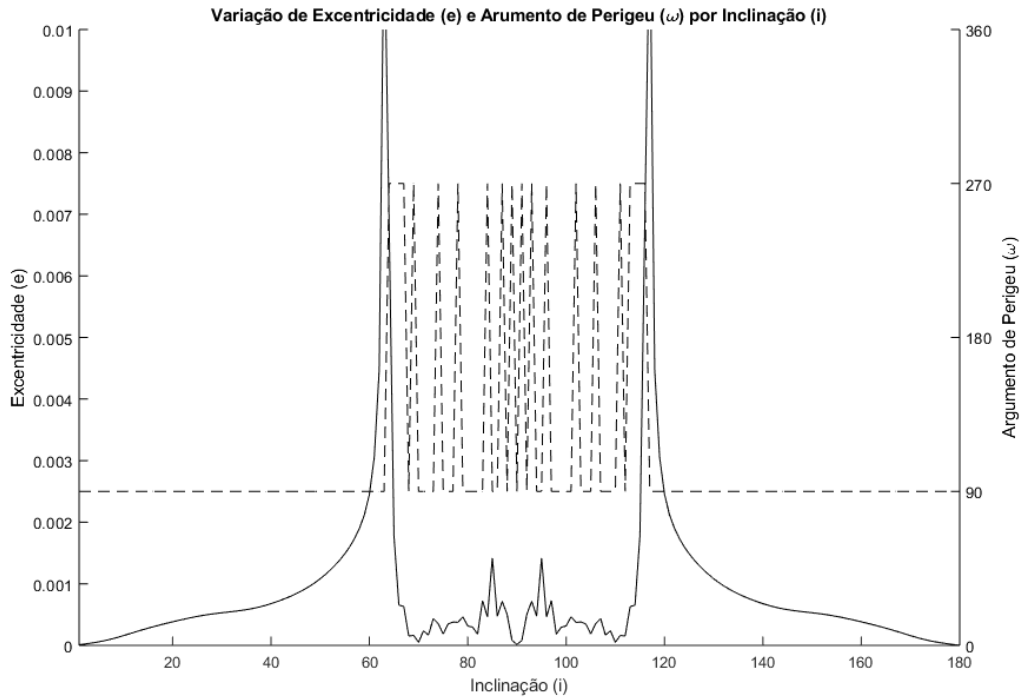
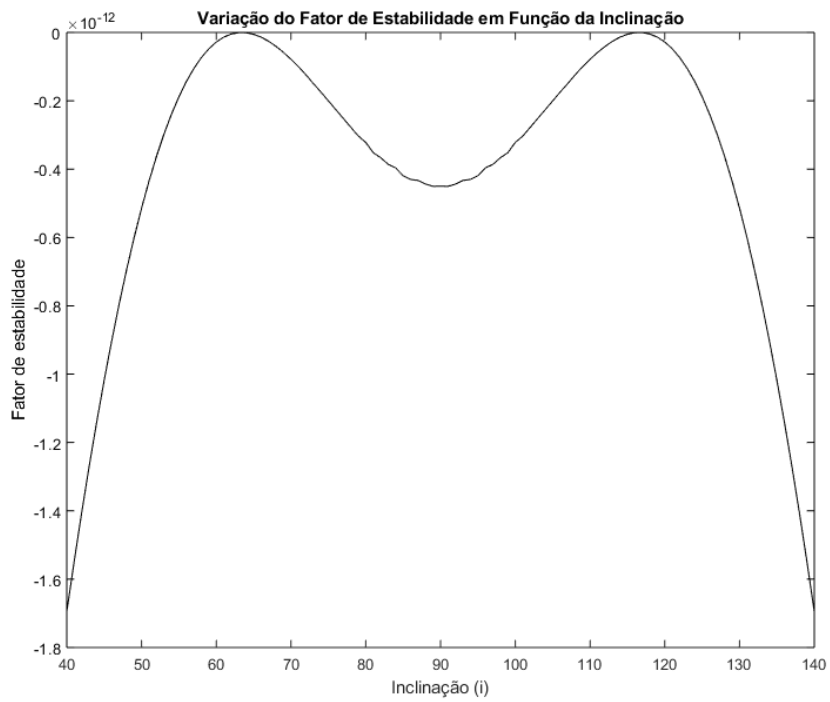


Figura 5: Análise da excentricidade da órbita congelada para o modelo terrestre JGM2 de ordem 55

gelada circular de excentricidade de aproximadamente 4.93×10^{-5} pode ser obtida com o uso de uma inclinação de 67° para um satélite com especificações similares as do CBERS2. Para o caso do satélite CBERS2, que possui uma inclinação de 98.38° [Peat, 2018], para obter um *design* orbital congelado, utilizando do modelo de ordem 50, a excentricidade deveria ser de 0.0015; para ordem 55, a excentricidade deveria ser de 1.8219×10^{-4} .

