MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO NO CONTROLE DE PROCESSOS

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)

Caroline de Oliveira Costa (FATESF, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: caroline_carolcosta@hotmail.com

Dr. Mário César Ricci (DMC/ETE/INPE, Orientador)
E-mail: mariocesarricci@uol.com.br

Julho de 2017

COSTA, Caroline de Oliveira

Estudo sobre os problemas da identificação e controle de processos COSTA, Caroline de Oliveira - São José dos Campos: INPE, 2017.

1. Identificação de parâmetros, controle adaptativo

Agradecimentos

A minha família e noivo por toda paciência e carinho. Ao orientador Dr. Mário César Ricci, pela atenção, dedicação, apoio e paciência em cada etapa do projeto.

RESUMO

O PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO NO CONTROLE DE PROCESSOS

Na teoria de controle moderno frequentemente requer-se uma descrição do sistema em termos de equações diferenciais ou de diferenças e uma descrição das perturbações como processos estocásticos, caracterizados por equações diferenciais estocásticas ou de diferenças ou por propriedades de segunda ordem, tais como funções de covariança e densidades espectrais. Em muitos problemas práticos simplesmente não se dispõe de descrições de sistemas e distúrbios. Quando os modelos não podem ser obtidos a partir de primeiros princípios, usando leis básicas da física, podem-se obter os modelos a partir de dados colhidos experimentalmente no processo num procedimento designado de problema de identificação, o qual pode ser formulado como se segue: Dada uma classe de modelos, um critério e medidas dos sinais de entrada e saída, encontrar um modelo em particular que melhor se ajusta aos dados experimentais de acordo com o critério fornecido. Algumas questões surgem naturalmente ao se utilizar os resultados da identificação para resolver um problema de controle: é possível escolher racionalmente estruturas de modelos e critérios? Importa o fato do resultado da identificação não ser exato? O que é "precisão" de um problema de identificação? Qual é a precisão necessária num caso particular? Nesse trabalho essas questões são discutidas. Um caso simples é analisado, a saber, o problema de controle ótimo de um sistema linear com parâmetros constantes, mas desconhecidos, com uma entrada e uma saída e um critério quadrático. Verificou-se, no entanto, que o arcabouço matemático desenvolvido permite lidar com o caso em que os parâmetros são processos estocásticos. Enfim, obtêm-se alguns resultados sobre o problema adaptativo, isto é, uma situação em que a identificação e o controle são realizados simultaneamente.

Palavra Chave: Identificação de Parâmetros, Controle Adaptativo.

ABSTRACT

THE IDENTIFICATION PROBLEM IN CONTROL PROCESS

In modern control theory it is often required a description of the system in terms of differential or differences equations and a description of perturbations as stochastic processes characterized by differential or stochastic equations; or by second order properties such as covariance functions and spectral densities. In many practical problems simply there are not systems and disturbing descriptions. When the models cannot be obtained from first principles using basic laws of physics, the models can be obtained from data collected experimentally in the process in a procedure designated by identification problem, which can be formulated as follows: Given a class of models, a criterion and input and output measurements signals, find a particular model that best fits the experimental data according to the provided criteria. Some questions arise naturally when using the results of identification to solve a control problem: is it possible to rationally choose model structures and criteria? Does it matter that the identification result is not accurate? What is "accuracy" of an identification problem? What is the precision needed in a particular case? In this work these issues are discussed. A simple case is analyzed, namely, the optimal control problem of a linear system with constant but unknown parameters, with an input and an output and a quadratic criterion. It was verified, however, that the mathematical framework developed allows dealing with the case in which the parameters are stochastic processes. Finally, some results are obtained on the adaptive problem, that is, a situation in which identification and control are performed simultaneously.

Key-words: Identification of Parameters, Adaptive Control

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Parâmetro do sistema
b	Parâmetro do sistema
E	Esperança
e	Sequência de variáveis aleatórias
$e(t)$	Distúrbio/ Ruído
n	Parâmetro do sistema
P	Matriz de Covariância
u	Sinais de entrada
$u(t)$	Controle
V	Função de perda
$\boldsymbol{x}$	Definido como os parâmetros do sistema
y	Saídas
$y(t)$	Saída do sistema
θ	Definido como sinais de entrada/ saída identificados
σ	Desvio padrão
σ^2	Variância

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho baseia-se nos estudos sobre problemas de identificação no controle de processos realizados por Aström e Wittenmark (1971).

