



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

SATÉLITES ARTIFICIAIS: PERTURBAÇÕES ORBITAIS

Thaís Helena Oliveira Ferreira

INPE
São José dos Campos
2018



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

SATÉLITES ARTIFICIAIS: PERTURBAÇÕES ORBITAIS

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/INPE/CNPq)

Thaís Helena Oliveira Ferreira (UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
Email: thaishelena10@hotmail.com

Rodolpho Vilhena de Moraes (Orientador)
Email: rodolpho.vilhena@gmail.com

INPE
São José dos Campos
2018

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo financiamento e ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pela oportunidade da bolsa.

RESUMO

Quando se estuda órbitas de satélites naturais ou artificiais, é indispensável analisar as forças que modificam a trajetória de tais corpos. Se ignorarmos a existência de perturbações, um satélite, sujeito exclusivamente à atração gravitacional de um corpo central, desenvolve uma trajetória cônica fixa no plano e em um plano fixo. Na realidade, quando forças perturbativas são consideradas, os parâmetros os quais descrevem a órbita não são mais constantes. Este trabalho tem objetivo de estudar o comportamento dos elementos orbitais de satélites artificiais quando são consideradas forças perturbativas que derivam da distribuição não uniforme da massa dos corpos centrais. Dois potenciais serão considerados: o primeiro será uma aproximação em termos apenas do harmônico J_2 e o segundo uma aproximação em termos de J_2 e C_{22} .

Palavras-chave: Movimento Orbital. Perturbações. Potencial gravitacional.

ARTIFICIAL SATELITES: ORBITAL PERTUBATIONS

ABSTRACT

When orbits of natural or artificial satellites are studied, it is crucial to analyze the perturbations that modify the trajectory of such bodies. If we ignore the existence of perturbations, the satellite is exclusively subject to gravitational pull of a central body and it describes a coplanar conical trajectory on a fixed plane. Actually, when disturbing forces are considered, five parameters, which describe the orbit, are no longer constants while the mean anomaly describes a uniform circular motion. The purpose of this project is to study the behavior of orbital elements of artificial satellites taking into account perturbative forces derived from the non-uniform distribution of mass of the central bodies. Two potentials are considered here: the first is an approximation solely in secular terms of the harmonic J_2 and the second is an approximation in terms of J_2 and C_{22} .

Keywords: Orbital Motion. Perturbations. Gravitational potential.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Sistema de coordenadas do problema dos dois corpos.	3
2.2 Elipse do movimento orbital.	5
2.3 Elementos orbitais. π_1 é plano da órbita, π_2 é o plano de referência cen- trado em S, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S.	6
2.4 Classificação dos harmônicos esféricos.	8
3.1 Corpos celestes que serão estudados.	13
4.1 Variação dos elementos orbitais da Lua em um intervalo de 30 dias. . . .	15
4.2 Variação dos elementos orbitais de Titã em um intervalo de 30 dias. . . .	16
4.3 Variação dos elementos orbitais de Europa em um intervalo de 30 dias. .	17

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	2
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1 Problema dos Dois Corpos	3
2.1.1 Redução do Problema dos Dois Corpos	3
2.1.2 Resolução do Problema dos Dois Corpos	4
2.1.3 Elementos Orbitais	6
2.2 Equações planetárias de Lagrange	7
2.3 Potencial Gravitacional	7
2.3.1 Harmônicos Esféricos	8
2.4 Método de Runge-Kutta de quarta ordem	8
3 METODOLOGIA	10
3.1 Expressão do potencial	10
3.2 Derivadas parciais da expressão do potencial	10
3.2.1 Potencial com J_2	11
3.2.2 Potencial com J_2 e C_{22}	11
3.3 Equações planetárias de Lagrange	12
3.4 Constantes dos corpos celestes estudados	13
3.5 Condições iniciais	13
3.6 Integração numérica	14
4 RESULTADOS	15
4.1 Satélite orbitando a Lua	15
4.2 Satélite orbitando Titã	16
4.3 Satélite orbitando Europa	17
4.4 Análise dos resultados	17
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	19
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	20

1 INTRODUÇÃO

Dentre os fenômenos astronômicos observados que intrigavam os homens na antiguidade destaca-se a irregularidade do movimento do Sol, da Lua, dos planetas e cometas em relação às chamadas estrelas fixas. Embora várias teorias e métodos houvessem sido propostos e utilizados para prever a posição destes astros em datas futuras, somente a partir do século XVI, baseados nos trabalhos e observações de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileo e Newton, a humanidade pôde elaborar teorias científicas claras com rigor, inclusive tornando receptiva a possibilidade de não só colocar objetos em órbita como também viajar pelo espaço.

