

## Estimação de atitude do satélite de sensoriamento remoto CBERS-4 utilizado sensor de estrelas

*RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)*

**JOÃO FRANCISCO NUNES DE OLIVEIRA**

(Escola de Engenharia de Lorena - USP, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: joao.fno@alunos.eel.usp.br

**Dr. HÉLIO KOITI KUGA**

(DEM/INPE, ORIENTADOR)

E-mail: helio.kuga@inpe.br

**Dra. ROBERTA VELOSO GARCIA**

(EEL/USP, ORIENTADORA)

E-mail: robertagarcia@usp.br

LORENA - SÃO PAULO - BRASIL

17 de julho de 2017

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar métodos de determinação de atitude de satélites artificiais considerando dados reais de sensores de estrelas que estão a bordo dos satélites CBERS-2B e CBERS-4 . A importância deste estudo está em determinar a atitude de um satélite para conhecer sua orientação no espaço em relação a um sistema de referência, e isso está diretamente relacionado ao desempenho do sistema de controle de atitude e a interpretação de informações obtidas por experimentos realizados com o satélite. Existem vários métodos para se determinar a atitude de um satélite artificial e todos requerem informações obtidas por meio de sensores instalados nos satélites. Neste trabalho foram estudados e avaliados os algoritmos TRIAD, Q-Method e QUEST os quais permitem determinar a atitude em três eixos do satélite. Os principais pontos avaliados foram precisão, facilidade de implementação (e entendimento) e utilização dos métodos frente à utilização de dados reais de sensores de estrelas. Dentre os aspectos importantes deste trabalho, deve ser destacado o estudo e interpretação dos dados reais do sensor de estrelas do satélite CBERS-4. No entanto, o período efetivo de auxílio (6 meses de bolsa) para o desenvolvimento do projeto foi inferior ao descrito no cronograma inicial. Desta forma, este relatório contém somente resultados parciais da proposta inicial. Os resultados apresentados serão referentes somente ao satélite CBERS-2B.

Palavras-chaves: Estimação de Atitude. Dados reais. Sensores de estrelas. TRIAD. QUEST. Q-Method.

## Lista de figuras

Figura 1 – Sistema Equatorial Terrestre. . . . .	10
Figura 2 – Sistema de Referência Orbital local . . . . .	11
Figura 3 – Sistema de Referência Orbital local, visualizado no plano orbital. . . . .	11
Figura 4 – Sistema de Referência de Atitude. . . . .	12
Figura 5 – Sistema de Referência do Sensor. . . . .	13
Figura 6 – Os sensores STS no satélite CBERS . . . . .	13
Figura 7 – Representação geométrica de um número complexo no plano Argand-Gauss	16
Figura 8 – Representação geométrica de $Z_1$ , $Z_2$ e $Z_3$ . . . . .	17
Figura 9 – Representação gráfica da regra de multiplicação das entidades complexas dos quatérnios . . . . .	18
Figura 10 – Fluxograma que representa o procedimento de determinação de atitude.	24
Figura 11 – Representação da matriz de atitude geometricamente. . . . .	25
Figura 12 – Fluxograma para estimação de atitude. . . . .	32
Figura 13 – Ilustração do satélite CBERS-2B. . . . .	34
Figura 14 – Brasão do programa espacial CBERS . . . . .	35
Figura 15 – Satélite sendo montado no INPE . . . . .	35
Figura 16 – Trecho da trajetória do CBERS-2B. . . . .	37
Figura 17 – <i>Ground track</i> do satélite CBERS-2B. . . . .	38
Figura 18 – Ângulo de atitude $\phi$ estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B. . . . .	39
Figura 19 – Ângulo de atitude $\theta$ estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B. . . . .	40
Figura 20 – Ângulo de atitude $\psi$ estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B. . . . .	41

## Lista de algoritmos

Algoritmo 1 – Algoritmo do método TRIAD . . . . .	26
Algoritmo 2 – Algoritmo do método q-method . . . . .	28
Algoritmo 3 – Algoritmo o método Quest . . . . .	29

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Vetores que inicializam os algoritmos de estimação . . . . .	30
Tabela 2 – Angulos de Euler para os métodos TRIAD, q-Method e Quest . . . . .	30
Tabela 3 – Exemplo dos dados obtidos pelos sensores de estrelas . . . . .	33
Tabela 4 – Elementos para formação do vetor de referência $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ . . . . .	36
Tabela 5 – <i>Two line</i> do dia 9 de outubro de 2007 . . . . .	36
Tabela 6 – Função custo relacionada ao período de 9 de outubro de 2007 . . . . .	41
Tabela 7 – Intervalo de confiança da diferenca entre a referência e o estimado, para o TRIAD . . . . .	42
Tabela 8 – Intervalo de confiança da diferenca entre a referência e o estimado, para o q-Method . . . . .	42
Tabela 9 – Intervalo de confiança da diferenca entre a referência e o estimado, para o Quest . . . . .	42

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	<i>Objetivos</i> . . . . .	8
1.2	<i>Justificativa</i> . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1	<i>Introdução a atitude</i> . . . . .	9
2.1.1	Sistemas de Referência . . . . .	9
2.1.2	Sistema de Referência Inercial . . . . .	9
2.1.3	Sistema de Referência do Satélite . . . . .	10
2.1.4	Sistema de Referência de Atitude . . . . .	11
2.1.5	Sistema de Referência do Sensor . . . . .	12
2.2	<i>Sensor de Estrelas</i> . . . . .	13
2.3	<i>Operadores Lineares Ortogonais</i> . . . . .	14
2.4	<i>Respresentação da Atitude</i> . . . . .	15
2.4.1	Quatérnios . . . . .	15
2.4.2	Ângulos de Euler . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Métodos de Determinação de Atitude</b> . . . . .	<b>24</b>
3.1	<i>O método TRIAD</i> . . . . .	24
3.2	<i>O método Q-Method</i> . . . . .	27
3.3	<i>O método QUEST</i> . . . . .	28
3.4	<i>Validação dos Algoritmos de Estimação</i> . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Metodologia para estimação de Atitude</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>Resultados para o satélite CBERS-2B</b> . . . . .	<b>34</b>
5.1	<i>Considerações sobre o satélite CBERS-2B</i> . . . . .	34
5.2	<i>Resultados da Estimação de Atitude</i> . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Comentários Finais</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>Referências</b> <sup>1</sup> . . . . .	<b>44</b>

---

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

## 1 Introdução

A atitude de um satélite artificial é definida como a sua orientação espacial com relação a um sistema de referência inercial ou algum objeto específico de interesse, como a Terra. O conhecimento preciso da atitude confere grande relevância às missões espaciais e, por isso, o processo de determinação de atitude é fundamental para que a missão a que o satélite foi destinado seja cumprida (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011a).

Existem diversos métodos para se determinar a atitude de um satélite sendo cada método apropriado para um tipo de missão de forma a atender a necessidades como, por exemplo, tempo disponível para o processamento dos dados e precisão que se deseja alcançar. Contudo, independente do método escolhido, todos necessitam de observações de sensores que estão a bordo do satélite.

Os métodos de estimação (ou determinação) de atitude podem ser alocados em dois grupos: métodos determinísticos e métodos estocásticos. Os métodos determinísticos utilizam uma quantidade mínima e necessária de informações rejeitando todo e qualquer tipo de dado adicional. Dos métodos determinísticos destacam-se o TRIAD (*TRIaxial Attitude Determination*), Q-Method e QUEST, os quais permitem determinar a atitude em três eixos do satélite. Ao contrário dos métodos determinísticos, os métodos estocásticos utilizam todos os dados disponíveis, obtendo assim uma maior precisão dos valores estimados. Dos métodos estocásticos podemos citar o Filtro de Kalman e suas variantes, aonde diversos trabalhos vêm sendo estudados com o objetivo de analisar o comportamento destes métodos quando submetidos a dados reais de satélites, (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011b) .

Neste trabalho foram consideradas medidas reais de sensores de estrelas que estão a bordo do satélite CBERS-2B (*China Brazil Earth Resources Satellite*) e os métodos de estimação Q-Method e QUEST. De modo a validar os resultados da estimação da atitude, o método TRIAD foi considerado no projeto.

Os resultados obtidos foram avaliados e analisados visando a comparação entre os métodos quanto a precisão dos resultados quando dados reais são considerados no modelo.

### *1.1 Objetivos*

O objetivo deste trabalho é analisar dados reais de sensores de estrelas que estão a bordo do satélite CBERS-4 e utiliza-las no processo de estimação da atitude através dos métodos TRIAD, Q-Method e QUEST. Por se tratarem de dados mais recentes, são de grande importância nos estudos que vem sendo realizados no âmbito da estimação de atitude. Para melhor compreensão dos dados utilizados neste trabalho, foram considerados também dados reais do satélite CBERS-2B, com o intuito de se ter uma compreensão melhor dos resultados da estimação da atitude do satélite CBERS-4.

### *1.2 Justificativa*

O satélite CBERS-4 foi lançado em 7 de dezembro de 2014 e é o mais recente equipamento da família de satélites de sensoriamento remoto produzido em parceria pelo Brasil e China. Os satélites CBERS foram projetados com o propósito de gerar imagens da superfície da Terra, usando equipamentos de sensoriamento remoto, tendo estas variadas aplicações como, por exemplo, na agricultura, nos recursos hidrológicos e oceânicos entre outros. O controle do satélite CBERS-4 no Brasil é feito pelo Centro de Controle de Satélites no INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) o qual cedeu as medidas utilizadas neste trabalho. O estudo, compreensão e testes destes dados serão de grande importância em estudos que já vem sendo realizados por outros pesquisadores que utilizaram as medidas do CBERS-2 em seus trabalhos.



## 2 Revisão da Literatura

Este capítulo faz uma revisão da literatura no sentido de apresentar os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do trabalho.

### 2.1 *Introdução a atitude*

Determinar a atitude de um satélite significa determinar a rotação que deve ser aplicada sobre o sistema de coordenadas de referência, de forma que o mesmo coincida com o sistema de coordenadas definido no corpo do satélite. Este procedimento não deve levar em conta a translação necessária para que os sistemas coincidam suas posições no espaço. A comparação entre ambos os sistemas de referência é feita pela superposição de suas origens.

Como pode ser observado, é indispensável que se conheça em relação a qual sistema de referência se deseja realizar a determinação atitude. Outros ponto essencial é saber quais vetores de referência podem ser utilizados e também conhecer os seus modelos no sistema de coordenadas de referência.

#### 2.1.1 Sistemas de Referência

Existem vários sistemas de referência em três dimensões que são de especial interesse quando se deseja analisar a atitude. No entanto, neste capítulo, serão apresentados somente os mais importantes para o desenvolvimento deste projeto.

