



## **REMOÇÃO DE DETRITOS ESPACIAIS COM USO DE DISPAROS DE LASER**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

André Martins Tsuji (FEG-UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: [tsuji.martins@gmail.com](mailto:tsuji.martins@gmail.com)

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado (INPE/ETE, Orientador)

E-mail: [antonio.prado@inpe.br](mailto:antonio.prado@inpe.br)

Prof. Dra. Vivian Martins Gomes (INPE/UNESP, Orientadora)

E-mail: [vivian.gomes@feg.unesp.br](mailto:vivian.gomes@feg.unesp.br)

# Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>3</b>
<b>2. LEIS DE KEPLER .....</b>	<b>5</b>
<b>3. POSICIONAMENTO DE SATÉLITE.....</b>	<b>6</b>
3.1 EQUAÇÃO DE KEPLER .....	9
<b>4. MUDANÇA DE COORDENADAS .....</b>	<b>11</b>
4.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS OXYZ .....	11
4.1.1 Coordenadas cartesianas Oxyz de posição .....	11
4.1.2 Coordenadas cartesianas Oxyz de velocidade.....	12
4.2 TRANSFORMAÇÃO DE ELEMENTOS KEPLERIANOS PARA COORDENADAS CARTESIANAS OXYZ.....	12
4.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS OXYZ PARA ELEMENTOS KEPLERIANOS.....	14
<b>5. PROBLEMA DE N CORPOS.....</b>	<b>18</b>
5.1 PROBLEMA DE DOIS CORPOS.....	18
5.2 PROBLEMA DE TRÊS CORPOS .....	19
5.3 PROBLEMA DE N CORPOS.....	20
5.4 TERMOS DIRETO E INDIRETO .....	21
<b>6. ACHATAMENTO DA TERRA.....</b>	<b>23</b>
<b>7. APLICAÇÃO DO IMPULSO .....</b>	<b>24</b>
7.1 DIREÇÃO DO CANHÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO.....	24
7.2 IMPULSO .....	26
<b>8. RESULTADOS.....</b>	<b>27</b>
<b>9. CONCLUSÃO .....</b>	<b>37</b>
<b>10. REFERÊNCIA .....</b>	<b>38</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O progresso em pesquisas espaciais e de satélites é de grande importância em trabalhos de meteorologia, telecomunicações, processamento de imagens aéreas da Terra e em outras diversas áreas. Equipamentos usados para tais fins possuem determinado tempo de vida útil e, ao término desse período, estes são chamados de lixo espacial ou debris. A ausência dos devidos cuidados com o descarte desses resíduos os mantém em órbita nas proximidades do planeta, aumentando riscos de acidentes com astronautas em serviço e com satélites artificiais em operação.

O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) define lixo espacial como objetos criados pelo homem e que se encontra em órbita ao redor da Terra, mas que não desempenham mais nenhuma função útil, como por exemplo, as diversas partes e dejetos de naves espaciais deixados para trás quando do seu lançamento.

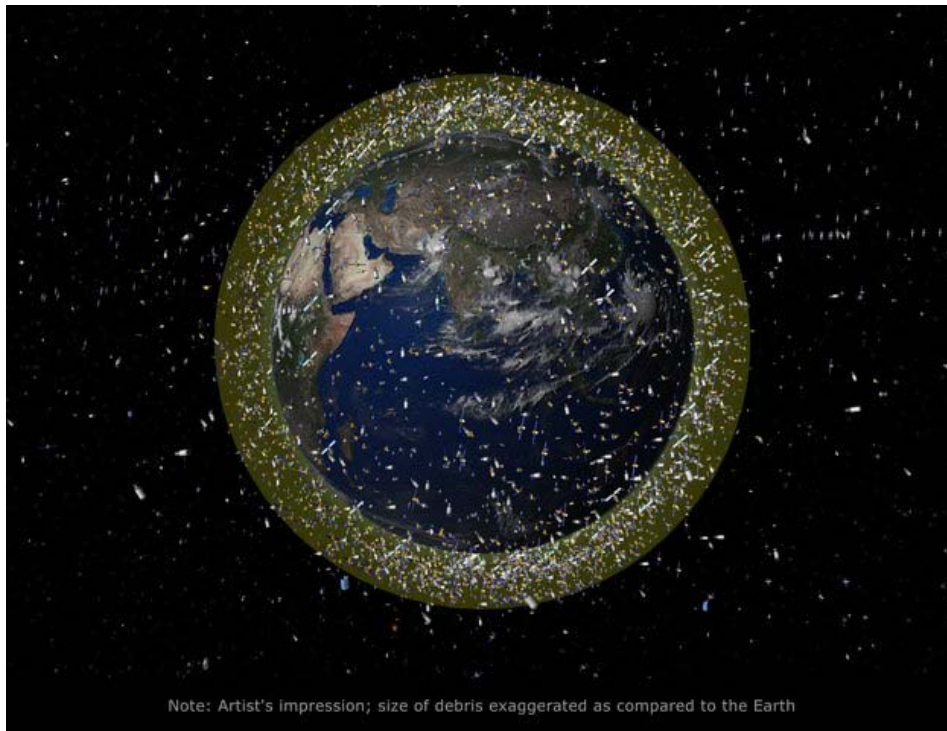


Figura 1.1- Concepção artística de detritos espaciais.

Fonte: ESA, 2014

Um meio de evitar que determinado equipamento torne-se lixo espacial é programá-lo para que, no fim de sua atividade, entre em órbitas distantes da Terra intituladas de órbitas-cemitério, diminuindo o risco de colisões, ou então forçar sua reentrada na atmosfera, onde será destruído. Propostas para eliminar lixo espacial estão sendo trabalhadas e analisadas. Algumas delas são:

**Redes:** Sistema de redes gigantes capaz de capturar detritos e diminuir sua altitude.

**Fios:** Conectar satélites desativados com cabos de cobre para que pudessem ser atraídos pelo campo magnético da Terra.

**Espuma:** Um painel de espuma colocado na rota do lixo espacial. Quando estes passam pelo painel teriam sua velocidade reduzida, caindo no planeta.

O grande problema desse trabalho de limpeza é seu alto custo financeiro, colocando sua viabilidade em risco.

Este trabalho aborda um método de limpeza da órbita terrestre onde, aplicando um impulso com auxílio de um canhão de laser, será alterado o movimento orbital de determinado detrito espacial presente nesta, com o objetivo de colocá-lo de volta na atmosfera terrestre e sofrer combustão. Para tal meta, esse problema será abordado e um método será utilizado para estudar o movimento do detrito e a relação entre a posição do satélite e do canhão localizado na superfície terrestre que propiciem a reentrada na atmosfera. Também será explicada a técnica usada para obter a melhor posição do detrito para o momento do disparo do canhão.

Segundo reportagem do site G1, publicada em 07/03/2014, a execução da proposta estudada neste trabalho estava em análise por cientistas australianos.

## 2. LEIS DE KEPLER

O Astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), após ser forçado a abandonar o cargo de professor em Graz devido a Contra Reforma, passou a trabalhar com o astrônomo dinamarquês e Matemático Imperial Tycho Brahe e, em 1601, com a morte deste último, Kepler herdou tal título. Utilizando observações de seu antigo companheiro de trabalho, Kepler conseguiu conceituar as três leis do movimento dos planetas que são a base da mecânica celeste (Kuga et al., 2008).

Primeira lei: “Lei das órbitas elípticas”. As órbitas dos planetas são elipses com o Sol como foco.

Segunda lei: “Lei das áreas”. O segmento de reta entre o planeta e o Sol percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Terceira lei: “Lei harmônica”. A relação dos quadrados dos períodos entre dois planetas é igual à relação do cubo do semi-eixo maior de suas órbitas.

Mais detalhes sobre Kepler e seu trabalho na astronomia podem ser encontrados na obra de Kuga.

### 3. POSICIONAMENTO DE SATÉLITE

Para a definição da elipse que o satélite percorre é necessário conhecer alguns elementos de órbita (Kugaet al., 2008):

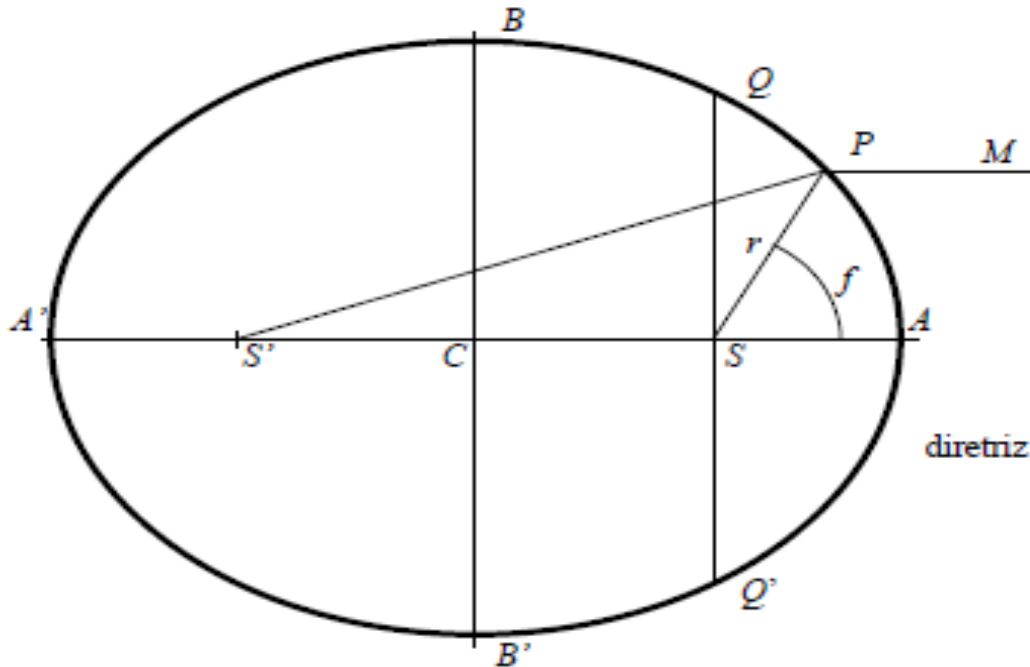


Figura 3. 1 – Elementos de uma órbita elíptica

FONTE: Kuga, 2008

**a: Semi-eixo maior.** Distância entre o centro da elipse e o ponto da elipse mais afastado do centro.

$$a = CA \quad (3.1)$$

**e: Excentricidade.** Define a forma da órbita cônica e seu valor pode ser calculado.

$$e = \frac{CS}{CA} \quad (3.2)$$

Onde:

$e = 0$ : Órbita circular

$0 < e < 1$ : Órbita elíptica

$e = 1$ : Órbita parabólica

$e > 1$ : Órbita hiperbólica.