Em 1957 a União Soviética lançou o primeiro satélite artificial da história, chamado de Sputnik 1. Desde este acontecimento, milhares de satélites de mais de 40 países foram lançados, mas grande parte já está desativada devido a falhas no funcionamento ou fim de vida útil.

Para que as medidas feitas através de satélites possam ser as mais precisas de acordo com a finalidade da missão, é essencial que suas órbitas e altitudes sejam conhecidas, em cada instante, a fim de evitar falhas que possam tornar o satélite inutilizável. Nasce daí a necessidade de construção de teorias ou métodos especiais, geralmente adaptados a específicas missões.

Existem diversas forças que modificam a órbita de um satélite artificial e para que este continue exercendo suas funções, é necessária a correção na trajetória. Uma dessas forças perturbativas deriva da distribuição não uniforme de massa do corpo central, que é medida a partir da equação do potencial gravitacional (equação (2.15)).

As perturbações causadas pelo potencial gravitacional serão estudadas neste trabalho para que se possa avaliar quais são os efeitos desta força no movimento de satélites artificiais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Problema dos Dois Corpos

O Problema dos dois corpos caracteriza o movimento de dois corpos em um sistema inercial, sujeitos à uma força central, que no caso é a força gravitacional, desconsiderando qualquer tipo de força externa que cause perturbação(VILHENA DE MORAES, 1978).

2.1.1 Redução do Problema dos Dois Corpos

Seja o sistema inercial $Oxyz$, com o P_1 sendo a posição do corpo 1 de massa m_1 , e P_2 sendo a posição do corpo 2 de massa m_2 , como mostrado na figura 2.1:

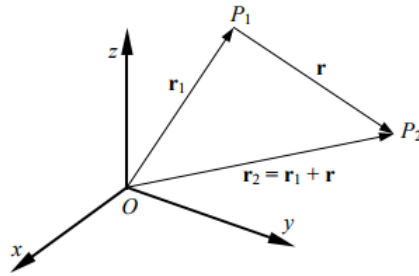


Figura 2.1: Sistema de coordenadas do problema dos dois corpos.

De acordo com a lei de gravitação universal de Newton, a força que m_j exerce sobre m_i , com $i \neq j$ é dada por:

$$\vec{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{P_i - P_j}{r^3}, \quad (2.1)$$

em que $r = |\vec{r}|$.

Pela Segunda Lei de Newton tem-se:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r} \frac{P_1 - P_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r} \frac{P_2 - P_1}{r^2}. \quad (2.3)$$

As acelerações podem ser escritas de forma mais simplificada:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = +Gm_2 \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.5)$$

Como o sistema de coordenadas é inercial pode-se escrever também que:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_1 = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é chamada de equação diferencial do movimento de um corpo em relação ao outro (KUGA et al., 2012).

2.1.2 Resolução do Problema dos Dois Corpos

Como pode ser observado pela equação (2.6), a força é central e portanto o movimento de um corpo em relação ao outro é plano. Temos assim um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem, que quando integrado faz com que apareçam quatro constantes de integração. Utilizando-se a conservação do momento angular e a Lei da Conservação de Energia, dada por:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E, \quad (2.7)$$

em que $\mu = G(m_1 + m_2)$ e E é constante, o sistema de equações diferenciais de segunda ordem dado pela equação (2.6) pode ser integrado e obtemos a equação geral de uma cônica:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (2.8)$$

com:

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad (2.9)$$

$$C = |\vec{C}|,$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EC^2}{\mu^2}}. \quad (2.10)$$

em que p é um parâmetro e e é a excentricidade da cônica e ω é uma constante de integração. Já vimos que necessitamos de quatro constantes de integração e apareceram três destas constantes, que são e , p e ω . A quarta constante virá do seguinte fato:

Sabemos que, da conservação do momento angular

$$r^2\dot{\theta} = C, \quad (2.11)$$

e obtivemos da equação (2.8), $r = r(\theta)$. Assim, a quarta constante virá da integração

$$\int_{\tau}^t dt = \frac{1}{C} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta) d\theta. \quad (2.12)$$

Em geral, escolhemos para τ o instante de passagem pelo pericentro. No caso especial, outras duas constantes de integração aparecem e fixam a órbita no plano e o plano da órbita em relação ao sistema inercial.