A Teoria de Controle tem avançado à medida que cresce o desejo de aplicá-la a problemas práticos na indústria e biociências. Tal teoria requer uma descrição do sistema em termos de equações diferenciais ou de diferenças e uma descrição das perturbações enquanto processos estocásticos, caracterizadas por equações diferenciais estocásticas ou de diferenças ou por propriedades de segunda ordem.

Usando leis físicas básicas, a principio é possivel obter as informações necessarias, mas em muitas aplicações e em problemas práticos na indústria e nas biociências tais descrições de sistemas e distúrbios simplesmente não estão disponíveis, a *identificação* se enquadra para obter as descrições requeridas, podendo obter os modelos a partir de experiências feitas no processo. Como por exemplo, coeficientes de velocidade na farmacocinética e coeficientes de transferência de calor em processos industriais.

O problema de identificação muitas vezes é formulado da seguinte forma: Definem-se uma classe de modelos, as medidas dos sinais de entrada e saída e um critério. Há uma grande variedade de métodos para resolver o problema de identificação. Os métodos diferem na escolha de modelos e critérios, bem como nas técnicas matemáticas. Algumas questões surgem naturalmente ao se utilizar os resultados da identificação para resolver um problema de controle: È possível escolher racionalmente estruturas de modelos e critérios? Importa o fato do resultado da identificação não ser exato? O que é "precisão" de um problema de identificação? Qual é a precisão necessária num caso particular? Nesse trabalho essas questões são discutidas.

1.1. Objetivo

Pretende-se discutir as questões levantadas acima ao analisar um caso simples, a saber, um sistema linear com uma entrada e uma saída com a adoção de um critério quadrático. O principal objetivo é o de resolver um problema de controle ótimo em que o sistema possui parâmetros constantes, mas incógnitos. Verificou-se, no entanto, que o mecanismo matemático permite lidar com o caso em que os parâmetros são processos estocásticos. Enfim, discute-se o problema adaptativo, isto é, uma situação em que a identificação e o controle são realizados simultaneamente, e responder as questões levantas acima.

1.2. Conteúdo do trabalho

Segue a descrição de cada um dos capítulos:

a) Capitulo 2 – Apresentação do modelo matemático do sistema, sendo um sistema linear simples.

b) Capitulo 3 – Apresentação da solução para o problema de controle no caso de parâmetros conhecidos.

c) Capitulo 4 – Demonstração da identificação dos parâmetros, onde é mostrado como é feita a identificação para o controle de um sistema com parâmetros constantes, porém incógnitos. Verificando que a estratégia que minimiza $Ey^2(t)$ em regime é muito diferente da estratégia que minimiza $E\,\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y^2(t)$.

d) Capitulo 5 – Relação entre controle e identificação, onde são discutidas separadamente. Após a identificação dos parâmetros, os resultados são utilizados para resolver o problema de controle.

e) Capitulo 6 – Conclusão: os resultados obtidos serão analisados e, por fim, será dada uma conclusão satisfatória do que foi feito no projeto. Desta forma, verifica-se o conteúdo inicial do projeto, equiparando-o aos resultados encontrados.

2. UM PROBLEMA DE CONTROLE

Nesta seção formula-se um problema de controle simples para um sistema linear. O problema é escolhido, de tal modo que a solução do problema de controle é quase trivial se os parâmetros são conhecidos.

