



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/06.30.23.17-TDI

**TRANSFORMADAS WAVELET NA ANÁLISE DE
SINAIS COM FALHAS E NA DETECÇÃO DA
SINCRONIZAÇÃO DAS DINÂMICAS LENTA E
RÁPIDA EM SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS COM
MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO**

Luciano Aparecido Magrini

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Margarete Oliveira Domingues e Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 24 de junho de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/42PJCFE>>

INPE
São José dos Campos
2020

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GBDIR)

Serviço de Informação e Documentação (SESID)

CEP 12.227-010

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/7348

E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CGCPT)

Membros:

Dra. Carina Barros Mello - Coordenação de Laboratórios Associados (COCTE)

Dr. Alisson Dal Lago - Coordenação-Geral de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CGCEA)

Dr. Evandro Albiach Branco - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (COCST)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial (CGETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT)

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação - (CPG)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Serviço de Informação e Documentação (SESID)

Cauê Silva Fróes - Serviço de Informação e Documentação (SESID)



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÕES



sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/06.30.23.17-TDI

**TRANSFORMADAS WAVELET NA ANÁLISE DE
SINAIS COM FALHAS E NA DETECÇÃO DA
SINCRONIZAÇÃO DAS DINÂMICAS LENTA E
RÁPIDA EM SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS COM
MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO**

Luciano Aparecido Magrini

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelos Drs. Margarete Oliveira Domingues e Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 24 de junho de 2020.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34R/42PJCFE>>

INPE
São José dos Campos
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Magrini, Luciano Aparecido.

M276t Transformadas wavelet na análise de sinais com falhas e na detecção da sincronização das dinâmicas lenta e rápida em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo / Luciano Aparecido Magrini. – São José dos Campos : INPE, 2020.

xxviii + 240 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21c/2020/06.30.23.17-TDI)

Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.

Orientadores : Drs. Margarete Oliveira Domingues e Elbert Einstein Nehrer Macau.

1. Dados com falha. 2. Transformadas wavelet. 3. Wavelet adaptativa. 4. Dinâmicas lenta e rápida. 5. Sincronização total e parcial. I.Título.

CDU 517.44



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): **Luciano Aparecido Magrini**

Título: "Transformadas Wavelet na Análise de Sinais com Falhas e na Detecção da Sincronização das Dinâmicas Lenta e Rápida em Sistemas Dinâmicos Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo"

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de **Doutor(a)** em **Computação Aplicada**

Dr. **Lamartine Nogueira Frutuoso Guimarães**

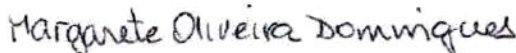


Presidente / IEAv/CTA / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dra. **Margarete Oliveira Domingues**

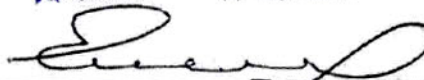


Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. **Elbert Einstein Nehrer Macau**

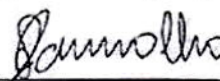


Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dr. **Solon Venâncio de Carvalho**

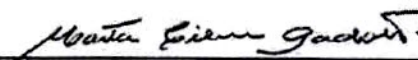


Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Dra. **Marta Cilene Gadotti**



Convidado(a) / UNESP / Rio Claro - SP

Participação por Vídeo - Conferência

Aprovado () Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

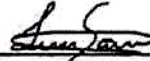
() maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 24 de junho de 2020

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de *Doutor(a)* em
Computação Aplicada

Dra. Laurita dos Santos



Convidado(a) / UB / São Paulo - SP

(-x) Participação por Video - Conferência

(-x) Aprovado () Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 24 de junho de 2020

“Não sou esperançoso por pura teimosia, mas por imperativo existencial e histórico. [...] Minha esperança é necessária mas não é suficiente. Ela, só, não ganha a luta, mas sem ela a luta fraqueja e titubeia. Precisamos da esperança crítica, como o peixe necessita da água despoluída.”

PAULO FREIRE
em “Pedagogia da Esperança”, 1992

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

... ao INPE pela infraestrutura oferecida e apoio para a realização deste trabalho de pesquisa.

... ao IFSP pelo processo de afastamento remunerado para qualificação que beneficiou-me.

... à CAPES pelo suporte financeiro no Brasil (processos 1474680 e 1756262) e pelo apoio ao período de estágio sanduíche nos Estados Unidos via concessão de bolsa específica durante o segundo semestre de 2017 (processo 88881.134020/2016-01).

... aos meus orientadores, Dra. Margarete Oliveira Domingues e Dr. Elbert E. E. Macau, pelos conhecimentos e experiências partilhados, pela paciência diante de cada tropeço cometido, pelas conversas informais, pelos conselhos, pela disponibilidade e orientação.

... ao Dr. István Z. Kiss pela orientação recebida durante o período em que estive em seu laboratório e sob sua supervisão na *St. Louis University*.

... ao Dr. Odim Mendes com quem pude trabalhar e aprender sobre a Física Solar e a quem sou grato também pelo auxílio na obtenção de parte dos resultados deste trabalho.

... ao corpo docente da CAP com quem pude aprender e conviver durante estes anos. Particularmente sou grato aos Profs. Drs. Haroldo Campos Velho e Solon Venâncio de Carvalho com quem pude aprender muito durante os cafés em que falamos sobre ciência e aos quais, inúmeras vezes consultei, sendo prontamente atendido e ao Prof. Dr. Rafael Santos, coordenador do programa, pela constante disponibilidade.

... à Dra. Marta Cilene Gadotti com quem tive o prazer de aprender durante o mestrado e que prontamente aceitou participar da banca de avaliação do meu trabalho de doutorado. Se é verdade que nos tornamos bons professores com os bons exemplos contigo eu tive um dos melhores possíveis.

... a todos os membros da banca de avaliação que dedicaram tempo à leitura do meu trabalho e contribuíram para sua melhoria. Gratidão pela disponibilidade e presença nesta etapa tão importante de minha trajetória pessoal e profissional.

... aos funcionários da Biblioteca e Setor de Documentação do INPE e, em particular, à Simone A. Del-Ducca Barbedo pela pronta ajuda com suas respostas rápidas e precisas em todos os momentos de necessidade.

... a todos os funcionários da Seção de Pós Graduação, em especial à Jéssica Cristina Barbosa, secretária da CAP, que com sua organização ímpar e conhecimento regimental prontamente ajudou em cada dúvida, procedimento, prazo ou questão burocrática.

... às minhas queridas amigas Ivana Yoshie, Sabrina Sambatti, Érica Gouvêa, Juliana Lacerda, Juliana Marino e Jéssica Cristina pelos almoços, risadas, conselhos e experiências acadêmicas e de vida compartilhadas.

... à minha amiga Mariana Baroni pela amizade e conselhos durante estes anos. Obrigado por ouvir-me nos momentos de desespero, por auxiliar-me sempre que possível e pelas sugestões e leituras realizadas em conjunto comigo.

... aos meus alunos, em especial ao Augusto Almeida, Pedro Marcos, Victor Seibel, Hillary Oliveira, Douglas Augusto, Lucas Façanha, Luiz Fernando Sena, João Paulo e Danielle Moreira por entenderem minhas ausências quando necessárias mesmo que estivessem precisando de mim. Perdoem-me os não citados, mas seria impossível nominar aqui um a um de vocês.

RESUMO

Esta tese apresenta aplicações das Transformadas Wavelet Contínua e Discreta na análise de dados típicos de Geofísica Espacial com falhas e a Sistemas Dinâmicos Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo. No caso dos dados de Geofísica Espacial definem-se diferentes padrões de falha em relação ao comprimento e à localização temporal em um conjunto de eventos HILDCAA (High-intensity, Long-Duration, Continuous AE Activity) utilizados como estudo de caso. Analisam-se as relações existentes entre os padrões de falha, o conjunto de frequências espúrias introduzido nos resultados via análise tempo-escala padrão, em que são realizados tratamentos via métodos numéricos de interpolação na eliminação das falhas. Os resultados são comparados aos resultados via técnica *wavelet* adaptativa em que não há a aplicação de pré-processamentos numéricos. Sobre os Sistemas Dinâmicos Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo propõe-se duas metodologias inéditas: uma para a construção de aproximações das dinâmicas lenta e rápida e outra para a detecção da sincronização, via travamento de fase entre as respectivas dinâmicas lenta e rápida presentes em redes de osciladores cujas dinâmicas exibem diferentes escalas de tempo. Adicionalmente, estas metodologias são aplicadas em dados sintéticos e experimentais como validação. Os dados sintéticos relacionam-se com osciladores do tipo Hindmarsh-Rose e os experimentais com osciladores eletroquímicos. Em ambos os casos a dinâmica lenta é caótica e a rápida é caracterizada por *burstings* ao longo do tempo e o acoplamento considerado nas redes estudadas é global. Os resultados da pesquisa indicam que o tratamento de falhas pequenas e/ou médias em relação ao comprimento da série temporal com interpolações lineares ou polinômios cúbicos de Hermite apresenta resultados equivalentes ao uso da técnica wavelet adaptativa e que o uso de splines cúbicos não é recomendado para o tratamento de falhas em nenhum caso. Com relação aos sistemas com múltiplas escalas de tempo as metodologias baseadas em *wavelets* tanto para a separação das diferentes dinâmicas quanto para a investigação da sincronização se mostram eficazes e úteis particularmente no caso experimental.

Palavras-chave: Dados com Falha. Transformadas *Wavelet*. *Wavelet* Adaptativa. Dinâmicas Lenta e Rápida. Sincronização Total e Parcial.

WAVELET TRANSFORMS IN SIGNAL ANALYSIS WITH GAPS AND IN SYNCHRONIZATION DETECTION OF SLOW AND FAST DYNAMICS TO CHAOTIC MULTIPLE-TIME SCALES DYNAMICAL SYSTEMS

ABSTRACT

This thesis presents applications of Wavelet Transforms in the analysis of typical data set of Space Geophysics with gaps and in Chaotic Multiple Time-Scale Dynamical Systems. In the case of Space Geophysics, we define different gap patterns related to your relative length and time localization and we consider a large data set about HILDCAA (High-intensity, Long-Duration, Continuous AE Activity) events as a case study. We analyze the relations among the gap patterns, the spurious frequency set introduced in results with standard wavelet analysis, and the numerical pre-processing with interpolations in the gap regions. Besides, we compared these results with the adaptive wavelet technique which there is not any numerical pre-processing. Regarding the Chaotic Multiple Time-Scale Dynamical Systems, we propose two new methodologies. The first one is used to build approximations to slow and fast dynamics, and the second one is used to make the synchronization detection in the phase block sense between the correspondents fast and slow dynamics in oscillator networks whose dynamics shows these two different dynamics. Additionally, these methodologies are applied in synthetic and experimental data sets as a validation method; the first one related to Hindmarsh-Rose oscillators and the second one related to electrochemistry oscillators. In both cases the slow dynamic is chaotic, the fast dynamic is characterized by burstings over time, and the coupling network is global in all considered cases. The results indicates that the for gaps will small lengths in relation to length of analyzed time-series to use linear or cubic polynomial Hermite interpolations are equivalent to use of gapped wavelet and that the use of cubic splines in interpolation process is not recommended in any case of gap in time-series. In relation of multiple-time scale systems the methodologies based in wavelet techniques are useful to separation of the different dynamics and to of investigation of synchronization and, particularly usefull in experimental cases.

Keywords: Gaps in Data Sets. Wavelet Transform. Gapped Wavelets. Slow and Fast Dynamics. Partial and Complete Synchronization.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 <i>Wavelet</i> complexa de Morlet e seu envelope gaussiano.	13
2.2 Frequência central ω_c para $\psi_M(t)$	14
2.3 Efeitos da variação do parâmetro de escala em uma função <i>wavelet</i>	15
2.4 Efeitos da variação do parâmetro de translação em uma função <i>wavelet</i>	16
2.5 <i>Wavelets</i> de Morlet para diferentes parâmetros ω_0	19
2.6 <i>Wavelets</i> de Morse em frequência	21
2.7 <i>Wavelets</i> de Morse em tempo	22
2.8 Comparação entre as <i>wavelets</i> de Morse e de Morlet	23
2.9 Análise tempo-escala para f via <i>wavelet</i> de Morlet	28
2.10 Análise tempo-escala para g via <i>wavelet</i> de Morlet	29
2.11 <i>Wavelets</i> adaptativas de Morlet	34
3.1 Representação gráfica do plano tempo-escala discretizado	36
3.2 <i>Wavelet</i> $\psi(t)$ de Daubechies 10 (Db10) e resposta em frequência	40
3.3 Filtros passa-baixa e passa-alta para Db10.	42
3.4 MR via algoritmo de Mallat	44
3.5 Reconstrução via algoritmo de Mallat	46
3.6 Decomposição via DT-CWT	48
3.7 Decomposição via DT-CWT com alternância de filtros	49
3.8 Reconstrução para a DT-CWT	50
4.1 Retrato de fase e séries temporais: sistema presa-predador.	54
4.2 Evolução temporal do sistema de Lorenz com diferentes condições iniciais.	57
4.3 Sensibilidade às condições iniciais para o sistema de Lorenz	58
4.4 Simulações do sistema de Rössler	60
4.5 Sensibilidade às condições iniciais para o sistema de Rössler	61
4.6 Variáveis de estado para os Sistemas 4.7 e 4.8 com $\epsilon = 0,4$	63
4.7 Variáveis de estado para os Sistemas 4.7 e 4.8 com $\epsilon = 6$	64
4.8 Definição de fase para o caso de trajetórias periódicas.	65
4.9 Seção S_p de Poincaré para o atrator de Rössler.	67
4.10 Oscilador de Van der Pol e respectivo campo de direções	74
4.11 Ilustração do teorema de Fenichel	80
4.12 Oscilações de relaxação para Van der Pol sem forçante	84
5.1 Componente B_z do campo magnético interplanetário	91
5.2 Dados com falhas substituídas pela média.	94

5.3	Análise tempo-escala do sinal <i>benchmark</i>	95
5.4	Sinais pré-processados com <i>splines</i> cúbicos	96
5.5	Sinais pré-processados via polinômios de Hermite e com interpolação linear	97
5.6	Escalogramas após aplicação de <i>splines</i>	98
5.7	Escalogramas com <i>wavelet</i> adaptativa e pré-processamentos numéricos	99
5.8	Comparação entre os espectros globais <i>wavelet</i>	100
6.1	Representação esquemática da aproximação das dinâmicas	108
6.2	Comportamento das dinâmicas rápida e lenta para a variável w_1	110
6.3	Dinâmicas rápida e lenta nos dados experimentais	112
6.4	Escalograma para a variável w_1 do Sistema 6.2	114
6.5	Sub-bandas Ω_{lenta} e $\Omega_{rápida}$ para as aproximações de w_1	115
6.6	Aproximações para as dinâmicas lenta e rápida de w_1 sem tratamento	115
6.7	Comparação entre aproximação da dinâmica lenta e w_1	116
6.8	Problemas de borda na aproximação da dinâmica rápida.	117
6.9	Correção numérica para os <i>burstings</i> de $w_{1rápida}(t)$ via <i>hard threshold</i>	117
6.10	Comparação das dinâmicas rápida aproximada e original em $w_1(t)$	118
6.11	Escalograma para os 10 segundos iniciais do oscilador A	119
6.12	Escalogramas para os osciladores indicados na Tabela 6.1.	120
6.13	Sub-bandas para as aproximações das dinâmicas dos osciladores A e C	121
6.14	Aproximações para as dinâmicas do oscilador experimental A	122
6.15	Comparação do oscilador A com a aproximação para a dinâmica lenta	123
6.16	Problemas de borda e falsos positivos na aproximação da dinâmica rápida	124
6.17	Problemas de bordas na aproximação rápida para oscilador A.	124
6.18	Correção numérica para a aproximação da dinâmica rápida	125
6.19	Comparação do oscilador C com a aproximação para a dinâmica lenta	126
6.20	Limiarização da dinâmica rápida para o oscilador C	127
6.21	Versão ampliada da limiarização da dinâmica rápida para o oscilador C	128
6.22	Deteção da sincronização entre dinâmicas rápida.	132
6.23	Sincronização entre dinâmicas lenta nos dados sintéticos.	133
6.24	Primeiro elemento do conjunto B_{over} para os dados sintéticos.	134
6.25	Diferenças de fase para a dinâmica lenta nas redes com 02 osciladores	136
6.26	<i>Burstings</i> e <i>overlaps</i> em função da intensidade de acoplamento $\epsilon \geq 0$	137
6.27	<i>Overlaps</i> para a rede com 02 osciladores com $\epsilon = 0,4$	138
6.28	<i>Overlaps</i> para a rede com 02 osciladores com $\epsilon = 1.0$	139
6.29	Índice R para a dinâmica rápida nas redes com 25 osciladores	141
6.30	Índice R para a dinâmica lenta nas redes com 25 osciladores	142
A.1	Caixas de Heisenberg no plano tempo-frequência.	168
A.2	Representação de um sinal em tempo e em frequência.	169

A.3	Transformada de Fourier de um sinal não-estacionário.	170
B.1	Algoritmo para o cálculo da convolução de dois sinais discretos x e y . . .	174
B.2	Convolução de x e y	175
B.3	Representação gráfica da convolução do Exemplo B.1.	175
C.1	Gráficos das funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ para Db4	179
D.1	Filtros para DT-CWT	182
D.2	Funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ para os filtros da Tabela D.1	183

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Admissibilidade da <i>wavelet</i> de Morlet	17
2.2 Diferentes expressões para a <i>wavelet</i> de Morlet.	18
3.1 Métodos de construção dos filtros de análise para DT-CWT.	48
5.1 Resumo dos intervalos de falha introduzidos no sinal <i>benchmark</i>	95
6.1 Redes experimentais com dois osciladores eletroquímicos.	112
6.2 Sub-bandas para as dinâmicas rápida e lenta no caso experimental	121
6.3 Índice R para a dinâmica lenta nas redes com 02 osciladores	136
6.4 <i>Burstings</i> e <i>overlaps</i> para aproximações da dinâmica rápida.	137
6.5 Índice R para a dinâmica rápida nas redes com 02 osciladores	140
D.1 Filtros de análise para DT-CWT.	181

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Contínua.
DT-CWT	–	<i>Dual-Tree Complex Wavelet Transform</i> .
DWCA	–	<i>Discrete Complex Wavelet Approach</i> .
DWT	–	Transformada <i>Wavelet</i> Discreta.
FT	–	Transformada de Fourier.
HILDCAA	–	<i>High-Intensity, Long-Duration, Continuous Auroral Electroject Activities</i> .
HR	–	Modelo Teórico <i>Hindmarsh-Rose</i> .
ICWT	–	Transformada Inversa <i>Wavelet</i> Contínua.
IFT	–	Transformada Inversa de Fourier.
NASA	–	<i>National Aeronautics and Space Administration</i> .
MR	–	Análise Multirresolução.