Da equação (2.10), verifica-se que: se $E < 0$ então $e < 1$ e a órbita é elíptica; se $E = 0$ então $e = 1$ e a órbita é parabólica; se $E > 0$ então $e > 1$ e a órbita será hiperbólica.

Neste trabalho será considerado apenas o caso elíptico, portanto $p = a(1 - e^2)$.

Na figura 2.2, f é chamado de anomalia verdadeira, u é a anomalia excêntrica.

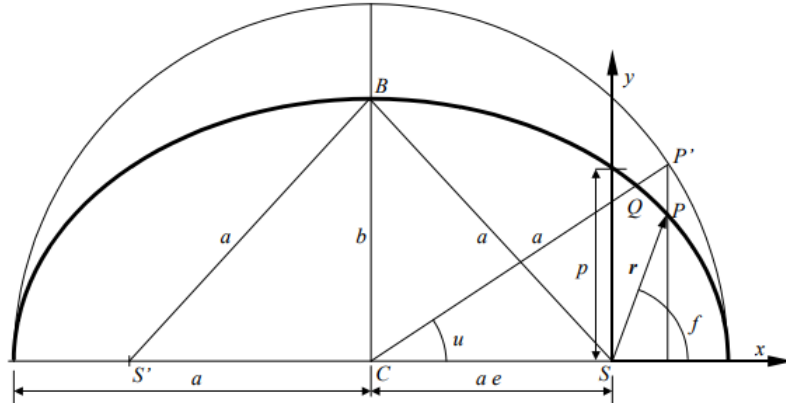


Figura 2.2: Elipse do movimento orbital.

Define-se também a anomalia média:

$$M = n(t - \tau), \quad (2.13)$$

em que $n^2 a^3 = \mu$, $n = \frac{2\pi}{T}$, sendo T o período orbital e τ o instante de passagem pelo pericentro. A relação entre estas anomalias pode ser encontradas em (KUGA et al., 2012).

2.1.3 Elementos Orbitais

As seis constantes de integração têm uma interpretação geométrica e cinemática cuja relação com as constantes iniciais necessárias para resolver a equação (2.6) são dadas pelos chamados problema direto e problema inverso.

Os elementos geométricos que definem uma órbita são os cinco parâmetros, os quais estão definidos abaixo e mostrados na figura 2.3. O sexto parâmetro τ , de interpretação cinemática, é o instante de passagem pelo pericentro.

- a : Semieixo maior da órbita.
- e : Excentricidade da órbita.
- i : Inclinação orbital.
- ω : Argumento do periastro.
- Ω : Longitude do nodo ascendente.

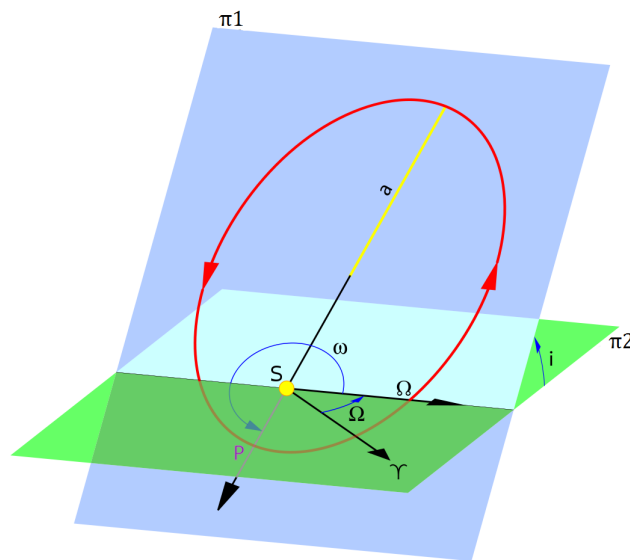


Figura 2.3: Elementos orbitais. π_1 é plano da órbita, π_2 é o plano de referência centrado em S, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S.