**M: Anomalia média.** É uma grandeza proporcional ao tempo de passagem pelo periastro.

Porém, para total localização da órbita no espaço é preciso ter conhecimento dos três ângulos de Euler da órbita. Primeiramente, deve-se definir o sistema OXYZ com origem no centro da Terra, o plano OXY sendo o plano do Equador e o eixo OX apontando para um ponto imaginário no espaço nomeado de ponto vernal, é considerado o sistema OXYZ inercial. Também é importante saber dois pontos notáveis antes de explicar os ângulos de Euler.

**Nodo ascendente:** Ponto de intersecção do plano orbital com o plano do Equador

**II Perigeu:** Ponto da elipse mais próximo do foco, no caso estudado, o centro da Terra.

Os ângulos de Euler são:

**i: Inclinação da órbita em relação ao Equador.** Ângulo entre o plano da órbita e o Equador, variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

**$\Omega$ : Ascensão reta do nodo ascendente.** Ângulo entre a origem do eixo OX e o vetor que liga o ponto O ao nodo ascendente, variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

**$\omega$ : Argumento do perigeu.** Ângulo entre OX e o vetor que liga o ponto O ao perigeu variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

**a, e, M, i,  $\Omega$  e  $\omega$ ,** chamados de elementos keplerianos, definem qualquer órbita no espaço.

**f: Anomalia verdadeira.** Ângulo entre o eixo x e a posição da órbita onde o debrí se encontra. Ângulo entre o perigeu e a posição do satélite.

**u: Anomalia excêntrica.** É um ângulo usado na transformação entre a grandeza geométrica  $f$  e a cinemática M. Ângulo mostrado na Figura 3.3.

**p: Semi-latus rectum.** Segmento de reta perpendicular ao semi-eixo maior, contendo um dos focos e limitado pela elipse.

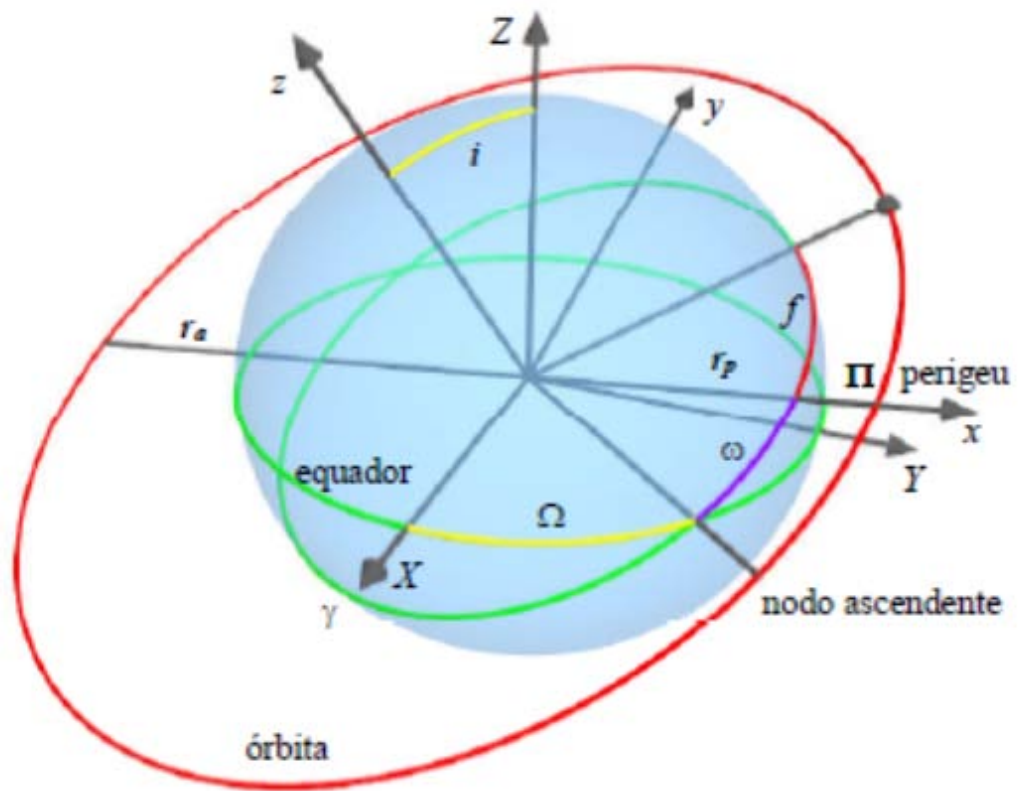


Figura 3. 2- Elementos Orbitais

FONTE: Kuga, 2008

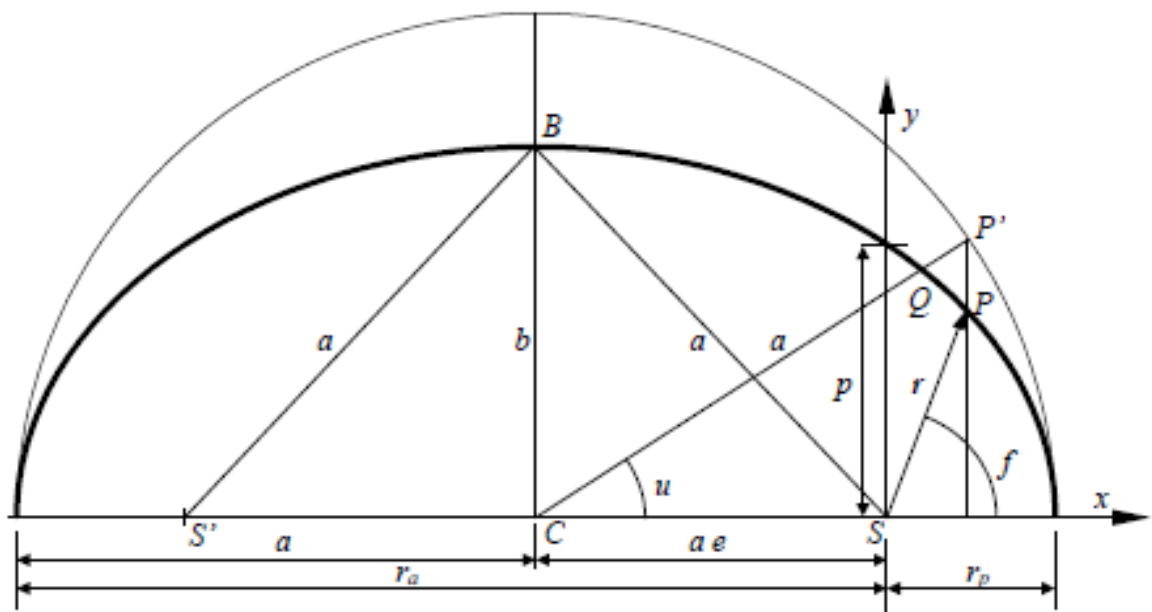


Figura 3. 3- Elementos keplerianos no plano.

FONTE: Kuga, 2008



### 3.1 Equação de Kepler

A equação de Kepler estabelece uma relação entre a anomalia excêntrica ( $u$ ) e o tempo. É fundamental utilizá-la para localizar o satélite em um determinado instante. Sua dedução é iniciada com a equação da elipse.

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(f)}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e \cos(f)}{a(1 - e^2)} \quad (3.3)$$

Derivando  $1/r$  em relação a  $f$  e fazendo  $\mathbf{r} = \mathbf{a}(1 - e \cos(u))$  tem-se:

$$r^2 df = a^2 (1 - e^2)^{1/2} \times (1 - e \cos(u)) du \quad (3.4)$$

Dividindo ambos os membros por  $dt$  e lembrando-se da integral da área:

$$r^2 \frac{df}{dt} = h = (\mu p)^{1/2} \quad (3.5)$$

Sendo  $h$  o momento angular específico. Trabalhando essa equação, tem-se:

$$\left( \frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2} = (1 - e \cos(u)) du \quad (3.6)$$

Supondo a constante de integração  $T$ , de modo que para  $t = T$  (passagem pelo perigeu) resulte em  $u = 0$ , a integração da equação fornece:

$$\left( \frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2} \times (t - T) = u - e \sin(u) \quad (3.7)$$

Definindo a velocidade angular como:

$$n = \left( \frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Obtém-se:

$$n(t - T) = u - e \sin(u) = M \quad (3.9)$$

Sendo  $M$  um ângulo chamado de anomalia média. Finalmente chega-se a forma final da equação de Kepler:

$$M = u - e \sin(u) \quad (3.10)$$

## 4. MUDANÇA DE COORDENADAS

Saber trabalhar com coordenadas cartesianas e com elementos keplerianos é fundamental para entender qualquer processo de manobras orbitais, logo ao processo de limpeza de debris, porém não é o suficiente. É necessário saber transformar um conjunto de informações em outro e vice-versa. Para isso é usado mais um sistema de coordenadas cartesianas, Oxyz, porém este com os eixos apontando para sentidos diferentes do OXYZ. Esse capítulo, baseado na obra de Kuga (2008), é destinado a mostrar como fazer isso.

### 4.1 Sistema de coordenadas cartesianas Oxyz

O sistema de coordenadas cartesianas Oxyz é usado na transição de elementos keplerianos para o sistema OXYZ.

#### 4.1.1 Coordenadas cartesianas Oxyz de posição

A origem do sistema se encontra no foco da elipse, o eixo Ox apontando para o perigeu e o eixo Oy a 90° no sentido anti-horário de Ox. O plano Oxy é o espaço onde o debris movimentar-se, logo  $z = 0$  para todos os pontos da elipse. Temos:

$$x = r \cos(f) = a(\cos(u) - e) \quad (4.1)$$

No cálculo da coordenada y, calcula-se o raio em termos de  $u$ . Usando a equação da elipse tem-se:

$$p = r + e \times r \cos(f) \quad (4.2)$$

$$a(1 - e^2) = r + e \times a(\cos(u) - e) \quad (4.3)$$

$$r = a - a \times e^2 - a \times e \cos(u) + a \times e^2 = a(1 - e \cos(u)) \quad (4.4)$$

Para a coordenada y parte-se de:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad (4.5)$$

Conclui-se que:

$$y = r \sin(f) = a \sin(u) \times (1 - e^2)^{1/2} \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Coordenadas cartesianas Oxyz de velocidade

Sabendo que a velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo, basta derivar as equações de posição já encontradas, lembrando que a variação temporal de  $u$  é definida pela equação de Kepler.

$$r = a(1 - e \cos(u)) \quad (4.7)$$

Derivando  $u$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tem-se:

$$\dot{u} = \frac{na}{r} \quad (4.8)$$

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \sin(u) \quad (4.9)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos(u) \times (1 - e^2)^{1/2} \quad (4.10)$$

$$\dot{z} = 0 \quad (4.11)$$

#### 4.2 Transformação de elementos keplerianos para coordenadas cartesianas OXYZ

Para uma definição completa da órbita no espaço é necessário um referencial inercial, independente do movimento de rotação e translação da Terra. Para isso é usado o sistema OXYZ. Tal sistema é centrado na Terra, seu plano OXY possui o plano do Equador e o eixo OX aponta para o ponto vernal. Com essas características o sistema é considerado inercial.