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(t)$	– Função, sinal ou série-temporal unidimensional.
$\hat{f}(t)$	– Transformada de <i>Fourier</i> de $f(t)$.
$L^2(\Omega)$	– Espaço das funções quadrado integráveis em Ω .
\mathbb{R}	– Conjunto dos números reais.
\mathbb{C}	– Conjunto dos números complexos.
D	– Domínio de definição da função $f(t)$.
K	– Intervalo compacto da reta real.
K^C	– Complementar do conjunto K em relação a \mathbb{R} .
$\psi(t)$	– Função <i>wavelet</i> .
C_ψ	– Constante de admissibilidade para $\psi(t)$.
$\hat{\psi}(\omega)$	– Transformada de <i>Fourier</i> de $\psi(t)$.
$\psi_M(t)$	– Função <i>wavelet</i> de <i>Morlet</i> .
ω_0	– Parâmetro de frequência adimensional para $\psi_M(t)$.
Δt	– Período de amostragem.
ω	– Frequência angular.
ω_c	– Frequência central de $\psi(t)$.
$ S(\omega) ^2$	– Espectro de Potência de <i>Fourier</i> .
a	– Parâmetro de escala.
$\psi_{a,\tau}(t)$	– Função $\psi(t)$ transladada τ unidades e comprimida/dilatada pelo fator a .
ω_a	– Pseudo-frequência associada à escala a .
$\psi(\omega; \gamma, \beta)$	– <i>Wavelet</i> de <i>Morse</i> com parâmetros adimensionais γ e β .
$U(\omega)$	– Função degrau generalizada de <i>Heaviside</i> .
$\delta(t)$	– Função generalizada delta de <i>Dirac</i> .
$\omega_{\beta,\gamma}$	– Frequência central da <i>wavelet</i> de <i>Morse</i> $\psi(\omega; \gamma, \beta)$.
$P_{\omega,\beta}$	– Comprimento do suporte compacto da <i>wavelet</i> $\psi(\omega; \gamma, \beta)$.
$\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$	– Transformada <i>wavelet</i> contínua.
$\overline{\psi(t)}$	– Conjugado complexo de $\psi(t)$.
$\langle(t), g(t)\rangle$	– Produto interno usual no espaço L^2 .
$\mathbb{E}(a, \tau)$	– Escalograma.
$\mathbb{G}(a)$	– Espectro global <i>wavelet</i> .
a_{\max}	– Parâmetro cujo espectro global <i>wavelet</i> é máximo.
A	– Conjunto dos parâmetros de escala.
$\max(A)$	– Elemento máximo conjunto de parâmetros A .
a_j	– Parâmetro de escala discretizado segundo <i>Torrence Compo</i> .
$\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$	– <i>Wavelet</i> adaptativa centrada em $t = \tau$ na escala a .
$a(t)$	– Função auxiliar para a construção de $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$.
$C(a, \tau)$	– Parâmetro de correção para $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$.
$\zeta_{a,\tau}(t)$	– Função envelope de $\psi_M a, \tau(t)$.
$h_{a,\tau}(t)$	– Parte oscilatória complexa de $\psi_M a, \tau(t)$.
i	– Unidade imaginária.

$\exp(x)$	– Exponencial de x cuja base é o número de Euler.
j	– Parâmetro de escala discretizado.
k	– Parâmetro de translação no tempo discretizado.
$\psi_k^j(t)$	– Função <i>wavelet</i> discreta na escala j e centrada em k .
$T_f^\psi(j, k)$	– Transformada <i>wavelet</i> discreta.
$\ f(t)\ _{L^2}$	– Norma da função $f(t)$ em L^2 .
V^j	– Subespaço vetorial de $L^2(\mathbb{R})$.
W^j	– Complemento ortogonal do subespaço V^j de $L^2(\mathbb{R})$.
$\{V^j, \phi\}$	– Análise multirresolução.
J	– Nível de decomposição no contexto da análise multirresolução.
$\arg(g_0(\omega))$	– Argumento do número complexo $g_0(\omega)$.
$\phi_k^j(t)$	– Função escala no nível j de resolução.
c^j	– Coeficientes escala no nível j de resolução.
d_k^j	– Coeficientes <i>wavelet</i> no nível j de resolução.
d_r^j	– Parte real do coeficiente <i>wavelet</i> complexo discreto no nível j .
d_i^j	– Parte imaginária do coeficiente <i>wavelet</i> complexo discreto no nível j .
$h(k)$	– Filtro passa-baixa de análise associado à função escala $\phi_k^j(t)$.
$g(k)$	– Filtro passa-alta de análise associado à função <i>wavelet</i> $\psi_k^j(t)$.
$\uparrow 2$	– Superamostragem por um fator de ordem 2 .
$\downarrow 2$	– Subamostragem por um fator de ordem 2 .
$f(t) * g(t)$	– Convolução discreta entre as funções $f(t)$ e $g(t)$.
$h^*(k)$	– Filtro passa-baixa de síntese associado à função escala $\phi_k^j(t)$.
$g^*(k)$	– Filtro passa-alta de síntese associado à função <i>wavelet</i> .
$\mathbb{E}(J)$	– Espectro <i>Wavelet</i> no nível J de decomposição.
$\xi(f(t))$	– Transformada de Hilbert da função $f(t)$.
\mathbb{R}^n	– Espaço euclidiano de com n dimensões.
$\gamma(t)$	– Fluxo associado a um sistema dinâmico.
$\gamma_s(t)$	– Fluxo associado à dinâmica lenta de um sistema dinâmico.
$\gamma_f(t)$	– Fluxo associado à dinâmica rápida de um sistema dinâmico.
$\bar{B}_\epsilon(t)$	– Bola fechada no espaço n -dimensional de raio $\epsilon > 0$.
C	– Constante de <i>Lipschitz</i> .
\mathcal{A}	– Atrator caótico.
\mathcal{L}	– Espectro de Lyapunov associado a um sistema dinâmico.
$\nabla(S)$	– Divergente do sistema dinâmico S .
$\Phi(t)$	– Variável de fase associada a um sistema dinâmico.
S_p	– Seção de <i>Poincaré</i> .
$\Phi_P(t)$	– Fase via seção de <i>Poincaré</i> .
$\Phi_{proj}(t)$	– Fase via função arco-tangente em projeções bidimensionais.
$\Phi_H(t)$	– Fase via transformada de <i>Hilbert</i> .
$\Phi_W(t)$	– Fase via transformada <i>wavelet</i> contínua.
$\Phi_{DW}(t)$	– Fase via transformada <i>wavelet</i> complexa discreta <i>dual-tree</i> .
(m, n) – rápida-lenta	– Sistema com dinâmicas rápida e lenta em m e n dimensões.

C_0	– Variedade crítica para o sistema (m, n) – rápido-lento.
S_ϵ	– Variedade localmente invariante para (m, n) – rápido-lento.
M_0	– Subconjunto normalmente hiperbólico de uma variedade crítica.
$(D_x f)(p)$	– Jacobiano da função $f(x) \in \mathbb{R}^k$ no ponto $x = p$.
$C_{0,s}$	– Subconjunto dos pontos singulares de uma variedade crítica.
$C_{0,r}$	– Subconjunto dos pontos regulares de uma variedade crítica.
$d_H(A, B)$	– Distância de <i>Hausdorff</i> entre os subconjuntos A e B de \mathbb{R}^{m+n} .
$\inf(A)$	– Ínfimo do conjunto A .
$\sup(A)$	– Supremo do conjunto A .
$\omega_{\text{lenta}}^{\max}$	– Pico de energia em baixas frequências.
$\omega_{\text{rápida}}^{\max}$	– Pico de energia em altas frequências.
$\omega_{\text{inflexão}}^{\max}$	– Ponto de inflexão com máxima energia no espectro global <i>wavelet</i> .
m_{lenta}	– Primeiro máximo local em baixas frequências maior que $\omega_{\text{lenta}}^{\max}$.
$m_{\text{rápida}}$	– Primeiro máximo local em altas frequências menor que $\omega_{\text{rápida}}^{\max}$.
Ω_{lenta}	– Conjunto de baixas frequências associado à dinâmica lenta.
$\Omega_{\text{rápida}}$	– Conjunto de altas frequências associado à dinâmica rápida.
$f_{\text{lenta}}(t)$	– Aproximação para a dinâmica lenta presente em $f(t)$.
$f_{\text{rápida}}(t)$	– Aproximação para a dinâmica rápida presente em $f(t)$.
$\mathbb{E}(t)$	– Energia de um sinal $f(t)$ ao longo do tempo.
ϵ	– Força de acoplamento entre dois sistemas dinâmicos.
$I(t)$	– Corrente elétrica, em miliampères.
δ	– Constante considerada na limiarização via <i>hard threshold</i> .
$R_{\{\text{osc}_1, \text{osc}_2\}}$	– Parâmetro de sincronização parcial.
R_{lenta}	– Parâmetro de sincronização parcial para a dinâmica lenta.
$R_{\text{rápida}}$	– Parâmetro de sincronização parcial para a dinâmica rápida.
$\Phi_{\text{lenta}}^J(t)$	– Fase para a dinâmica lenta.
$\Delta\Phi_{\text{lenta}}^J(t)$	– Diferença de fase para a dinâmica lenta.
B_{over}	– Conjunto de <i>overlaps</i> entre duas aproximações de dinâmica rápida.
$R_{\text{rápida}}$	– Parâmetro de sincronização parcial para a dinâmica rápida.
$\#A$	– Cardinalidade do conjunto A .
$\langle R \rangle$	– Média aritmética simples dos elementos do conjunto R .

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
2 TRANSFORMADAS WAVELET CONTÍNUAS	11
2.1 Funções <i>wavelet</i>	11
2.2 <i>Wavelets</i> de Morlet e Morse	16
2.3 Transformada <i>wavelet</i> contínua	23
2.4 Transformada <i>wavelet</i> contínua adaptativa	30
3 TRANSFORMADAS WAVELET DISCRETAS	35
3.1 Transformadas <i>wavelet</i> discretas e multirresolução	35
3.1.1 Transformada <i>wavelet</i> discreta e análise multirresolução	35
3.1.2 Algoritmo de Mallat	43
3.2 Transformada <i>wavelet</i> complexa <i>dual-tree</i>	46
4 SISTEMAS DINÂMICOS COM MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO, FASE E SINCRONIZAÇÃO	51
4.1 Sistemas dinâmicos e caos	51
4.1.1 As equações de Lorenz e de Rössler	56
4.2 Sincronização entre sistemas dinâmicos caóticos	60
4.2.1 Fase em sistemas caóticos	64
4.2.2 Métodos de atribuição de fase para sistemas caóticos	66
4.2.2.1 Fase via seções de Poincaré	66
4.2.2.2 Fase via projeção no espaço de fases	67
4.2.2.3 Fase via transformada de Hilbert	68
4.2.2.4 Fase via transformada <i>wavelet</i> contínua	68
4.2.2.5 Fase via transformada <i>wavelet</i> discreta complexa <i>dual-tree</i>	69
4.3 Sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo	70
4.4 Sincronização em sistemas com múltiplas escalas de tempo	85

II ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS NAS APLICAÇÕES E RESULTADOS	89
5 ANÁLISE DE FALHAS EM DADOS TÍPICOS DE GEOFÍSICA ESPACIAL	91
5.1 Dados e metodologia	91
5.2 Discussões e conclusões parciais	97
6 APROXIMAÇÕES DAS DINÂMICAS LENTA E RÁPIDA E DETECÇÃO DA SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO	103
6.1 Aproximação das dinâmicas rápida e lenta via CWT	103
6.1.1 Método de aproximação das dinâmicas lenta e rápida	105
6.1.2 Dados sintéticos: sistemas Hindmarsh-Rose caóticos acoplados	108
6.1.3 Dados experimentais: osciladores eletroquímicos	110
6.1.4 Aproximação das dinâmicas	113
6.1.4.1 Aproximações para os dados sintéticos	113
6.1.4.2 Aproximações para os dados experimentais	119
6.2 Aplicação: detecção da sincronização entre dinâmicas rápida e lenta	128
6.3 Detecção da sincronização entre dinâmicas lentas	129
6.4 Detecção da sincronização entre dinâmicas rápidas	130
6.5 Aplicação nos dados sintéticos	132
6.6 Aplicação nos dados experimentais	135
7 CONCLUSÕES	143
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
APÊNDICE A - DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA	161
APÊNDICE B - CONVOLUÇÃO DISCRETA	173
APÊNDICE C - FILTROS ASSOCIADOS À TEORIA <i>WAVELET</i>	177
APÊNDICE D - FUNÇÕES ESCALA E <i>WAVELET</i> PARA DT-CWT	181
APÊNDICE E - PARTICIPAÇÕES EM EVENTOS CIENTÍFICOS E PUBLICAÇÕES	185
APÊNDICE F - DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS	225
F.1 Capítulo 2	225

F.2 Capítulo 3	229
ANEXO A - AUTORIZAÇÕES DE REPRODUÇÃO DE PUBLICAÇÕES: AIP, SPRINGER e SBMAC.	231

1 INTRODUÇÃO

A área de processamento de sinais tem ganhado relevância nos últimos anos nas áreas acadêmica, científica, industrial e financeira, para citar apenas algumas, em que faz-se necessário tratar um volume cada vez maior de dados extraindo destes as informações relevantes e/ou de interesse através de ferramentas computacionais de alta capacidade e acurácia de análises e cujas implementações baseiam-se em métodos matemáticos que permitem o processamento, muitas vezes, em tempo real.

Até o início da década de 1980 os métodos de análise e tratamento de sinais desenvolvidos e utilizados fundamentavam-se matematicamente, em grande parte, na Transformada de Fourier introduzida pelo matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) em uma pesquisa sobre a condução de calor (KÖRNER, 1989).

Em uma perspectiva teórica, esta Transformada tem a capacidade de decompor a informação contida em um sinal qualquer fazendo uso de uma base exponencial complexa e, deste modo, detectar o conjunto de frequências presente.

Para sinais estacionários e periódicos, cujo conteúdo frequencial permanece constante ao longo do tempo, a Transformada de Fourier é, por excelência, o instrumento adequado para a análise, tratamento e extração de informações relevantes. Contudo, como sua base exponencial complexa não possui localização no domínio do tempo seu uso impõe limitações em seu uso para a análise de sinais não estacionários, caso em que o conjunto de frequências varia ao longo do tempo.

Em parte, tais limitações são minimizadas pelo uso da Transformada Janelada de Fourier (GRAFAKOS, 2008; BLOOMFIELD, 2004) em que escolhe-se uma função real suportada em um intervalo de comprimento finito da reta, denominada função janela, e então com seu uso ganha-se localização temporal para a base exponencial complexa de Fourier.

Este ainda não é o caso ideal para a análise no caso de sinais não estacionários principalmente por que, uma vez escolhida a função janela, não existe a possibilidade de sua alteração durante toda a análise ou, em outras palavras, de alterar a resolução em tempo e em frequência definida via função janela.

No início dos anos 1980 ao estudar-se sinais não estacionários relativos a fenômenos geo-sísmicos utiliza-se, pela primeira vez, não se considera uma função base para a análise que não a base exponencial complexa também ondulatória mas bem localizada no tempo, isto é, não nula apenas em um intervalo compacto da reta real

(MORLET et al., 1982a; MORLET et al., 1982b), momento em que o geofísico Jean Morlet (1931 - 2007) unifica ideias já existentes em diversos campos e lança as bases do que hoje a comunidade científica conhece como análise de *wavelets* ou análise tempo-escala.

Posteriormente, em trabalho conjunto com o matemático Alex Grossmann (1930 - 2019), a representação de sinais nestas novas bases é estabelecida de modo rigoroso dentro de uma perspectiva matemática para o espaço das funções quadrado integráveis (GROSSMANN; MORLET, 1984).

Estas novas funções base para a análise de um sinal, denominadas funções *wavelet*, correspondem geometricamente a oscilações de média nula definidas em um suporte compacto da reta real e que, através de sucessivas dilatações/contrações emulam diferentes frequências, permitindo assim, a análise de sinais não estacionários, em diferentes níveis de resolução frequencial e, intuitivamente, funcionando como microscópios matemáticos ao revelar estruturas de energia, no sentido físico, nos instantes de tempo em que elas surgem ou desaparecem (KUMAR; FOUFOULA-GEORGIU, 1997).

A partir daí, desenvolve-se rapidamente a noção da Transformada *Wavelet* Contínua inspirada na definição da Transformada de Fourier e novas ferramentas para a análise e processamento de sinais são desenvolvidas como, por exemplo, o escalograma e o espectro global *wavelet*, baseados nos conceitos de periodograma e de espectro de potência desenvolvidos e utilizados em conjunto com a Transformada de Fourier, mas com diferenças significativas; por exemplo, o espectro global *wavelet*, apesar de tratar-se de uma versão suavizada do espectro de Fourier apresenta vantagens ao permitir, por exemplo, a leitura das rajadas existentes em altas frequências de maneira mais clara (DAUBECHIES, 1992).

Simultaneamente ao reconhecimento das *wavelets* por suas aplicações, o desenvolvimento da teoria da Análise Multirresolução implica em uma importante mudança de paradigmas tanto para a teoria quanto para as aplicações das *wavelets*; com esta nova abordagem, torna-se possível construir funções *wavelet* com propriedades desejadas e previamente construídas para o processamento de um sinal específico (DAUBECHIES, 1992), permitindo tratar a análise de *wavelet* como um problema de filtragem em que tais funções como filtros passa-banda (MALLAT, 1989). Fundamentalmente estes conceitos estabelecem as bases teóricas para a versão discreta da Transformada *Wavelet*.