2.2 Equações planetárias de Lagrange

O que foi visto acima refere-se apenas ao movimento de um corpo de massa desprezível orbitando um corpo central com distribuição uniforme de massa. Se for considerada uma perturbação, os elementos orbitais podem ser obtidos resolvendo-se as Equações Planetárias de Lagrange, dadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde R é a função perturbadora.

2.3 Potencial Gravitacional

A equação (2.15) define o potencial gravitacional R do corpo central, expresso em termos harmônicos esféricos (MORANDO, 1974).

$$\begin{aligned}
 R = \frac{\mu}{r} & \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin(\phi)) \right. \\
 & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{J_{n,m} a_e^n}{r^n} P_{n,m}(\sin(\phi)) \cos m(\lambda - \lambda_{n,m}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que:

- r - vetor posição do satélite,
- μ - constante gravitacional do corpo central,
- a_e - raio do corpo central,
- n, m - o grau e a ordem dos polinômios, respectivamente,

- ϕ - latitude do satélite,
- λ - longitude do satélite,
- $P_n, P_{n,m}$ - Polinômios e Polinômios Associados de Legendre,
- $J_n, J_{n,m}$ e $\lambda_{n,m}$ - características do corpo central o qual o satélite orbita.

A partir da equação (2.15) é possível calcular a perturbação devida a distribuição não uniforme de massa do corpo central, o qual um satélite orbita.

2.3.1 Harmônicos Esféricos

Os termos fatorados J_n e $J_{n,m}$ da equação (2.15) são relacionados com os harmônicos esféricos. Eles descrevem o achatamento do corpo central. Por simplicidade, J_n e $J_{n,m}$ serão chamados de harmônicos esféricos. A representação geométrica dos harmônicos esféricos depende do grau n e ordem m da função. Se $m = 0$, a superfície harmônica depende apenas da colatitude e são denominados harmônicos esféricos zonais. Se $n = m$, ela dependerá somente da longitude e são denominados harmônicos esféricos setoriais. Quando $m > 0$ e $n > k$, os harmônicos serão chamados de harmônicos esféricos tesserais.

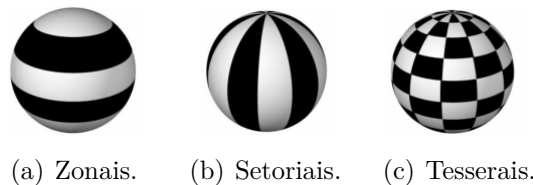


Figura 2.4: Classificação dos harmônicos esféricos.

2.4 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

O método de Runge-Kutta é um método numérico que consiste em calcular aproximações para soluções do problemas de valor inicial para equações diferenciais como o mostrado abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Este método é frequentemente utilizado pois não é necessário calcular explicitamente

as derivadas das funções em seu processo (RUGGIERO; LOPES, 1988). As seguintes equações descrevem as iterações do método:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde h é o passo de integração e

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3 h)$$

3 METODOLOGIA

3.1 Expressão do potencial

A partir de manipulações algébricas é possível obter a expressão do potencial (equação (2.15)) em função dos elementos orbitais keplerianos. Deste modo, ao expandir a equação obtida até a ordem e grau desejados, tivemos como resultado as expressões abaixo. A primeira considera o potencial expresso apenas em termos que contém o harmônico esférico J_2 . Já a segunda considera termos que têm os harmônicos J_2 e C_{22} .

$$R_{J_2} = \mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.1)$$

$$R_{J_2, C_{22}} = \mu \frac{a_e^2}{a^3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{J_2}{2} + \sin^2 i \left(-\frac{3J_2}{4} + \frac{3C_{22}}{2} \cos(2bt - 2\Omega) \right) \right). \quad (3.2)$$

Sendo a_e e b , respectivamente, o raio equatorial e movimento médio do corpo estudado. Ambas as equações, separadamente, foram escolhidas para serem utilizadas como as funções perturbadoras da equação (2.14). Os efeitos que elas causam em alguns corpos celestes serão comparados a fim de analisar as diferenças entre considerar apenas J_2 ou J_2 e C_{22} na equação do potencial.

3.2 Derivadas parciais da expressão do potencial

A seguir são apresentadas as derivadas parciais de equação (3.1) e equação (3.2) em relação aos seis elementos orbitais (a , e , i , ω , Ω e M).