2.1. Um Modelo Matemático do Sistema

Considere um sistema dinâmico linear, discreto no tempo, com uma entrada e uma saída, caracterizado pela relação entrada-saída dada por:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1(t)y(t-1) + \cdots + a_n(t)y(t-n) \\ = b_1(t)u(t-1) + \cdots + b_n(t)u(t-n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

A Equação (2.1) representa a dinâmica de um sistema linear de *n*-ésima ordem. Uma vez que o objetivo é formular um problema de controle, é necessário introduzir alguns distúrbios. Uma forma simples de o fazer é:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1(t)y(t-1) + \cdots + a_n(t)y(t-n) \\ = b_1(t)u(t-1) + \cdots + b_n(t)u(t-n) + e(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que $\{e(t),\ t = ...-1, 0, 1,...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas, com média nula e desvio padrão σ. Também considera-se que $e(t)$ é independente de $y(t-1)$, $y(t-2)$, ..., $u(t-1)$, $u(t-2)$, ...

Em tal caso, o modelo (2.2) representa um processo auto-regressivo se $u(t) = 0$ e uma dinâmica linear geral se $e = 0$. Desta forma, qualquer sistema linear com uma perturbação – que é um processo estocástico estacionário – pode ser aproximado por um modelo do tipo (2.2) se a ordem n é suficientemente grande. Assim, mesmo que o modelo (2.2) seja simples, pode frequentemente ser usado como uma aproximação para uma grande classe de problemas reais.

2.2. O Critério

Considera-se que o propósito do controle é manter a saída do sistema tão próxima quanto possível de 1. O desvio é especificado pelos critérios:

$$El_1 = E[y(t) - 1]^2 \tag{2.3}$$

ou

$$El_2 = E\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[y(t) - 1]^2 \tag{2.4}$$

em que E denota o valor esperado.

Refere-se ao critério (2.3) como controle em 1 estágio e (2.4) como controle em N estágios. Se o processo $\{y(t)\}$ é ergódigo, os critérios (2.3) e (2.4) aparentam ser idênticos quando $N \to \infty$.

2.3. Estratégias de Controle Admissíveis

Para especificar o problema de controle completamente é necessessário definir estratégias de controle admissíveis. Uma estratégia de controle é admissível se o valor do sinal de controle, no instante de tempo t, $u(t)$, é função de *todas* as saídas observadas até o instante t: $y(t)$, $y(t-1)$, $y(t-2)$, ..., de *todos* os sinais de controle previamente aplicados: $u(t-1)$, $u(t-2)$,... e dos dados obtidos posteriormente, ou seja, os valores dos coeficientes ou as estimativas dos coeficientes e as precisões das estimativas.

3. SOLUÇÃO NO CASO DE PARÂMETROS COMO CONSTANTES CONHECIDAS

Supõe-se agora que os parâmetros do modelo (2.2) são constantes conhecidas. Os dados são os parâmetros n, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n e σ. Para resolver o problema de controle determina-se primeiro a estratégia de controle de tal forma que o critério (2.3) seja mínimo e, então, mostra-se que esta estratégia minimiza também o critério (2.4). Substituindo (2.2) em (2.3), tem-se:

$$\begin{aligned} E[y(t)-1]^2 &= E[-a_1y(t-1)-\cdots-a_ny(t-n)+b_1u(t-1)+\cdots \\ &\quad +b_nu(t-n)-1]^2+2E\{e(t)[-a_1y(t-1)-\cdots \\ &\quad -a_ny(t-n)+b_1u(t-1)+\cdots+b_nu(t-n)-1]\}+Ee^2(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Uma vez que $e(t)$ tem média zero e é independente de $y(t-1)$, $y(t-2)$, …, $u(t-1)$, $u(t-2)$, … o segundo termo do lado direito de (3.1) desaparece e, tem-se:

$$E[y(t)-1]^2 = E[-a_1y(t-1)-\cdots-a_ny(t-n)+b_1u(t-1)+\cdots+b_nu(t-n)-1]^2+\sigma^2 \geq \sigma^2, \tag{3.2}$$

em que a igualdade é obtida para a seguinte estratégia de controle:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{b_1}[1+a_1y(t)+a_2y(t-1)+\cdots+a_ny(t-n+1) \\ &\quad -b_2u(t-1)-\cdots-b_nu(t-n+1)]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Esta estratégia é admissível quando $u(t)$ é função de $y(t)$, $y(t-1)$, ..., $u(t-1)$, ... e dos dados poteriores.