Com o sistema cartesiano inercial estabelecido é possível obter as coordenadas cartesianas X, Y, Z de posição e velocidade.

Primeiramente calculam-se as coordenadas no espaço Oxyz, já vistas anteriormente.

$$x = a(\cos(u) - e) \quad (4.12)$$

$$y = a\sin(u) \times (1 - e^2)^{1/2} \quad (4.13)$$

$$z = 0$$

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \sin(u) \quad (4.14)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} \cos(u) \times (1 - e^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

$$\dot{z} = 0 \quad (4.16)$$

Obtêm-se as coordenadas no sistema OXYZ através da multiplicação matricial:

$$X^T = R(i, \Omega, \omega)x^T \quad (4.17)$$

Onde:

$$X^T = (X, Y, Z) \quad (4.18)$$

$$x^T = (x, y, z) \quad (4.19)$$

E  $R(i, \Omega, \omega)$  é a matriz de rotação abaixo:

$$\begin{vmatrix} c(\Omega)c(\omega) - s(\Omega)c(i)s(\omega) & -c(\Omega)s(\omega) - s(\Omega)c(i)c(\omega) & s(\Omega)s(i) \\ s(\Omega)c(\omega) + c(\Omega)c(i)s(\omega) & -s(\Omega)s(\omega) + c(\Omega)c(i)c(\omega) & -c(\Omega)s(i) \\ s(i)s(\omega) & s(i)c(\omega) & c(i) \end{vmatrix}$$

O mesmo deve ser feito para encontrar o vetor velocidade do satélite:

$$\dot{X}^T = R(i, \Omega, \omega)\dot{x}^T \quad (4.20)$$

Sendo:

$$\dot{X}^T = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) \quad (4.21)$$

$$\dot{x}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (4.22)$$

### 4.3 Transformação de coordenadas cartesianas OXYZ para elementos keplerianos

Agora será descrito o problema inverso, ou seja, transformar coordenadas cartesianas OXYZ em elementos keplerianos da órbita  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  e  $\mathbf{\omega}$ .

Primeiro elemento a ser calculado é o semi-eixo. Para isso se calcula os módulos do vetor posição e velocidade.

$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (4.23)$$

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 \quad (4.24)$$

Usando a equação da “vis-viva”

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.25)$$

Chega-se a:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \quad (4.26)$$

O próximo elemento a ser calculado é a excentricidade, seu valor pode ser encontrado a partir das equações abaixo:

$$e \sin(u) = \frac{r \dot{r}}{na^2} \quad (4.27)$$

$$e \cos(u) = 1 - \frac{r}{a} \quad (4.28)$$

Onde:

$$r\dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z} \quad (4.29)$$

Elevando cada equação ao quadrado e somando as duas equações, coloca e em evidência, temos:

$$e^2 = \left(\frac{r\dot{r}}{na^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 \quad (4.30)$$

Calculando a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade obtém-se o valor da excentricidade.

Para calcular a anomalia verdadeira é preciso saber o valor da anomalia excêntrica  $u$ , que é calculada pela equação abaixo e uma análise de quadrante.

$$\tan(u) = \frac{(r\dot{r})/(na^2)}{1 - r/a} \quad (4.31)$$

Sabendo o valor de  $u$  basta usar a equação de Kepler para achar  $M$ :

$$M = u - e\sin(u) \quad (4.32)$$

A inclinação da órbita pode ser encontrada pelo cálculo do momento angular específico  $h$ :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \\ \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \end{vmatrix}$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})\hat{I} + (Z\dot{X} - X\dot{Z})\hat{J} + (X\dot{Y} - Y\dot{X})\hat{K} = h_x\hat{I} + h_y\hat{J} + h_z\hat{K} \quad (4.33)$$

$$h = \sqrt{(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)} \quad (4.34)$$

Onde  $I$ ,  $J$  e  $K$  são versores nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. Observando a Figura 4.1 nota-se que o vetor momento angular é perpendicular ao plano da órbita, formando o ângulo  $i$  com o eixo  $Z$ , logo:

$$\cos(i) = \frac{h_z}{h} \quad (4.35)$$

Onde:

$$0 \leq i \leq 180$$

(4.36)

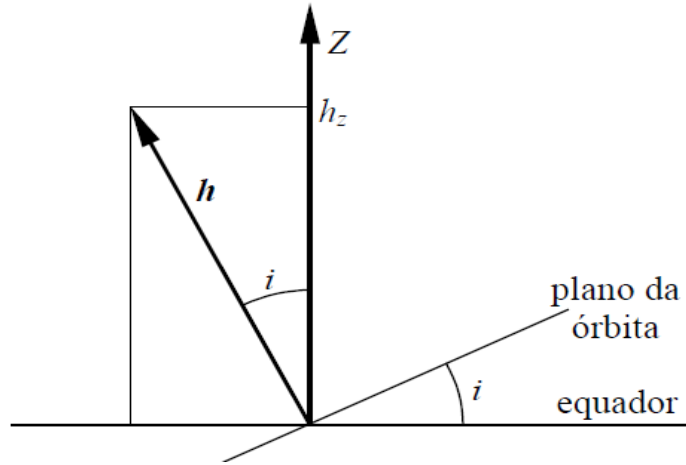


Figura 4. 1 - Esquema mostrando a inclinação da órbita.

FONTE: Kuga, 2008

O cálculo da ascensão reta do nodo ascendente é feito pela definição de um vetor  $\Omega$ , com origem no centro O e passando pela linha dos nodos, ilustrado na Figura 4.2.

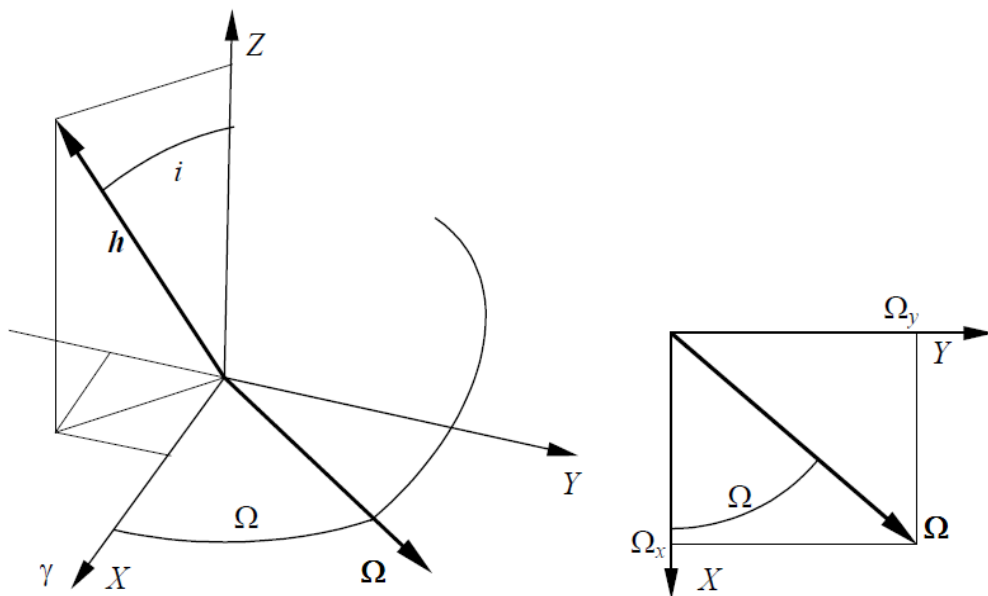


Figura 4. 2- Ascensão reta do nodo ascendente.

FONTE: Kuga, 2008



Pelo fato do momento angular  $h$  ser perpendicular ao plano da órbita, ele também é perpendicular ao vetor  $\Omega$  que está contido no plano da órbita. Podendo escrever:

$$\vec{\Omega} = \hat{K} \times \vec{h} \quad (4.37)$$

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 0 & 0 & 0 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -h_y \hat{I} + h_x \hat{J} \quad (4.38)$$

Pela figura 4.2, tem-se:

$$\tan(\Omega) = \frac{\Omega_y}{\Omega_x} = \frac{h_x}{-h_y} \quad (4.39)$$

O último elemento kepleriano a ser encontrado é o argumento do perigeu. Para isso é necessário a definição de um ângulo auxiliar  $v$  chamado longitude verdadeira, onde:

$$v = \Omega + f \quad (4.40)$$

$$\tan(v) = \frac{-\cos(i)\sin(\Omega) + \cos(i)\cos(\Omega)Y + \sin(i)Z}{\cos(\Omega)X + \sin(\Omega)Y} \quad (4.41)$$

E  $f$  é dada por:

$$\tan(f) = \frac{(1-e^2)^{1/2} \times \sin(u)}{\cos(u) - e} \quad (4.42)$$

Sabendo os valores de  $f$  e  $v$ , basta calcular  $\omega$ .

$$\omega = v - f \quad (4.43)$$

## 5. PROBLEMA DE N CORPOS

Para calcular a trajetória do satélite, é necessário estudar o problema de N corpos, pois neste trabalho são considerados os efeitos gravitacionais da Terra, Lua e do Sol sobre o debri.

“Conhecidas as massas de N corpos que se movem governados pela gravitação mútua e dadas suas respectivas posições e velocidades num determinado instante, calcular suas posições e velocidades num instante futuro”.

Outra forma de pensar no problema de N corpos é inicialmente estudá-lo com apenas dois corpos para então considerar os demais corpos como perturbações. Estudar inicialmente a trajetória do satélite apenas pela influência gravitacional da Terra, para depois, inserir as ações gravitacionais da Lua e do Sol. Essa exemplificação foi utilizada para escrever a equação da órbita do satélite estudado neste trabalho. Porém, é importante informar que esse tipo de análise perde precisão conforme aumentamos o período de tempo analisado.