3.2.1 Potencial com J_2

Quando se considera apenas o potencial gravitacional com ordem até J_2 obtém-se as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial a} &= -3\mu J_2 \frac{a_e^2}{a^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}, \\
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial e} &= 3e\mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}}, \\
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial i} &= -\mu J_2 \frac{a_e^2}{a^3} \left(\frac{3}{2} \sin 2i \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}, \\
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial \omega} &= 0, \\
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial \Omega} &= 0, \\
\frac{\partial R_{J_2}}{\partial M} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.2 Potencial com J_2 e C_{22}

Quando se considera o potencial gravitacional com ordem até J_2 e C_{22} obtém-se as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial a} &= -3\mu \frac{a_e^2}{a^4} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{J_2}{2} + \sin^2 i \left(-\frac{3J_2}{4} + \frac{3C_{22}}{2} \cos(2bt - 2\Omega) \right) \right), \\
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial e} &= 3e\mu \frac{a_e^2}{a^3} (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{J_2}{2} + \sin^2 i \left(-\frac{3J_2}{4} + \frac{3C_{22}}{2} \cos(2bt - 2\Omega) \right) \right), \\
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial i} &= \mu \frac{a_e^2}{a^3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \sin 2i \left(-\frac{3J_2}{4} + \frac{3C_{22}}{2} \cos(2bt - 2\Omega) \right), \\
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial \omega} &= 0, \\
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial \Omega} &= 3\mu C_{22} \left(\frac{a_e^2}{a^3} \right) (\sin^2 i) \sin(2bt - 2\Omega) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}, \\
\frac{\partial R_{J_2, C_{22}}}{\partial M} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3 Equações planetárias de Lagrange

Substituindo as equações de 3.3 em 2.14 obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 0, \\
\frac{de}{dt} &= 0, \\
\frac{di}{dt} &= 0, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{nJ_2}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(3 - \frac{15}{4} \sin^2 i\right), \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{nJ_2}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \cos i, \\
\frac{dM}{dt} &= n + 3 \frac{nJ_2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

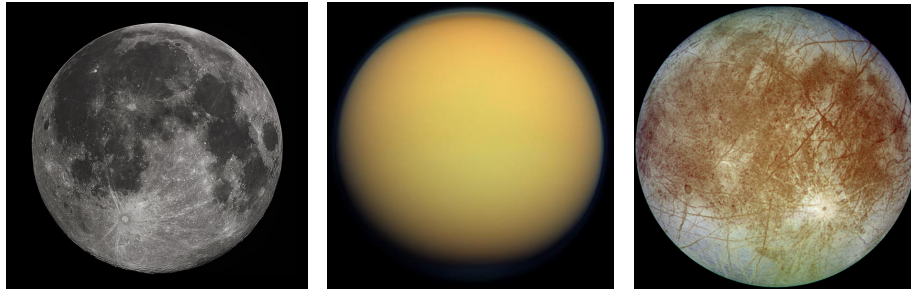
Note que este sistema não é acoplado, mas para as equações de 3.4, o sistema de equações diferenciais obtido é acoplado, pois $\frac{di}{dt} \neq 0$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 0 \\
\frac{de}{dt} &= 0 \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{3nC_{22} \sin i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \sin(2bt - 2\Omega) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(J_2 \left(\frac{-15 \sin^2 i}{4} + 3 \right) + C_{22} \left(-3 + \frac{15 \sin^2 i}{2} \right) \cos(2bt - 2\Omega) \right) \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{n \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(-\frac{3J_2}{2} + 3C_{22} \cos(2bt - 2\Omega) \right) \\
\frac{dM}{dt} &= n + \frac{3n}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \left(\frac{J_2}{2} + \sin^2 i \left(-\frac{3J_2}{4} + \frac{3C_{22}}{2} \cos(2bt - 2\Omega) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Neste caso, a solução do sistema 3.6 deve ser obtida a partir de métodos numéricos para equações diferenciais. O método utilizado no trabalho é o de Runge-Kutta de quarta ordem.

3.4 Constantes dos corpos celestes estudados

Para este trabalho foram utilizadas algumas constantes dos seguintes corpos: Estes



(a) Lua. (b) Titã (Lua de Sa- (c) Europa (Lua de Júpi-
turno). ter).