Desde os trabalhos originais de Jean Morlet até o início dos anos 1990 a análise de *wavelets* via respectivas Transformadas Contínuas e Discretas, desenvolve-se baseada principalmente no sucesso de sua aplicação em áreas distintas como filtragem de imagens (ANTONINI et al., 1992) e reconhecimento de padrões (MALLAT, 1991), para citar apenas duas.

Em trabalho seminal publicado em 1992, a física e matemática belga Ingrid Daubechies (1954 -) estabelece a análise de *wavelets* em bases matemáticas formais tornando, desta maneira, o estudo das *wavelets* em uma subárea também da Matemática, em particular das Análises Harmônica e Funcional (DAUBECHIES, 1992). A publicação de um algoritmo computacionalmente eficaz, rápido e estável, no sentido de permitir a reconstrução do sinal a partir da análise feita para a Transformada *Wavelet* Discreta implica no completo estabelecimento desta área (MALLAT, 1989).

Uma vez desenvolvida a fundamentação matemática, uma profusão de métodos e técnicas baseadas nas *wavelets* passa a ser desenvolvida de modo considerável em que cada área do conhecimento, dada a versatilidade destas funções e da análise multirresolução, desenvolve e adapta as técnicas conforme suas necessidades.

Um clássico exemplo disto é a versão adaptativa da Transformada *Wavelet* Contínua, desenvolvida para a análise de sinais com falhas, muito comuns na área de Geofísica Espacial e Astronomia, publicada inicialmente em periódicos destinados a geofísicos e astrônomos (FRICK et al., 1997; FRICK et al., 1998).

Dado o interesse crescente dos físicos e engenheiros no comportamento caótico, descoberto inicialmente pelo meteorologista Edward Norton Lorenz (1917 - 2008) em 1967, menos de 30 anos antes do desenvolvimento formal da teoria de *wavelets*, trabalhos relacionando os dois conceitos rapidamente emergem na Física (PERMANN; HAMILTON, 1992; DING et al., 1999; TEICH et al., 1995) e podem ser, mais recentemente, encontrados em áreas diversas em que o caos também se manifesta como a biomedicina e análise de imagens (LIU et al., 2018; AN; LIU, 2019) além do mercado financeiro (LAHMIRI; BEKIROS, 2020).

Na recente área da complexidade, em que o conceito e o problema de investigação centrais são o de sincronização e o de sua detecção (PIKOVSKY et al., 2003) entre osciladores de dinâmicas não lineares nos casos de maior interesse, a teoria de *wavelets* também tem se mostrado rica em aplicações.

Considerando que, no contexto da teoria da complexidade é comum fazer-se a análise de redes de osciladores acoplados e buscar entender como estes se comportam quando vistos como um elemento único e como as interações entre estes ocorrem, a análise de *wavelet* tem sido aplicada com sucesso (KISS et al., 2006; FERREIRA et al., 2015; FERREIRA et al., 2017; LUO et al., 2019; GUPTA et al., 2019; EVSTIFEEV; MOSKALENKO, 2020).

Os osciladores, a que se faz referência no parágrafo anterior, podem ser modelados teoricamente por sistemas de equações diferenciais, (no caso deste trabalho, ordinárias) sendo a respectiva rede construída considerando um acoplamento ou interação entre as variáveis dos diferentes sistemas que representam os osciladores utilizados durante o processo de integração numérica.

No caso real, osciladores são compreendidos como qualquer fenômeno que admite algum ritmo como relógios de pêndulo, circuitos elétricos, vaga-lumes em bando, pássaros em revoada, batimentos cardíacos, aplausos, comunicação entre neurônios e entre redes de computadores só para citar alguns exemplos (PIKOVSKY et al., 2003). Trata-se, portanto, de um conceito amplo e presente nas mais diversas áreas da ciência.

Dentro deste panorama altamente interdisciplinar propõe-se este trabalho, desenvolvido na interseção da teoria de *wavelets*, dos sistemas dinâmicos caóticos, da complexidade e do processamento de sinais.

Investiga-se o processamento de sinais na presença de falhas via técnicas *wavelet* buscando analisar as relações que podem ser estabelecidas entre os resultados da análise de *wavelets* quando aplica-se uma etapa de pré-processamento destes sinais com métodos numéricos de interpolação para a eliminação do conjunto de falhas existentes e quanto faz-se uso da técnica *wavelet* adaptativa, em que não há o pré-processamento numérico.

Também são apresentadas aplicações das Transformadas *Wavelet* Contínuas e Discretas na determinação de aproximações de diferentes dinâmicas presentes em sistemas com múltiplas escalas temporais cujas análises, também por técnicas *wavelet* simplificam a compreensão do sistema/fenômeno completo que são particularmente úteis na análise de dados experimentais uma vez que o uso de tais aplicações exige apenas o conhecimento de uma série temporal unidimensional relacionada com o sistema/fenômeno que se deseja investigar.

Contribuições Originais desta Tese

- a) Analisar as relações entre falhas existentes em séries temporais e os resultados da análise tempo-escala, estabelecendo, via estudo de caso, uma separação entre situações em que o pré-processamento numérico das falhas não altera os resultados da análise daquelas em que os resultados deixam de ser confiáveis devido a introdução de efeitos espúrios no conteúdo frequencial detectado de modo que o uso da técnica *wavelet* adaptativa apresenta-se como a ferramenta de análise.
- b) Propor uma metodologia, via Transformada *Wavelet* Contínua, para aproximar diferentes dinâmicas presentes em sistemas com múltiplas escalas de tempo, isolando-as e tornando possível, deste modo, a decomposição do sistema completo em sub-dinâmicas que são subjacentes à ele com o objetivo de simplificar a compreensão da dinâmica complexa apresentada pelo sistema.
- c) Apresentar uma metodologia, via combinação das Transformadas *Wavelet* Contínua e Discreta, para a detecção da sincronização entre as diferentes dinâmicas presentes em sistemas caóticos com múltiplas escalas de tempo uma vez que a sincronização de um comportamento dinâmico não implica obrigatoriamente na sincronização do outro.

Termina-se esta Introdução com a descrição da organização e estruturação desta tese em que se apresenta resumidamente o conteúdo presente em cada Capítulo e Apêndice presentes.

Organização do Trabalho

O trabalho encontra-se estruturado em duas partes. A primeira, constituída pelos Capítulos 2 , 3 e 4, apresenta-se toda a fundamentação teórica deste trabalho que é complementada pelos Apêndices A , B , C , D e F. A segunda parte apresenta os resultados do trabalho nos Capítulos 5 e 6 e é complementada pelo Apêndice E.

Uma breve descrição do conteúdo de cada Capítulo e Apêndice encontra-se listada a seguir.

- O Capítulo 2 apresenta formalmente as funções *wavelet* e a Transformada *Wavelet* Contínua em que se dá ênfase às *wavelets* de Morlet e de Morse, utilizadas neste trabalho e portanto, abordadas com maiores detalhes. Por

completude, o Apêndice A apresenta uma breve introdução aos domínios do tempo e da frequência cuja leitura é indicada como um pré-requisito ao apresentado no Capítulo.

- O Capítulo 3 apresenta a Transformada *Wavelet* Discreta e a análise multirresolução com ênfase na Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* utilizada como parte da fundamentação das aplicações apresentadas. Nos Apêndices B e D apresentam-se complementos teóricos a este Capítulo em que faz-se uma introdução ao conceito de convolução discreta e um breve estudo dos filtros e funções *wavelet* utilizadas na aplicação da Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree*, respectivamente.
- O Capítulo 4 dedica-se aos conceitos fundamentais da área de sistemas dinâmicos, caos, sincronização e sua detecção no sentido de travamento de fase. Faz-se também uma abordagem matemática dos sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo, explicitamente fazendo-se uso de elementos da Teoria das Perturbações Singulares tornando possível compreender como duas ou mais dinâmicas distintas podem manifestar-se simultaneamente em um mesmo sistema.
- O Capítulo 5 apresenta os resultados do estudo sobre a categorização das falhas e a adequação ou não do uso de métodos numéricos interpolatórios no tratamento destas com suas implicações nos resultados da análise tempo-escala considerando particularmente dados relacionados com a Geofísica Espacial
- O Capítulo 6 apresenta as metodologias propostas para a separação das dinâmicas em sistemas com múltiplas escalas e para a detecção da sincronização entre as diferentes dinâmicas seguida das aplicações destas em dados sintéticos e experimentais descritos no início do Capítulo. Os resultados obtidos indicam que os métodos são capazes de gerar aproximações para cada diferente comportamento dinâmico presente preservando a complexidade do sistema analisado e tornando, deste modo, possível a correta detecção ou não da sincronização via travamento de fase.
- O Capítulo 7 descreve as conclusões deste trabalho.

O Apêndice C descreve o método de construção dos filtros associados às funções *wavelet*, de acordo com Daubechies (1992) e apresenta o código *open source* para a geração de funções *wavelet* via *design* de filtros com propriedades desejadas e

utilizado também para a visualização das funções *wavelet* e escala associadas aos filtros criados. Seu uso é exemplificado de modo a demonstrar que se trata de um código de utilização altamente intuitiva, exigindo do usuário apenas um argumento de entrada.

O Apêndice E lista os eventos científicos e congressos dos quais o autor desta tese participou durante o doutorado e apresenta as publicações realizadas. O Apêndice F contém as demonstrações dos principais fundamentos teóricos descritos nos Capítulos 2 e 3.

No Anexo A encontram-se as autorizações expressas de reprodução nesta tese dos dois artigos completos publicados em periódicos internacionais editoriais respectivamente pelo *American Institute of Physics* e pela *Springer* além do trabalho completo e resumos publicados em alguns volumes da coleção *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* editoriado pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).

Parte I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2 TRANSFORMADAS *WAVELET* CONTÍNUAS

Este capítulo apresenta, dentro de uma perspectiva matemática, teórica e aplicada a transformada *wavelet* contínua (CWT, do inglês *Continuous Wavelet Transform*). As funções *wavelet* são definidas formalmente na Seção 2.1. As funções *wavelet* de Morlet e de Morse, utilizadas na obtenção dos resultados descritos no Capítulo 5, são definidas e apresentadas detalhadamente na Seção 2.2. Considerando as duas primeiras seções como uma breve introdução às *wavelets*, a Seção 2.3 apresenta a CWT e algumas de suas principais propriedades. A forma adaptativa desta transformada, desenvolvida especialmente para lidar com dados experimentais que apresentam falhas sendo também útil na análise de sinais não periódicos é apresentada na Seção 2.4.

Parte da notação usada ao longo deste trabalho é fixada neste capítulo e no Apêndice A em que se apresenta uma breve introdução aos domínios do tempo e da frequência, cujas definições são importantes para a compreensão deste trabalho. Os termos função, sinal ou série temporal são usados como equivalentes havendo preferência pelo uso do primeiro nos casos em que aspectos formais da teoria matemática são abordados e pelos demais quando há referência aos métodos e/ou técnicas utilizados em dados experimentais e nos resultados obtidos.

2.1 Funções *wavelet*

Nesta seção apresenta-se uma classe especial de funções f dentro do espaço das funções quadrado integráveis $L^2(\Omega)$ em que $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{C}$; trata-se das denominadas funções *wavelet*.

Em uma perspectiva geométrica as *wavelets* são caracterizadas por serem funções que exibem comportamento oscilatório em um subconjunto fechado e limitado K contido em seu domínio D anulando-se em qualquer ponto não pertencente a K . Deste modo, são funções bem localizadas no domínio do tempo e, conseqüentemente, também no domínio da frequência ainda que limitações existam e sejam conseqüências do Princípio da Incerteza de Heisenberg (FARGE, 1992) sendo o equivalente físico da pesquisa de Fourier que relaciona

A boa localização das *wavelets* no tempo as difere da base exponencial complexa da Transformada de Fourier e é exatamente esta diferença que as tornam úteis na análise de sinais de naturezas diversas (estacionários, não-estacionários, com ruídos, caóticos, etc.) sendo bastante ricas em aplicações.

O desenvolvimento teórico das funções *wavelet* é relativamente recente, tendo sido explorado principalmente a partir do início dos anos 1980 conectando ideias e conceitos já existentes de modo esparso na matemática pura, na matemática aplicada, na física, na engenharia e na computação científica (DAUBECHIES, 1996).

Definição 2.1. *Considere $\psi(t) \in L^2(\Omega)$ em que $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{C}$ não nula apenas em um compacto $K \subset \Omega$. Defina-se $\psi(t)$ como uma função wavelet se as duas condições a seguir são simultaneamente satisfeitas:*

$$\text{(I)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

$$\text{(II)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

A condição (I) estabelece que $\psi(t)$ tem média nula, propriedade conhecida como condição de admissibilidade.

Ela assegura a existência de comportamento oscilatório sobre o compacto K em que ela está definida e implica que $\hat{\psi}(0) = 0$, conforme o item (a) do Lema 2.1 abaixo.

Lema 2.1. *Seja $\psi(t) \in L^2(\Omega)$ uma função wavelet. Então, a condição (I) da Definição 2.1 é equivalente às duas seguintes condições:*

$$\text{(a)} \quad \hat{\psi}(0) = 0.$$

$$\text{(b)} \quad C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

O item (b) do Lema 2.1 tem relevância teórica uma vez que na Seção 2.3, quando apresentar-se a Transformada *Wavelet* Contínua, ver-se-á que a possibilidade de inversão para esta Transformada está diretamente relacionada com o conhecimento do valor numérico da constante de admissibilidade C_ψ , próprio para cada $\psi(t)$ considerada. Na prática, por simplicidade, basta verificar se a condição de média nula é satisfeita ao invés de considerar-se as duas condições dadas pelo Lema 2.1.

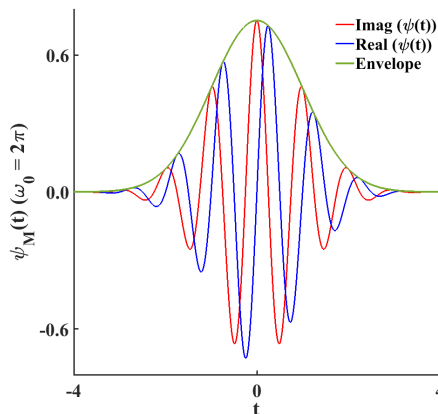
A condição (II), geralmente denominada condição de energia unitária, assegura que o comportamento oscilatório da função $\psi(t)$ tem localização temporal, decaindo e tendendo rapidamente a zero em K^C .

A Figura 2.1 apresenta uma das funções *wavelet* mais conhecidas. Trata-se de uma possível expressão para a *wavelet* complexa de Morlet $\psi_M(t)$:

$$\psi_M(t) = \frac{1}{\pi^{0,25}} \exp(i\omega_0 t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right), \quad (2.1)$$

em que ω_0 é um parâmetro adimensional e considerado, na Figura 2.1, igual a 2π .

Figura 2.1 - *Wavelet* complexa de Morlet e seu envelope gaussiano.



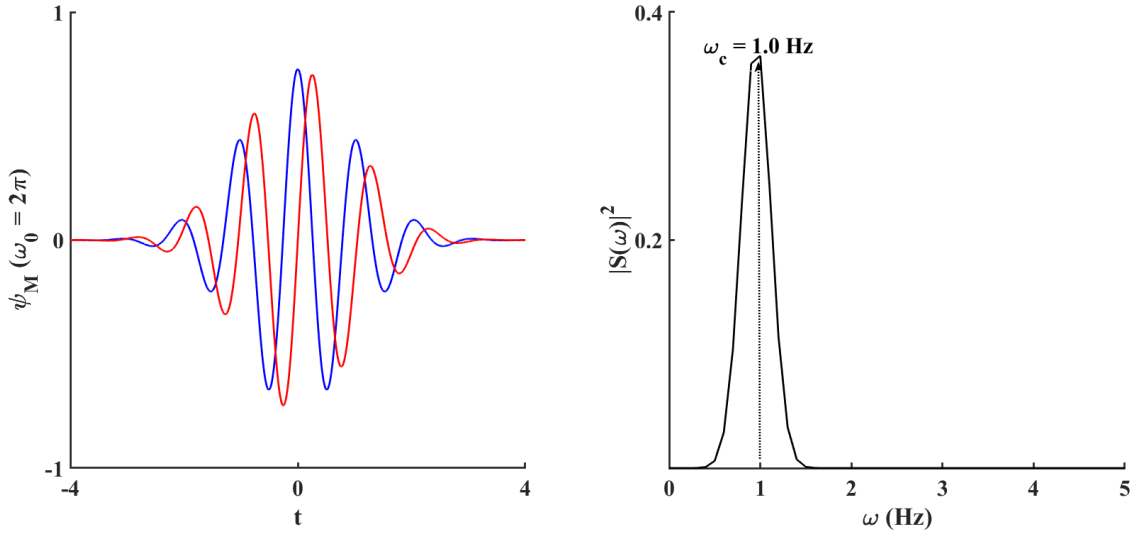
Fonte: Produção do autor.

Outras expressões para esta mesma função *wavelet* encontram-se compiladas na Tabela 2.2. A função $\psi_M(t)$ dada pela Equação 2.1 está plotada na Figura 2.1 em que suas partes real e imaginárias estão representadas, respectivamente, em azul e vermelho. Observe a existência de um deslocamento de fase angular igual a $\pi/2$ entre elas e que esta função é suportada no compacto $K = [-4, 4]$, aproximadamente.

Definição 2.2. *Seja $\psi(t)$ uma função wavelet definida em $L^2(\Omega)$. A frequência central ω_c de $\psi(t)$ é definida como sendo a frequência de sua ondulação mais preponderante e corresponde à frequência para a qual o espectro de Fourier, denotado $|\hat{\psi}(\omega)|^2$, apresenta máximo global.*

O cômputo da frequência central de $\psi(t)$ é feito aplicando-se a Transformada de Fourier e em seguida identificando a frequência para a qual o espectro de potência apresenta valor máximo. Como ilustração, considere a *wavelet* de Morlet como definida em 2.1 cujo espectro de potência $|S(\omega)|^2$ foi calculado usando a Transformada de Fourier. A Figura 2.2 ilustra a frequência central ω_c para $\psi_M(t)$ definida por 2.1.