### 5.1 Problema de dois corpos

Trabalhando no sistema de referência inercial OXYZ com dois corpos puntiformes  $P_1$  e  $P_2$  com massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente afirma-se pela lei de gravitação universal de Newton que a força que  $P_1$  aplica em  $P_2$  é:

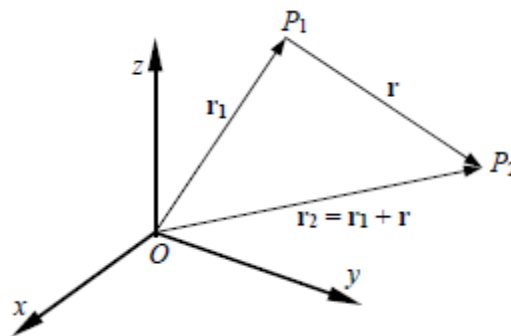


Figura 5.1

$$F_{12} = -Gm_1m_2 \frac{P_1 - P_2}{r^3} \quad (5.1)$$

A aceleração pode ser escrita na forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.2)$$

Para o caso onde  $m_1 \gg m_2$ , temos  $G(m_1 + m_2)$  aproximadamente igual a  $G m_1 = \mu$ . Portanto a expressão final da aceleração é:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G m_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.3)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional universal do corpo  $m_1$ .

## 5.2 Problema de três corpos

O problema de três corpos estuda a situação mais estudada e mais simples do problema de  $N$  corpos. Porém mesmo o caso mais simples possui diferentes abordagens, dependendo a situação, para atingir solução. Exemplos de diferentes situações são a soluções de Lagrange, usada para casos particulares na geometria dos três corpos; e o problema restrito de três corpos, um estudo simplificado do problema de três corpos onde um corpo de massa desprezível (neste caso, um satélite) possui uma órbita que é influenciada por dois corpos de massas finitas.

A partir da equação (5.1) é possível escrever as equações de movimento de um sistema geral de três corpos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - G m_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (5.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G m_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - G m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -G m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - G m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (5.6)$$

Sendo  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{r}_3$  posições de três corpos de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  respectivamente. As equações acima são validas para qualquer problema de três corpos e serão utilizadas, neste trabalho, como base para as equações do problema de  $N = 4$  corpos.

### 5.3 Problema de N corpos

O problema de dois corpos é utilizado, neste trabalho, para a Terra e o satélite. Agora serão incrementadas a esse problema as perturbações gravitacionais do Sol e da Lua. Para isso, dados sobre o Sol e a Lua, como distância média da Terra, constante gravitacional, velocidade angular em relação à origem do sistema inercial (centro da Terra neste trabalho) e a massa de cada, são necessários e foram retirados do site do INPE.

Primeiramente calcula-se a posição da Lua e do Sol em determinado instante. Para isso serão necessárias as respectivas distâncias  $r$  ao centro da Terra, das respectivas velocidades angulares  $\omega$  e do instante de tempo  $t$ .

$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (5.7)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5.8)$$

Com a posição do Sol e da Lua em relação a origem, aplica-se o problema de 2 corpos para os casos Lua – debri e Sol – debri e soma os efeitos ao caso Terra – debri, onde o debri, a Lua e o Sol encontram-se respectivamente nas posições  $(x_D; y_D; z_D)$ ,  $(x_L; y_L; z_L)$  e  $(x_S; y_S; z_S)$ .

$$F_{x\ Terra} = -\frac{\mu_{Terra} \times x_D}{r_1^3} \quad (5.9)$$

$$F_{y\ Terra} = -\frac{\mu_{Terra} \times y_D}{r_1^3} \quad (5.10)$$

$$F_{z\ Terra} = -\frac{\mu_{Terra} \times z_D}{r_1^3} \quad (5.11)$$

$$F_{x\ Lua} = -\frac{\mu_{Lua} \times (x_D - x_L)}{r_2^3} \quad (5.12)$$

$$F_{y\ Lua} = -\frac{\mu_{Lua} \times (y_D - y_L)}{r_2^3} \quad (5.13)$$

$$F_{z\text{ Lua}} = -\frac{\mu_{\text{Lua}} \times (z_D - z_L)}{r_2^3} \quad (5.14)$$

$$F_{x\text{ Sol}} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (x_D - x_S)}{r_3^3} \quad (5.15)$$

$$F_{y\text{ Sol}} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (y_D - y_S)}{r_3^3} \quad (5.16)$$

$$F_{z\text{ Sol}} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (z_D - z_S)}{r_3^3} \quad (5.17)$$

Onde  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são respectivamente as distâncias do satélite e a Terra, do satélite a Lua e do satélite ao Sol.

As equações finais serão, portanto:

$$F_x = F_{x\text{ Terra}} + F_{x\text{ Lua}} + F_{x\text{ Sol}} \quad (5.18)$$

$$F_y = F_{y\text{ Terra}} + F_{y\text{ Lua}} + F_{y\text{ Sol}} \quad (5.19)$$

$$F_z = F_{z\text{ Terra}} + F_{z\text{ Lua}} + F_{z\text{ Sol}} \quad (5.20)$$

Para esse trabalho, em específico, as órbitas da Lua e do Sol foram considerados pertencentes ao plano  $z = 0$ .

#### 5.4 Termos direto e indireto

As equações acima ilustram o efeito direto problema de N corpos em relação ao eixo inercial. Para o problema de N igual ou maior que três corpos não é possível considerar que o centro da Terra está na origem do sistema inercial, pois a Terra também sofre os efeitos gravitacionais da Lua e do Sol. Neste trabalho, o ideal é analisar a órbita em relação ao centro da Terra.

Em outras palavras, é necessário analisar o problema de quatro corpos no satélite (Terra, Lua

e Sol) e o problema de três corpos para a Terra (Lua e Sol) simultaneamente. Essa análise sobre o posicionamento da Terra é o estudo do efeito indireto.

Para adicionar o termo indireto adiciona-se a força que a Lua exerce sobre a Terra contraria a cada força que atua no satélite e na Terra simultaneamente (equações 5.12 a 5.14) e repetir o processo para o caso do Sol com a Terra (equações 5.15 a 5.17).

$$F_{X\ Lua} = -\frac{\mu_{\text{Lua}} \times (x_D - x_L)}{r_2^3} + \frac{\mu_{\text{Lua}} \times x_L}{r_2^3} \quad (5.21)$$

$$F_{y\ Lua} = -\frac{\mu_{\text{Lua}} \times (y_D - y_L)}{r_2^3} + \frac{\mu_{\text{Lua}} \times y_L}{r_2^3} \quad (5.22)$$

$$F_{z\ Lua} = -\frac{\mu_{\text{Lua}} \times (z_D - z_L)}{r_2^3} + \frac{\mu_{\text{Lua}} \times z_L}{r_2^3} \quad (5.23)$$

$$F_{X\ Sol} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (x_D - x_S)}{r_3^3} + \frac{\mu_{\text{Sol}} \times x_S}{r_3^3} \quad (5.24)$$

$$F_{y\ Sol} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (y_D - y_S)}{r_3^3} + \frac{\mu_{\text{Sol}} \times y_S}{r_3^3} \quad (5.25)$$

$$F_{z\ Sol} = -\frac{\mu_{\text{Sol}} \times (z_D - z_S)}{r_3^3} + \frac{\mu_{\text{Sol}} \times z_S}{r_3^3} \quad (5.26)$$

O efeito perturbador previsto utilizando os termos direto e indireto é a rotação da órbita. Se a órbita for circular os efeitos não serão visíveis.

## 6. ACHATAMENTO DA TERRA

Uma vez que a Terra não é uma esfera, é necessário considerar que o campo gravitacional terrestre não é uniforme em locais que possuam a mesma distância do centro da Terra, não podendo assim afirmar que duas posições da órbita do satélite que possuam a mesma distância da origem implicam em mesmo módulo da força gravitacional aplicada sobre o satélite. Graças a essa não uniformidade seria necessário considerar a atração gravitacional resultante como o somatório de cada força gravitacional de cada elemento de massa da Terra sobre o satélite.

Para isso foi pesquisado o valor da constante de achatamento da Terra ( $J_2$ ), o Raio equatorial ( $R_E$ ).

$$F_{J_2 x} = \mu \times x_D \times R_E^2 \times \left( \frac{3x_D}{2r_1^5} - \frac{15 z^2 x}{r_1^7} \right) \quad (6.1)$$

$$F_{J_2 y} = \mu \times y_D \times R_E^2 \times \left( \frac{3y_D}{2r_1^5} - \frac{15 z^2 y}{r_1^7} \right) \quad (6.2)$$

$$F_{J_2 z} = \mu \times y_D \times R_E^2 \times \left( \frac{9z_D}{2r_1^5} - \frac{15 z^3}{r_1^7} \right) \quad (6.2)$$

Onde  $r_1$  representa o módulo da distancia entre o satélite e a Terra. Esses valores são somados, cada uma, a equação que representa a aceleração do respectivo eixo.

$$F_x = F_{x Terra} + F_{x Lua} + F_{x Sol} + F_{J_2 x} \quad (6.3)$$

$$F_y = F_{y Terra} + F_{y Lua} + F_{y Sol} + F_{J_2 y} \quad (6.4)$$

$$F_z = F_{z Terra} + F_{z Lua} + F_{z Sol} + F_{J_2 z} \quad (6.5)$$

## 7. APLICAÇÃO DO IMPULSO

O impulso que o debri receberá é fornecido por um canhão localizado em algum ponto da superfície terrestre. Esse processo é equivalente a uma manobra orbital baseada em propulsores, cujo mecanismo está mais explicado nas referências Gomes (2001), Kugaet al (2001) e Prado (2001). Neste capítulo será explicado como encontrar a direção e a magnitude do impulso que o canhão deve atirar com o passar do tempo.

### 7.1 Direção do canhão em função do tempo

Primeiramente deve-se localizar o debri no espaço OXYZ em determinado instante de tempo. Para isso é usado a relação entre  $M$  e o tempo  $t$  abaixo:

$$M = n \times t \quad (7.1)$$

Com o valor da anomalia média e dos outros elementos keplerianos, basta fazer a transformação em coordenadas cartesianas OXYZ para encontrar a posição do debri no tempo desejado.

Devido a rotação da Terra, a posição do canhão também sofre mudança com o passar do tempo. Conhecendo a latitude e longitude do canhão, pode-se obter sua posição em coordenadas esféricas para depois transformá-la em cartesianas.