A análise da estabilidade dos parâmetros é feita a partir da observação da Figura 6, na qual é apresentada a curva do fator de estabilidade em cada posição de ângulo entre 50° a 130° para ordem 55. Nela nota-se que não existem valores positivos, não possuindo raízes reais para Γ^2 e portanto não havendo propagações de $h(t)$ e $k(t)$ na forma exponencial, mas apenas na forma senoidal. Portanto, a variação é convergente para todos os ângulos exceto os de 63° a 166° , que serão brevemente discutidos. A Figura 7 representa um caso de propagação senoidal para um valor de inclinação igual a do satélite CBERS2 [Peat, 2018] com valores iniciais de $h_0 = k_0 = 0$ e variação temporal em segundos.



0.8

Figura 6: Variação do fator de estabilidade em relação à inclinação para ordem 55

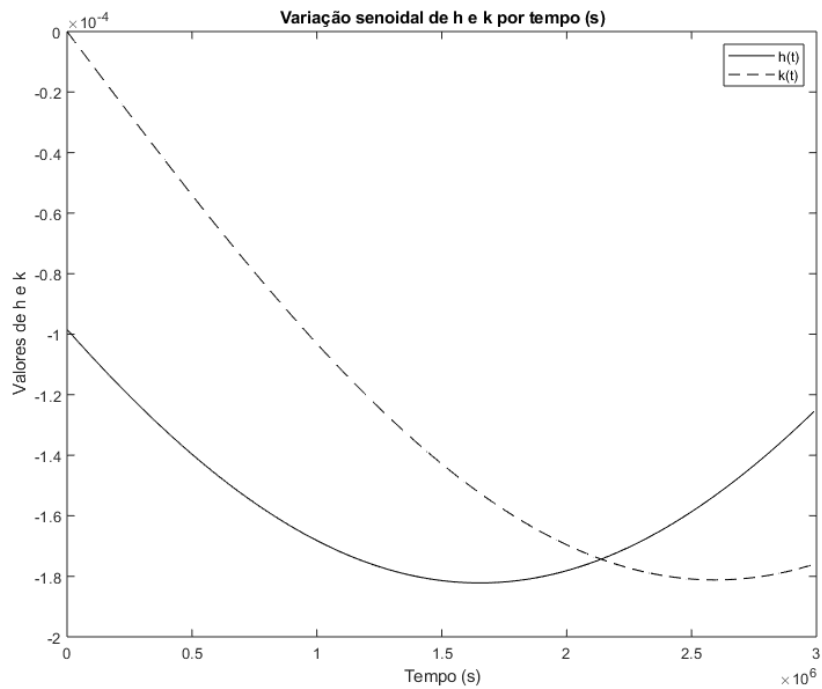


Figura 7: Propagação de h e k em função do tempo para um ângulo de 98.38°

4.2 Ângulo Crítico

Um ponto ainda não mencionado e importante de se notar são os ângulos de aproximadamente 63° e 117° , que apresentam uma súbita divergência na Figura 5 e constituem pontos singulares da excentricidade. Tal singularidade é devida ao fato de que existe um ângulo denominado *ângulo crítico* nas proximidades de 63.43° e 116.56° para corpos com o termo J_2 muito maior que qualquer outro termo na descrição harmônica zonal. Porém, para o estudo realizado, o ângulo crítico obtido pelas Figuras 4 e 5 não é exatamente igual ao ângulo crítico do termo J_2 pois leva em consideração ainda a influência de todos os coeficientes zonais pares. Como consequência, o método descrito é eficaz também na determinação do ângulo crítico real de um dado corpo a partir do seu modelo gravitacional.

Para valores de inclinação na vizinhança do ângulo crítico é possível notar que o fator de estabilidade possui um valor nulo, sendo necessária a análise de ambos os valores de η e ϵ , uma vez que configuram uma solução singular. Em relação ao tipo de propagação que age sobre as coordenadas para quando a inclinação estiver na vizinhança de tal ângulo, pela análise computacional é possível notar que o valor nulo do fator de estabilidade é atingido para o caso $\eta = \epsilon$. Desta forma, as equações que descrevem a propagação de $h(t)$ e $k(t)$ são dadas pela Eq.(44). Em tal caso, assim como já descrito, órbitas congeladas podem existir para qualquer valor de excentricidade quando o argumento do perigeu for 90° ou 270° , o que justifica o uso de tais inclinações como parâmetros iniciais comuns, a fim de se obter uma órbita congelada [Liu et al., 2011].