Figura 2.2 - Frequência central ω_c para $\psi_M(t)$ definida por 2.1.



Fonte: Produção do autor.

Cada $\psi(t)$ define uma família de funções *wavelet* caracterizada por dois parâmetros reais. O primeiro deles é positivo e geralmente representado pela letra a sendo denominado parâmetro de escala e o segundo, representado pela letra τ é um parâmetro real de translação no tempo. O parâmetro de escala controla o comprimento do suporte compacto K em que a função $\psi(t)$ está definida e deste modo controla, geometricamente, dilatações e compressões da função $\psi(t)$ sobre a reta real.

Escreve-se $\psi_{a,\tau}(t)$ para se fazer referência à função $\psi(t)$ comprimida ou dilatada conforme se considera $0 < a < 1$ ou $a > 1$ respectivamente e transladada τ unidades no tempo para a esquerda ou direita conforme o sinal do parâmetro seja respectivamente negativo ou positivo.

Explicitamente, dados $a > 0$ e τ números reais, tem-se:

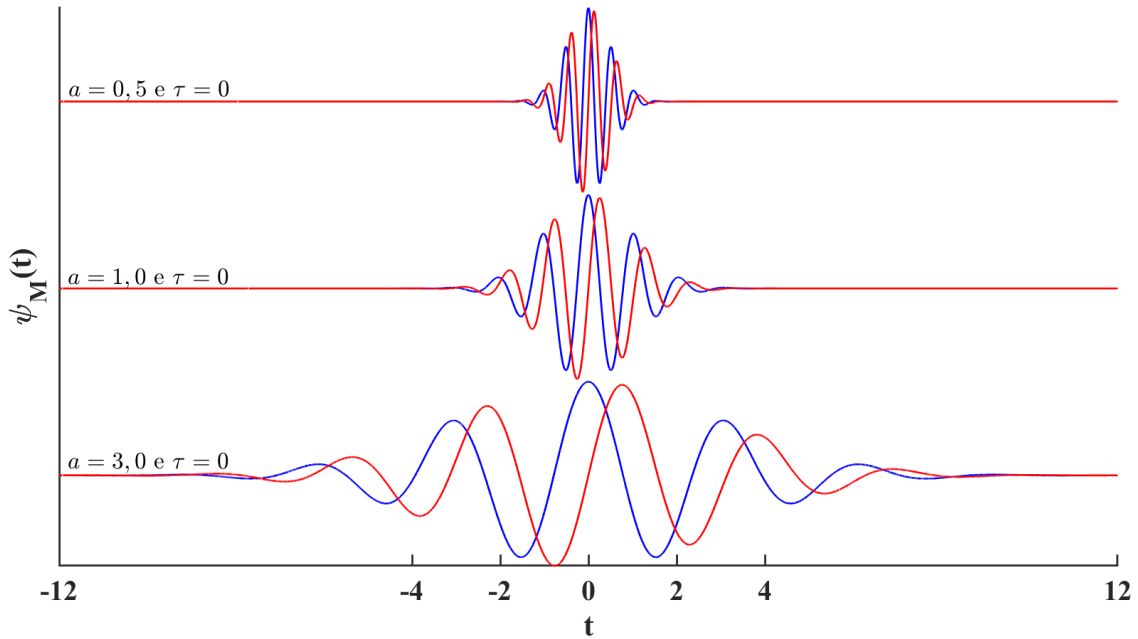
$$\psi_{a,\tau}(t) = \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \quad (2.2)$$

A variação contínua da dupla de parâmetros reais a e τ é suficiente para que $\psi_{a,\tau}(t)$ cubra a reta real com diferentes comprimentos para o suporte K . Na Figura 2.3 é possível visualizar geometricamente os efeitos do parâmetro a .

Na mesma proporção em que se varia o parâmetro de escala também ocorre a variação do comprimento do suporte K da função *wavelet*. Note que na Figura 2.3 os

parâmetros $a = 0,5$ e $a = 3,0$ são utilizados; isto implica que o comprimento do suporte K comprime-se pela metade no primeiro caso e triplica seu comprimento respectivamente.

Figura 2.3 - Efeitos da variação do parâmetro de escala em uma função *wavelet*. Deslocadas verticalmente para melhor visualização.



Fonte: Produção do autor.

O parâmetro de escala a é responsável pela emulação de pseudo-frequências ω_a que relacionam-se com a frequência central da *wavelet* $\psi(t)$ original pela equação (ABRY, 1997):

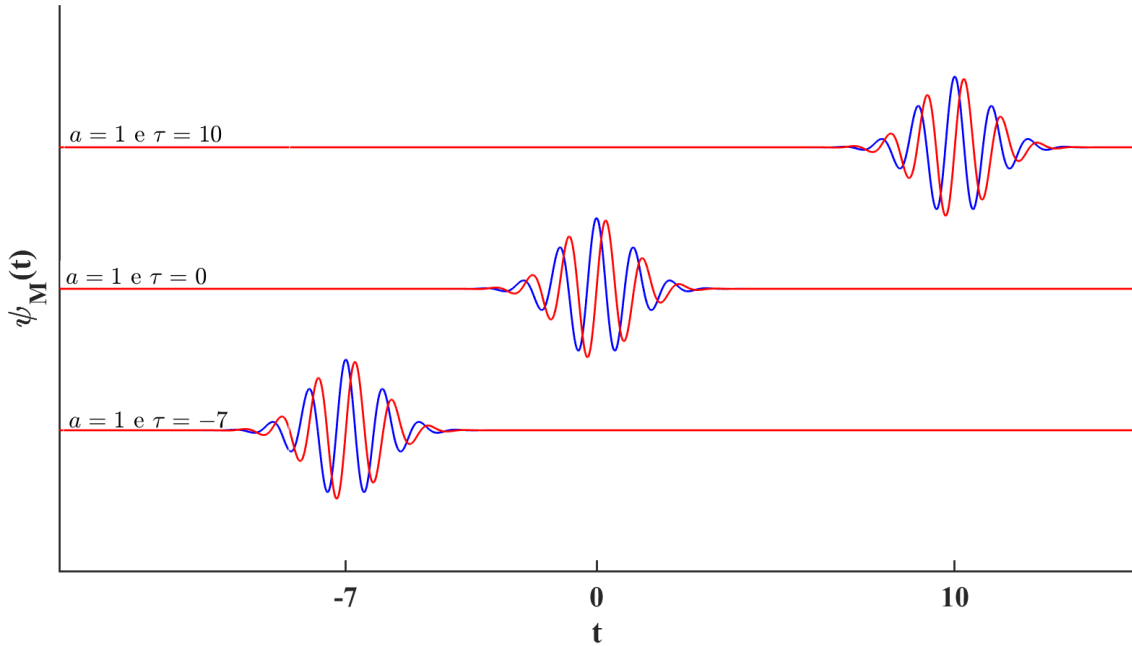
$$\omega_a = \frac{\omega_c}{a\Delta t}, \quad (2.3)$$

em que $\Delta(t)$ é o período de amostragem considerado.

A Figura 2.4 ilustra a ação da variação do parâmetro τ . Observa-se que ele apenas afeta a localização em tempo da função $\psi_M(t)$ deslocando-a à direita ou à esquerda conforme o sinal do parâmetro τ : sendo $\tau > 0$ ($\tau < 0$) ocorre uma translação de τ unidades à direita (esquerda).

Particularmente escolheu-se $\tau = 10$ ($\tau = -7$) e isto provocou a translação da função $\psi_M(t)$ em dez (sete) unidades à direita (esquerda).

Figura 2.4 - Efeitos da variação do parâmetro de translação em uma função *wavelet*, considerando a *wavelet* de Morlet.



Fonte: Produção do autor.

As funções *wavelet* também podem ser definidas diretamente no domínio da frequência. Como exemplo, podem ser citadas as de Meyer apresentadas no trabalho original (MEYER, 1987) além das *wavelets* de Morse (LILLY; OLHEDE, 2012; LILLY; OLHEDE, 2010; LILLY; OLHEDE, 2009; OLHEDE; WALDEN, 2002).

Na Seção 2.2 as *wavelets* de Morlet e Morse são apresentadas em detalhes pela relevância para este trabalho.

2.2 Wavelets de Morlet e Morse

Esta Seção apresenta, em detalhes, as *wavelets* de Morlet e de Morse devido a relevância delas nos resultados obtidos nesta pesquisa.

Enquanto $\psi_M(t)$ é definida no domínio do tempo, a *wavelet* de Morse se define diretamente em frequência com dependência de dois parâmetros reais γ e β que controlam seu comportamento oscilatório e sua localização frequencial respectivamente; para tornar explícita esta dependência a notação $\psi(\omega; \gamma, \beta)$ é utilizada.

A função *wavelet* de Morlet não é, estritamente falando, uma função *wavelet* pois ela não satisfaz a condição (I) da Definição 2.1; contudo, numericamente é possível

fazer com que ela satisfaça aproximadamente a condição de média nula escolhendo-se apropriadamente o valor do parâmetro adimensional ω_0 .

Tabela 2.1 - Admissibilidade numérica da *wavelet* de Morlet definida pela Equação 2.1.

Parâmetro Adimensional ω_0	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(\psi_M(t)) dt \right $	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \text{Imag}(\psi_M(t)) dt \right $	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(t) dt \right $	Numericamente Admissível
1,0	$1,14 \cdot 10^1$	0,00	$1,14 \cdot 10^1$	Não
2,0	$2,55 \cdot 10^{-1}$	0,00	$2,55 \cdot 10^{-1}$	Não
3,0	$2,08 \cdot 10^{-2}$	0,00	$2,08 \cdot 10^{-2}$	Não
π	$1,35 \cdot 10^{-2}$	0,00	$1,35 \cdot 10^{-2}$	Não
4,0	$6,76 \cdot 10^{-4}$	0,00	$6,76 \cdot 10^{-4}$	Não
5,0	$4,19 \cdot 10^{-5}$	0,00	$4,19 \cdot 10^{-5}$	Sim
6,0	$3,93 \cdot 10^{-5}$	0,00	$3,93 \cdot 10^{-5}$	Sim
2π	$3,75 \cdot 10^{-5}$	0,00	$3,75 \cdot 10^{-5}$	Sim
7,0	$3,54 \cdot 10^{-5}$	0,00	$3,54 \cdot 10^{-5}$	Sim
8,0	$6,23 \cdot 10^{-6}$	0,00	$6,23 \cdot 10^{-6}$	Sim

Fonte: Produção do Autor.

A Tabela 2.1 apresenta, utilizando arredondamento com duas casas decimais, os resultados da integração numérica da *wavelet* de Morlet para diferentes parâmetros adimensionais ω_0 . Escolheu-se integrar numericamente utilizando a regra do trapézio (BURDEN; FAIRES, 2008) uma vez que a integração algébrica de 2.1 não pode ser feita analiticamente em termos das funções elementares pela presença de uma função gaussiana em sua expressão.

Nota-se que a partir de $\omega_0 \geq 5$ já se é possível considerar, numericamente, a admissibilidade da Equação 2.1 como uma função *wavelet*. Vê-se ainda, com respeito à Tabela 2.1, que a parte imaginária de $\psi_M(t)$ satisfaz numericamente a condição de média nula para qualquer parâmetro ω_0 ; isto pode ser visualizado geometricamente na Figura 2.2 em que se pode observar que a parte imaginária é quase simétrica pelo eixo x , o que não ocorre com sua parte real.

A Equação 2.1 não é a única possível para esta função *wavelet* existindo outras difundidas pela literatura da área. Algumas destas expressões explicitam a frequência central ω_c , em Hertz, enquanto outras usam parâmetros adimensionais relacionados com ela; outras, são complexas enquanto algumas vezes se encontram referências

sobre uma *wavelet* de Morlet real; algumas apresentam constantes de normalização e ainda, outras introduzem termos adicionais para forçar a função $\psi_M(t)$ a satisfazer numericamente a condição **(I)** da Definição 2.1.

A Tabela 2.2 apresenta algumas destas expressões em que fez-se uso de um índice $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ na notação das diversas *wavelets* de Morlet de modo a diferenciá-las e também fazer referência sobre qual linha da Tabela 2.2 se está fazendo referência. A linha 1 indica a *wavelet* de Morlet definida em termos da frequência central $\omega_c = f_0$ com a presença de um parâmetro de correção (ADDISON, 2017).

A linha 2 indica outra expressão para Morlet em termos de um parâmetro adimensional ω_0 que satisfaz numericamente a definição de função *wavelet* desde que considerado maior ou igual a 5. Esta é a expressão dada na Equação 2.1 e considerada na Tabela 2.1 em que não há a presença de qualquer constante de normalização.

Tabela 2.2 - Diferentes expressões para a *wavelet* de Morlet.

Eq.	Expressão	Natureza	Parâmetros	$\frac{\omega_c}{\text{(Hertz)}}$	Referência
$\psi_{M_1}(t)$	$\frac{1}{\pi^{0,25}} \left(\exp(2\pi i f_0 t) - \exp\left(\frac{-2\pi f_0}{2}\right) \right) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$	Complexa	f_0	f_0	(ADDISON, 2017)
$\psi_{M_2}(t)$	$\exp(i \omega_0 t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$	Complexa	ω_0	$\frac{\omega_0}{2\pi}$	(FRICK et al., 1998)
$\psi_{M_3}(t)$	$C \exp\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right) \left(\exp(i \pi t) - \exp\left(\frac{-\pi^2 \sigma^2}{4}\right) \right)$	Complexa	$C ; \sigma$	2	(DAUBECHIES, 1992)
$\psi_{M_4}(t)$	$\exp\left(\left(-\frac{t^2}{T_j}\right)^2 \ln 2\right) \exp\left(\frac{2\pi i t}{T_j}\right)$	Complexa	T_j	1	(MORLET, 1983)
$\psi_{M_5}(t)$	$\frac{1}{\pi^{0,25}} \cos(\alpha t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$	Real	α	$\frac{2\pi}{\alpha}$	(TANG et al., 2010)

Fonte: Produção do Autor.

A terceira das linhas apresenta uma versão de Morlet dependendo de dois parâmetros; o primeiro deles, C , é uma constante de normalização e o segundo, σ está relacionado com a reprodução do comportamento de uma curva gaussiana em frequência (DAUBECHIES, 1992). A quarta das linhas apresenta a forma original da *wavelet* de Morlet (MORLET, 1983) em que não há nenhuma constante de normalização e T_j é um parâmetro relacionado com o período médio da função $\psi_{M_4}(t)$.

Diferente de todas as possíveis expressões para Morlet citadas acima, ainda pode-se considerá-la como uma *wavelet* real, como mostrado na quinta linha (TANG et al., 2010).

Ainda em referência à Tabela 2.2, definir-se-á a função $\psi_{M_2}(t)$ como a *wavelet* de Morlet considerada neste trabalho.

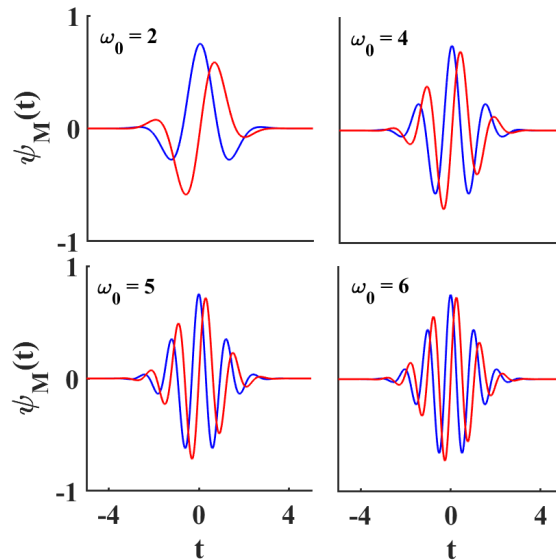
Definição 2.3. *Seja $\omega_0 > 5$ uma constante real adimensional. A wavelet de Morlet $\psi_M(t)$ é definida pela expressão*

$$\psi_M(t) = \exp(i\omega_0 t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \quad (2.4)$$

Nestas condições, por exemplo, considerando $\omega_0 = 6$ a frequência central de $\psi_M(t)$ será dada por

$$\omega_c = \frac{6}{2\pi} \approx 0,9549 \text{ Hz.}$$

Figura 2.5 - *Wavelets* de Morlet para diferentes parâmetros ω_0 .



Fonte: Produção do autor.

A Figura 2.5 ilustra a importância de se escolher $\omega_0 \geq 5$. Usando-se a Equação 2.4 considerou-se quatro possíveis valores para ω_0 (2, 4, 5 e 6) seguida da construção das respectivas *wavelets* para cada escolha de ω_0 .

Os resultados do cálculo da área sob as partes real e imaginária indicam que: (a) as partes imaginárias, plotadas em vermelho, possuem área cuja grandeza está na ordem de 10^{-16} , sendo portanto, numericamente nulas e (b) as partes reais, plotadas em azul, possuem áreas cujas grandezas são significativas com exceção dos casos em que $\omega_0 = 5$ e $\omega_0 = 6$ já possuem ordem de grandeza iguais a 10^{-5} , resultados bastante próximos de zero como exigido em **(I)** da Definição 2.1 e em concordância com o apresentado na Tabela 2.1.

Definição 2.4. *Seja $f \in L^2(\mathbb{C})$ uma função quadrado integrável e contínua. Defina-se f como uma função analítica se e somente se seu conteúdo frequencial é nulo, ou seja, $\hat{f}(\omega) = 0$ para $\omega < 0$.*

Vê-se da Definição 2.4 que apenas funções complexas podem ser analíticas. A *wavelet* de Morlet é aproximadamente analítica de modo que seu espectro de potência $|S(\omega)|^2$ apresenta pequenas magnitudes em frequências negativas e que na prática são desconsideradas.

As *wavelets* de Morse, diferentemente das de Morlet, não se definem no tempo e são analíticas. São funções definidas diretamente no domínio da frequência. No restante desta seção elas são apresentadas.