O sistema de coordenadas esféricas possui três variáveis, conforme mostra a Figura 7.1:

**r: raio.** Módulo da distância de determinado ponto no espaço;

**$\theta$ : teta.** Ângulo entre a projeção de  $\mathbf{r}$  no plano OXY e o eixo X.  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ;

**$\varphi$ : phi.** Ângulo entre  $\mathbf{r}$  e o eixo Z.  $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ .



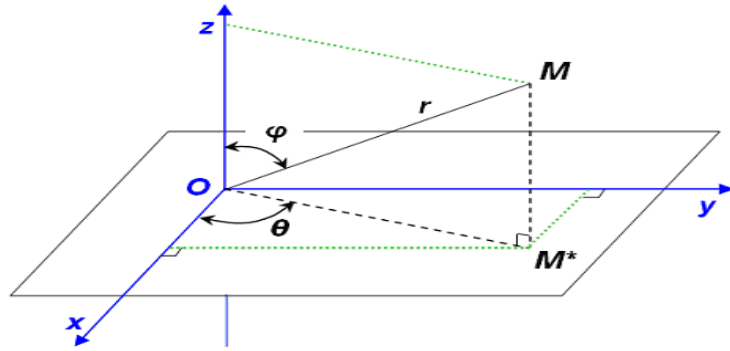


Figura 7.1 - Coordenadas esféricas.

FONTE: Moura, 2013

Como O está localizado no centro da Terra, o canhão na superfície e o plano OXY contém o plano do Equador, temos:

$$r = 6378000 \text{ metros} \quad (7.2)$$

$$\theta = \left( \frac{\text{longitude} \times \pi}{180} \text{ rad} \right) \times \left( \frac{2\pi \times t}{86400} \right) \quad (7.3)$$

$$\varphi = \frac{(\text{latitude} + 90) \times \pi}{180} \text{ rad} \quad (7.4)$$

$$\vec{r} = r \times (\sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{I} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\hat{J} + \cos(\varphi)\hat{K}) \quad (7.5)$$

Onde  $(2\pi t/86400)$  indica o quanto a Terra rotacionou no intervalo de tempo  $[0, t]$  e 637800 é o raio da Terra.

Devem ser eliminados os instantes onde o debri não está na área de visibilidade do canhão. Para isso se deve fazer o seguinte teste. Chamando a distância do debri ao referencial de  $\mathbf{rd}$  e a distância entre o debri e o canhão de  $\mathbf{dc}$ , confere-se a seguinte equação:

$$rd < r^2 + dc^2 \quad (7.6)$$

Caso a relação for verdadeira, o debri não está visível para o canhão, logo não tem fundamento calcular o impulso necessário para derrubar o debri.

Para encontrar a direção para onde o canhão deve apontar basta fazer a subtração vetorial entre a posição do canhão e do debri.

## 7.2 Impulso

O impulso desejado é o de menor intensidade que seja o suficiente para alterar o movimento orbital do debri de tal modo que este entre na atmosfera e sofra combustão. No presente trabalho vamos assumir que o veículo reentrou na atmosfera quando sua altitude atingiu o valor de duzentos quilômetros. A partir desse ponto é assumindo que a atmosfera completará o trabalho de reentrada. O uso de um programa de computador é essencial nesta parte.

Será feito uma soma vetorial entre a velocidade do debri no instante  $t$  e um impulso pré-estabelecido, que terá a mesma direção do canhão. A partir dessa nova velocidade será feita uma integração numérica para calcular a trajetória do debri após o impulso e sofrendo todas as perturbações estudadas nesse trabalho.

$$II = a \times (1 - e) \tag{5.7}$$

Se  $II$  for menor que 6578000 (distância do raio da Terra somado com a atmosfera) o debri será destruído, caso contrário deve-se refazer os mesmos cálculos com um impulso maior.

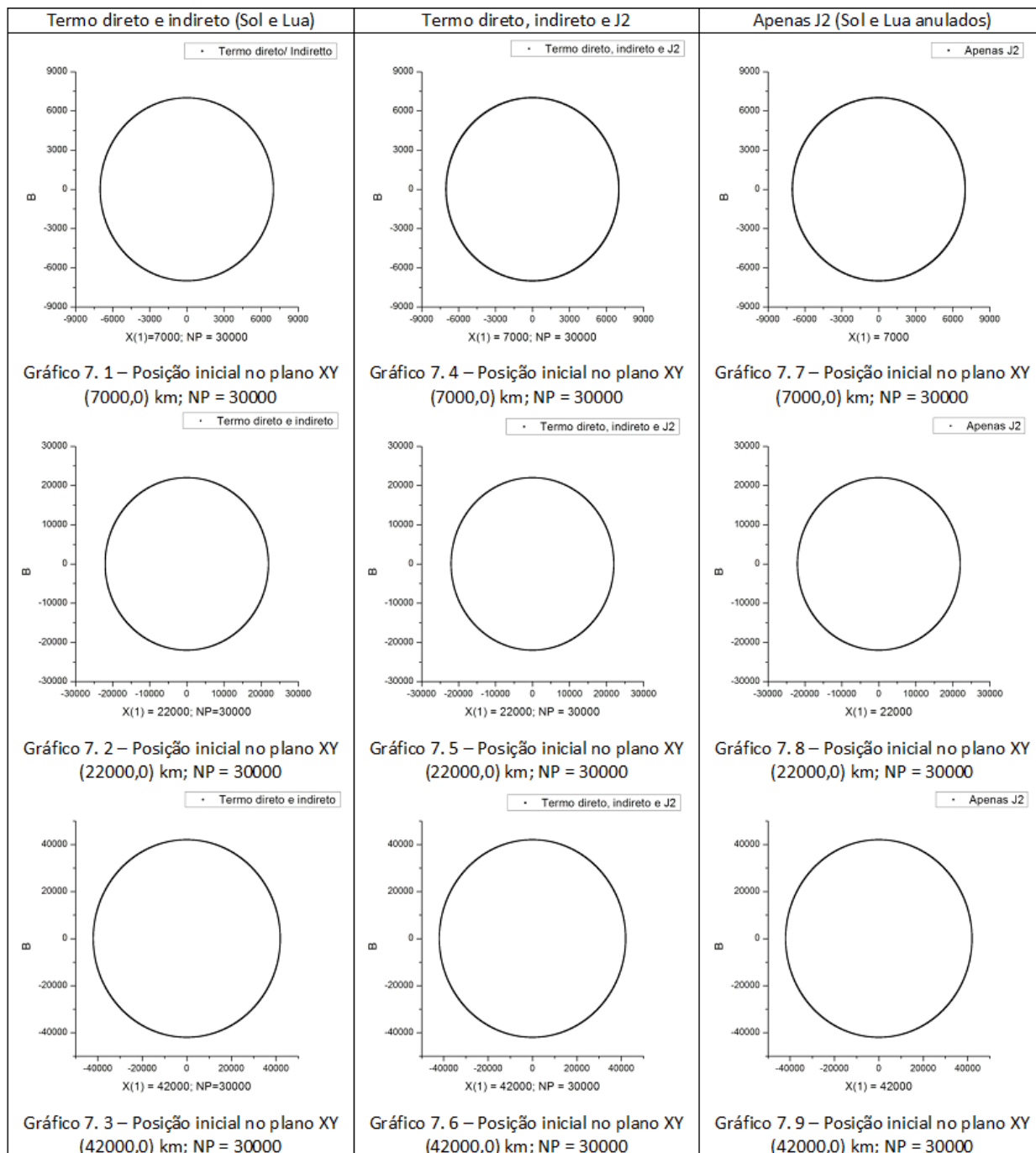
Neste trabalho, foram desconsiderados os impulsos de valor igual ou maior a 3600 km/h, por priorizar apenas os menores impulsos.

## 8. RESULTADOS

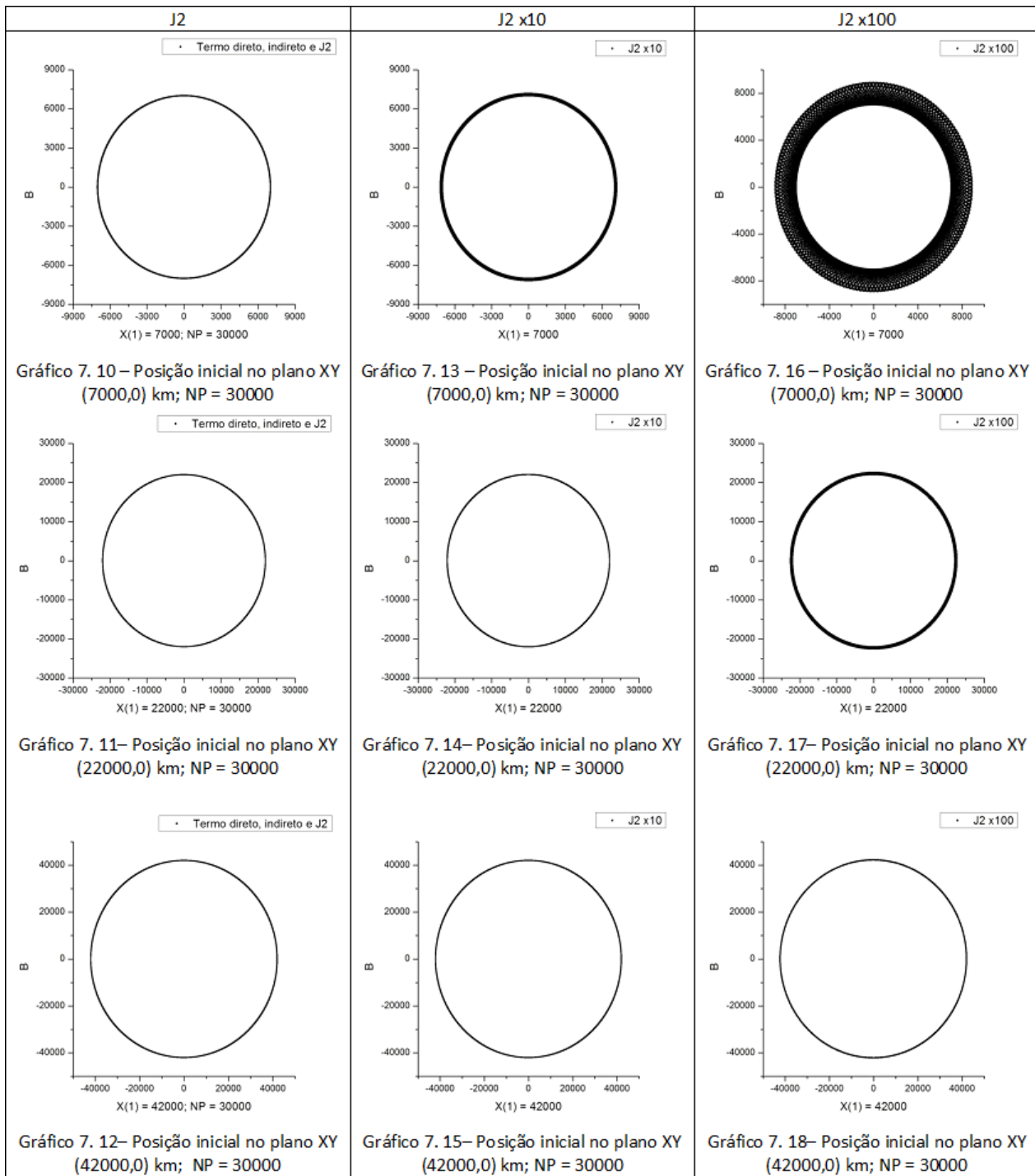
Os gráficos que seguem ilustram o percurso do satélite em relação ao centro da Terra, comparando os diversos tipos de perturbações explicados neste trabalho, onde NP é o número de pontos plotados, DT é o intervalo de tempo entre dois pontos plotados e *Veloc* é a raiz quadrada de  $\mu$  dividido pelo semieixo maior. Inicialmente foi estudado o movimento do satélite em apenas duas dimensões a fim de observar com mais facilidade a influência das perturbações inseridas na simulação.