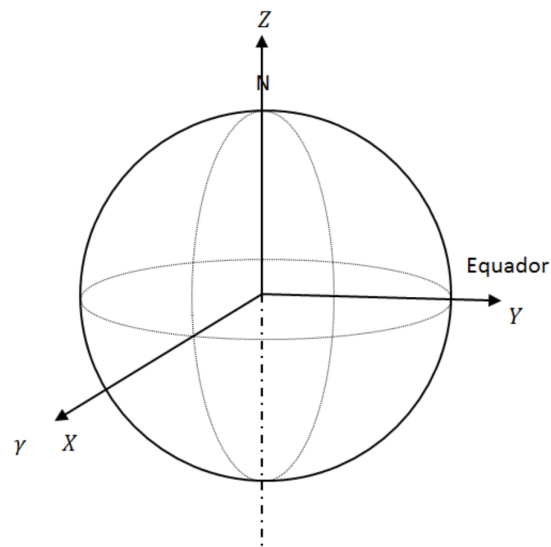
Em geral, um sistema de referência é sempre definido por uma origem  $O_i$  e por um triedro de versores ortogonais. A localização da origem e a orientação dos seus versores dependerá do sistema de referência adotado, como serão definidos a seguir.

#### 2.1.2 Sistema de Referência Inercial

Um sistema de referência inercial é um sistema no qual as leis de Newton do movimento são válidas. O referencial adotado neste trabalho é uma boa aproximação de um referencial inercial dentro das escalas de tempo que serão adotadas. O sistema inercial está representado na Figura 1 e é definido por (SILVA; KUGA; ZANARDI, 2014):

- Origem  $O_{eq}$ : centro de massa da Terra.
- Eixo  $X$ : aponta na direção do equinócio vernal  $\gamma$ .
- Eixo  $Y$ : completa o sistema dextrógiro.
- Eixo  $Z$ : direção normal ao pólo norte geográfico.

Figura 1 – Sistema Equatorial Terrestre.



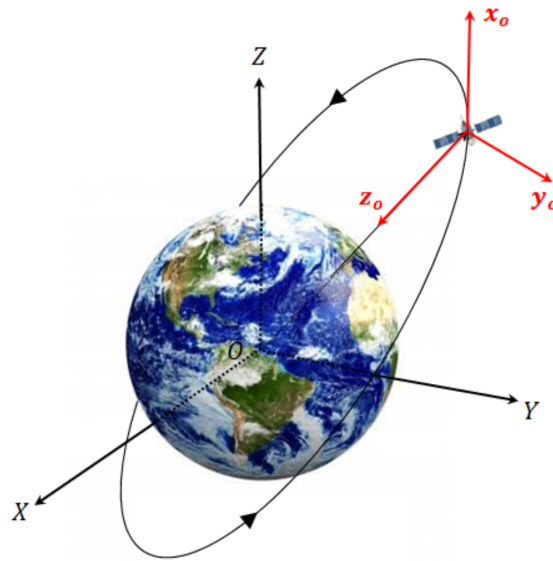
Fonte: (SILVA; KUGA; ZANARDI, 2014)

### 2.1.3 Sistema de Referência do Satélite

Sistema de referência utilizado para descrever o movimento com relação a posição do satélite, como apresentado nas Figuras 2 e 3, definido a seguir:

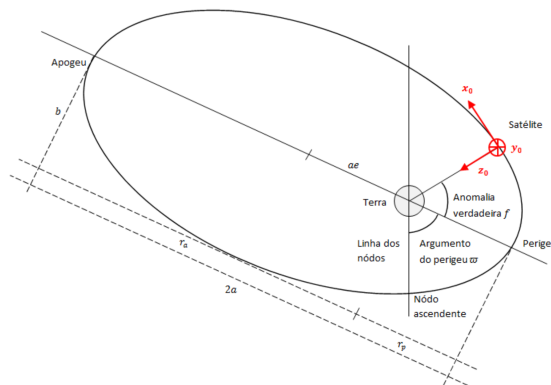
- Origem  $O$ : Centro de massa do corpo do satélite.
- Eixo  $x_0$ : aponta na direção do vetor velocidade orbital.
- Eixo  $y_0$ : completa o sistema dextrógiro.
- Eixo  $z_0$ : aponta na direção oposta à direção radial.

Figura 2 – Sistema de Referência Orbital local



Fonte: (SILVA; KUGA; ZANARDI, 2014)

Figura 3 – Sistema de Referência Orbital local, visualizado no plano orbital.



Fonte: (SILVA; KUGA; ZANARDI, 2014)

#### 2.1.4 Sistema de Referência de Atitude

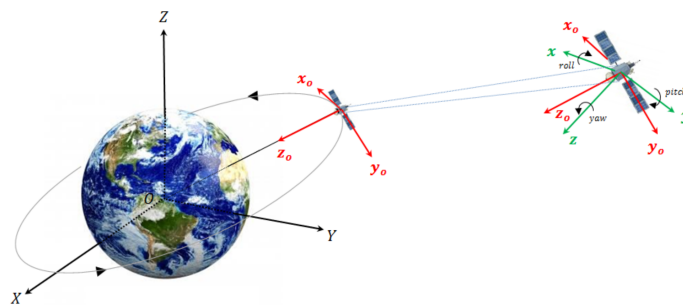
O sistema de referência de atitude é responsável por descrever o movimento de rotação do satélite ao redor de seu centro de massa e suas coordenadas são conhecidas como *roll*, *pitch* e *yaw*. Este sistema pode ser definido por:

- Origem  $O$ : centro de massa do corpo do satélite.
- Eixo  $x$  (*roll*): nominalmente alinhado com  $x_o$  e define o movimento em torno da direção da velocidade orbital.

- Eixo  $y$  (*pitch*): nominalmente alinhado com  $y_o$  e define o movimento em torno da direção normal à órbita (sentido oposto ao vetor momento angular orbital).
- Eixo  $z$  (*yaw*): nominalmente alinhado com  $z_o$  e define o movimento em torno da direção radial, oposto ao vetor posição.

A relação entre o sistema de referência do satélite com o sistema de referência de atitude é mostrada na Figura 4.

Figura 4 – Sistema de Referência de Atitude.



Fonte: (SILVA; KUGA; ZANARDI, 2014)

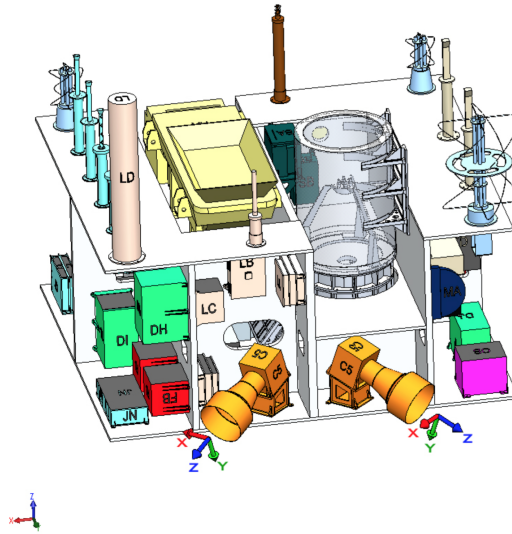
### 2.1.5 Sistema de Referência do Sensor

Outro sistema importante a ser destacado neste projeto é o sistema de referência do sensor de estrelas, ou sensor STS (*Star Tracker Sensor*). Este referencial é importante para estabelecer as relações entre as informações obtidas pelo sensor com os sistemas de referência do corpo do satélite. O sistema de referência STS é definido por (SILVA, 2016b):

- Origem  $O$ : no sensor a bordo do satélite.
- Eixo  $X_{STS}$ : completa o sistema dextrógiro.
- Eixo  $Y_{STS}$ : ortogonal à superfície de instalação do sensor.
- Eixo  $Z_{STS}$ : localizado no eixo óptico do sensor.

A Figura 5 apresenta uma ilustração da orientação do sistema de referencia STS no corpo do satélite (SILVA, 2016a):

Figura 5 – Sistema de Referência do Sensor.

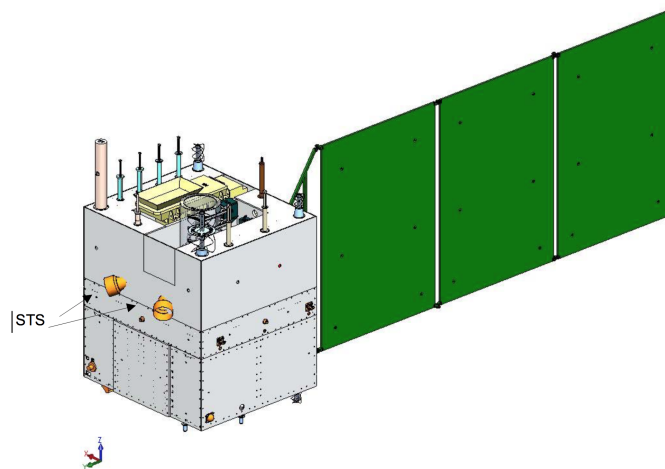


Fonte: (SILVA, 2016a)

## 2.2 Sensor de Estrelas

O satélite CBERS-4 possui embarcado vários sensores de alta resolução, dentre eles o sensor de estrelas o qual as medidas foram utilizadas neste projeto. O satélite CBERS-4 possui a bordo 2 sensores estelares, chamados STS1 e STS2 respectivamente, com especificações idênticas. A Figura 6 ilustra a localização destes sensores no corpo do satélite (SILVA, 2016a).

Figura 6 – Os sensores STS no satélite CBERS



Fonte: (SILVA, 2016a)

Os sensores conhecidos como *Star Trackers*, ou rastreadores de estrelas, são dispositivos digitais que medem as coordenadas de estrelas em um sistema fixo ao veículo

espacial e fornecem a atitude quando essas coordenadas observadas são comparadas com a direção conhecida de estrelas, obtidas de um catálogo de estrelas. Se dois vetores são conhecidos no sistema inercial e seus correspondentes são conhecidos no sistema do corpo, diferentes métodos de determinação de atitude podem ser usados para encontrar os ângulos de atitude (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011a). Como o sensor está fixado no corpo do satélite, o vetor na direção de visada do sensor é constante. É importante destacar que em casos de satélites cujo posicionamento deve ser feito com alta precisão é essencial que o mesmo contenha um *Star Tracker* à bordo, pois esse tipo de sistema é capaz de atingir exatidão próxima a 1 segundo de arco.

### 2.3 Operadores Lineares Ortogonais

Aqui serão apresentados os principais conceitos matemáticos envolvidos neste trabalho, em especial, no que se refere aos operadores lineares e ortogonais que fundamentam as matrizes de rotações.

Os operadores lineares efetuam uma aplicação na forma  $A : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  (LIMA, 2006).