Figura 3.1: Corpos celestes que serão estudados.

dados são representados na [tabela 3.1](#) (CARVALHO, 2017).

	$a_e(km)$	$\mu(km^3/dia^2)$	J_2	C_{22}	$b(rad/dia)$
Lua	1737	3.6599041×10^{13}	2.032×10^{-4}	2.447305×10^{-5}	0.2344896
Titã	2575	6.7020205×10^{13}	3.3462×10^{-5}	1.0022×10^{-5}	0.39404448
Europa	1569	2.3895337×10^{13}	4.355×10^{-4}	1.3065×10^{-4}	1.7692128

Tabela 3.1: Constantes da Lua, Titã e Europa.

3.5 Condições iniciais

A tabela abaixo mostra as condições iniciais de cada corpo celeste, com $a_0 = a_e + h$.

	$a_0(km)$	e_0	$i_0(rad)$	$\omega_0(rad)$	$\Omega_0(rad)$	$M_0(rad)$
Lua	1837	0.5	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$
Titã	2675					
Europa	1669					

Tabela 3.2: Condições iniciais da Lua, Titã e Europa.

3.6 Integração numérica

Com as condições iniciais apresentadas, podemos integrar os sistemas 3.5 e 3.6 numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (seção 2.4), com o tempo t de 0 a 30 dias e tamanho do passo de 1 minuto.

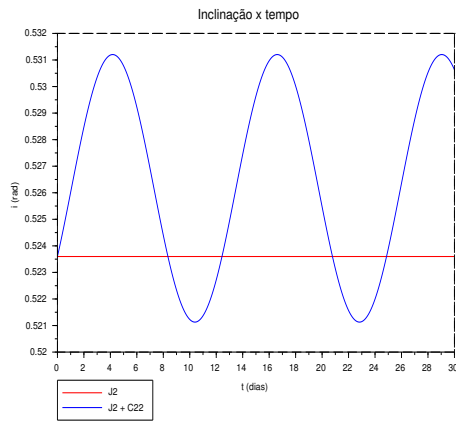
O software *Scilab* foi utilizado para a integração e criação dos gráficos que serão apresentados nos resultados.

4 RESULTADOS

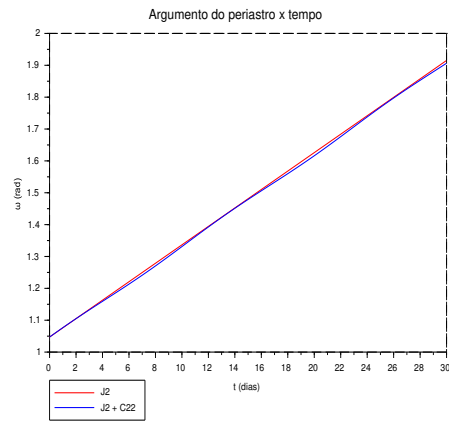
As sessões 4.1, 4.2 e 4.3 mostram as variações da inclinação i , argumento do periastro ω , longitude do nodo ascendente Ω e anomalia média M em relação ao tempo. Note que as variações dos elementos orbitais a e e não são mostradas. O motivo é que as variações destes elementos são constantes e iguais, independente da equação do potencial escolhida, como mostrado em 3.5 e 3.6.

4.1 Satélite orbitando a Lua

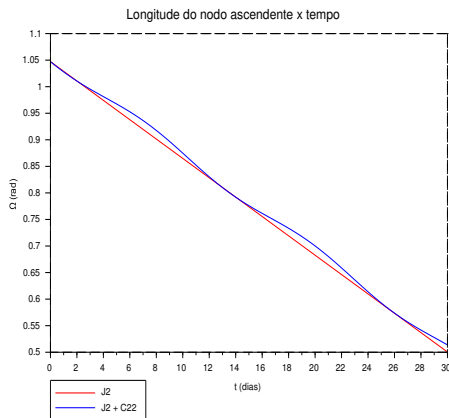
Para um satélite orbitando a Lua, temos os seguintes resultados:



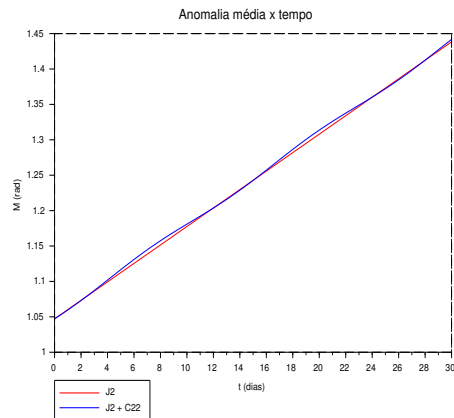
(a) Inclinação x tempo.