Com o intuito de considerar os efeitos gravitacionais da Lua e do Sol sobre a Terra e, ao mesmo tempo, manter o centro da Terra na origem dos gráficos, os termos direto e indireto dos campos gravitacionais do Sol e da Lua foram adicionados à simulação. Com o centro da Terra na origem a trajetória do debri em torno da Terra é identificada com mais clareza.

A mesma órbita foi simulada em três situações diferentes para serem comparadas lado a lado. Por ter trabalhado com órbitas circulares as diferenças nos gráficos não são claras, apesar de existirem.



Posteriormente foram feitas simulações com órbitas circulares a fim de enfatizar os efeitos do achatamento da Terra devida a constante J2. Os efeitos dessa perturbação são maiores para órbitas de menor altitude sendo possível observar tal perturbação quando J2 é multiplicado por uma constante com a finalidade de maximizar o efeito do achatamento da Terra.



Nos exemplos abaixo são ignorados os efeitos gravitacionais da Lua e do Sol, resultado em um problema de dois corpos com o efeito de J2 para uma órbita não circular.

Os efeitos do achatamento da Terra sobre órbitas não circulares são claramente ilustrados nas simulações, estando de acordo com a literatura de referência e confirmando a importância do achatamento da Terra na trajetória e possível precipitação de satélites.

Apenas J2; 1.1\*Veloc; NP=10000

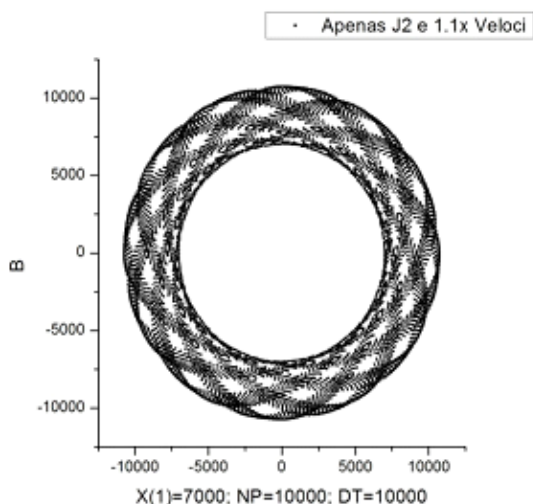


Gráfico 7. 20 – Posição inicial no plano XY (7000,0) km; NP = 30000, DT = 100

Apenas J2; 1.1\*Veloc; NP=30000

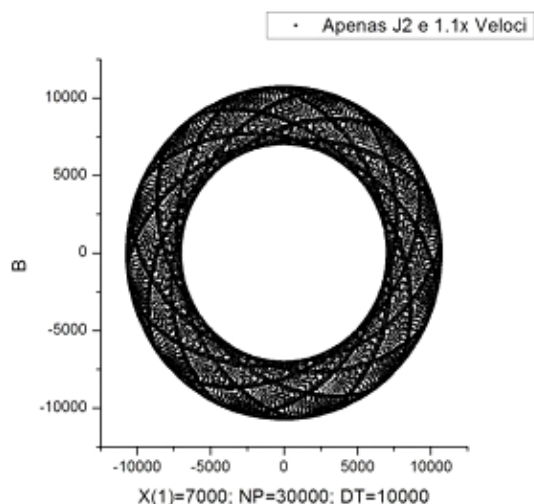


Gráfico 7. 22 – Posição inicial no plano XY (7000,0) km; NP = 30000, DT = 1000

Apenas J2 e 1.1x Veloci

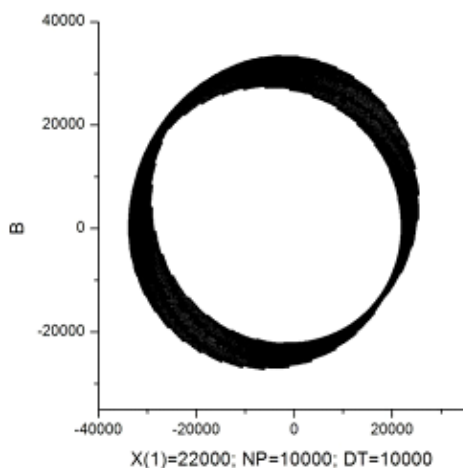


Gráfico 7. 20 – Posição inicial no plano XY (22000,0) km; NP = 30000, DT = 100

Apenas J2 e 1.1x Veloci

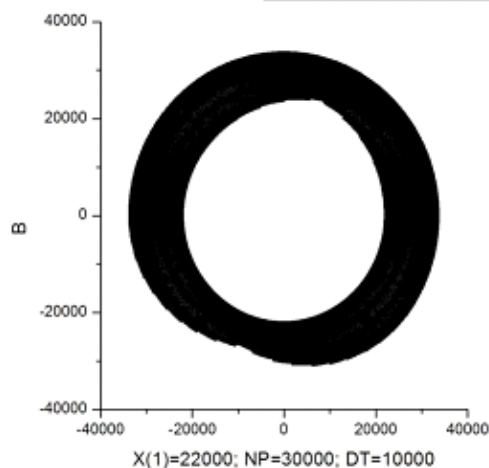


Gráfico 7. 23 – Posição inicial no plano XY (22000,0) km; NP = 30000, DT = 1000

Apenas J2 e 1.1x Veloci

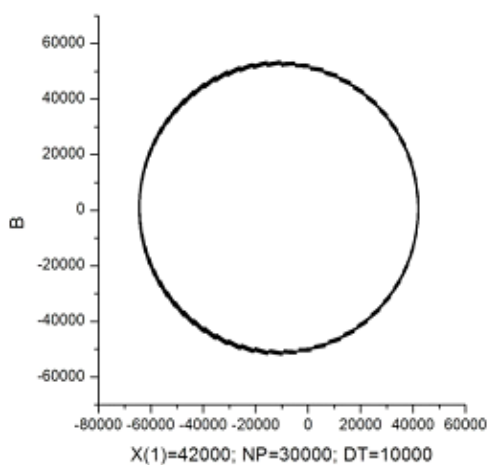


Gráfico 7. 21 – Posição inicial no plano XY (42000,0) km; NP = 30000, DT = 100

Apenas J2 e 1.1x Veloci

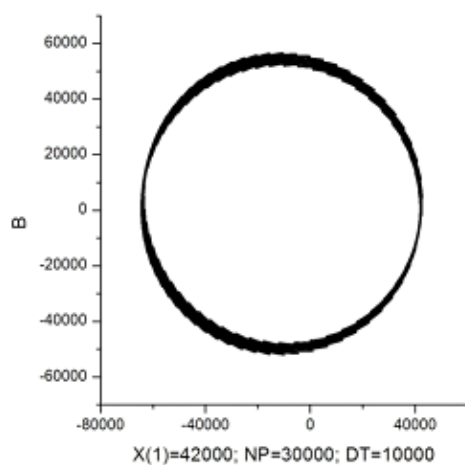


Gráfico 7. 24 – Posição inicial no plano XY (42000,0) km; NP = 30000, DT = 1000

Após analisado o estudo das trajetórias órbitas com as perturbações do achatamento da Terra e das forças gravitacionais do satélite e do Sol, foram feitos os testes dos impulsos em um intervalo de tempo de aproximadamente um período orbital.

Foram atribuídos os seguintes valores para as seguintes situações:

**Impulso = 0:** O debri não é visível ao canhão no instante de tempo estudado.

**Impulso = -1:** O impulso necessário para derrubar o debri é maior que 3600 km/s, logo o disparo do canhão é considerado inviável no instante de tempo estudado.

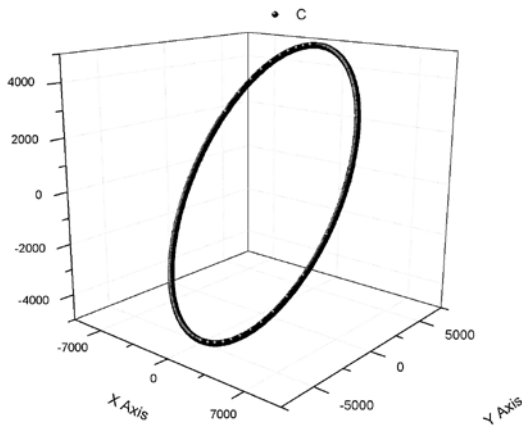


Gráfico 8. 1 – Trajetória do debri

$a = 7000 \text{ km}$ ,  $e=0$ ,  $i=45^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $\omega=0^\circ$