Se a aplicação relaciona um elemento do próprio espaço vetorial, é necessária a condição da aplicação ser bijetiva, ou seja,  $A^{-1} : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ .

A aplicação representada por  $A$  pode ser definida matricialmente em termos dos sistemas utilizados neste trabalho, como mostrado a seguir:

$$V_{obs} = A \cdot V_{ref} \quad (1)$$

onde  $A$  é a matriz de atitude que relaciona os vetores de referência  $V_{ref}$  (referencial inercial) com os vetores no sistema de referência do satélite  $V_{obs}$ .

A matriz (ou operador)  $A$  pode ser definida matematicamente através das suposições a seguir.

Seja o produto escalar definido por (LIMA, 2006)

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad (2)$$

com  $X$  e  $Y$  vetores pertencentes ao espaço vetorial  $\mathfrak{R}^3 = V$ . Sejam as operações apresentadas na definição 1 e Teorema 1 (LIMA, 2006)

**Definição 1.** *Seja uma aplicação de  $A : V \rightarrow V$  com  $X$  e  $Y$  elementos de  $V$ . Defina-se:*

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^T Y \rangle \quad (3)$$

Da definição 1 verifica-se que

$$A^{-1} = A^T \quad (4)$$

As condições necessárias para a Eq. (4) são obtidas a partir do teorema a seguir:

**Teorema 1.** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear. As seguintes aplicações de  $A$  são verdadeiras.*

- *$A$  é unitária, ou seja  $\det(A) = 1$ .*
- *$A$  preserva a norma dos vetores, isto é, para cada  $X \in V$  tem-se*

$$\|A \cdot X\| = \|X\| \quad (5)$$

- *$A$  é inversível*

O teorema 1 dará suporte para provar a propriedade dada na Eq. (4), (LIMA, 2006).

## 2.4 Representação da Atitude

A atitude pode ser representada de várias formas, dentre elas destacam-se: ângulos de Euler, quatérnios, parâmetros de Rodrigues. A seguir serão apresentadas as principais representações utilizadas neste trabalho.

### 2.4.1 Quatérnios

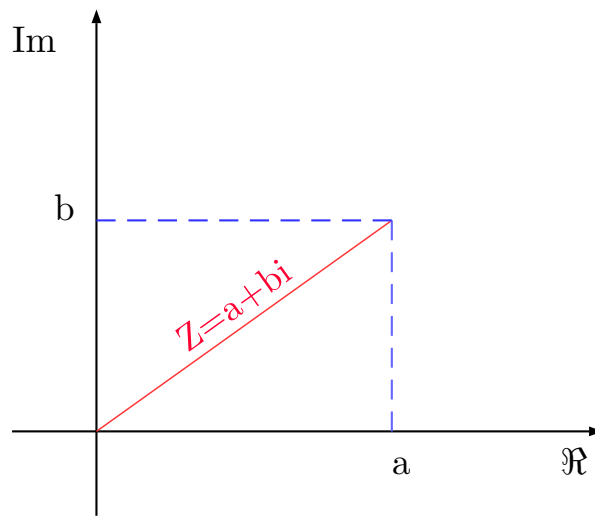
Dentre as representações de atitude conhecidas, os quatérnios possuem uma fundamentação especial. Sabido que a multiplicação de números complexos é isomorfa de rotação no  $R^2$ , William Rowan Hamilton, no século XIX, foi quem primeiramente buscou estender tal representação para o  $R^3$ . No entanto, não existia para isso uma estrutura algébrica fechada para 3 dimensões. Tal estrutura foi obtida por Hamilton, o qual observou que, para rotacionar os elementos no  $R^3$ , precisaria operar os elementos no  $R^4$ , (JAMBERSI; SILVA, 2016). Para este novo sistema deu-se o nome de quatérnios.

Seja o número complexo  $Z = a + bi$ , definido no conjunto dos números complexos  $C$  dado por:

$$C = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1\} \quad (6)$$

podendo ser representado geometricamente pela Fig. 7.

Figura 7 – Representação geométrica de um número complexo no plano Argand-Gauss



Fonte: Autor

Considere a aplicação (BATISTA; SANTOS, 2012)  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow C$  e os números complexos  $Z_1 = a + bi$  e  $Z_2 = c + di$ . Define-se a operação de multiplicação nos complexos por:

$$Z_3 = Z_1 \cdot Z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (7)$$

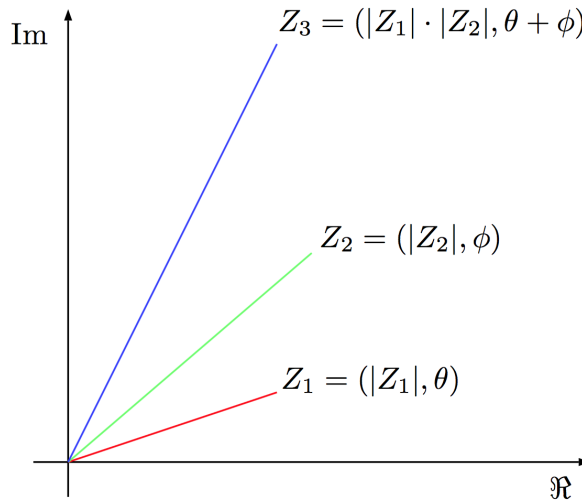
Considerando a representação do número complexo na forma polar dada por  $Z = |Z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , o produto apresentado na Eq. (7) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_1 \cdot Z_2 = [|Z_1|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))] \cdot [|Z_2|(\cos(\phi) + i \sin(\phi))] \\ Z_3 &= (|Z_1| \cdot |Z_2|) \cdot [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)] \end{aligned} \quad (8)$$

Uma representação geométrica dos números complexos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ , na forma polar, é apresentada na Fig. (8).

Seja a transformação linear definida por  $T : C \rightarrow C$ , em que o operador  $T$  age no próprio espaço, e um vetor deste espaço definido por  $Z = (a, b)^T$ . O operador pode ser obtido através Eq.(7), podendo ser representado matricialmente por:



Figura 8 – Representação geométrica de  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ 

Fonte: Autor

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_3 \quad \implies \quad T \cdot Z_1 = Z_3 \quad (9)$$

ou seja,

$$T = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = |Z_2| \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Para que  $T$  seja um operador unitário, é necessário que  $\det(T) = 1$  (BATISTA; SANTOS, 2012). Assim, obtém-se

$$\det \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad c^2 + d^2 = 1 \quad \rightarrow \quad ||Z_2|| = 1 \quad (11)$$

Analogamente ao concluído na Eq. (11), pode-se dizer que  $a^2 + b^2 = 1 \rightarrow ||Z_1|| = 1$ . Logo, para que  $T$  seja uma matriz de rotação os números complexos devem estar normalizados.

Dado que os números complexos podem significar uma rotação no plano, William Rowan Hamilton levantou a questão de como desenvolver uma álgebra que resulte em uma rotação no espaço tridimensional. Em 1843 Hamilton constatou que seria necessário operar elementos no espaço quadridimensional para então rotacionar elementos no espaço tridimensional. Para isso foi desenvolvido um novo sistema chamado de quatérnion que será apresentado a seguir.

O conjunto dos números quatérnions é definido por (BATISTA; SANTOS, 2012):

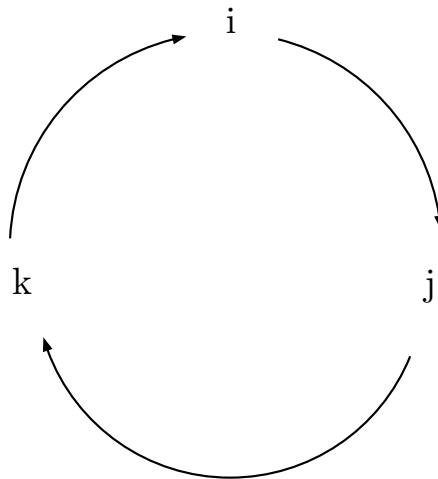
$$\mathbf{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathfrak{R}\} \quad (12)$$

considerando as seguintes propriedades:

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = k$  e  $jk = i$ ,  $ki = j$
- $ji = -k$  e  $kj = -i$ ,  $ik = -j$
- todos a comutam com  $i, j, k$

onde a comutatividade entre os elementos imaginários podem ser representada em um diagrama representado na Fig. 9.

Figura 9 – Representação gráfica da regra de multiplicação das entidades complexas dos quatérnios



Fonte: Autor

Considere dois quatérnios definidos por  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (q_0, \mathbf{q}_{1:3})^T$  e  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T = (p_0, \mathbf{p}_{1:3})^T$ . A multiplicação dos quatérnios não formam um grupo abeliano<sup>1</sup>, então a multiplicação entre os quatérnios  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  é dada por (BATISTA; SANTOS, 2012)

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_m(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}_{1:3}^T \cdot \mathbf{p}_{1:3} \\ q_0 \mathbf{p}_{1:3} + p_0 \mathbf{q}_{1:3} - \mathbf{q}_{1:3} \times \mathbf{p}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_{1:3}^T \\ \mathbf{q}_{1:3}^T & q_0 I_3 - C(\mathbf{q}_{1:3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

<sup>1</sup> Grupo abeliano significa comutatividade

$$= \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}_{1:3}^T \\ \mathbf{p}_{1:3}^T & p_0 I_3 - C(\mathbf{p}_{1:3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

com  $q_m$  é a matriz resultante da multiplicação entre 2 quatérnions,  $I_3$  a matriz identidade  $3 \times 3$  e a matriz  $C$  definida genericamente por

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Definindo o operador  $Q : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ , a multiplicação entre quatérnions pode ser representada por

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_m(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = Q(\mathbf{q})\mathbf{p} = \bar{Q}(\mathbf{p})\mathbf{q} \quad (18)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = q_m(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = Q(\mathbf{p})\mathbf{q} = \bar{Q}(\mathbf{q})\mathbf{p} \quad (19)$$

onde o operador  $Q$ <sup>2</sup> é dado por:

$$Q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_{1:3}^T \\ \mathbf{q}_{1:3}^T & q_0 I_3 - C(\mathbf{q}_{1:3}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

e sua matriz conjugada é dada por

$$\bar{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}_{1:3}^T \\ \mathbf{q}_{1:3}^T & q_0 I_3 - C(\mathbf{q}_{1:3}) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

<sup>2</sup> A dedução desta matriz é análoga à obtida através dos números complexos mostrada anteriormente

Desta forma, pode-se concluir que

$$Q(\bar{\mathbf{q}}) = Q(\mathbf{q})^T \quad (24)$$

$$\bar{Q}(\bar{\mathbf{q}}) = \bar{Q}(\mathbf{q})^T \quad (25)$$

Para que o operador  $Q$  faça parte do grupo  $SO_3$ <sup>3</sup> é necessário que  $\det\{Q\} = 1$ , ou seja, (DIEBEL, 2006)

$$\det\{Q(\mathbf{q})\} = \det \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} = 1 \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{q}\| = 1 \quad (26)$$