Definição 2.5. *Sejam γ e β parâmetros reais positivos e ω uma variável em frequência. A *wavelet* de Morse $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ é definida por*

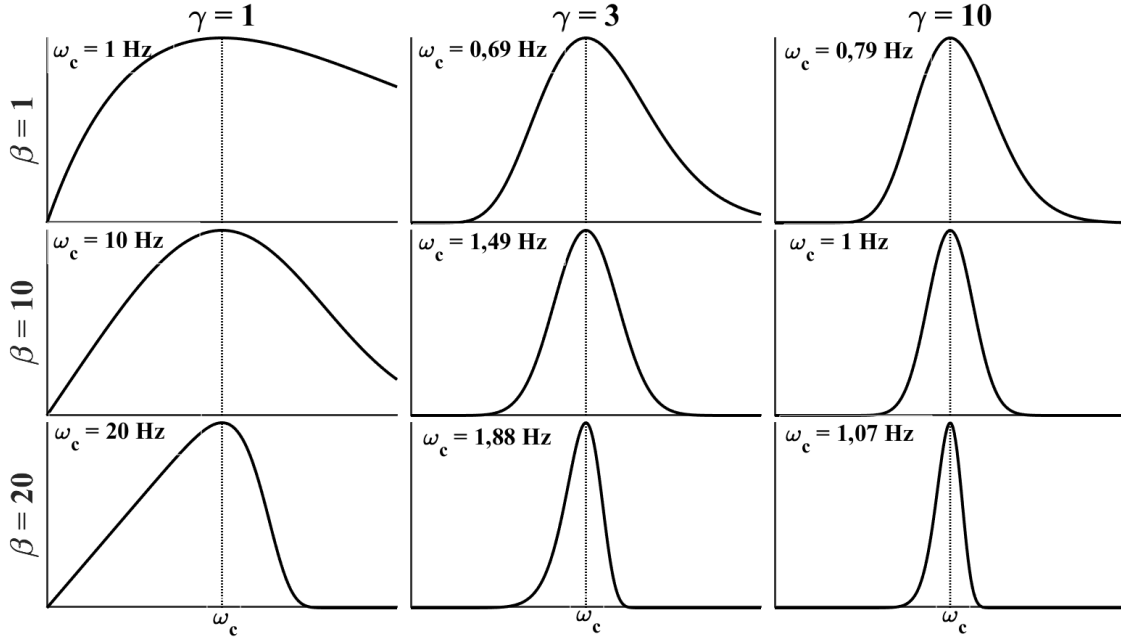
$$\psi(\omega; \beta, \gamma) = \kappa U(\omega) \omega^\beta \exp(-\omega^\gamma), \quad (2.5)$$

em que $U(\omega)$ é a função generalizada degrau de Heaviside e $\kappa = 2(\gamma\beta)^{\beta\gamma}$ é uma constante de normalização.

O parâmetro real γ controla o número de oscilações da onda no domínio do tempo e o parâmetro β é responsável pela localização em frequência, de modo que quanto maior seu valor numérico, mais bem localizada em frequência é a correspondente $\psi(\omega; \beta, \gamma)$, ou seja, maior é o suporte compacto da onda no tempo (LILLY; OLHEDE, 2012). A Figura 2.6 apresenta a resposta em frequência para algumas possíveis escolhas dos parâmetros β e γ .

Para β suficiente grande, a escolha de $\gamma = 3$ implica em ser a correspondente *wavelet* de Morse um filtro passa-banda cujas simetria e concentração em tempo-frequência são as melhores possíveis, além de possuir todas as boas propriedades de uma função gaussiana como, por exemplo, a simetria em frequência.

Figura 2.6 - *Wavelets* de Morse para $\gamma \in \{1, 3, 10\}$ e $\beta \in \{1, 10, 20\}$ deslocadas e redimensionadas para que as respectivas frequências centrais ω_c sejam alinhadas por coluna. Figura gerada com o *toolbox* (LILLY, 2019).



Fonte: Produção do autor.

A aparente assimetria para $\gamma = 3$ quando se considera $\beta = 20$ na Figura 2.6 é efeito do reescalonamento dos picos de frequência para que os mesmos apresentem alinhamento vertical. Este é, exatamente, a combinação de parâmetros γ e β que garante a perfeita simetria da função *wavelet* de Morse (LILLY; OLHEDE, 2009).

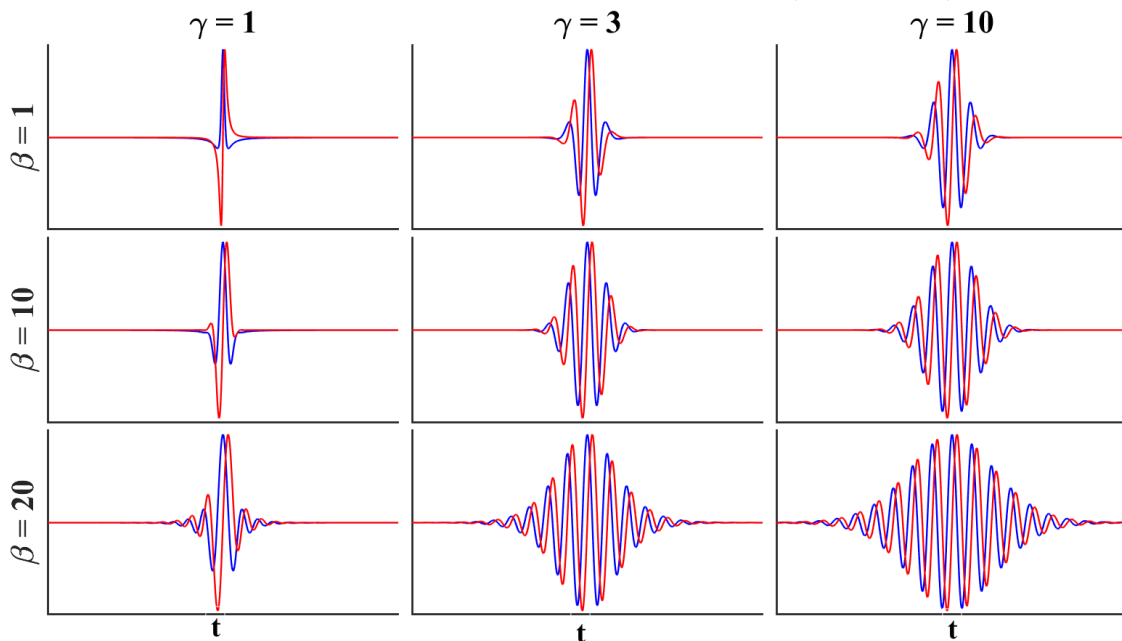
A frequência central para as *wavelets* de Morse é em cada caso, função dos parâmetros não-dimensionais γ e β . O Teorema 2.1 enuncia este fato.

Teorema 2.1. *Seja $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ a wavelet de Morse com parâmetros reais positivos γ e β . A frequência central $\omega_{\beta, \gamma}$ de $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ depende explicitamente destes parâmetros e*

$$\omega_{\beta, \gamma} = \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{1/\gamma}. \quad (2.6)$$

A Figura 2.7 apresenta as *wavelets* de Morse da Figura 2.6 em tempo em que partes real e imaginária são plotadas em azul e vermelho. As *wavelets* estão reescaladas de modo que, fixados os parâmetros adimensionais β e γ , é possível ver a relação entre eles e o suporte $P_{\beta, \gamma} = \sqrt{\beta\gamma}$ da respectiva onda; fixado γ , se o parâmetro β aumenta, o mesmo ocorre com $P_{\beta, \gamma}$ (LILLY; OLHEDE, 2012; LILLY; OLHEDE, 2010).

Figura 2.7 - *Wavelets* de Morse para $\gamma \in \{1, 3, 10\}$ e $\beta \in \{1, 10, 20\}$ no domínio do tempo centradas em $t = 0$. Figura gerada com o *toolbox* (LILLY, 2019).



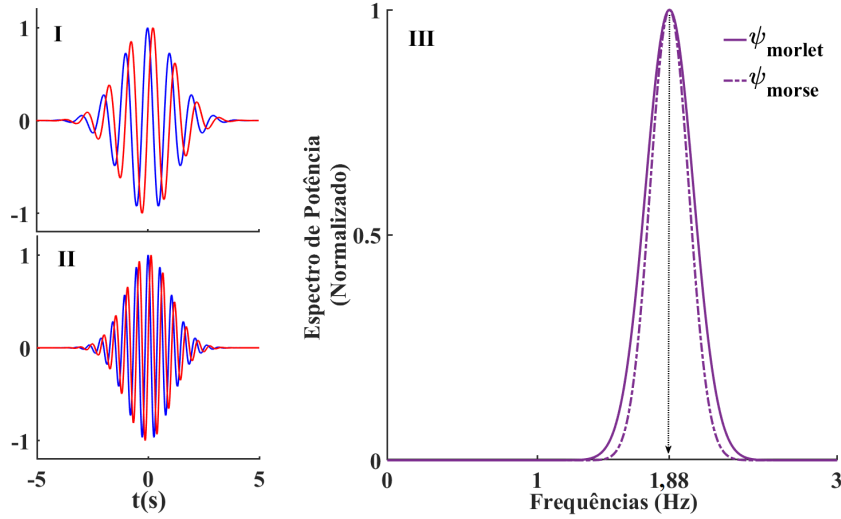
Fonte: Produção do autor.

A família das *wavelets* de Morse constitui uma classe de funções perfeitamente analíticas (OLHEDE; WALDEN, 2002; LILLY; OLHEDE, 2009) no sentido de que seu uso para a análise tempo-escala, a ser definida e apresentada na Seção 2.1 deste capítulo, torna nula o resultado da respectiva análise para o conjunto de frequências negativas. Esta propriedade é importante porque evita a detecção espúria de frequências negativas que podem influenciar os resultados da análise realizada.

Dada a relevância da *wavelet* de Morse com $\gamma = 3$ e $\beta = 20$ na obtenção de resultados descritos no Capítulo 6, apresenta-se para finalizar esta Seção, uma breve comparação entre ela e a *wavelet* de Morlet no caso em que apresentam o mesmo pico de frequência: $\omega_{20,3} = 1,88$ Hz, conforme a Equação 2.6.

A Figura 2.8 exibe estas duas *wavelets* no domínio do tempo em I e II. Eas estão normalizadas quanto às amplitudes para melhor comparação entre elas no tempo. Em III é possível ver os respectivos espectros de Fourier, também normalizados. Ainda que as frequências centrais sejam as mesmas, a *wavelet* de Morse apresenta, uma largura de banda em frequência mais estreita e esta característica a torna mais eficaz na análise de sinais altamente oscilatórios com a desejável analiticidade conforme discutido previamente.

Figura 2.8 - *Wavelets* de Morse com $\gamma = 3$ e $\beta = 20$ (I) e de Morlet com frequência central 1,88 Hz (II) no domínio do tempo e os respectivos espectros de potência (III).



Fonte: Produção do autor.

2.3 Transformada *wavelet* contínua

Nesta seção apresenta-se a transformada *wavelet* contínua. Trata-se de uma transformada capaz de revelar o conteúdo frequencial presente em um sinal f e os instantes de tempo em que mudanças neste conteúdo ocorrem, o que a difere substancialmente da transformada de Fourier apresentada no Apêndice A sendo, portanto, uma ferramenta útil na análise de sinais não-estacionários.

Definição 2.6. *Considere fixada uma família de funções wavelet $\psi_{a,\tau}(t)$ qualquer e seja f uma função real ou complexa, ambas em $L^2(\Omega)$. A transformada wavelet contínua de f com relação à $\psi_{a,\tau}$ e normalização em $L^2(\Omega)$ é definida por*

$$\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\psi}_{a,\tau}(t) dt, \quad (2.7)$$

em que $\bar{\psi}_{a,\tau}(t)$ indica o complexo conjugado da função $\psi_{a,\tau}(t)$ e $1/\sqrt{a}$ é uma constante de normalização.

Caso se considere a CWT em $L^1(\Omega)$ deve-se normalizar a Equação 2.7 com o fator $1/a$ ao invés de utilizar-se o fator $1/\sqrt{a}$. Tais normalizações garantem a isometria entre as diferentes representações de uma função. Os números $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ são denominados coeficientes *wavelet* e revelam as similaridades e/ou diferenças entre as funções $\psi_{a,\tau}(t)$ e f sendo, portanto, capazes de revelar as variações em frequência e as estruturas locais no domínio do tempo presentes em f (MALLAT, 1999).

Quanto maiores (menores) em magnitude os números $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$, maior (menor) será a similaridade entre $\psi_{a,\tau}(t)$ e f de modo que nas vizinhanças dos instantes de tempo em que ocorrem mudanças bruscas de comportamento temporal como descontinuidades em f maiores serão os números $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$, por exemplo.

Como discutido na Seção 2.1, a notação $\psi_{a,\tau}(t)$ indica que a função $\psi(t)$ está dilatada/contraída e translada pela variação contínua dos parâmetros de escala a e τ de modo que os valores $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ são normalmente alocados em uma matriz $a \times n$ onde a indica o número de escalas utilizadas e n o comprimento de f . É comum designar essa matriz pela mesma notação que a usada na definição da CWT, de modo que, $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ representa a matriz dos coeficientes resultantes da aplicação da CWT ao sinal f usando a função $\psi(t)$ como função analisadora.

Ainda que a variação seja contínua, o parâmetro de escala não pode ser escolhido tão grande quanto se queira uma vez que, como este parâmetro controla o comprimento do suporte compacto K da função $\psi(t)$, o comportamento oscilatório responsável por emular as pseudo-frequências pode ser perdido.

Em Torrence e Compo (1998) apresenta-se uma metodologia para se encontrar o maior elemento para o conjunto A dos parâmetros de escala a ser considerado sem que se destrua o comportamento oscilatório de $\psi(t)$ e que depende, essencialmente do comprimento n e do período de amostragem Δt do sinal f analisado.

De maneira mais detalhada, seja δj um número suficientemente pequeno (no citado trabalho os autores consideram $\delta j = 0,125$) e seja $a_0 = 2 \Delta t$ o menor valor para o parâmetro de escala a ser utilizado na análise. Nestas condições, a maior escala a ser utilizada, denotada por $\max(A)$ é dada por

$$\max(A) = \frac{1}{\delta j} \log_2 \left(\frac{n \Delta t}{a_0} \right), \quad (2.8)$$

sendo $a_j = s_0 2^{j \delta j}$ para $j = 0, 1, 2, 3, \dots, j$ é a discretização a ser utilizada.

Proposição 2.1. *Considere f e g funções de $L^2(\Omega)$ contínuas por partes, cujas CWT sejam respectivamente $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ e $\mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)$ em que $\psi(t) \in L^2(\Omega)$ é uma função wavelet e sejam α e β constantes quaisquer. Então:*

- a) (Linearidade) $\mathbb{W}_{\alpha f + \beta g}^\psi(a, \tau) = \alpha \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) + \beta \mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)$.
- b) (Redundância) A CWT é redundante, o que é desejável para a realização de uma análise exploratória do conteúdo frequencial de uma função f .

- c) (*Produto Interno*) A CWT de uma função f qualquer com uma wavelet analisadora $\psi(t)$ é o produto interno usual em $L^2(\Omega)$ entre elas, ou seja, $W_f^\psi(a, \tau) = \langle f, \psi_{a,\tau}(t) \rangle$.
- d) (*Convolução*) A CWT de uma função f qualquer com uma wavelet analisadora dilatada/contraída e transladada no tempo $\psi_{a,\tau}(t)$ é a convolução entre f e $\psi_{a,\tau}(t)$, conforme Definição A.3.

O item **d)** da Proposição 2.1 merece atenção pois, via Teorema A.1, permite definir a CWT diretamente no domínio da frequência (SADOWSKY, 1994):

$$\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \exp(-i\omega\tau) d\omega, \quad (2.9)$$

em que, conforme notação adotada neste texto, $\hat{f}(\omega)$ e $\overline{\hat{\psi}(\omega)}$ indicam a transformada de Fourier da função f e o conjugado da transformada de Fourier da wavelet $\psi(t)$, respectivamente. A CWT, quando implementada de acordo com a Equação 2.9 tem complexidade $n \log n$ enquanto a implementação por 2.7 apresenta complexidade da ordem de n^2 operações em que n é o comprimento de f (YI et al., 2018).

A CWT também possui inversa tal qual a transformada de Fourier. No Teorema 2.2 provar-se-á tal fato; para tanto, o Lema 2.2 será necessário e como Corolário dele obter-se-á a fórmula da inversa da CWT.

Lema 2.2. *Sejam f e g elementos de $L^2(\Omega)$ contínuas e $\langle f, g \rangle$ o produto interno usual em $L^2(\Omega)$. Considere ainda a função $\psi(t)$ cuja constante de admissibilidade é C_ψ e as respectivas transformadas wavelet contínuas $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ e $\mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)$ das funções f e g . Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \overline{\mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)} \frac{da}{a^2} d\tau = C_\psi \langle f, g \rangle, \quad (2.10)$$

em que $\overline{\mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)}$ indica o complexo conjugado de $\mathbb{W}_g^\psi(a, \tau)$.

Observação: Ao final da demonstração do Lema 2.2 argumenta-se que

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(\omega a)|^2}{a} da, \quad (2.11)$$

representa a condição de admissibilidade da função wavelet $\psi(t)$ em uma aparente contradição com o enunciado no Lema 2.1.

Para ver que se tratam de formas equivalentes, considere uma mudança de variáveis: seja $\xi = \omega a$ e portanto $\omega da = d\xi$. Fazendo estas substituições em 2.11 nota-se que

$$C_\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi. \quad (2.12)$$

Com o resultado estabelecido pelo Lema 2.2 demonstra-se facilmente que a CWT tem inversa ICWT (do inglês, *inverse continuous wavelet transform*). A equação que a define é denominada identidade de resolução.

Teorema 2.2. *Seja $f \in L^2(\Omega)$ contínua por partes cuja transformada wavelet contínua $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ é feita usando-se a wavelet $\psi(t)$ cuja constante de admissibilidade é C_ψ . Então, é possível realizar a inversa da transformada aplicando-se a identidade de resolução definida por*

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \psi_{a,\tau}(t) d\tau \frac{da}{a^2}. \quad (2.13)$$

A aplicação da CWT perfoma o que se denomina análise tempo-escala da função f uma vez que $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ é uma representação de f em função dos parâmetros de escala e de translação no tempo. Define-se, como uma ferramenta importante para a análise de f neste contexto, o escalograma de energia $\mathbb{E}(a, \tau)$, no sentido físico, conforme discutido previamente no Apêndice A.