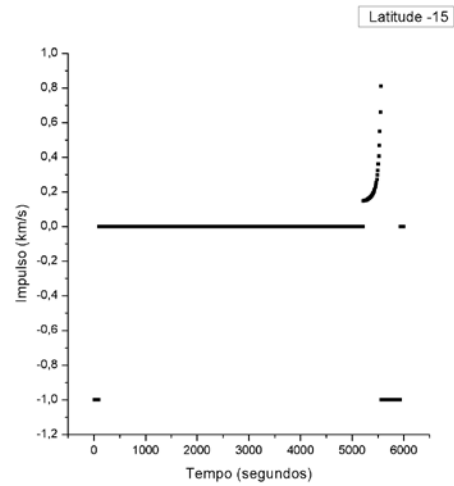


Gráfico 8. 3– Impulso x Tempo

Para debri ilustrado no Gráfico 8.1

Latitude do canhão:  $-15^\circ$

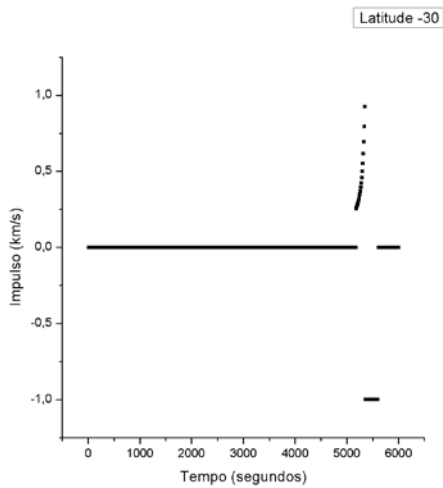


Gráfico 8. 2 – Impulso x Tempo

Para debri ilustrado no Gráfico 8.1

Latitude do canhão:  $-30^\circ$

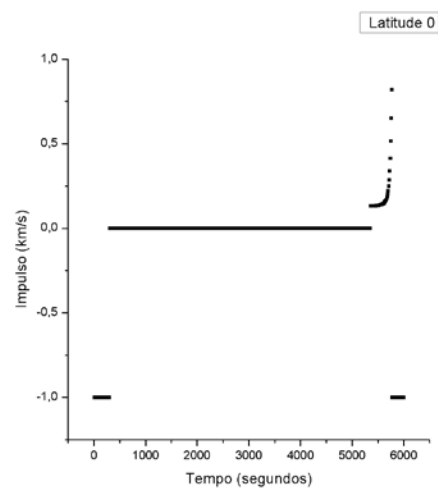


Gráfico 8. 4– Impulso x Tempo

Para debri ilustrado no Gráfico 8.1

Latitude do canhão:  $0^\circ$

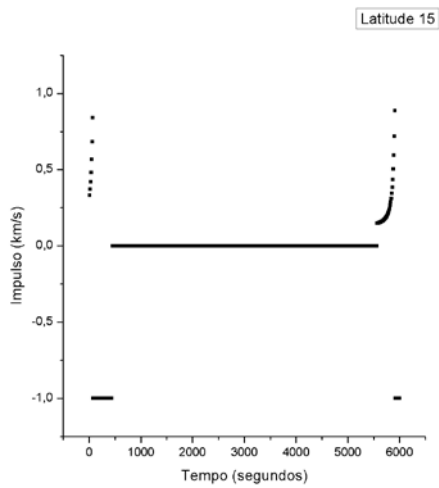


Gráfico 8. 5– Impulso x Tempo

Para debrí ilustrado no Gráfico 8.1

Latitude do canhão: 15°

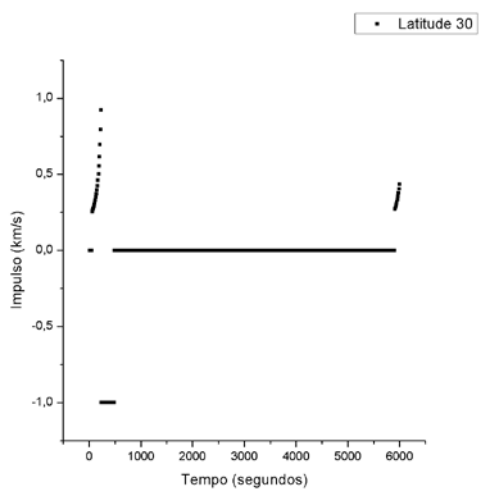


Gráfico 8. 6– Impulso x Tempo

Para debrí ilustrado no Gráfico 8.1

Latitude do canhão: 30°

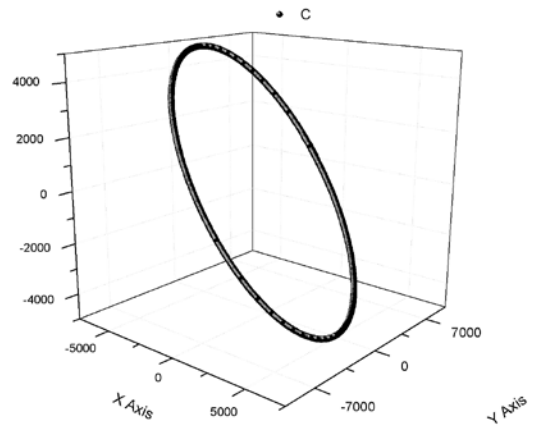


Gráfico 8. 7 – Trajetória do debrí

$a = 7000 \text{ km}$ ,  $e = 0$ ,  $i = 45^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$

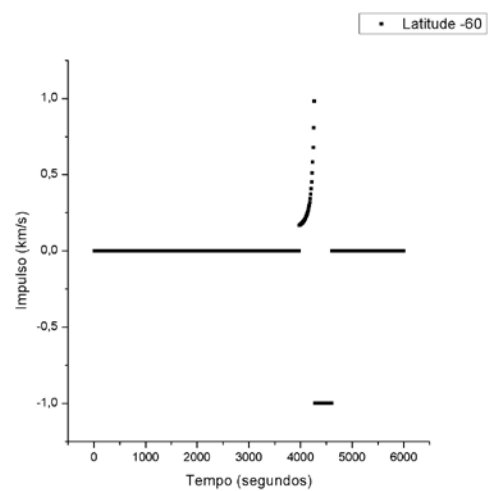


Gráfico 8. 8– Impulso x Tempo

Para debrí ilustrado no Gráfico 8.7

Latitude do canhão: -60°



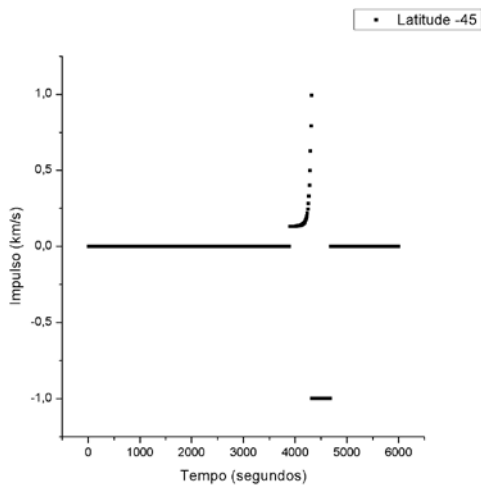


Gráfico 8. 9– Impulso x Tempo  
Para debris ilustrado no Gráfico 8.7

Latitude do canhão:  $-45^\circ$

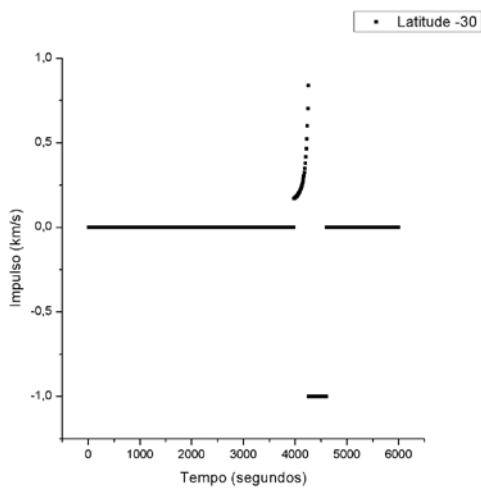


Gráfico 8. 10– Impulso x Tempo  
Para debris ilustrado no Gráfico 8.7

Latitude do canhão:  $-30^\circ$

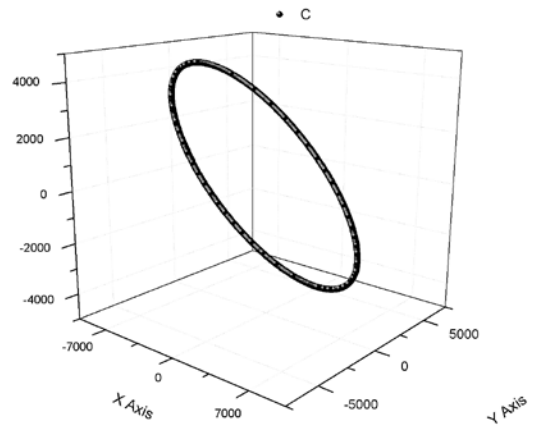


Gráfico 8. 11 – Trajetória do debris  
 $a = 7000 \text{ km}$ ,  $e=0$ ,  $i=45^\circ$ ,  $\Omega=180^\circ$ ,  $\omega=0^\circ$