(b) Argumento do periastro x tempo.



(c) Longitude do nodo ascendente x tempo.

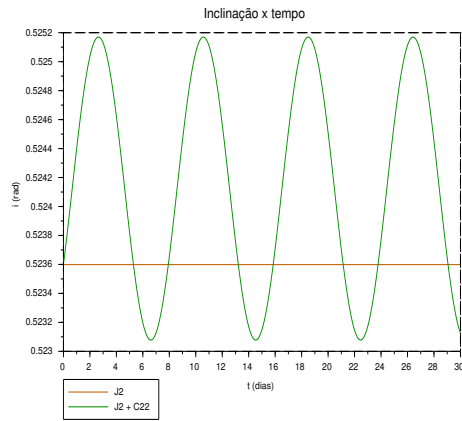


(d) Anomalia média x tempo.

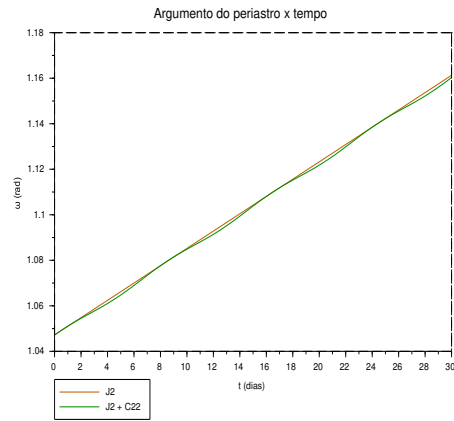
Figura 4.1: Variação dos elementos orbitais da Lua em um intervalo de 30 dias.

4.2 Satélite orbitando Titã

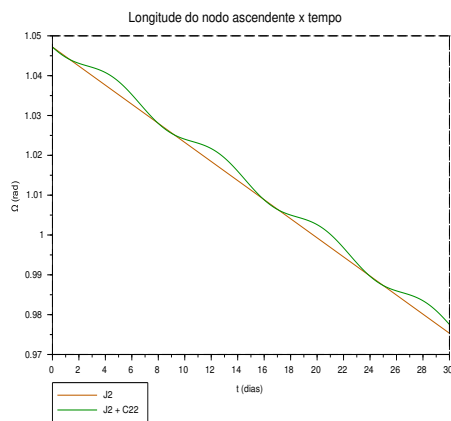
Para um satélite orbitando Titã, temos os seguintes resultados:



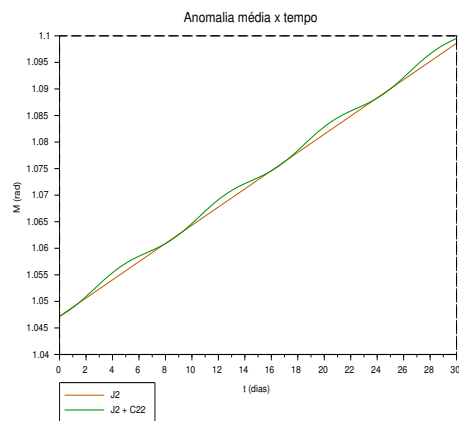
(a) Inclinação x tempo.



(b) Argumento do periastro x tempo.



(c) Longitude do nodo ascendente x tempo.

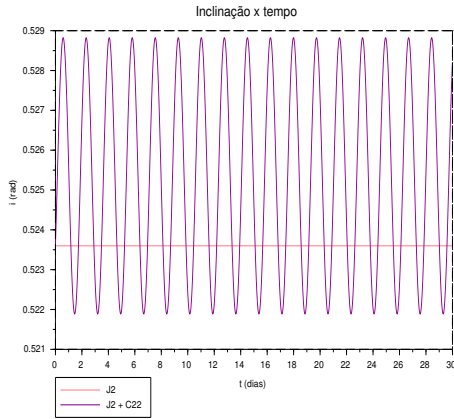


(d) Anomalia média x tempo.