Definição 2.7. *Seja $\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)$ os coeficientes wavelet resultantes da aplicação da transformada wavelet contínua na função f com a wavelet $\psi(t)$. Define-se o escalograma $\mathbb{E}(a, \tau)$ de energia da função f como o valor absoluto do quadrado dos coeficientes wavelet:*

$$\mathbb{E}(a, \tau) = |\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)|^2. \quad (2.14)$$

O escalograma apresenta uma medida local da energia presente em f nas diferentes escalas consideradas durante a aplicação da CWT. O Lema 2.1 tem ainda uma consequência importante relativa à conservação da energia no mesmo sentido do Corolário A.1 que estabelece a isometria entre os domínios do tempo e da frequência.

Novamente a constante de admissibilidade C_ψ mostra-se teoricamente relevante ao aparecer como uma constante de proporcionalidade no contexto da preservação de energia entre a informação no domínio do tempo e sua representação no plano tempo-escala (MALLAT, 1999).

Teorema 2.3. *Seja $f \in L^2(\Omega)$ contínua por partes e seja $\mathbb{E}(a, \tau)$ seu correspondente escalograma de energia obtido pela aplicação da CWT com uma função wavelet $\psi(t)$. Então,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(a, \tau) d\tau \frac{da}{a^2}. \quad (2.15)$$

Além do escalograma de energia $\mathbb{E}(a, \tau)$ também se define, como importante ferramenta de interpretação da análise tempo-escala, o espectro global *wavelet* $\mathbb{G}(a)$ que indica as escalas cujas contribuições em energia ou em amplitude, conforme se considera respectivamente as normalizações em $L^2(\Omega)$ ou $L^1(\Omega)$, são as mais significativas. Dada a relação direta entre o conjunto de escalas e o conteúdo frequencial de f , vê-se, portanto, que o espectro global indica as frequências fundamentais presentes no sinal, tal qual realizado pela transformada de Fourier.

Definição 2.8. *Seja $f \in L^2(\Omega)$ uma função contínua por partes cujo escalograma de energia $\mathbb{E}(a, \tau)$ é obtido pela aplicação da CWT em f usando uma fixada função $\psi(t)$. O espectro global *wavelet* define-se por*

$$\mathbb{G}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}_f^\psi(a, \tau)| d\tau, \quad (2.16)$$

cuja análise revela as escalas cuja contribuição, em energia ou em amplitude, são as mais significativas para a f analisada.

A vantagem do uso da CWT na análise de uma função f não estacionária é que ela é capaz de revelar os instantes de tempo em que o conjunto de frequências fundamental de f aparecem, desaparecem, alternam-se ou existem simultaneamente. A título de ilustração desta afirmação, os resultados da análise tempo-escala para os dois exemplos analisados no Apêndice A onde mostra-se que as funções

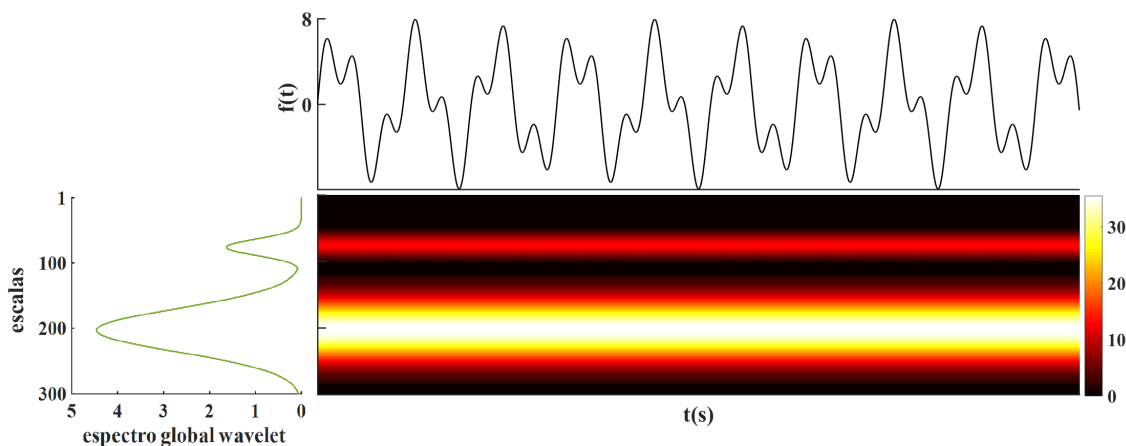
$$f = 5 \text{ sen}(300\pi t) + 3 \text{ sen}(800\pi t)$$

e

$$g = \begin{cases} 5 \text{ sen}(300\pi t), & 0 \leq t < \pi \\ 3 \text{ sen}(800\pi t), & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

apesar de distintas no domínio do tempo possuem a mesma representação no domínio da frequência são apresentados nas Figuras 2.9 e 2.10. Utiliza-se a *wavelet* de Morlet com $\omega_0 = 6.0$ no cômputo da CWT.

Figura 2.9 - Análise tempo-escala para f usando a *wavelet* de Morlet com $\omega_0 = 6$.



Fonte: Produção do autor.

Observe que para a função f , cujo conteúdo frequencial é estacionário, é possível ler no escalograma de energia duas sub-bandas de frequência constantes ao longo do tempo sendo que a centrada na mais alta escala e portanto, em mais baixa frequência apresenta energia (contribuição) maior, conforme leitura da respectiva palheta de cores (neste exemplo, a palheta *hot* foi usada); isto está de acordo com a natureza da função f cuja frequência mais baixa, 150 Hz, é de maior contribuição em sua constituição. O espectro global wavelet $\mathbb{G}(a)$ indica que as duas sub-bandas de frequência estão centradas nas escalas $a_1 = 72$ e $a_2 = 202$.

Neste exemplo específico, uma vez que usou-se como *wavelet* analisadora a Morlet com $\omega_0 = 6$ e portanto de frequência central $\omega_c = 0,9549$ Hz com 600 octaves (subdivisões) no conjunto de escalas $]0, 300]$ os picos no espectro global em a_1 e a_2 correspondem às pseudo-frequências de 149,7 Hz e 423,1 Hz calculadas por [Abry \(1997\)](#)

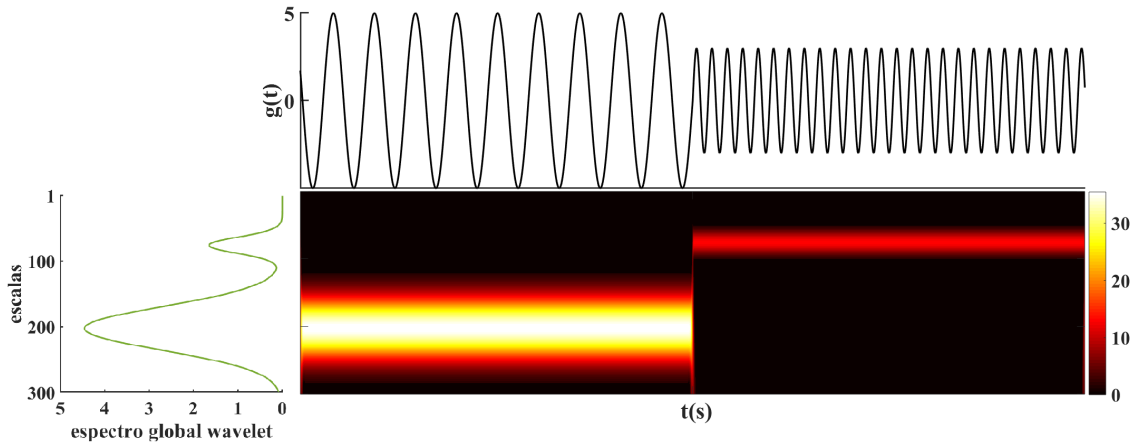
$$\omega_a = \frac{\omega_c}{a\Delta t}, \quad (2.17)$$

em que Δt representa o período de amostragem do conjunto de escalas.

Não se deve ler os resultados acima como falta de capacidade da CWT em se detectar precisamente as frequências fundamentais de uma função f . Isso se deve à discretização grosseira utilizada para o conjunto de escalas selecionadas de modo que, quanto mais *octaves* para o conjunto de escalas se utilizam, mais precisa é a detecção das frequências fundamentais além de efeito da redundância da CWT que detecta sub-bandas de frequência cuja energia é significativa.

A Figura 2.10 exibe a análise tempo-escala realizada para g não-estacionária em termos de conteúdo frequencial, do mesmo modo como feito para a função f .

Figura 2.10 - Análise tempo-escala para g usando a *wavelet* de Morlet com $\omega_0 = 6$.



Fonte: Produção do autor.

O escalograma indica exatamente o instante $t = \pi$ em que ocorre a alternância das frequências fundamentais e as mesmas observações feitas acerca do espectro global *wavelet* para f aqui se aplicam.

É esta capacidade de localizar temporalmente as frequências e estruturas fundamentais que tornam a CWT extremamente útil na análise exploratória de dados experimentais para os quais pouca ou nenhuma informação em termos de frequências fundamentais é conhecida.

A CWT depende fundamentalmente da função *wavelet* analisadora atuando como um microscópio matemático cuja resolução de visualização é ajustada pela função $\psi(t)$ usada (KUMAR; FOUFOULA-GEORGIU, 1997) e a escolha de uma específica para se realizar a análise tempo-escala está diretamente relacionada com o que se busca detectar na função analisada: possíveis discontinuidades, conjunto de frequências fundamentais ou detecção de estruturas no escalograma de energia, por exemplo. Uma discussão acerca da escolha da função $\psi(t)$ analisadora é feita em Domingues et al. (2016).

Conclui-se esta Seção com algumas observações sobre a construção dos escalogramas: primeiro, a escolha da palheta de cores usada deve ser feita considerando o que se pretende destacar e possíveis distorções na percepção de cores pelo olho humano;

segundo, os escalogramas podem ser normalizados e visualizados em eixos cuja escala pode ser logarítmica, por exemplo. Pode-se ainda, identificar nos escalogramas as correspondentes pseudo-frequências ao invés das escalas, como feito em grande parte deste trabalho.

Assim, tanto a construção de um escalograma quanto sua leitura exige atenção pois enquanto sua construção deve ser feita de modo cuidadoso visando facilitar sua leitura e destacar o que se deseja, todas as demais diversas características citadas anteriormente devem ser facilmente identificadas e consideradas no processo de leitura e interpretação dos resultados.

2.4 Transformada *wavelet* contínua adaptativa

Esta seção tem por objetivo apresentar a CWT em sua forma adaptativa, desenvolvida especialmente para o tratamento de sinais f que apresentam falhas em seu registros.

A Transformada *Wavelet* Contínua apresentada na Seção 2.3 e a correspondente análise tempo-escala de uma função f pressupõe que esta não apresente irregularidade em sua distribuição temporal, ou seja, que f não apresente qualquer tipo de falha uma vez que a irregularidade temporal implica na perda da condição de admissibilidade para a função *wavelet* $\psi(t)$ analisadora (FRICK et al., 1997; FRICK et al., 1998).

Em situações experimentais, contudo, esta não é uma premissa sempre verdadeira: sinais f reais e/ou experimentais podem ter seus registros comprometidos por condições de naturezas bem diversas; por exemplo, falhas podem ser causadas por problemas técnicos nos equipamentos utilizados na captação dos dados ou por limitações causadas momentaneamente ao longo de uma observação por fatores naturais.

Um possível caminho diante de dados experimentais com falha é o tratamento numérico destes com métodos interpolatórios nas regiões de falha de modo a eliminá-las mas cuja aplicação podem implicar na introdução de frequências espúrias na análise tempo-escala comprometendo sua confiabilidade.

Algoritmos, conhecidos como Lomb-Scargle periodogramas, baseados na correção da base periódica exponencial complexa da transformada de Fourier existem (SCARGLE, 1982; LOMB, 1976) para a correta detecção e caracterização de periodicidades em dados irregularmente amostrados (VANDERPLAS, 2018).

Em VanderPlas (2018) são apresentados estes algoritmos e os explica em detalhes, mostrando como a correção numérica na base exponencial complexa combinada com (a) a propriedade da invariância da Transformada de Fourier por deslocamentos em tempo e em frequência e (b) a média do sinal f são aplicadas. Tais algoritmos não fazem uso de interpolações ou a aplicação de métodos numéricos para o tratamento dos sinais com falhas evitando, deste modo, a introdução de frequências espúrias.

Contudo, estes algoritmos não são a ferramenta adequada para a análise da existência de processos multiescala em f e nem suprimem a presença de ruídos e/ou vazamentos de conteúdo espectral (FRICK et al., 1997).

Baseado na ideia de correção numérica na base exponencial complexa da transformada de Fourier propõem-se uma forma adaptativa da transformada *wavelet* contínua, pela primeira vez em 1997, desenvolvida para a análise de sinais relativos a variações cromosféricas em estrelas (FRICK et al., 1997) cuja ideia principal é a de, ao introduzir uma correção numérica na função *wavelet* analisadora usada, restaurar numericamente a condição de admissibilidade perdida nos intervalos de tempo em que as falhas estão presentes.

Em trabalho posterior a fundamentação matemática para as *wavelets* adaptativas, usadas como funções base analisadoras para a transformada *wavelet* contínua adaptativa é apresentada (FRICK et al., 1998).

No restante desta Seção, descreve-se do ponto de vista matemático esta transformada baseando-se nos dois trabalhos de Peter Frick e seus colaboradores citados nos dois últimos parágrafos.

Para tanto, considera-se um sinal f com falhas e uma função auxiliar $a(t)$ definida da seguinte forma:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } f \text{ não apresenta falha na posição } t, \\ 0, & \text{se } f \text{ apresenta falha na posição } t, \end{cases} \quad (2.18)$$

responsável por transferir a falha existente no sinal f no instante de tempo $t = \tau$ para a *wavelet* $\psi(t)$ no mesmo instante de tempo $t = \tau$ através do produto da função auxiliar $a(t)$ com $\psi(t)$.

Definição 2.9. *Seja f um sinal de comprimento n com falhas nos instantes de tempo $t = \tau_i$, para $i = 1, 2, 3, \dots, j$, $j < n$, e seja $a(t)$ a função auxiliar definida pela Equação 2.18. Define-se a gapped wavelet $\tilde{\psi}(\tau, t, a)$ pelo produto*

$$\tilde{\psi}_{a,\tau}(t) = a(t)\psi_{a,\tau}(t). \quad (2.19)$$

Formalmente, a Equação 2.19 não define uma função *wavelet* porque ela não satisfaz à condição de admissibilidade uma vez que seu comportamento oscilatório e de média nula deixa de existir devido ao produto com a função de transferência $a(t)$. Entretanto, introduz-se, para efeitos de análise tempo-escala um parâmetro de correção numérico $C(a, \tau)$ calculado para cada escala a e cada instante de tempo τ que restaura numericamente a condição de média nula.

Para o cômputo de $C(a, \tau)$ é necessária a decomposição da função *wavelet* $\psi(t)$ de modo a isolar a função responsável por sua parte oscilatória onde deseja-se fazer a correção numérica. Em termos matemáticos, para cada escala a e translação τ no tempo, deve-se ter

$$\psi_{a,\tau}(t) = \zeta_{a,\tau}(t)h_{a,\tau}(t), \quad (2.20)$$

em que $\zeta_{a,\tau}(t) > 0$ é uma função envoltória (envelope) de $\psi_{a,\tau}(t)$, isto é, $|\psi_{a,\tau}(t)| \leq \zeta_{a,\tau}(t)$ para todo t no suporte K e $h_{a,\tau}(t)$ é uma função responsável pela parte oscilatória da *wavelet* $\psi_{a,\tau}(t)$.

A decomposição de acordo com a Equação 2.20, para a *wavelet* de Morlet definida pela Equação 2.4, é imediata. Basta considerar

$$\zeta_{a,\tau}(t) = \exp\left(\frac{-\left(\frac{t-\tau}{a}\right)^2}{2}\right) \quad (2.21)$$

e

$$h_{a,\tau}(t) = \exp\left(i\omega_0\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right), \quad (2.22)$$

respectivamente.

Deste modo, no restante desta seção ela será considerada em conjunto com as funções ζ e g no cômputo do parâmetro de correção $C(a, \tau)$ de acordo com o exposto na Proposição 2.2.

Proposição 2.2. *Seja $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$ a wavelet adaptativa de Morlet cuja condição de admissibilidade não é satisfeita e considere $\phi_{a,\tau}(t)$ e $\zeta_{a,\tau}(t)$ seu envelope e sua parte oscilatória conforme definidas pelas Equações 2.21 e 2.22. O parâmetro de correção $C(a, \tau)$ para cada escala a e instante de tempo τ é definido por*

$$C(a, \tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{a,\tau}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{a,\tau}(t) dt}. \quad (2.23)$$

Como $|\psi_{a,\tau}(t)| \leq \zeta_{a,\tau}(t)$ para todo t , decorre da Equação F.18 que $|C(a, \tau)| \leq 1$. Além disto, se o suporte compacto K sobre o qual a *wavelet* se define for completamente composto por falhas, a *gapped wavelet* $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$ será nula em K de modo que o denominador na Equação 2.23 será nulo, o que não faz sentido. Para este caso, define-se $C(a, \tau) = 0$ para todo $\tau \in K$.

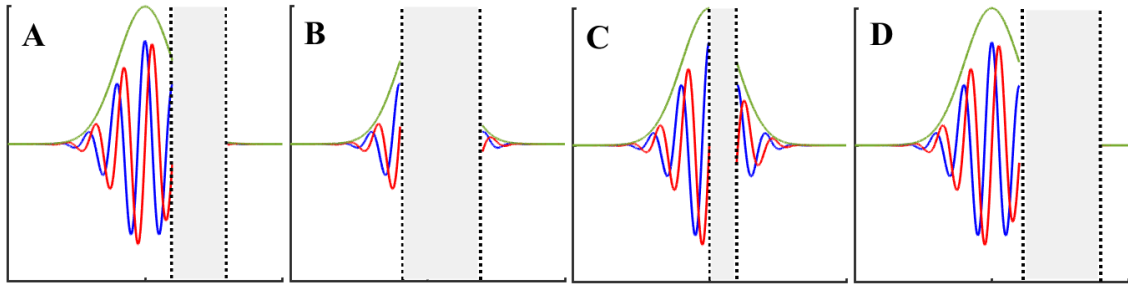
Convém observar que a função $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$ reduz-se à função *wavelet* de Morlet se não há falhas nos dados. Para ver isto basta considerar $C(a, \tau) = 0$ nos casos em que não existem falhas.