5 Conclusão

O conjunto de equações formadas como referência para o desenvolvimento deste trabalho formam uma base na qual é possível fazer a avaliação de conjuntos de parâmetros iniciais que condicionam órbitas congeladas de forma que as soluções da equação Eq.(42) configuram uma órbita congelada circular. A aplicação de tais equações neste trabalho foi feita com implementação computacional, utilizando como plataforma de análise o software MATLAB®. A validação do código escrito foi feita a partir da comparação da simulação do modelo lunar *Bills-Ferrari* com os resultados apresentados em [Cook, 1991]. Como resultado, foi obtido perfis de excentricidade e argumento de perigeu em função da inclinação para o modelo gravitacional terrestre *Joint Gravity Model 2* para diferentes ordens de coeficientes harmônicos zonais. É importante notar que aqui a única consideração feita é em relação ao potencial perturbador geopotencial, excluindo qualquer efeito de perturbação decorrente da pressão de radiação ou arrasto atmosférico. Porém, uma vez que a influência do geopotencial é maior, o estudo continua sendo válido e muito importante para determinar as órbitas congeladas mais apropriadas.

Foram feitas análises da excentricidade da órbita congelada para o modelo terrestre JGM2, de ordens 50 e 55, que foi obtida para inclinação em torno de 67° . Quando o ângulo varia entre 70° e 110° , aproximadamente, o comportamento apresenta ranhuras nos gráficos (Figura 5), decorrente do aumento na ordem dos coeficientes harmônicos zonais. Discute-se também o fator de estabilidade para tal domínio de inclinação, sendo possível perceber que os valores contidos dentro dos limites dos ângulos críticos são estáveis e atingem um pico de estabilidade máxima em 90° , justificado pela simetria da função seno em torno de tal ângulo. Assim, tal limite configura outro conjunto de órbitas congeladas estáveis e possíveis de serem obtidas e que possuem alguns valores de raízes reais, dependendo da ordem que os coeficientes assumem na análise.

Outro resultado importante obtido neste trabalho é a avaliação iterativa do ângulo crítico, o qual considera todos os termos pares da descrição harmônica zonal do corpo. Desta forma, os ângulos crítico obtidos são ligeiramente diferentes do valor clássico de 63.43° e 116.56° , pois estes avaliam apenas a influência do valor J_2 e desconsideram a influência dos termos pares restantes.

A solução trivial $i = 0^\circ$ da Eq.(42) configura uma órbita congelada de excentricidade nula. Porém, tal solução é singular nas equações variacionais de Lagrange apresentadas, de forma que, para a avaliação deste ângulo, se faz necessário uma nova classe de substituição de variáveis equinociais. A inspeção de relações de eliminação de singularidade e órbitas congeladas de caráter equatorial será investigada em um futuro projeto de IC.

Referências

- [Barthelmes, 2016] Barthelmes, F. & Köhler, W. (2016). International centre for global earth models (icgem). *Journal of Geodesy* (2016), 90(10), pp 907-1205.
- [BILLS and FERRARI, 1980] BILLS, B. G. and FERRARI, A. J. (1980). A harmonic analysis of lunar gravity. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*,
- [Brouwer, 1961] Brouwer, D. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press.
- [Capderou, 2005] Capderou, M. (2005). *Satellites: Orbits and Missions*. Springer-Verlag Paris, first edition.
- [Cook, 1991] Cook, R. A. (1991). The long-term behavior of near-circular orbits in a zonal gravity field. *American Astronautical Society*.
- [Curtis, 2013] Curtis, H. D. (2013). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier, third edition.
- [Eckman, 2011] Eckman, R. A. (2011). Normalization of gravitational acceleration models. *NASA Johnson Space Center; Houston, TX, United States*.
- [Kaula, 1966] Kaula, W. M. (1966). *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. Blaisdell Publishing Company.
- [Liu et al., 2011] Liu, X., Baoyin, H., and Ma, X. (2011). Extension of the critical inclination. *Astrophysics and Space Science*, 334(1):115–124.
- [Peat, 2018] Peat, C. (2018). Heavens-above. <https://www.heavens-above.com/orbit.aspx?satid=28057>. Acessado em 4 de Abril, 2018.
- [Williams, 2018] Williams, D. D. R. (2018). Earth fact sheet. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>. Acessado em 20 de Abril, 2018.