O problema é resolvido para o critério (2.3) e será considerado agora o critério (2.4). A questão é encontrar uma estratégia de controle que minimiza.

$$\sum_{t=1}^{N}[y(t)-1]^2 \tag{3.4}$$

Considerando a situação no instante de tempo $N-1$. As saídas $y(N-1)$, $y(N-2)$, ... foram observadas e o problema é determinar o sinal de controle $u(N-1)$. Uma vez que $u(N-1)$ só influencia o último termo da função de perda, isto é,

$$[y(N)-1]^2$$

onde é evidente que a estratégia (3.3) é ótima para $t = N - 1$.

$$\min[y(N) - 1]^2 = \sigma^2. \tag{3.5}$$

Agora, considerando a situação no instante de tempo $N - 2$. Os sinais de saída $y(N - 2)$, $y(N - 3)$, ... foram observadas e o problema é determinar $u(N - 2)$. Uma vez que $u(N - 2)$ influencia apenas os dois últimos termos da função de perda, esta deve ser escolhida de modo a minimizar.

$$E\{[y(N) - 1]^2 + [y(N - 1) - 1]^2\}.$$

Se usada uma estratégia ótima no último estágio, tem-se:

$$E\{[y(N) - 1]^2 + [y(N - 1) - 1]^2\} = \sigma^2 + E[y(N - 1) - 1]^2. \tag{3.6}$$

Uma vez que σ é uma constante, a estratégia (3.3) é ótima para todo t. Também sabe-se que:

$$\min \sum_{t=1}^{N} [y(t) - 1]^2 = N\sigma^2 \tag{3.7}$$

TEOREMA 1. *Considerando que os parâmetros do modelo (2.2) são constantes conhecidas, então a estratégia de controle admissível (3.3) é ótima em relação tanto ao critério (2.3) quanto o critério (2.4). O valor mínimo da perda esperada é σ^2 em ambos os casos*.

Observação 1. Observa-se que o Teorema 1 ainda é válido se os parâmetros do sistema são variáveis no tempo, mas conhecidos.

Observação 2. Sabe-se que estratégias ótimas podem ser muito sensíveis às variações de parâmetros.

4. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Se os parâmetros do modelo (2.2) *não* são conhecidos, o método dos mínimos quadrados é uma das técnicas mais simples disponíveis para determina-los. No método dos mínimos quadrados os parâmetros a_i e b_i do modelo (2.2) são determinados de tal maneira que o critério

$$V(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \sum_{t=n}^{N+n} [y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots$$

$$+a_n y(t-n) - b_1 u(t-1) - \cdots - b_n u(t-n)]^2 \qquad (4.1)$$

tenha um valor mínimo. Em (4.1) *u* denota os valores reais do sinal de controle usados na experiência e *y* denota as saídas observadas. Portanto, *u* e *y* são conhecidos.

Uma vez que o critério (4.1) é quadrático em a_i e b_i é possível minimizar *V* analiticamente. Sejam a e b vetores cujos componentes são a_i e b_i. Introduz-se o vetor coluna **x** de 2*n* componentes, definido por

$$\mathbf{x} \triangleq [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \qquad (4.2)$$

e o vetor linha $\theta(t)$ de 2*n* componentes, definido por:

$$\theta(t) \triangleq [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \cdots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad \cdots \quad u(t-n)]. \qquad (4.3)$$

A função de perda *V* pode ser escrita por:

$$V(x) = \sum_{t=n}^{N+n} [y(t) - \theta(t)\mathbf{x}]^2 = \sum_{t=n}^{N+n} y^2(t) - 2\left[\sum_{t=n}^{N+n} y(t)\theta(t)\right]\mathbf{x}$$

$$+\mathbf{x}^T [\textstyle\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t)]\mathbf{x}. \qquad (4.4)$$