Adicionalmente, o uso da CWT com a *gapped wavelet* apresenta a vantagem de corrigir numericamente os denominados problemas de borda na análise tempo-escala, situações em que os coeficientes *wavelet* são erroneamente computados para o sinal f principalmente para valores relativamente grandes do parâmetro de escala a gerando distorções na detecção, principalmente, do conteúdo de baixa frequência em f .

Isto acontece porque próximo às regiões limite de f , isto é, próximo aos instantes de tempo inicial e final em que o sinal se define pode haver perda da condição da admissibilidade durante a aplicação da CWT devido às dilatações feitas na *wavelet* utilizada que, por exemplo, podem ser responsável pelo não ajuste desta aos dados nestas regiões. Trata-se de, no contexto da CWT adaptativa, compreender as regiões de fronteira de f como regiões de falha semi-infinitas.

Na Figura 2.11 vê-se a *wavelet* de Morlet adaptativa $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$ centrada em $\tau = 0$ e na escala $a = 1$ em quatro casos possíveis de acordo com a localização do intervalo de falhas nos intervalos $[1,3]$, $[-1,3]$, $[0,1]$ e $[1,4]$ em A, B, C e D, respectivamente. Os eixos coordenados x e y correspondem aos intervalos $[-5,5]$ e $[-1,1]$. O envelope ζ , a parte real e a parte imaginária estão plotados em verde, azul e vermelho, respectivamente e o intervalo de falhas é destacado pela região sombreada entre as linhas verticais pontilhadas.

Figura 2.11 - *Wavelets* adaptativas de Morlet $\tilde{\psi}_{1,0}(t)$ com intervalos de falha em diferentes localizações e extensões.



Fonte: Adaptado de Frick et al. (1998).

Ainda com relação à Figura 2.11, nota-se que a deformação presente na *wavelet* depende da localização e extensão da região de falha e portanto, em cada um dos casos o parâmetro de correção é diferente. Os valores de $C(1, 0)$ computados via integração numérica são iguais à $0,02 - 0,03i$, $0,10 - 0,13i$, $0,02 - 0,07i$ e $-0,02 - 0,03i$ para os casos A, B, C e D, respectivamente.

3 TRANSFORMADAS WAVELET DISCRETAS

Neste capítulo apresenta-se a Transformada *Wavelet* Discreta (DWT, do inglês, *Discrete Wavelet Transform*) e o conceito de Análise Multirresolução na Seção 3.1.1. Na Seção 3.2 discute-se a Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* (DT-CWT, do inglês, *Dual-Tree Complex Wavelet Transform*) utilizada neste trabalho. A exposição limita-se ao espaço das funções reais quadrado-integráveis.

3.1 Transformadas *wavelet* discretas e multirresolução

A Transformada *Wavelet* Contínua introduzida no Capítulo 2 é redundante e de alto custo computacional uma vez que os parâmetros de escala e de translação no tempo variam continuamente no conjunto dos reais. Nesta seção apresenta-se uma discretização para estes parâmetros que remove a redundância da CWT e admite um algoritmo computacional altamente eficiente.

A exposição feita está organizada em duas subseções. Na primeira, discute-se a discretização dos parâmetros de escala e deslocamento no tempo, define-se a Transformada *Wavelet* Discreta e se define a Análise Multirresolução e na segunda, se apresenta o algoritmo de Mallat que permite eficiente implementação numérico-computacional da DWT via Multirresolução.

3.1.1 Transformada *wavelet* discreta e análise multirresolução

Na Seção 2.1 do Capítulo 2 define-se as funções *wavelet* $\psi(t)$ e sua respectiva família de funções $\psi_{a,\tau}$ em que os parâmetros $a > 0$ e τ possuem variação contínua. Para discretizá-los, consideram-se dois números reais fixados, a_0 e τ_0 , tais que $a_0 > 0$, $a \neq 1$ e $\tau_0 > 0$ e em sequência para j e k inteiros quaisquer, define-se $a = a_0^j$ e $\tau = k \tau_0 a_0^j$ de modo que

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi\left(\frac{t - k \tau_0 a_0^j}{a_0^j}\right) = a_0^j \psi(a_0^j t - k \tau_0). \quad (3.1)$$

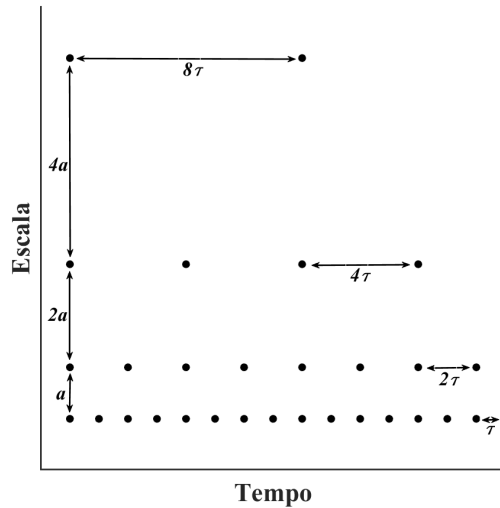
Para ser possível uma representação diádica no plano tempo-escala e que o conjunto $\{\psi_k^j(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ seja uma base de Riesz ortonormal para o espaço vetorial $L^2(\mathbb{R})$ considera-se $a_0 = 2$ e $\tau_0 = 1$ (DAUBECHIES, 1992). Deste modo, da Equação 3.1 tem-se

$$\psi_k^j(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad (3.2)$$

em que os valores discretos para j são chamados de níveis de decomposição.

A Figura 3.1 apresenta uma visualização gráfica da discretização realizada com as escolhas de $a_0 = 2$ e $\tau_0 = 1$. Observe que estes valores implicam em uma representação em escala logarítmica em tempo e em escala.

Figura 3.1 - Representação gráfica do plano tempo-escala para a transformada *wavelet* discreta.



Fonte: Adaptado de Rao (2002).

A definição da DWT é análoga à Definição 2.7 apresentada no Capítulo 2 com $\psi_k^j(t)$ dada pela Equação 3.2. Formalmente:

Definição 3.1. *Seja f uma função real quadrado integrável, ou seja, $f \in L^2(\mathbb{R})$. A Transformada Wavelet Discreta de f é definida por*

$$T_f^\psi(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f\psi(2^j t - k) dt = \langle f, \psi_k^j(t) \rangle, \quad (3.3)$$

em que os valores $T_f^\psi(j, k)$ denominados *coeficientes wavelet* ou *de detalhe*.

Os coeficientes dados pela Equação 3.3 caracterizam de modo único a função f mas a demonstração deste fato não é imediata como é para o caso contínuo cuja identidade de resolução (Teorema 2.2) estabelece a equivalência entre f e seus coeficientes *wavelet* indicando a maneira de se realizar a reconstrução, no tempo, da informação representada no plano tempo-escala.

No caso discreto, a existência de um algoritmo de reconstrução e a consequente caracterização de uma função f pelos respectivos coeficientes $T_f^\psi(k, j)$ equivale à existência de reais A e B , com $0 < A \leq B < \infty$ independentes da função f e tais que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_j \sum_k |T_f^\psi(j, k)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (3.4)$$

em que $\|\cdot\|$ representa a norma induzida pelo produto interno usual em $L^2(\mathbb{R})$. Para a demonstração, consulte (DAUBECHIES, 1992).

Fazendo uso de uma analogia com o conceito físico de energia, a Equação 3.4 implica que a reconstrução é possível se a energia calculada via coeficientes $T_f^\psi(j, k)$ é limitada e contida no compacto $[A\|f\|^2, B\|f\|^2]$ com A e B constantes e independentes de qualquer f quadrado-integrável. Neste contexto, se $A = B$ tem-se o análogo do Teorema de Parseval (CorolárioA.1) para o caso discreto:

$$\sum_j \sum_k |T_f^\psi(j, k)|^2 = \|f\|^2. \quad (3.5)$$

No caso em que a Equação 3.5 é válida tem-se que a reconstrução de f a partir dos coeficientes $|T_f^\psi(j, k)|$ é dada pela soma (ADDISON, 2017):

$$f = \frac{1}{A} \sum_j \sum_k T_f^\psi(j, k) \psi_{j,k}(t). \quad (3.6)$$

Se $A = B > 1$ existe certa redundância contida nos coeficientes $T_f^\psi(j, k)$ pois a medida da energia contida neles é maior que a presente em f mas ainda assim é possível fazer a reconstrução:

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_k T_f^\psi(j, k) \psi_{j,k}(t). \quad (3.7)$$

Caso $A \approx B$ então o processo de reconstrução via Equação 3.7 é realizado com algum erro sendo ele mínimo quando o quociente de A por B tende a 1.

Os valores de A e B constantes para os quais a reconstrução de f à partir dos respectivos coeficientes *wavelet* calculados via Equação 3.3 é possível e dependem, em geral, da função $\psi(t)$ e dos reais a_0 e τ_0 fixados (DAUBECHIES, 1992). Neste contexto, a análise multirresolução, apresentada a seguir, é de fundamental importância por permitir que *wavelets* sejam construídas via bancos de filtros passa-banda para os quais 3.4 é satisfeita e a reconstrução de f realizada via Equações 3.6 e 3.7 com adicionais convoluções.

Definição 3.2. *Uma análise multirresolução, designada MR (do inglês, multiresolution analysis), $\{V^j, \phi\}$ é uma sequência de subespaços vetoriais de $L^2(\mathbb{R})$ e uma função $\phi(t) \in V^0$ tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$a) \dots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots$$

$$b) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\}.$$

$$c) \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j} = L^2(\mathbb{R}).$$

$$d) \forall f \in V^j \iff f(2t) \in V^{j+1}.$$

$$e) \forall f \in V^0 \iff f(t - k) \in V^0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$f) \{\phi(t - k)_{k \in \mathbb{Z}}\} \text{ é uma base de Riesz para } V^0,$$

em que $\overline{V^j}$ indica o fecho do conjunto V^j .

Cada subespaço V^j é denominado nível da multirresolução $\{V^j, \phi\}$ sendo dito mais grosseiro (ou mais refinado) com relação à outro sempre que o índice deste for menor (maior) que o de V^j .

Nesta perspectiva, as propriedades de uma MR permitem interpretá-la como uma sequência de aproximações de uma dada função $f \in L^2(\mathbb{R})$ com diferentes níveis de resolução. A aproximação de f com uma resolução 2^j é definida como a projeção ortogonal de f no subespaço vetorial V^j .

A função $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ presente na Definição 3.2, designada função escala, apresenta uma forma bem definida e a Proposição 3.1 a caracteriza em um nível $j \in \mathbb{Z}$ qualquer da correspondente MR $\{V^j, \phi\}$.

Proposição 3.1. *Considere uma MR $\{V^j, \phi\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. A função escala $\phi(t)$ no nível de resolução $j \in \mathbb{Z}$ é dada por*

$$\phi_k^j(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad (3.8)$$

em que $k \in \mathbb{Z}$ é um parâmetro de translação no tempo.

No contexto da análise multirresolução as funções *wavelet* $\psi_k^j(t)$ definidas pela Equação 3.2 são elementos do complemento ortogonal W^j de cada subespaço V^j .

Como consequência direta da definição de MR tem-se que o nível de resolução 2^{j+1} , correspondente ao subespaço vetorial V^{j+1} , é a soma direta do nível de resolução imediatamente anterior V^j e de seu complemento ortogonal W^j . Assim,

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j, \quad (3.9)$$

para o qual a diferença $\{d_k^j\} = f^{j+1}(t) - f^j(t)$ de aproximação de f nos espaços V^{j+1} e V^j pertence a W^j para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.3. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e seja $\{V^j, \phi\}$ uma análise multirresolução. O conjunto de coeficientes wavelet $\{d_k^j\}$ é a diferença entre as aproximações de f calculadas com resolução 2^{j+1} e 2^j , respectivamente.*

A Definição 3.3 mostra que os coeficientes $\{d_k^j\}$ representa os detalhes presentes em f quando se compara a aproximação calculada para um nível mais refinado com relação à aproximação calculada para o nível imediatamente anterior.

O Teorema 3.1 afirma ser f igual à soma entre uma de suas aproximações mais grosseiras e todos os detalhes para as aproximações seguintes calculadas em níveis de multirresolução mais refinados. A demonstração pode ser consultada em Teolis (1998).

Teorema 3.1. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\{V^j, \phi\}$ uma MR. Então,*

$$f = c\phi(t) + \sum_{j,k} d_k^j \psi_k^j(t), \quad (3.10)$$

em que

$$c = \langle f, \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\phi(t) dt$$

e

$$d_k^j = \langle f, \psi_k^j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\psi_k^j(t) dt.$$

A Proposição 3.1 em conjunto com a Definição 3.2 implicam que o conjunto $B^1 = \{\phi_k^j(t)\}$ em que $\phi_k^j(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$ é uma base de Riesz para o espaço V^j .

Em particular, a função escala $\phi(t) \in V^1$ uma vez que V^0 está contido em V^1 . Logo, $\phi(t)$ pode ser escrita como combinação linear da base B^1 , ou seja,

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k)\phi(2t - k), \quad (3.11)$$

em que $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto de escalares. A Equação 3.11 é denominada equação de refinamento uma vez que ela relaciona a função escala entre dois níveis de resolução consecutivos de uma MR $\{V^j, \phi\}$.

De modo equivalente, a função *wavelet* $\psi(t)$ é um elemento de V^1 pois $V^1 = V^0 \oplus W^0$ e, por definição, $\psi(t)$ é um elemento de W^0 . Deste modo, $\psi(t)$ também se escreve como uma combinação linear dos elementos de B^1 , ou seja,

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \phi(2t - k), \quad (3.12)$$

em que $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ também é um conjunto de escalares.

No domínio da frequência as Equações 3.11 e 3.12 são, como consequência do Teorema A.3, dadas por

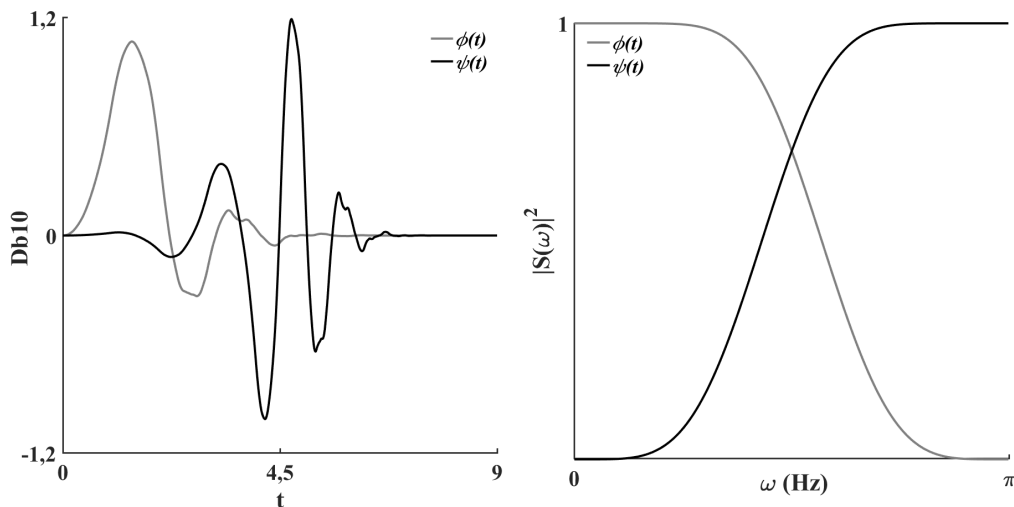
$$\hat{\phi}(\omega) = \sum_k h(k) \exp(-i\omega k) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.13)$$

e

$$\hat{\psi}(\omega) = \sum_k g(k) \exp(-i\omega k) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.14)$$

A Figura 3.2 apresenta um exemplo de função *wavelet* com a correspondente função escala e seu espectro de potência $|S(\omega)|^2$, normalizados.

Figura 3.2 - *Wavelet* $\psi(t)$ de Daubechies 10 (Db10) e respectiva função escala $\phi(t)$ (esquerda) e respostas em frequência (direita).



Fonte: Adaptado de Addison (2017).

A *wavelet* representada na Figura 3.2 é denominada *wavelet* de Daubechies 10 (Db10). O número 10 refere-se à cardinalidade dos conjuntos $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e também à suavidade da função *wavelet* que, neste caso, tem a capacidade de reproduzir perfeitamente polinômios de até quinto grau. Tal propriedade é conhecida na literatura como propriedade dos momentos nulos de uma função *wavelet*. Para detalhes, consulte Daubechies (1992).

As funções $\psi(t)$ e $\phi(t)$ estão bem localizadas em frequência e privilegiando conteúdos em alta e baixa frequências, respectivamente. Diz-se, então, que $\psi(t)$ e $\phi(t)$ são funções passa banda, por destacarem altas (baixas) frequências e atenuarem baixas (altas) frequências presentes em um sinal f .

Os conjuntos $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ combinados com uma condição de normalização e a condição de admissibilidade caracterizam completamente as funções escala e *wavelet* da correspondente MR $\{V^j, \phi\}$ como indicado pela Proposição 3.2.

Proposição 3.2. *As funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ associadas a uma MR $\{V^j, \phi\}$ caracterizam-se pelo respectivo conjunto de escalares $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ com as adicionais condições:*

$$\begin{aligned} a) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt &= 1 \text{ e} \\ b) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Os conjuntos de escalares para $\phi(t)$ e $\psi(t)$ possuem soma sempre constante independentemente da MR $\{V^j, \phi\}$ considerada. Esta propriedade, portanto, implica em mais uma forma de caracterizar estas funções via Equações 3.11 e 3.12.