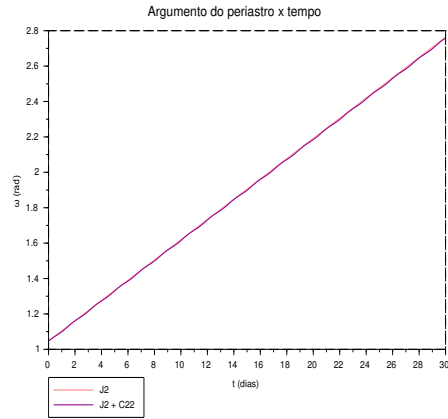
Figura 4.2: Variação dos elementos orbitais de Titã em um intervalo de 30 dias.

4.3 Satélite orbitando Europa

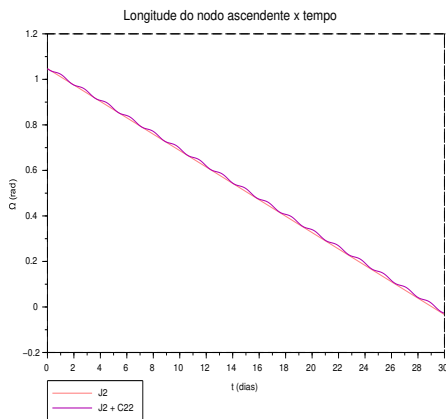
Para um satélite orbitando Europa, temos os seguintes resultados:



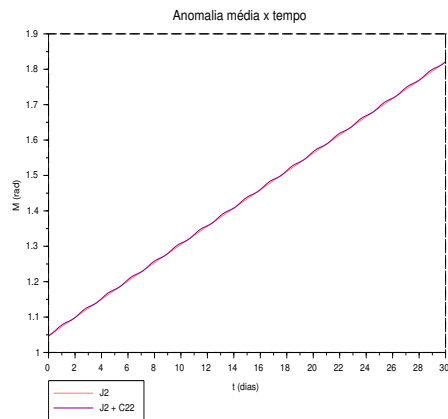
(a) Inclinação x tempo.



(b) Argumento do periastro x tempo.



(c) Longitude do nodo ascendente x tempo.



(d) Anomalia média x tempo.

Figura 4.3: Variação dos elementos orbitais de Europa em um intervalo de 30 dias.

4.4 Análise dos resultados

A partir dos resultados apresentados neste trabalho é possível observar que quando é considerado o potencial com termos somente com J_2 temos que as variações dos elementos keplerianos orbitais métricos são constantes enquanto os elementos angulares variam linearmente com o tempo. De fato, note que o sistema 3.5 não é acoplado e, portanto, a integração dele é muito simples, resultando que $a(t)$, $e(t)$ e $i(t)$ são constantes e $\omega(t)$, $\Omega(t)$ e $M(t)$ são funções lineares.

Quando é levado em consideração a influência do C_{22} , o semi-eixo maior e a excentricidade permanecem constantes mas nos outros elementos aparecem perturbações periódicas.

Como se pode observar nos gráficos, temos que a influência do harmônico C_{22} é bastante relevante quando se considera o potencial gravitacional como função perturbadora, sendo assim indispensável no estudo de órbitas de satélites artificiais que orbitam os corpos celestes estudados neste trabalho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste trabalho foi possível verificar que a influência do C_{22} deve ser considerada para órbitas ao redor dos corpos estudados.

Mensurar os desvios causados pela ação de forças perturbadoras é extremamente importante para que a trajetória seja corrigida, garantindo, assim, o sucesso de missões espaciais ao redor de corpos celestes do Sistema Solar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, J. P. dos S. Analysis of the impact of c_{22} on the orbital eccentricity of spacecrafts around some small non-spherical celestial bodies. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017. 13

KUGA, H. K.; CARRARA, V.; KONDAPALLI, R. R. Introdução à mecânica orbital. INPE, 2012. 4, 5

MORANDO, B. **Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre**. Paris: Gordon & Breach, 1974. 7

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Pearson, 1988. 9

VILHENA DE MORAES, R. Trajetória de veículos espaciais. 1978. 3