O valor de **x**, $\hat{\mathbf{x}}$, que fornece o valor mínimo de *V* é obtido derivando (4.4) em relação à **x** e igualando a zero, as 2*n* expressões obtidas, resultando:

$$\hat{\mathbf{x}} \triangleq [\textstyle\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t)]^{-1} \sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)y(t). \qquad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), obtém-se o valor mínimo valor de *V*, que é dado por:

$$\min V = \sum_{t=N}^{n+N} y^2(t) - \sum_{t=N}^{n+N} y(t)\theta(t)[\sum_{t=N}^{n+N} \theta^T(t)\ \theta(t)].^{-1} \sum_{t=N}^{n+N} \theta^T(t)\ y(t) = \sum_{t=N}^{n+N}[y(t) - \theta(t)\hat{x}]^2 \tag{4.6}$$

Várias questões surgem naturalmente. A estimativa é tendenciosa? Qual é a variância da estimativa? Que condições são requeridas para que a matriz $\sum \theta^T(t)\ \theta(t)$ não seja singular. As respostas dessas perguntas são dadas por:

TEOREMA 2. *Se todas as raízes da equação*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{4.7}$$

têm módulos inferiores a 1 e considerando que os limites

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t+\tau) = R_u(\tau)$$

existem e que a matriz A, cujos elementos são definidos por

$$a_{ij} = R_u(i-j), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

é definida positiva; então, as estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\boldsymbol{x}}$ *convergem para o valor verdadeiro dos parâmetros* $\boldsymbol{x}$ *quando o número de observações* $N \to \infty$. *Para N grande a estimativa* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *tende assintoticamente para a distribuição normal com valor médio* $\boldsymbol{x}$ *e matriz de covariância* $P = R^{-1}/N$ *em que R é uma matriz definida positiva definida por:*

$$R = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t). \tag{4.9}$$

Este teorema é uma extensão do teorema de Mann e Wald sobre a consistência da estimativa dos mínimos quadrados para um processo auto-regressivo.

TEOREMA 3. *Seja a matriz*

$$\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t)$$

definida. Então, a distribuição condicional dos parâmetros a_i *e* b_i *de (2.2) dado*

$$\mathcal{Y}_{N+n} = [y(N+n), y(N+n-1), \ldots, y(0), u(N+n-1), \text{X}\ u(N+n-2), \ldots, u(0)]$$

é normal com o valor médio

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t)\right]^{-1} \sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)y(t). \tag{4.5}$$

e a matriz covariância P definida por

$$P \triangleq \left[\sum_{t=n}^{N+n} \theta^T(t)\theta(t)\right]^{-1} \sigma^2. \tag{4.10}$$

5. IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE SEPARADOS

Na seção 3 resolveu-se o problema de controle no caso de parâmetros conhecidos e na seção 4 mostrou-se como os parâmetros do modelo podem ser identificados usando o método dos mínimos quadrados. Discute-se agora a interação entre identificação e controle em conexão com o problema de controle de um sistema com coeficientes constantes, mas incógnitos. Assim, considera-se um sistema governado por (2.2) em que os parâmetros a_i e b_i são constantes, mas cujos valores numéricos *não* são conhecidos. Supõe-se também que o objetivo do controle é minimizar o critério (2.3) ou (2.4).

Ao longo da seção supõe-se que primeiramente é realizado um experimento sobre o sistema e que o resultado é usado para identificar os parâmetros e, para projetar uma lei de controle. Esta lei de controle é, então, usada para controlar o sistema durante o período de operação. Os dados obtidos durante a fase em que o sistema é controlado *não* são usados para melhorar as estimativas dos parâmetros. Neste contexto muitas questões surgem, por exemplo:

- Existe um *teorema de separação* no sentido em que a lei de controle ótimo pode ser obtida utilizando a estratégia usada no caso de parâmetros conhecidos e substituindo os verdadeiros parâmetros por suas estimativas? (Esta suposição é frequentemente usada em aplicações práticas).

- Se existe um teorema de separação, quais estimativas devem ser usadas?

- Qual será o aumento da perda esperada devido ao fato de que o parâmetros não são conhecidos com precisão?

- Será que os critérios (2.3) e (2.4) levam ao mesmo resultado, como foi o caso quando os coeficientes são conhecidos?