Para que se possa ter uma equivalência da matriz de rotação com os quatérnios é necessário definir 2 quatérnios dados por  $q_{z1} = (0, \mathbf{z1})$  e  $q_z = (0, \mathbf{z})$ , com  $\mathbf{z1} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{z} = (y_1, y_2, y_3)$  são vetores do espaço euclidiano de 3 dimensões. A partir desses quatérnios é possível estabelecer uma matriz de rotação entre ele, representada pelo quatérnio  $q$ . Assim as seguintes operações são realizadas:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{z1} \end{bmatrix} = \mathbf{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \mathbf{q}^{-1} \quad (27)$$

$$= \mathbf{q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \quad (28)$$

$$= Q(\bar{\mathbf{q}})Q(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_q(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde  $q$  é o quatérnio da rotação que será representado pela matriz de rotação  $R_q(\mathbf{q})$  dada por:

---

<sup>3</sup> Grupo das matrizes ortogonais e unitárias

$$R_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

### 2.4.2 Ângulos de Euler

A seção anterior mostrou ser possível obter uma parametrização para a matriz de rotação através dos quatérnions. No entanto, tal orientação é definida em 4 dimensões levando a desvantagem de se ter uma interpretação física imediata. Nesta seção a matriz de rotação será parametrizada através dos ângulos de Euler, sendo estes um conjunto de ângulos que representam diretamente a orientação de um corpo rígido, possuindo a vantagem da interpretação física imediata de tal orientação.

Considerando uma formação lagrangiana da dinâmica de um corpo rígido, como mostrado em Lemos (2007), não é possível descrever convenientemente a orientação instantânea de um corpo através da matriz de cossenos diretores. Isto se deve ao fato desta matriz ser formada por 9 elementos (cossenos diretores) que não são independentes entre si.

Sabe-se que para se obter a orientação de um corpo rígido é suficiente 3 sequências de rotações sucessivas realizadas em torno dos eixos cartesianos, em que cada rotação em torno de um eixo constitui uma rotação no plano perpendicular a esse eixo. As rotações são definidas da seguinte forma:

- Rotação de um plano  $xy$  realizada em torno do eixo de rotação  $z$ , representada por  $\psi$ .
- Rotação de um plano  $yz$  realizada em torno do eixo de rotação  $x$ , representada por  $\phi$ .
- Rotação de um plano  $zx$  realizada em torno do eixo de rotação  $y$ , representada por  $\theta$ .

Os ângulos  $(\phi, \theta, \psi)$  associados às rotações são denominados ângulos de Euler.

Considerando um satélite com sistema de referência de atitude definido no corpo do satélite, dado por  $Oxyz$ , os ângulos de Euler associados às rotações em torno destes eixos serão definidos por  $\phi = roll$ ,  $\theta = pitch$  e  $\psi = yaw$ .

As matrizes de rotação relacionadas às rotações em torno de cada eixo serão dadas por:

- Rotação em do eixo x, *roll*

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (32)$$

- Rotação em do eixo y, *pitch*

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 1 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (33)$$

- Rotação em do eixo z, *yaw*

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Existem 12 sequências de rotações distintas para os ângulos de Euler. Neste trabalho é usada a sequência definida por 123, ou seja, a primeira rotação em torno do eixo  $x$  de um ângulo  $\phi$ , segunda rotação em torno de um eixo intermediário  $y'$  de um ângulo  $\theta$  e a terceira rotação em torno de um eixo  $z''$  de um ângulo  $\psi$ . Considerando tais rotações, a matriz de rotação final  $A$  será obtida por (SILVA, 2016a)

$$A = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \quad (35)$$

Os ângulos de Euler que definem a atitude do satélite, a partir da matriz de rotação  $A$ , são dados por (SILVA, 2016a):

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{-A_{32}}{A_{33}}\right) \\ \theta &= \sin^{-1}(A_{31}) \\ \psi &= \tan^{-1}\left(\frac{-A_{21}}{A_{11}}\right)\end{aligned}\tag{36}$$

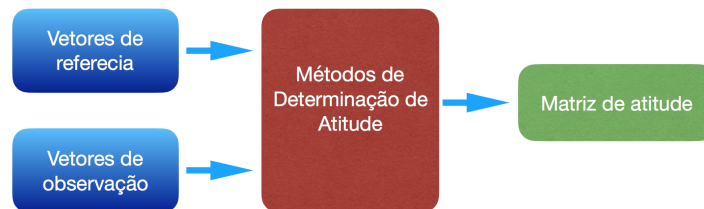
Os ângulos de Euler possuem a vantagem da interpretação física imediata, o que auxilia a visualização espacial, além de não existir parâmetros redundantes. No entanto, a desvantagem de utilizar esta parametrização é que as equações cinemáticas descritas em ângulos de Euler envolvem funções trigonométricas podendo apresentar singularidades em alguns casos.

### 3 Métodos de Determinação de Atitude

A determinação de atitude pode ser dividida em duas categorias: as determinísticas e as estatísticas. Abordagens determinísticas têm a exigência de que em cada instante existam observações suficientes para calcular completamente a atitude. A segunda categoria compreende os métodos ótimos (filtragem) os quais determinam a atitude do veículo a partir da minimização de uma função custo e usando mais que um conjunto mínimo de medidas. Estes algoritmos são utilizados quando mais que 3 medidas são processadas obtendo-se uma estimativa mais precisa da atitude (SHUSTER; OH, 2012).

Este projeto considerou o método determinístico TRIAD e os métodos ótimos Q-method e QUEST, os quais são apresentados a seguir. Todos esses métodos possuem em comum a entrada dos algoritmos, sendo dois vetores de referência  $V_{ref}$  e dois vetores de observação  $V_{obs}$ , tendo como saída dos algoritmos a matriz de atitude. A Fig. 10 apresenta uma ilustração simplificada da estrutura dos algoritmos.

Figura 10 – Fluxograma que representa o procedimento de determinação de atitude.



Fonte: Autor

#### 3.1 O método TRIAD

O método TRIAD é um método determinístico que baseia-se em resolver o problema de Wahba (SHUSTER; OH, 2012) em caráter algébrico pelo grupo  $SO_3$ , tomando como hipótese um grupo de rotação específico com a matriz de atitude (rotação) um operador unitário e inversível. O procedimento para determinação de atitude através do método TRIAD será apresentado a seguir.

Sejam os versores de referência  $\hat{v}_1$  e  $\hat{v}_2$ , ambos com projeção no sistema de referência inercial, e os respectivos versores de observação  $\hat{w}_1$  e  $\hat{w}_2$ . Supõem-se que as medidas



de observações provenientes do satélite satisfação as seguintes relações (GRANZIERA; LOPES; TOSIN, 2007)

$$\mathbf{A}\hat{v}_1 = \hat{w}_1 \quad \mathbf{A}\hat{v}_2 = \hat{w}_2 \quad (37)$$

sendo  $\mathbf{A}$  a matriz de atitude.

A partir dos vetores  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$  constroem-se duas tríades de vetores obtidas por:

$$\hat{r}_1 = \hat{v}_1 \quad \hat{r}_2 = \frac{\hat{v}_1 \times \hat{v}_2}{|\hat{v}_1 \times \hat{v}_2|} \quad \hat{r}_3 = \frac{\hat{v}_1 \times (\hat{v}_1 \times \hat{v}_2)}{|\hat{v}_1 \times \hat{v}_2|} \quad (38)$$

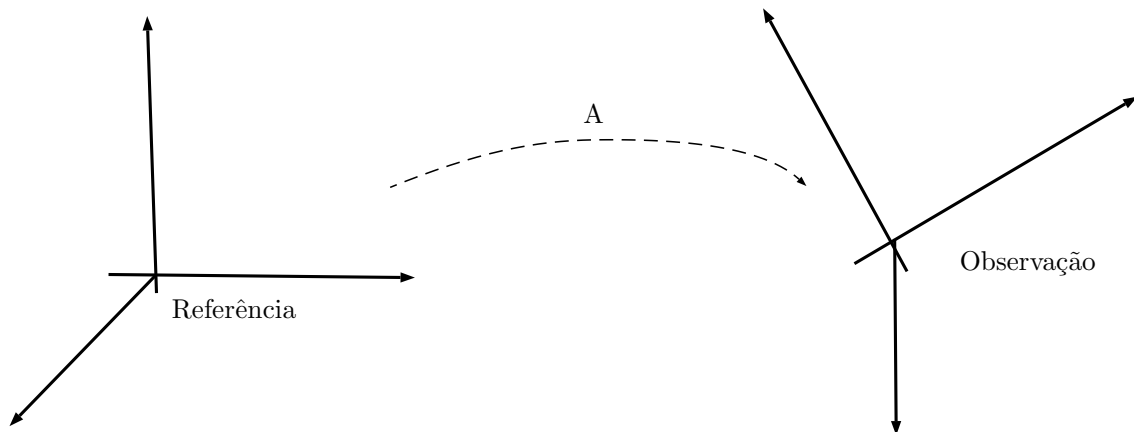
$$\hat{s}_1 = \hat{w}_1 \quad \hat{s}_2 = \frac{\hat{w}_1 \times \hat{w}_2}{|\hat{w}_1 \times \hat{w}_2|} \quad \hat{s}_3 = \frac{\hat{w}_1 \times (\hat{w}_1 \times \hat{w}_2)}{|\hat{w}_1 \times \hat{w}_2|} \quad (39)$$

Sendo a matriz de atitude  $A$  é válida a relação para o conjunto de tríades:

$$\mathbf{A}\hat{r}_i = \hat{s}_i \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (40)$$

A Fig.11 mostra uma ilustração de como a matriz de atitude  $A$  opera em sistema do espaço vetorial de referência para sistema de observação.

Figura 11 – Respresentação da matriz de atitude geometricamente.



Fonte: Autor

Dados os vetores  $\hat{r}_i$  e  $\hat{s}_i$ , ortogonais é possível definir as seguintes matrizes

$$\mathbf{M}_{ref} = [\hat{r}_1 : \hat{r}_2 : \hat{r}_3] \quad (41)$$

$$\mathbf{M}_{obs} = [\hat{s}_1 : \hat{s}_2 : \hat{s}_3] \quad (42)$$

Se as matrizes de observação  $\mathbf{M}_{obs}$  e as matrizes de referência  $\mathbf{M}_{ref}$  estão no mesmo espaço geométrico, então é válida a seguinte relação

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_{ref} = \mathbf{M}_{obs} \quad (43)$$

Como as matrizes  $\mathbf{M}_{ref}$  e  $\mathbf{M}_{obs}$  são ortogonais e formam um grupo do  $S(O3)$ , pode-se determinar a matriz de atitude a partir de

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{obs}\mathbf{M}_{ref}^T \quad (44)$$

podendo ser interpretada no algoritmo de determinação de atitude por

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \hat{s}_i \hat{r}_i^T \quad (45)$$

A partir da matriz de atitude obtém-se os ângulos de atitude definidos pelas Eq. (36).