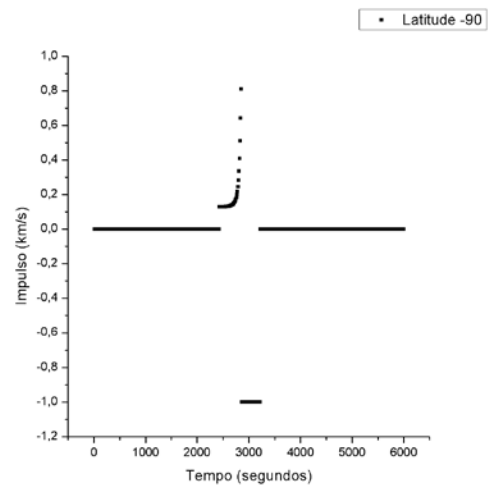


Gráfico 8. 12– Impulso x Tempo  
Para debris ilustrado no Gráfico 8.11

Latitude do canhão:  $-90^\circ$

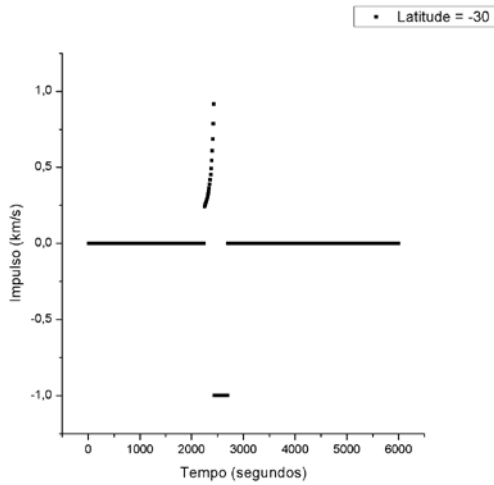


Gráfico 8. 13– Impulso x Tempo  
Para debri ilustrado no Gráfico 8.11

Latitude do canhão:  $-30^\circ$

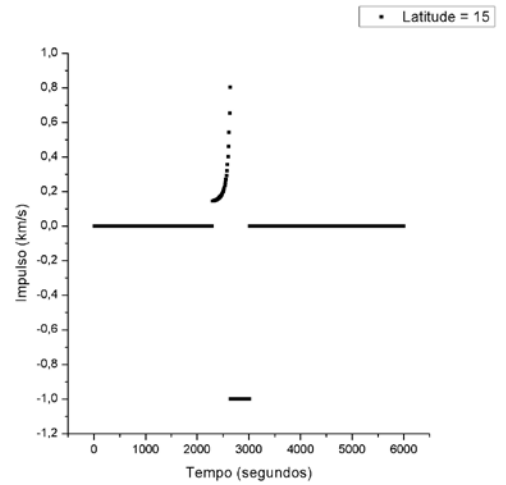


Gráfico 8. 15– Impulso x Tempo  
Para debri ilustrado no Gráfico 8.11

Latitude do canhão:  $15^\circ$

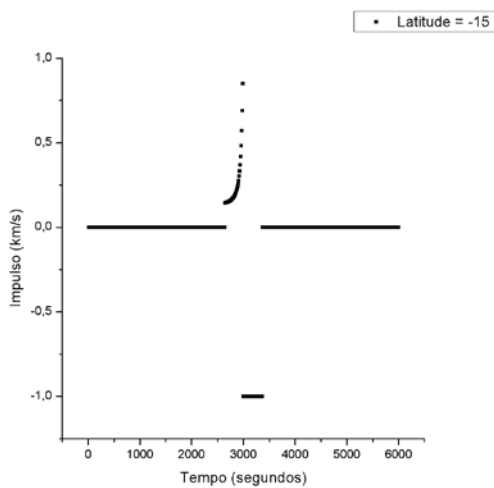


Gráfico 8. 14– Impulso x Tempo  
Para debri ilustrado no Gráfico 8.11

Latitude do canhão:  $-15^\circ$

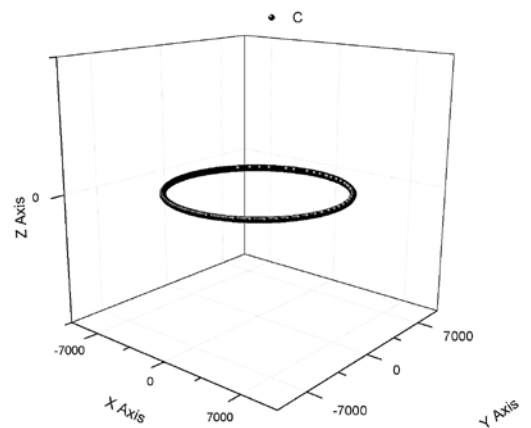


Gráfico 8. 16 – Trajetória do debri  
 $a = 7000 \text{ km}$ ,  $e=0$ ,  $i=0^\circ$ ,  $\Omega=180^\circ$ ,  $\omega=0^\circ$

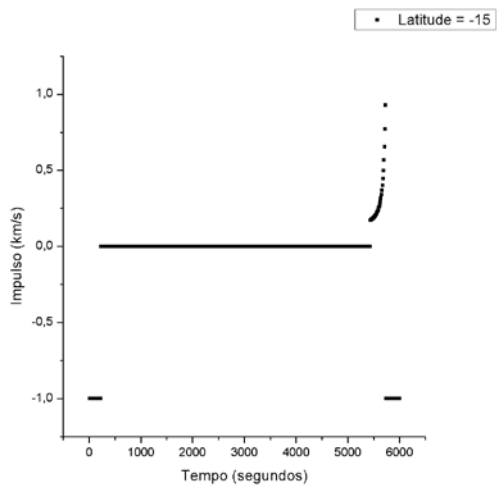


Gráfico 8. 17– Impulso x Tempo

Paradebri ilustrado no Gráfico 8.16

Latitude do canhão:  $-15^{\circ}$

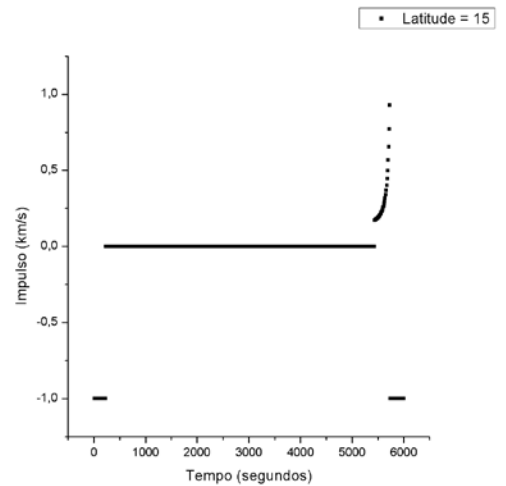


Gráfico 8. 19– Impulso x Tempo

Paradebri ilustrado no Gráfico 8.16

Latitude do canhão:  $15^{\circ}$

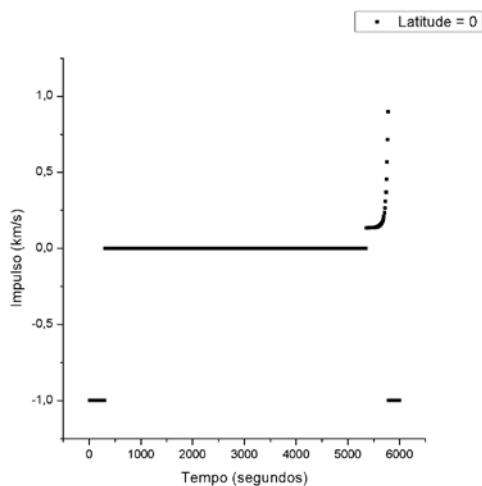


Gráfico 8. 18– Impulso x Tempo

Para debri ilustrado no Gráfico 8.16

Latitude do canhão:  $0^{\circ}$

Apenas os testes com o canhão localizado em latitudes baixas possuíam uma quantidade considerável de visibilidade do debri, podendo assim afirmar que a instalação do canhão deve ser feita, de preferência, em latitudes próximas a linha do Equador. Porém essa análise não é suficiente. O ideal seria primeiro fazer o estudo da trajetória orbital do debri junto com a rotação terrestre para

então achar o melhor meridiano para determinado intervalo de tempo e assim obter um período maior de visibilidade do debri.

Outro quesito importante a ser considerado é a quantidade de impulsos de baixa intensidade, podendo ser identificadas pela forma do gráfico. Como exemplos têm os Gráficos 8.4, 8.9, 8.12 e 8.18 que, ignorando os instantes que o debri não é visível ou que o impulso é inviável, apresentam uma maior quantidade de impulsos de baixa intensidade. Essa análise é válida para qualquer caso, mas ganha destaque em órbitas circulares onde não existe uma diferença significativa entre os impulsos mínimos plotados nos gráficos. Com as diversas órbitas testadas, os impulsos mínimos de cada simulação sempre estavam entre 0,13 e 0,2 km/s, sendo que em alguns casos, apesar de apresentar um impulso mínimo próximo de 0,13 km/s, apresentava também, em contra partida uma acelerada elevação na intensidade dos impulsos seguintes.

## 9. CONCLUSÃO

As simulações realizadas foram realizadas com órbitas circulares de 7000 km porque, como se trata de uma técnica que necessita de um alto valor de investimento, é razoável iniciar tal estudo com órbitas mais próximas da atmosfera terrestre, pois o consumo de energia necessária para a remoção do debri é inversamente proporcional ao valor do eixo maior de sua órbita.

Com diversas combinações de elementos keplerianos, a melhor posição do canhão, de modo geral, são as localizações próximas a linha do Equador, pois foi observado um maior número de casos onde o debri estava visível ao canhão quando este se encontrava em baixas latitudes. A longitude que se deve encontrar o debri também é de extrema importância, pois a rotação da Terra e a posição do debri em função do tempo que irá definir a visibilidade do satélite, o ângulo e a intensidade do impulso. Podendo assim afirmar que para cada tipo de órbita existe o melhor posicionamento do canhão. Para otimizar a localização do canhão deve-se estudar o conjunto de satélites de interesse e posicionar o canhão onde possa atingir a maior quantidade de lixo espacial possível com o menor gasto de energia.

Também é interessante priorizar um maior intervalo de tempo cujo conjunto de impulsos seja de baixa intensidade. Especialmente em órbitas circulares, os impulsos mínimos para derrubar o debri possuem pouca diferença, logo uma maior quantidade de disparos viáveis é mais atraente.

Foram testados vários tipos de órbitas com, variando seus elementos keplerianos; e para cada órbita diversas latitudes onde o canhão se posicionaria. Porém muitas simulações não foram apresentadas por dois motivos. Primeiramente porque em vários casos o debri não esteve visível ao canhão em nenhum instante. O segundo é porque, em outros casos, para derrubar o debri, foram calculados apenas impulsos elevados, inviabilizando a remoção do lixo espacial pelo seu alto custo.

Esse trabalho se limitou a estudar o debri em um período orbital, porém é importante considerar a possibilidade de aplicar um impulso ainda menor do que os simulados neste trabalho se o período de simulação da órbita for aumentado. Como foram apresentadas, as perturbações presentes nas simulações são percebidas com maior facilidade em longos períodos de observação. Logo é possível aplicar um pequeno impulso no debri e este entre na atmosfera depois de certa quantidade de revoluções em volta da Terra.

## 10. REFERÊNCIA

KUGA, H.K.; RAO, K.R.; CARRARA, V. Introdução à mecânica orbital. 2nd ed. São José dos Campos: INPE, 2008. 67 p.

MOURA, MARCOS ANTÔNIO N.; JERONIMO, João. Introdução ao Cálculo. 1nd ed, 2013. Vol2.

GOMES, V. M.; CHIARADIA, A. P. M.; PRADO, A. F. B. A. Otimização de manobras orbitais com dois e três impulsos. São José dos Campos: INPE, 2003. 23 p. (INPE-9551-PUD/123).

KUGA, HELIO KOITI; RAO, K. R.; PRADO, AFBA. Introdução a Determinação de Órbita e Manobras Orbitais. In: Antonio F Bertachini A Prado; Helio Koiti Kuga. (Org.). Fundamentos de Tecnologia Espacial. 1ed.São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001, v. 1, p. 38-49.

PRADO, AFBA. Transferências de Órbita com Aplicações a Trajetórias Interplanetárias. In: Antonio F Bertachini A Prado; HelioKoitiKuga. (Org.). Fundamentos de Tecnologia Espacial. 1ed.São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001, v. 1, p. 170-197.

European Space Agency,

[[http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/Debris\\_objects\\_in\\_1](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2008/03/Debris_objects_in_1)], 22/03/2014

PRADO, AFBA. Trajetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade. 1nd ed. São José dos Campos: INPE,2001.

SANCHEZ, D. M; YOKOYAMA, T; BRASIL, P. I. O; CORDEIRO, R. R. Some InitialConditions for DisposedSatellitesofthe Systems GPS andGalileoConstellations. HindawiPublishing Corporation MathmaticalProblems in Engineering. 2009. p. 10-14.