Aborda-se o problema obtendo a estratégia de controle ótimo e, em seguida, analisando as propriedades. Considerando primeiramente o critério (2.3), determina-se uma estratégia de controle que minimiza $E[y(t) - 1]^2$. Para obter tal estratégia considera-se a situação no instante de tempo $t - 1$. As saídas $y(t - 1)$, $y(t - 2)$, ... são observadas e os sinais de entrada anteriores $u(t - 2)$, $u(t - 3)$, ... são conhecidos. Seja $\mathcal{Y}_{t-1}$ um vetor que contém os dados conhecidos, isto é,

$$\mathcal{Y}_{t-1} = [y(t-1), y(t-2), ..., u(t-2), u(t-3), ...].$$

O problema é determinar $u(t-1)$ em função de $\mathcal{Y}_{t-1}$, de tal forma que $E[y(t)-1]^2$ é mínimo. Usando o lema fundamental da teoria do controle estocástico, tem-se que:

$$\min E[y(t)-1]^2 = E \min_{u(t-1)} E\{[y(t)-1]^2 | \mathcal{Y}_{t-1}\}.$$

Tem-se:

$$y(t) = \theta(t)\mathbf{x} + e(t) = \textstyle\sum' \theta_i(t) x_i + b_1 u(t-1) + e(t), \tag{5.1}$$

em que $\sum'$ denota o somatório dos termos para i variando de 1 até $2n$, com o termo de índice $i = n+1$ excluído. Em (5.1) os elementos $\theta_1(t), ..., \theta_n(t), \theta_{n+2}(t), ..., \theta_{2n}(t)$ são iguais a $-y(t-1), -y(t-2), ..., -y(t-n), u(t-2), ..., u(t-n)$, respectivamente, os quais são todos conhecidos; $u(t-1)$ está à disposição. Os componentes x_i do vetor $\hat{\boldsymbol{x}}$ são os parâmetros do sistema, os quais *não* são conhecidos. Comparando com (4.2), o experimento de identificação e o cálculo da estimativa dos mínimos quadrados fornecem, no entanto, a distribuição condicional de $\mathbf{x}$ dado os resultados da experimento de identificação.

Resulta do Teorema 3 que a distribuição condicional dada $\mathcal{Y}_{t-1}$ é normal com o valor médio $\hat{\mathbf{x}}$ dado por (4.5) e a matriz de covariância P dado por (4.10). Assim,

$$E\{[y(t)-1]^2 \quad \mathcal{Y}_{t-1}\} = [\textstyle\sum' \theta_i(t)\hat{x}i + b_1 u(t-1) - 1]^2 + \sum'_{ij} p_{ij}\theta_i(t)\theta_j(t) + u^2(t-1)p_{n+1,n+1} + 2u(t-1)\sum' p_{n+1.i}\theta_i(t) + \sigma^2$$

em que $\theta_I(t), p_{ij}(t)$e $\widehat{x_\imath}$ não depende u(t – 1). Encontramos que a estratégia:

$$u(t-1) = \frac{b_1 - \sum'[\widehat{b_\imath}\widehat{x_\imath} + p_{n+1.i}]\theta_i(t)]^2}{\hat{b}_1^2 + p_{n+1,n+1}}$$

minimizará (5.2). O valor mínimo da função de perda é dada pela:

$$\min E[y(t)-1]^2 = \sigma^2 + \sum{}'_{i.j}\, p_{ij}\theta_i(t)\theta_j(t) + (1 - \sum{}'_i\, \theta_i(t)x_i)^2$$
$$- \frac{b_1 - \sum'[\widehat{b_\imath}\widehat{x_\imath} + p_{n+1.i}]\theta_i(t)]^2}{b_1^2 + p_{n+1,n+1}}$$

6. CONCLUSÃO

A pesquisa esta em fase incial, foi divida supondo parametros conhecidos, como é feita a identificação dos parametros e e controle usando os parametros idetificados, mas de forma separada. Para parâmetros do modelo constantes conhecidas, a estratégia de controle é ótima em relação aos critérios determinados – sendo o critério (2.3) como controle em 1 estágio e (2.4) como controle em N estágios. Verificado que o valor mínimo da perda esperada é σ^2 em ambos os casos.