A seguir o algoritmo para implementar o método TRIAD é apresentado.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo do método TRIAD

---

- 1: Entrada dos vetores  $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{w}_1, \hat{w}_2$
- 2: Normalização dos vetores
- 3:  $\hat{r}_1 = \hat{v}_1 \quad \hat{r}_2 = \frac{\hat{v}_1 \times \hat{v}_2}{|\hat{v}_1 \times \hat{v}_2|} \quad \hat{r}_3 = \frac{\hat{v}_1 \times (\hat{v}_1 \times \hat{v}_2)}{|\hat{v}_1 \times \hat{v}_2|}$
- 4:  $\hat{s}_1 = \hat{w}_1 \quad \hat{s}_2 = \frac{\hat{w}_1 \times \hat{w}_2}{|\hat{w}_1 \times \hat{w}_2|} \quad \hat{s}_3 = \frac{\hat{w}_1 \times (\hat{w}_1 \times \hat{w}_2)}{|\hat{w}_1 \times \hat{w}_2|}$
- 5:  $\mathbf{M}_{ref} = [\hat{r}_1 : \hat{r}_2 : \hat{r}_3]$
- 6:  $\mathbf{M}_{obs} = [\hat{s}_1 : \hat{s}_2 : \hat{s}_3]$
- 7: Para k de 1 até 3 faça
- 8: a0=a
- 9: Para i de 1 até 3 faça
- 10: Para j de 1 até 3 faça
- 11:  $a(i, j) = \mathbf{M}_{ref}(j, k) * \mathbf{M}_{obs}(j, k);$
- 12: fim
- 13: fim
- 14: a=a+a0;
- 15: fim
- 16:

### 3.2 O método Q-Method

O método Q-method, foi desenvolvido para resolver o problema de Wahba, como mostrado em Markley e Mortari (1999). Para determinar uma matriz ótima de um sistema de atitude, é necessário minimizar uma função custo, dada por

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_i a_i |b_i - Ar_i| \quad (46)$$

onde  $L$  é a função custo em relação a matriz de atitude  $A$ ,  $a_i$  são os pesos da função sobre a diferença entre os vetores de observação  $b_i$  e os vetores de referência  $r_i$ .

Para resolver o problema de otimização, pode-se representar a Eq. (46) por (MARKLEY; MORTARI, 1999)

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_i a_i - tr(AB^T) \quad (47)$$

onde  $B = \sum_i a_i b_i r_i$ .

A chave para resolver tal problema de otimização é reescrever o problema em termos dos quatérnions e aplicar a matriz de rotação desenvolvida na seção 2.4.1. (MARKLEY; MORTARI, 2000)

Seja o quatérnio definido por

$$q = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q \end{bmatrix} \quad \forall q_4 \in \mathfrak{R}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^3 \quad |q| = 1 \quad (48)$$

A partir da matriz de rotação  $R$  mostrada na seção 2.4.1, obtém a seguinte relação

$$tr(AB^T) = q^T \mathbf{K} q \quad (49)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}$  é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} S - \mathbf{I}tr(B) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & tr(b) \end{bmatrix} \quad (50)$$

com

$$S = B + B^T \quad (51)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{bmatrix} = \sum_i a_i b_i \times r_i \quad (52)$$

a solução ótima é associada ao autovetor do maior autovalor  $\lambda_{max}$  da equação:

$$Kq_{opt} = \lambda_{max}q_{opt} \quad (53)$$

com isso a rotação será  $q_{opt}$  relacionada a matriz  $R(q_{opt})$  de atitude. Conhecendo-se a matriz de rotação (atitude), obtém-se os ângulos de atitude estimados. Um resumo do algoritmo de estimação com o Q-Method é apresentado a seguir. (MARKLEY; MORTARI, 2000)

---

**Algoritmo 2** Algoritmo do método q-method

---

- 1: Entrada dos valores  $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{w}_1, \hat{w}_2$
- 2: Normalização dos vetores
- 3: Calcular matriz B
- 4: Calcular matriz Z
- 5: Calcular matriz K
- 6: Determinar o autovalor associado a matriz K
- 7: Determinar o maior autovalor associado ao autovetor
- 8: Determinar o valor de q
- 9:

Fonte: Autor

---

### 3.3 O método QUEST

O método Quest é um método ótimo de estimação de atitude. A idéia principal do método é obter os autovalores e autovetores de uma matriz  $K$ , como mostrada na Eq. (53). Uma forma equivalente para tal equação pode ser dada por (MARKLEY; MORTARI, 2000)

$$[(\lambda_{max} + tr(B))\mathbf{I} - S]\mathbf{q} = q_4\mathbf{z} \quad (54)$$

e

$$[(\lambda_{max} + tr(B))\mathbf{I} - S]q_4 = \mathbf{qz} \quad (55)$$

Partindo-se da Eq.(54) chega-se na seguinte equação:

$$\mathbf{q} = q_4[(\lambda_{max} + tr(B))\mathbf{I} - S]^{-1}\mathbf{z} = \frac{q_4 \cdot adj[(\lambda_{max} + tr(B))\mathbf{I} - S]z}{det[(\lambda_{max} + tr(B))\mathbf{I} - S]} \quad (56)$$

Do teorema de Cayley-Hamilton para uma matriz  $G$  de  $dim\{3\}$  tem-se que (MARKLEY; MORTARI, 2000)

$$G^3 - (trG)G^2 + [tr(adjG)]G - (detG)\mathbf{I} = 0 \quad (57)$$

com  $adj(G)$  é auto-adjunto de  $G$  definido por

$$adjG = G^2 - (trG)G + [tr(adjG)]\mathbf{I} \quad (58)$$

Em particular, considerando-se (MARKLEY; MORTARI, 1999)

$$\alpha = \lambda_{max}^2 - (trB)^2 - tr(adjS) \quad (59)$$

e

$$\beta = \lambda_{max} - trB \quad (60)$$

a rotação ótima pode ser representada por

$$q_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

onde  $x = (\alpha\mathbf{I} + \beta S + S^2)\mathbf{z}$ .

Este método foi sugerido para resolver o problema de autovalores e autovetores da matriz  $K$ , porém sujeito a um alto custo computacional. Tal método foi implementado pela primeira vez no satélite MAGSAT em 1979.

O algoritmo de estimação utilizando o método Quest é mostrado a seguir.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo o método Quest

---

- 1: Entrada dos valores  $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{w}_1, \hat{w}_2$
- 2: Normalização dos vetores
- 3: Calcular matriz B
- 4: Calcular matriz Z
- 5: Calcular matriz K
- 6: Determinar o autovalor associado a matriz K
- 7: Determinar o maior autovalor associado ao autovetor
- 8:  $q_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$
- 9:

### 3.4 Validação dos Algoritmos de Estimação

Para validar os algoritmos utilizados neste trabalho para estimar a atitude de um satélite utilizou-se como referência resultados apresentados em Linhares e Orlando (2005). A Tab. 1 mostra os vetores que inicializam os algoritmos e foram retirados de um exemplo apresentado em Linhares e Orlando (2005).

Tabela 1 – Vetores que inicializam os algoritmos de estimação

Vetor de referência						Vetor de observação					
v1			v2			w1			w2		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
0	0	-1	0	0.453	0.506	0.193	-0.668	-0.717	0.462	0.724	0.5433

Os 3 algoritmos, TRIAD, Q-Method e Quest, foram implementados de acordo com o apresentado nas seções anteriores e as matrizes de atitude obtidas são:

$$A_{triad} = \begin{bmatrix} 242.1322e - 003 & 949.9889e - 003 & -192.7910e - 003 \\ -676.2784e - 003 & 307.7287e - 003 & 668.5480e - 003 \\ 695.7151e - 003 & -31.4966e - 003 & 716.9680e - 003 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$A_{q-method} = \begin{bmatrix} -2.8900e - 003 & 946.6119e - 003 & -212.8331e - 003 \\ -676.2784e - 003 & 76.9310e - 003 & 662.5660e - 003 \\ 695.7151e - 003 & -16.4941e - 003 & 473.1062e - 003 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$A_{quest} = \begin{bmatrix} 593.8314e - 003 & -626.7240e - 003 & 307.7977e - 003 \\ 636.4328e - 003 & 644.9663e - 003 & 81.5378e - 003 \\ -287.1857e - 003 & 137.5216e - 003 & 825.9075e - 003 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Os ângulos de Euler que definem a atitude  $(\phi, \theta, \psi)$  estimados por cada um dos métodos são mostrados na Tab. 2.

Tabela 2 – Angulos de Euler para os métodos TRIAD, q-Method e Quest

	TRIAD	q-Method	Quest
$\phi$	42.9477	49.1620	42.6955
$\theta$	11.1157	17.9266	12.2884
$\psi$	75.5009	71.2010	75.6520

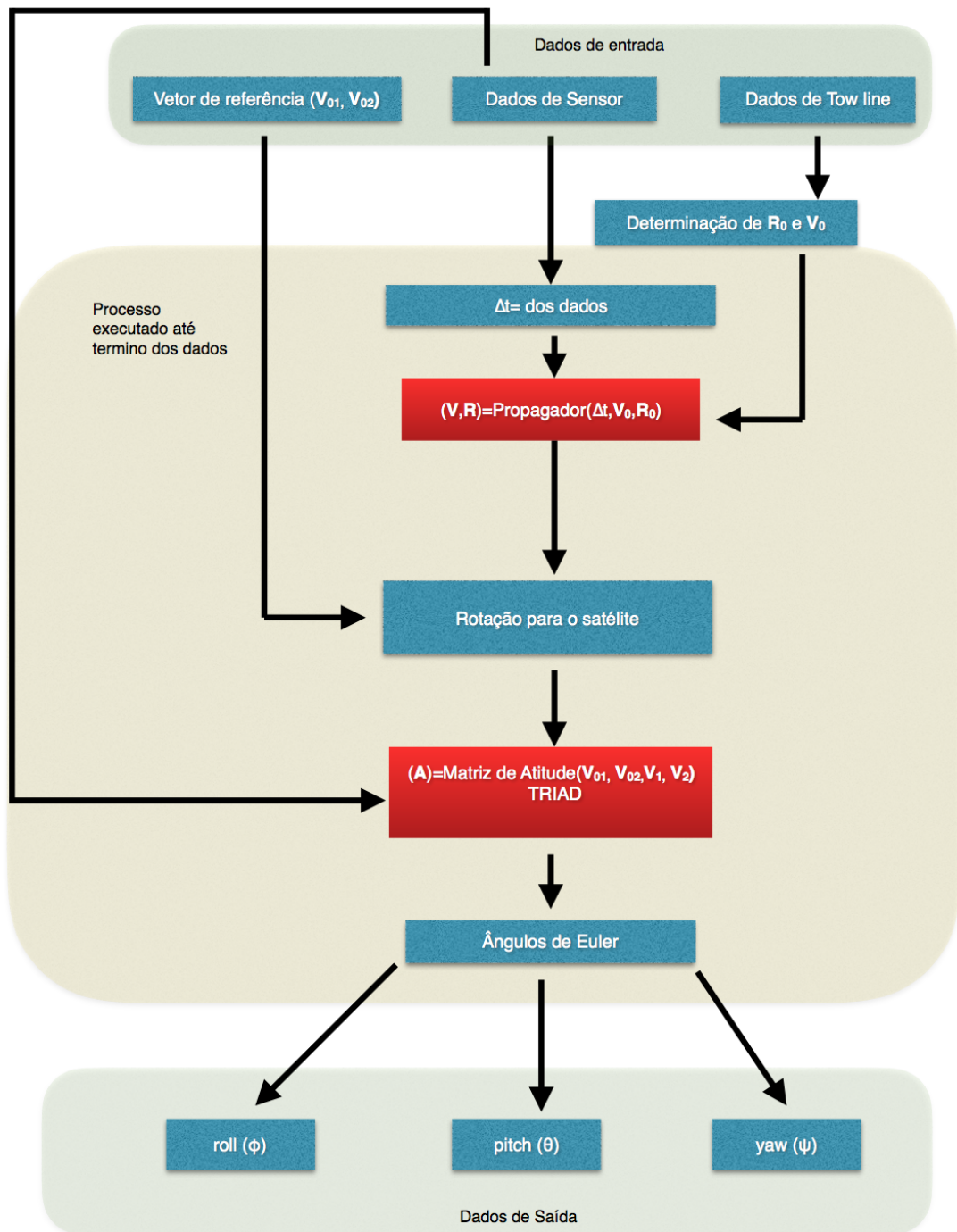
Estes resultados estão de acordo com o exemplo considerado como referência (LINHARES; ORLANDO, 2005) para esta primeira validação dos algoritmos. Observa-se que para um mesmo ângulo de atitude os resultados obtidos para os 3 métodos destoam um do outro. Desta forma se faz o seguinte questionamento: Qual é o método mais preciso?

Na seção 5.2 os algoritmos serão testados em uma aplicação real, onde se terá condições de analisar com maior rigor a precisão da atitude estimada através de cada método.

#### 4 Metodologia para estimação de Atitude

Neste capítulo será mostrada a metodologia empregada para obter a matriz de atitude a partir dos dados fornecidos por sensores que estão à bordo de um satélite artificial. A Fig. 12 apresenta um fluxograma que ilustra o procedimento utilizado neste trabalho.

Figura 12 – Fluxograma para estimação de atitude.





Como pode se observar, existem três conjuntos de dados de entrada, sendo eles (1) vetor de referência, (2) vetor de observação e (3) elementos do *Two Line*. Os vetores de referência e os vetores de observação são disponibilizado pelo Centro de Controle de Satélites do INPE (SILVA, 2016a). A Tab. 3 mostra como os vetores de observação fornecidos pelos sensores de estrelas foram consideradas neste trabalho.

Tabela 3 – Exemplo dos dados obtidos pelos sensores de estrelas

	Sensor de estrelas A						Sensor de estrelas B					
	v1			v2			V1			v2		
Data juliana	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

O conjunto de dados *Two Line* é um formato de dados padrão da NASA que lista os elementos orbitais de um objeto que está em órbita da Terra em uma determinada época. Em meados dos anos 1960 Max Lene desenvolveu modelos matemáticos para prever a localização de satélites com um mínimo conjunto de elementos, que foram publicados em 1965, no *Introduced the Analytical Drag Theory*. A partir de então, foi dado a existência de dados em *Two Line*, cujos dados apresentam informações necessária mínimas para determinar e propagar a órbita de um objeto (KAUDERER, 2017).

Inicialmente, conhecendo-se os dados de entrada, é necessário calcular a variação temporal  $\Delta t$  entre a época das observações dos sensores e a época relacionada ao *Two Line*. Através do **two line** obtém-se os vetores posição e velocidade do satélite. Conhecidos  $\Delta t$ , posição e velocidade iniciais, propaga-se estes vetores para o instante associado à observação do sensor utilizando o propagador SGP4. O propagador SGP4 utiliza um modelo simplificado de perturbações que foi desenvolvido por Hilton Kuhlman (1966) (HOOTS; ROEHRICH, 1980), em que Ken Cranford desenvolveu o modelo SGP4 colocando a teoria de densidade de perturbações atmosféricas com a solução gravitacional de Brouwer (HOOTS; ROEHRICH, 1980).

Com estado (posição e velocidade) propagado, calcula-se a matriz de rotação que leva os vetores de referência até o estado calculado. Em seguida, aplica-se os métodos para estimação da atitude, obtendo-se a matriz de atitude que fornecerá os ângulos de atitude (ângulos de Euler).

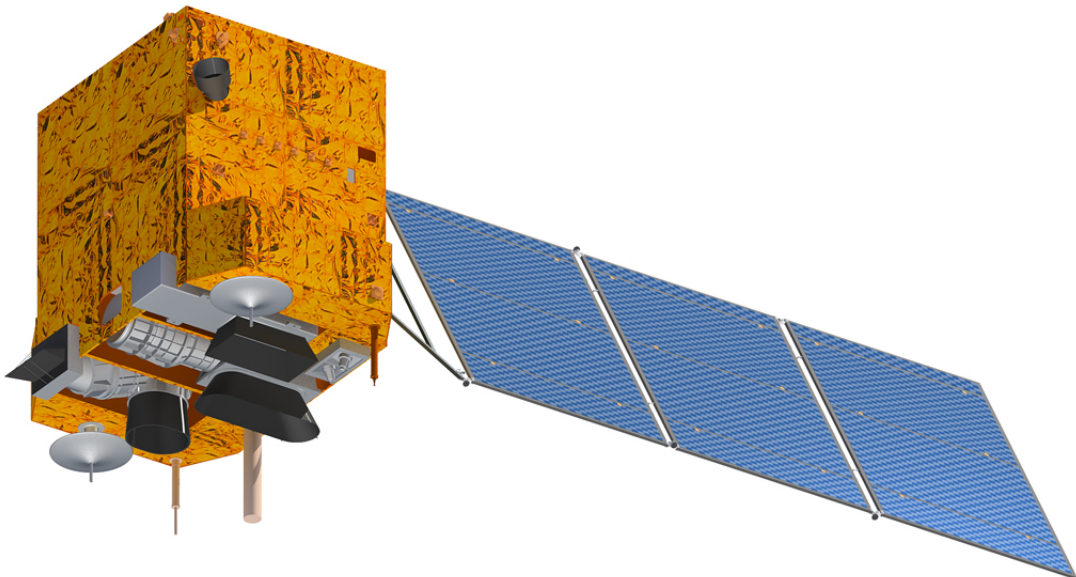
## 5 Resultados para o satélite CBERS-2B

Para ilustrar o desempenho dos métodos TRIAD, Q-Method e QUEST, são apresentados neste capítulo gráficos e tabelas baseados em resultados da atitude estimada, tomando como referência medidas reais de sensores de estrelas que estão à bordo dos satélites CBERS-2B

### 5.1 Considerações sobre o satélite CBERS-2B

Os satélites CBERS são satélites de sensoriamento remoto e operam numa órbita heliosíncrona, recorrente e congelada. Esses satélites fazem um caminho de pólo a pólo da Terra, passando por um determinado ponto sempre no mesmo horário local a uma altitude de 778 km (em relação ao nível do mar) e período orbital de cerca de 100 minutos. Com uma união de 30% de parte do Brasil e 70% por parte de China. A Fig. (13) é uma imagem ilustrativa do satélite CBERS-2B.

Figura 13 – Ilustração do satélite CBERS-2B.



Fonte: (INPE, 2017)

Na Fig.(14) refere-se ao brasão da missão espacial cuja parceria começou em meados de 1988 (INPE, 2017).

Figura 14 – Brasão do programa espacial CBERS



Fonte: (INPE, 2017)

A Fig.(15) mostra o CBERS-2B sendo montado em território nacional no INPE (INPE, 2017).

Figura 15 – S atelite sendo montado no INPE .



Fonte: (INPE, 2017)

## 5.2 Resultados da Estimação de Atitude

Resultados da atitude estimada foram analisados levando em conta três métodos de estimação: TRIAD, QUEST e Q-Method. Em todos os casos foram utilizados dados reais de sensores de estrelas (STS1 e STS2) que estão à bordo do satélite CBERS-2B, os quais foram fornecidos pelo Centro de Controle de Satélites do INPE.

A utilização de dados reais impõem dificuldades como, por exemplo, não se tem conhecimento da atitude real para utilizar como referência nas comparações com a atitude estimada. Para isso foram utilizados inicialmente os dados do CBERS-2B, os quais já foram analisados em outros trabalhos (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2011a). Outro aspecto importante a ser destacado é a necessidade de interpolação de medidas entre instantes, visto que as observações realizadas pelos sensores STS1 e STS2 são fornecidas em instantes distintos.

Para calcular a atitude utilizando a metodologia apresentada no capítulo 4, foram necessários os vetores de referência e os elementos do *Two Line*. Os vetores de referência em precisão dupla são disponibilizados em Silva (2016a), e são apresentados na Tab. 4.

Tabela 4 – Elementos para formação do vetor de referência  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$

sb	=	0.7071067811865475
st	=	0.9396926207859084
ct	=	-0.3420201433256687
sbct	=	-0.2418447626479752
sbst	=	0.6644630243886747

A partir destes elementos pode-se compor os vetores de referência da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= [sbst; sbst; ct] \\ \mathbf{v}_2 &= [sb; -sb; 0]\end{aligned}$$

(65)

O *Two line* utilizado para os cálculos foi fornecido pelo INPE e é mostrado na Tab.