A identificação dos parâmetros mostra que a matriz é definida positiva, por esse motivo as estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\mathbf{x}}$ convergem para o valor verdadeiro dos parâmetros $\mathbf{x}$ quando o número de observações $\mathrm{N} \to \infty$, a estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ tende assintoticamente para a distribuição normal com valor médio $\mathbf{x}$ e matriz de covariância P. Usando o método dos mínimos quadrados e a estimativa dos mínimos quadrados identificamos diversas propriedades desejáveis, como não tendenciosidade assintótica e assintótica eficiência

Considerando a identificação dos parãmetros e o controle realizado posteriorimente, descobrimos que não é suficiente apenas calcular o mínimo múltiplo quadrado para obter o controle ótimo, sendo necessários conhecimentos da distribuição de probabilidade condicional dos parâmetros, para chegar ao resultado final. Com os valores de parâmetros identificamos, o função de perda teve um aumento consideravel,

Comparando os resultados obtidos que simulam o controle, verificamos que a estratégia ótima para o problema combinado é diferente para os parâmetros verdadeiros e valores estimados pelo metódo dos mínimos quadrados. Para proximo momento serão realizadas as verificações com sentido de um controle adaptativo, com a identificação e controle combinados.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AOKI, M., “Optimization of Stochastic Systems”, Academic Press, New York, 1967.

ASTRÖM, K. J., Optimal control of Markov processes with incomplete state information, *J. Math. Anal. Appl.* 10 (1965), 174-205.

ASTRÖM, K. J., Optimal control of Markov processes with incomplete state information II-The convexity of the loss function, *J. Math. Anal. Appl.* 26 (1969), 403-406.

ASTRÖM, K. J. e BOHLIN, T., Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records, in “Proceedings of the IFAC Congress on Self- Adaptive Control Systems”, Teddington, 1965, Plenum Press, New York 1966.

ASTRÖM, K. J., On the achievable accuracy in identification problems, in “Proceedings of the IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems”, Prague, 1967, pp. 1-8, Academia, Prague 1967.

ASTRÖM, K. J., “Lectures on the Identification Problem-The Least Squares Method”, Report 6806, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control, 1968.

ASTRÖM, K. J., “Introduction to Stochastic Control Theory”, Academic Press, New York, I 970.

BALACHRISHNAN, A. V. e PETERKA, V. “Identification in Automatic Control Systems” (survey paper), Fourth IFAC Congress, Warsaw, 1969.

BELLMAN, R. “Adaptive Control Processes-4 Guided Tour”, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1961.

BELLMAN, R. e KALABA, R., “Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems”, American Elsevier Company, New York, 1965.

CUENOD, M. e SAGE, A. P. “Comparison of Some Methods Used for Process Identification” (survey paper), IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague, 1967, Academia, Prague 1967.

EYKHOFF, P. et al., “Systems Modeling and Identification” (survey paper), Proceedings of the 3rd Congress of IFAC, London, 1967, Butterworths, London 1966.

EYKHOFF, P., Process parameter and state estimation (survey paper), IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague, 1967.

FARISON, J. B., CRAHARI, R. E. e REY. C. SHELTON, Identification and control of linear discrete systems, *IEEE Trans. Automatic Control* 12 (1967), 438-442.

FELDBAUM, A. A., "Optimal Control Systems," Academic Press, New York, 1965.

MEIER, L. Combined optimum control and estimation theory, Tech. Report NAS-2-2457, Stanford Research Institute, Menlo Park, California, October, 1955.

SCHWARTZ, S. C. e STEIGLITZ, K., The Identification and Control of Unknown Linear Discrete Systems, Technical Report No. 24, Information Sciences and Systems Laboratory, Dept. of EE., Princeton University, Princeton, New Jersey, June, 1968.

SWORDER, D. D., A study of the relationship between identification and optimization in adaptive control problems, 1, Franklin Inst. 281 (1966). 198-213.

WITTENMARK, B. On adaptive control of low order systems, Report 6918, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control, 1969.

WONHAM, M., Lectures on Stochastic Control Theory, Report, Centre for Dynamical Systems, Brown University.