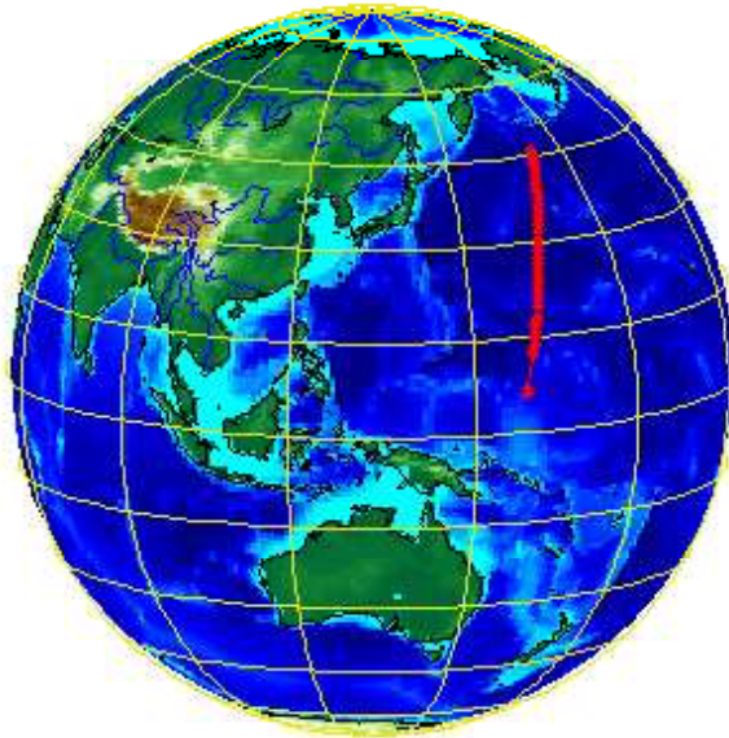
5.

Tabela 5 – *Two line* do dia 9 de outubro de 2007

1	32062	07042	07282.46143316	00000009	00000	0	12016	4	0	718
2	32062	98.5482	355.3654	.0000863	126.2654	233.8612	14.35422957			

As Fig. (16)-(17) foram obtidas em Matlab e simulam a trajetória do satélite CBERS-2B no dia 9 de outubro de 2007 para um intervalo de 10 min.

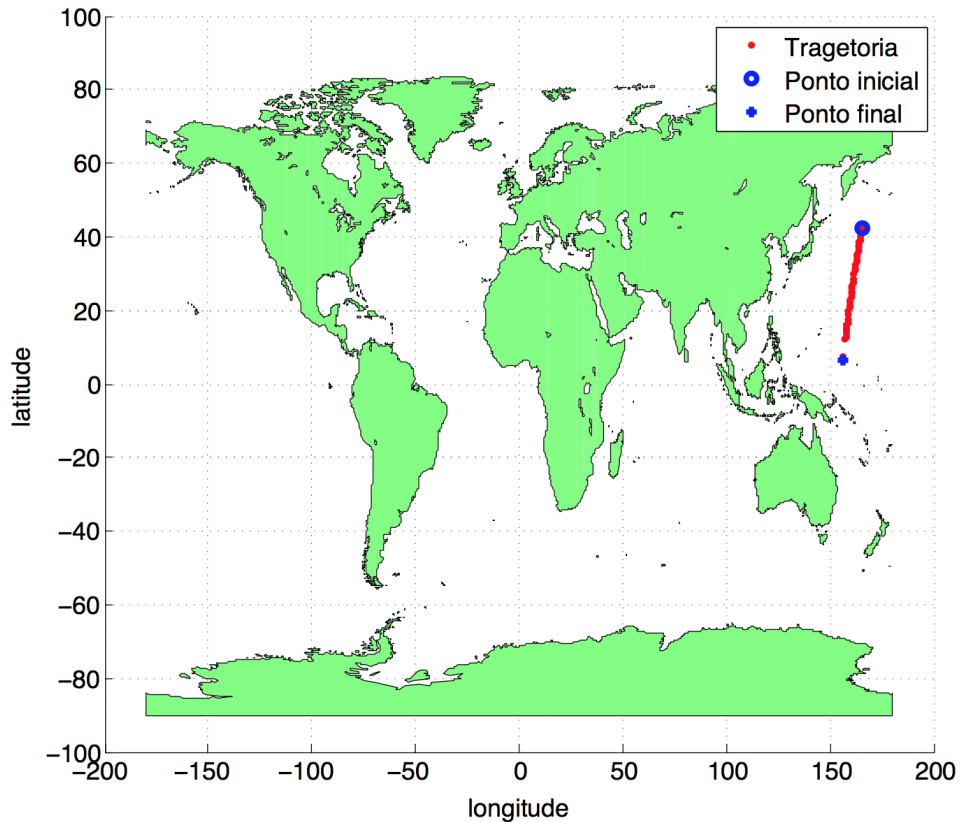
Figura 16 – Trecho da trajetória do CBERS-2B.



Fonte: Autor

Na Fig. (17) é apresentada uma projeção dos pontos da Fig. (16) em uma mapa cartesiano de latitude e longitude. Esse tipo de gráfico *Groud track* mostra como a projeção da órbita do satélite na Terra varia.

Figura 17 – *Groud track* so satélite CBERS-2B.

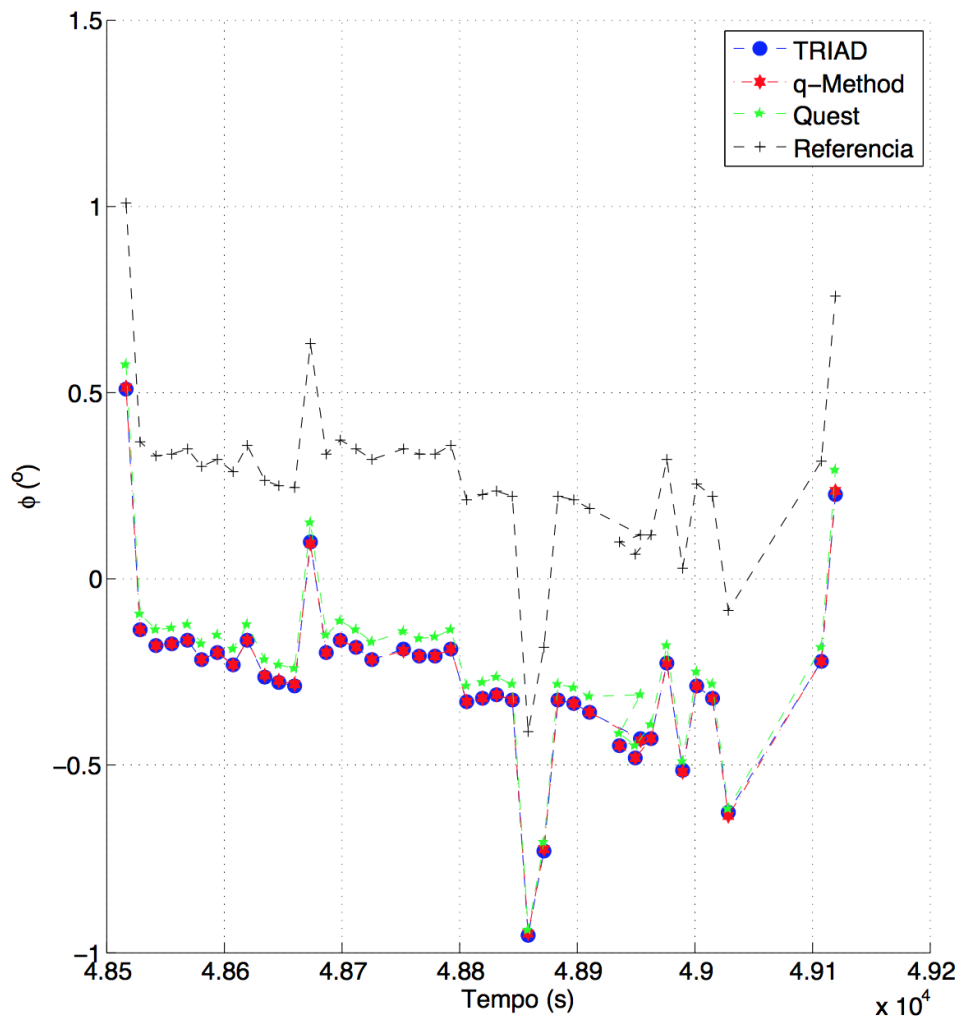


Fonte: Autor

A atitude estimada pelos métodos TRIAD, Q-Method e Quest, utilizando medidas reais de sensores de estrelas, é apresentada nas Figs. (18)-(20). Nas figuras são comparados os ângulos de atitude estimados pelos diferentes algoritmos com valores de atitude de referência. Os valores de referência foram calculados utilizando o método TRIAD e fornecidos pelo INPE. Neste caso, a comparação servirá como validação da metodologia abordada neste trabalho quando aplicada a dados reais de satélites.

Na Fig. (18) percebe-se que existe uma diferença quase padronizada entre os métodos de estimação abordados com o valor de referência. Esta diferença pode ser justificada pela utilização do propagador e não pelo método de determinação de atitude. O propagador utilizado na referência foi o SGP8 e o utilizado neste trabalho foi o SGP4. Quanto aos valores para o ângulo  $\phi$  estimados pelos métodos TRIAD, q-Method e Quest mostram o mesmo comportamento.

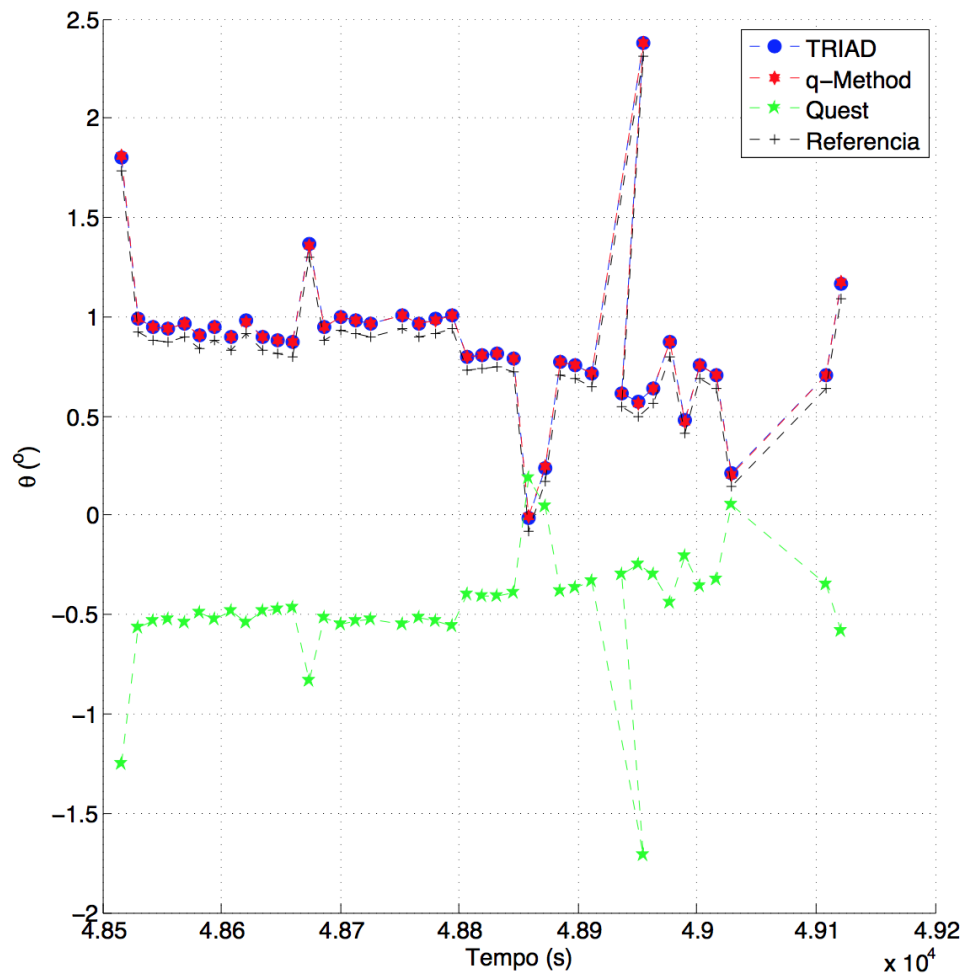
Figura 18 – Ângulo de atitude  $\phi$  estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B.



Fonte: Autor

Na Fig. (19) é mostrado o ângulo de atitude  $\theta$  estimado pelos algoritmos abordados no trabalho e pela referência. Neste gráfico percebe-se que os métodos TRIAD e q-Method ficam próximos à referência. Entretanto, o método Quest possui um comportamento espelhado com os demais.

Figura 19 – Ângulo de atitude  $\theta$  estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B.

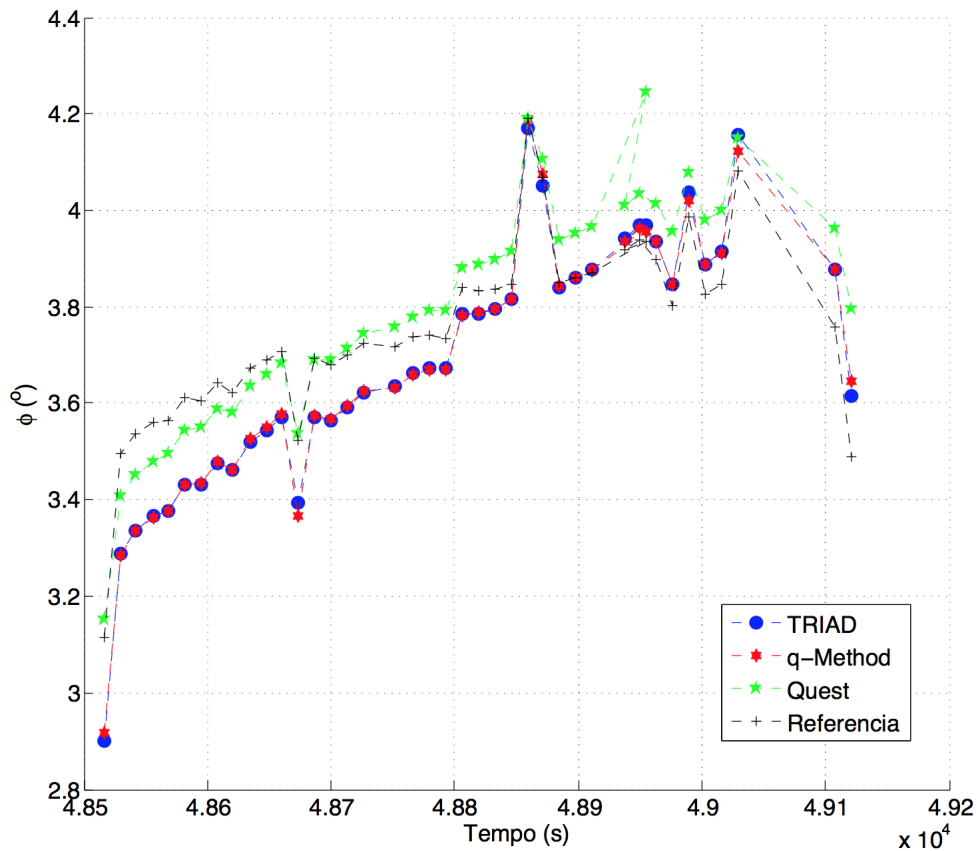


Fonte: Autor

Na Fig. (20) percebe-se que o ângulo estimado  $\psi$  possui um comportamento similar entre todas as abordagens.



Figura 20 – Ângulo de atitude  $\psi$  estimado por diferentes algoritmos para o satélite CBERS-2B.



Fonte: Autor

Para avaliar a função custo  $L$  que se deseja minimizar, definida na seção 3.2, associada a matriz de atitude em cada método, foi montada uma tabela que contém a soma da função custo em todos os pontos do período considerado. A Tab. 6 apresenta os valores de  $L$ .

Tabela 6 – Função custo relacionada ao período de 9 de outubro de 2007

$L(A_{TRIAD})$	=	3.4104e-06
$L(A_{q-method})$	=	2.1614e-06
$L(A_{Quest})$	=	14.6695e-03

Nota-se que o método q-Method apresenta o menor valor para a soma da função custo, ou seja, é o método que fornece o menor erro associado à estimação quando comparado com os métodos TRIAD e Quest.

De forma a validar os algoritmos empregados na estimação de atitude por meio de uma análise mais criteriosa, as Tab.( 7 , 8 e 9) mostram o intervalo de confiança da

diferença entre atitude de referência e a atitude estimada pelos métodos. Neste trabalho foi utilizado um grau de confiança de 99% (LEVINE; BERENSON; STEPHAN, 2005).

Tabela 7 – Intervalo de confiança da diferença entre a referência e o estimado, para o TRIAD

	limite superior $o$		limite inferior $o$
$\Delta\phi =$	2.16E-01	$\mu_\phi$	-1.88E-01
$\Delta\theta =$	-6.78E-02	$\mu_\theta$	-6.87E-02
$\Delta\psi =$	9.83E-02	$\mu_\psi$	2.51E-02

Tabela 8 – Intervalo de confiança da diferença entre a referência e o estimado, para o q-Method

	limite superior $o$		limite inferior $o$
$\Delta\phi =$	2.16E-01	$\mu_\phi$	-1.88E-01
$\Delta\theta =$	-6.78E-02	$\mu_\theta$	-6.87E-02
$\Delta\psi =$	9.83E-02	$\mu_\psi$	2.51E-02

Tabela 9 – Intervalo de confiança da diferença entre a referência e o estimado, para o Quest

	limite superior $o$		limite inferior $o$
$\Delta\phi =$	4.99E-01	$\mu_\phi$	4.82E-01
$\Delta\theta =$	1.54E+00	$\mu_\theta$	1.02E+00
$\Delta\psi =$	-1.20E-02	$\mu_\psi$	-8.23E-02

Com isso se garante que os resultados obtidos neste trabalho têm 99% de certeza de estarem nos respectivos intervalos.

## 6 Comentários Finais

Este trabalho propôs estudar os métodos de determinação de atitude TRIAD, QUEST e Q-Method, quando dados reais de sensores de estrelas que estão a bordo dos satélites CBERS2B e CBERS-4 alimentam os estimadores. No entanto, a bolsa de Iniciação Científica foi implementada para um período efetivo de 6 meses, sendo insuficiente principalmente no que diz respeito a análise dos dados do satélite CBERS-4. No período considerado foram realizados levantamentos de referências bibliográficas e implementação/validação dos algoritmos. Dos resultados de estimação de atitude apresentados no trabalho observou-se que o algoritmo TRIAD é um método muito versátil pela sua simplicidade, porém os demais algoritmos possuem maior precisão por serem métodos ótimos de estimação. A análise dos resultados, ainda que parciais, realizada no período da vigência da bolsa será apresentada no Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (XXXVII CNMAC) que ocorrerá em setembro de 2017. Será solicitado pedido de renovação de bolsa de forma que se possa concluir a proposta inicial do projeto.

## Referências<sup>1</sup>

- BATISTA, E.; SANTOS, M. V. dos. Rotações, quatérnions e álgebras de clifford. 2012. 16, 17, 18
- DIEBEL, J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, v. 58, n. 15-16, p. 1–35, 2006. 20
- GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. F. Filtro não linear de kalman sigma-ponto com algoritmo unscented aplicado a estimativa dinâmica da atitude de satélites artificiais. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos/SP*, 2011. 7, 14, 36
- GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. F. Unscented kalman filter applied to the spacecraft attitude estimation with euler angles. *Mathematical problems in engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2012, 2011. 7
- GRANZIERA, F.; LOPES, R. V.; TOSIN, M. C. O problema da determinação da atitude através da observação de dois vetores—uma descrição do algoritmo triad e sua matriz de covariância. 2007. 25
- HOOTS, F. R.; ROEHRICH, R. L. *Models for propagation of NORAD element sets*. [S.l.], 1980. 33
- INPE. *CEBERS*. 2017. Disponível em: <http://www.cbers.inpe.br/index.php>. 34, 35
- KAUDERER, A. *Definition of Two-line Element Set Coordinate System*. 2017. Disponível em: [https://spaceflight.nasa.gov/realdata/sightings/SSapplications/Post/JavaSSOP/SSOP\\_Help/tle\\_def.html](https://spaceflight.nasa.gov/realdata/sightings/SSapplications/Post/JavaSSOP/SSOP_Help/tle_def.html). 33
- LEMO, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. 21
- LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. *Estatística: teoria e aplicações-usando Microsoft Excel português*. [S.l.]: Ltc, 2005. 42
- LIMA, E. L. Álgebra linear: coleção matemática universitária. *IMPA, Rio de Janeiro, Brasil*, 2006. 14, 15
- LINHARES, J. G.; ORLANDO, V. Determinação de atitude de satélites artificiais com filtro de kalman e método da máxima verossimilhança. 2005. 30, 31
- MARKLEY, F. L.; MORTARI, D. How to estimate attitude from vector observations. 1999. 27, 29
- MARKLEY, F. L.; MORTARI, D. Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, v. 48, n. 2, p. 359–380, 2000. 27, 28, 29
- SHUSTER, M. D.; OH, S. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012. 24

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

SILVA. *CBERS 2B Attitude Determination Using Star Sensor data*. [S.l.], 2016. 12, 13, 22, 33, 36

SILVA. *CBERS 2B Transformation between reference frame*. [S.l.], 2016. 12

SILVA, W. R.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. Application of the extended h<sup>∞</sup> filter for attitude determination and gyro calibration. 2014. 9, 10, 11, 12