Proposição 3.3. *Os conjuntos $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definidos pelas Equações 3.11 e 3.12 são tais que:*

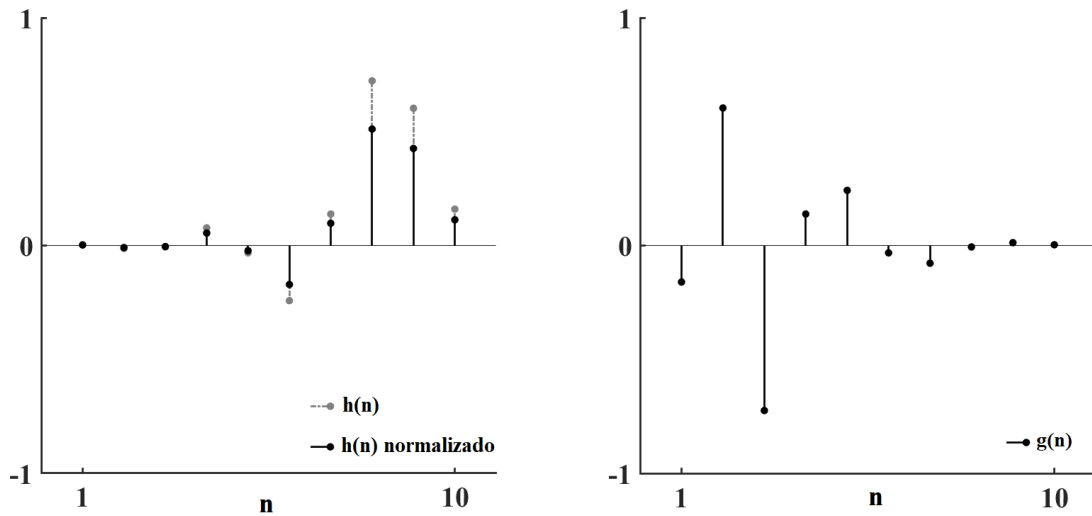
$$\begin{aligned} a) \sum_k h(k) &= \sqrt{2}, \\ b) \sum_k g(k) &= 0. \end{aligned}$$

Em termos de aplicação, costuma-se normalizar os escalares em $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de modo a soma dos elementos deste conjunto seja igual a 1. Isto não altera a caracterização da função escala e nem a correspondente MR. Nesse contexto, como esses filtros são do

tipo passa banda costuma-se denominá-los filtro passa-baixa no caso de $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e passa-alta no caso de $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$

A Figura 3.3 apresenta os filtros associados à *wavelet* de Daubechies 10 representada na Figura 3.2 com sua respectiva função escala. Note que cada filtro possui 10 elementos.

Figura 3.3 - Filtros passa-baixa e passa-alta para Db10.



Fonte: Produção do autor.

Note que, uma vez sendo $\psi(t)$ construída via combinações lineares da função escala $\phi(t)$ conforme Equação 3.12, o correspondente filtro passa-alta $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ está relacionado com o filtro passa-baixa $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ conforme apresentado na Subseção (3.1.2)

Os filtros $\{h(k)\}$ e $\{g(k)\}$ bem como as visualizações das correspondentes funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ para o tempo contínuo podem ser computados via código computacional apresentado no Apêndice C, implementado em *Python* com uma exposição sucinta sobre sua implementação para determiná-los de acordo com Daubechies (1992).

Na subseção seguinte esta relação é apresentada em conjunto com um algoritmo para o cálculo de uma multirresolução $\{V^j, \phi\}$ via aplicação simultânea de processos de filtragem realizada no Domínio do Tempo via filtros $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

3.1.2 Algoritmo de Mallat

Esta subseção apresenta o algoritmo utilizado para se calcular os coeficientes *wavelet* via MR $\{V^j, \phi\}$ pela aplicação de filtragens simultâneas realizadas no domínio do tempo; trata-se do algoritmo de Mallat (MALLAT, 1989). O conceito de convolução discreta é aqui aplicado e uma breve introdução a ele pode ser encontrada no Apêndice B.

No que segue, a notação $\downarrow 2$ indica a operação de *downsampling*: o processo de subamostragem de um sinal f em que se mantém apenas as amostras de índice par eliminando as demais. De modo análogo, a notação $\uparrow 2$ corresponde à operação de *upsampling*: processo de superamostragem de um sinal f com a introdução de zeros entre duas de suas amostras consecutivas.

Por simplicidade na exposição, os filtros $\{h(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{g(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são denotados no restante do texto simplesmente por $h(n)$ e $g(n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Considere f um sinal qualquer e uma MR $\{V^j, \phi\}$ cujas funções escala e *wavelet* correspondem aos filtros $h(n)$ e $g(n)$. Então, o algoritmo de Mallat corresponde à aplicação dos seguintes passos:

- a) Faz-se a convolução discreta de f com $h(n)$ e $g(n)$.
- b) Aplica-se a operação de *downsampling* nas convoluções $f * h(n)$ e $f * g(n)$ obtendo-se os conjuntos c^1 e d^1 , respectivamente.
- c) Aplica-se os passos a) e b) novamente em c^1 e obtém-se os conjuntos c^2 e d^2 .
- d) De modo recursivo, aplica-se os passos a) e b) no conjunto c^n enquanto for possível calcular as convoluções $c_n * h(n)$ e $c_n * g(n)$ obtendo-se c^{n+1} e d^{n+1} .
- e) Ao último conjunto c^n calculado dá-se o nome de conjunto de coeficientes escala.
- f) A sequência d^1, d^2, \dots, d^n representa o conjunto dos coeficientes *wavelet* para os níveis $j = 1, j = 2, \dots, j = n$ de decomposição, respectivamente.

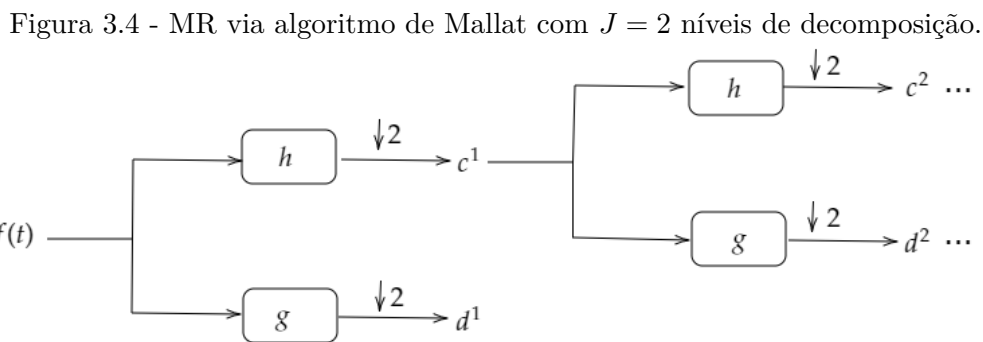
O algoritmo de Mallat é iterativo e finito; or exemplo, que para um sinal f de comprimento 2^n ele é calculado, no máximo, em n níveis cujos coeficientes *wavelet* são simplesmente o resultado da aplicação de um filtro passa-alta.

Os filtros $h(n)$ e $g(n)$, construídos como indicado na Seção 3.1.1, estão relacionados entre si pela igualdade (FRAZIER, 2006):

$$g(n) = (-1)^n h(k - n + 1), \quad (3.15)$$

para $n = 1, 2, \dots, k$ em que k indica o comprimento do filtro $h(n)$.

O conjunto $\{h(n), g(n)\}$ é denominado banco de filtros de análise. Da Equação 3.15 vê-se que o filtro *wavelet* é simplesmente o reverso do filtro de escala cujos elementos de índice ímpar são multiplicados por (-1) . A Figura 3.4 descreve de modo gráfico o algoritmo de Mallat ilustrando a aplicação com dois níveis de decomposição. Os quadriláteros indicam a operação de convolução com os filtros h e g em cada nível e $\downarrow 2$ o *downsampling* utilizado.



Fonte: Produção do autor.

O algoritmo de Mallat é inversível e permite a reconstrução perfeita de f via conjunto dos coeficientes de escala c^j e sequência de conjuntos de coeficientes *wavelet* d^1, d^2, \dots, d^j desde que sejam utilizados o conjunto de filtros $\{h^*(n), g^*(n)\}$ denominado banco de filtros de síntese definidos também em termos do filtro $h(n)$ (FRAZIER, 2006):

$$h^*(n) = h(k - n + 1) \quad (3.16)$$

e

$$g^*(n) = (-1)^{n+1} h(n), \quad (3.17)$$

para $n = 1, 2, \dots, k$ em que k indica o comprimento do filtro $h(n)$.

Portanto, uma vez conhecido o filtro $h(n)$ correspondente à função escala $\phi(t)$ da MR $\{V^j, \phi\}$ considerada ficam completamente caracterizados os demais filtros $g(n)$,

$h^*(n)$ e $g^*(n)$ usados no processo de análise e reconstrução de um sinal f via Equações 3.15, 3.16 e 3.17.

As Equações 3.15 , 3.16 e 3.17 expressam no domínio do tempo como os filtros devem ser construídos para que se tenha a reconstrução perfeita de f a partir dos coeficientes escala e *wavelet*. Em termos do domínio da frequência, tem-se o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [Smith e Barnwell \(1986\)](#).

Proposição 3.4. *Sejam $\{h(n), g(n)\}$ e $\{h^*(n), g^*(n)\}$ os bancos de filtros de análise e síntese em uma MR $\{V^j, \phi\}$ cujas respostas em frequência são $\hat{h}(\omega)$, $\hat{g}(\omega)$, $\hat{h}^*(\omega)$ e $\hat{g}^*(\omega)$, respectivamente. Então a reconstrução perfeita de f a partir dos coeficientes escala e *wavelet* $\{c^j, d^j, d^{j-1}, \dots, d^1\}$ é possível se*

$$\hat{h}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega)\hat{g}^*(\omega) = 2. \quad (3.18)$$

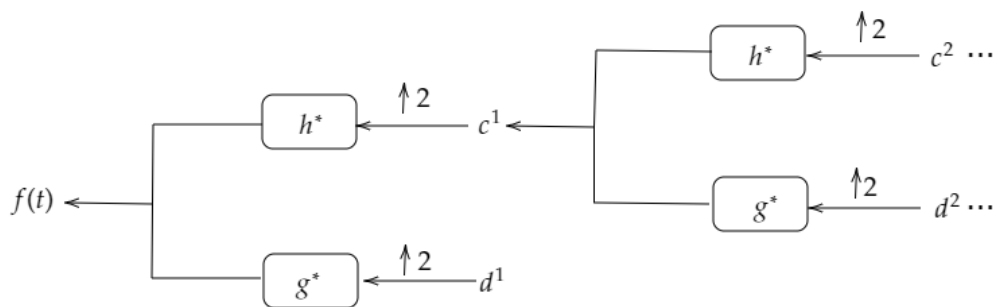
Para a reconstrução de f à partir de $\{c^j, d^j, d^{j-1}, \dots, d^1\}$ obtidos recursivamente como ilustrado na Figura 3.4, aplica-se o algoritmo descrito a seguir:

- a) Aplica-se a operação de superamostragem em c^j e d^j e faz-se a convolução destes conjuntos com os filtros $h^*(n)$ e $g^*(n)$, respectivamente.
- b) Determina-se c^{j-1} via soma pontual das duas convoluções resultantes do passo a).
- c) Considerando c^{j-1} e o conjunto d^{j-1} aplicam-se os passos a) e b) de modo a obter-se o conjunto c^{j-2} .
- d) Recursivamente obtém-se os conjuntos c^{j-3}, c^{j-4}, \dots , até que o conjunto c^1 seja reconstruído de modo a obter-se $f = c^1 + d^1$.

A Figura 3.5 ilustra o processo de reconstrução sendo considerando os dois níveis de decomposição ilustrados na Figura 3.4. Nela, os quadriláteros indicam convolução com os filtros h^* e g^* , os círculos indicam a soma pontual e $\uparrow 2$ a operação de superamostragem aplicada.

Na Seção seguinte apresenta-se um tipo de Transformada *Wavelet* Discreta implementada via aplicação de dois algoritmos simultâneos de Mallat em esquema de árvore dupla e cujos coeficientes *wavelet* resultantes são interpretados como números complexos. A redundância introduzida é compensada pelas boas propriedades que ela apresenta.

Figura 3.5 - Reconstrução de f via algoritmo de Mallat para $J = 2$ níveis de decomposição.



Fonte: Produção do autor.

3.2 Transformada *wavelet* complexa *dual-tree*

A Transformada *Wavelet* Discreta introduzida nas Seções 3.1.1 e 3.1.2 possui limitações como a variância por deslocamentos, oscilações em torno de pontos singulares presentes em uma série temporal, *aliasing* no sentido de que qualquer processamento aplicado nos coeficientes *wavelet* calculados pode implicar em perda da reconstrução perfeita via algoritmo de Mallat e falta de direcionalidade em dimensões superiores a 1 que não estão presentes na Transformada de Fourier (SELESNICK et al., 2005).

A base exponencial complexa de Fourier $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ é composta por um par de funções que apresenta algumas propriedades que implicam em ser a Transformada de Fourier livre das limitações apresentadas pela DWT. Estas propriedades encontram-se listadas na Proposição 3.5, em que $\xi\{f\}$ indica a Transformada de Hilbert¹ de f .

Proposição 3.5. *A função exponencial complexa $\exp(i\omega t)$ possui as seguintes propriedades:*

- a) $\exp(i\omega t)$ é uma função analítica, ou seja, suportada para $\omega > 0$.
- b) $\exp(i\omega t)$ é formada por um par de Hilbert, isto é: $\xi\{\cos(\omega t)\} = \sin(\omega t)$.

Uma função *wavelet*, caracterizada na análise multirresolução por filtros de comprimento finito, não pode ser analítica no sentido da Proposição 3.5 e assim uma generalização da DWT que contorne as limitações descritas no início desta seção pode ser construída buscando-se por filtros que apenas aproximem as proprieda-

¹A definição de Transformada de Hilbert encontra-se apresentada na Subseção 4.2.2 do Capítulo 4.

des da base de Fourier ainda que isto implique, necessariamente, na introdução de redundância na análise (KINGSBURY, 1998).

Neste contexto, introduz-se a Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree* (DT-CWT) onde se faz uso da aplicação dupla do algoritmo de Mallat na decomposição de um mesmo sinal f em que os filtros são construídos de maneira que as duas correspondentes funções *wavelet* analisadoras sejam, aproximadamente, um par de Hilbert.

O Teorema 3.2 indica uma condição necessária e suficiente, em termos dos filtros escala utilizado em cada uma das duas árvores, para que as respectivas funções *wavelet* sejam aproximadamente um par de Hilbert. Na literatura tal condição é conhecida como atraso de meia amostra. A equivalência entre as afirmações é provada em Selesnick (2001), Ozkaramanli e Yu (2003).

Teorema 3.2. *Dois filtros passa-baixa h_0 e h_1 caracterizam suas respectivas funções wavelet $\psi_{h_0}(t)$ e $\psi_{h_1}(t)$ como um par aproximado de funções de Hilbert se e somente se*

$$h_1(n) = h_0(n - 0.5). \quad (3.19)$$

Note que não é possível construir filtros que satisfaçam exatamente a Equação 3.19 uma vez que o atraso é um número não inteiro. Contudo, reescrevendo a condição de atraso de meia amostra em termos de magnitude e fase tem-se (SELESNICK et al., 2005),

$$|\hat{h}_1(\omega)| = |\hat{h}_0(\omega)| \quad (3.20)$$

e

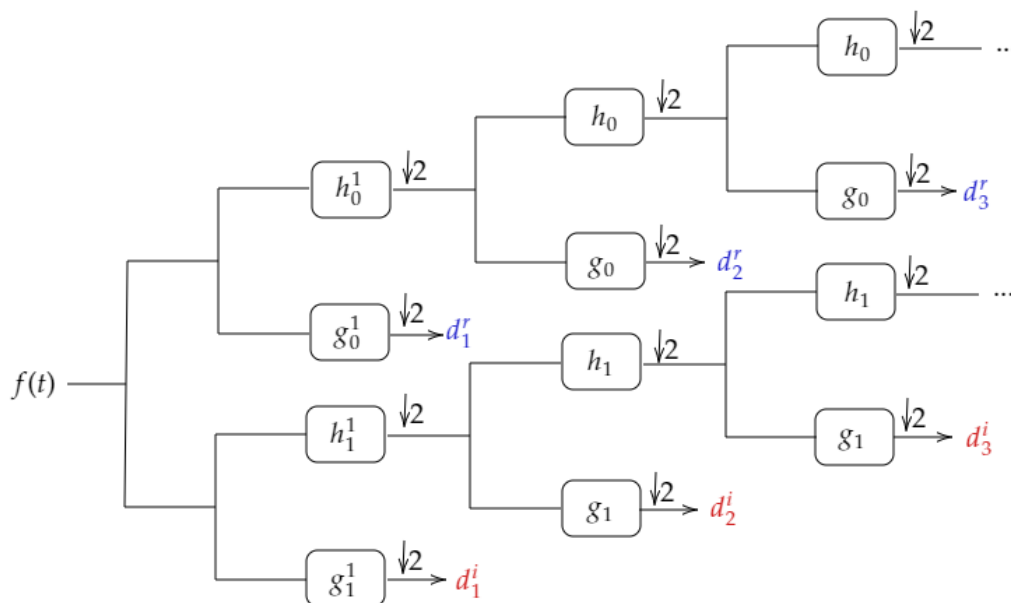
$$\angle h_1(\omega) = \angle h_0(\omega) - 0.5\omega, \quad (3.21)$$

e a construção dos filtros deve garantir a validade de ao menos uma destas igualdades para que a condição de atraso de meia amostra seja aproximadamente satisfeita.

A Figura 3.6 ilustra o algoritmo de análise com três níveis de decomposição em que os quadriláteros indicam a convolução com os respectivos filtros e $\downarrow 2$ a subamostragem.

Os filtros para $J = 1$ não são iguais aos usados nos demais níveis e isto é indicado na Figura 3.6 pelo uso do 1 sobrescrito aos filtros neste nível. Se os filtros forem os mesmos para todos os níveis então se perde a aproximação da condição de atraso de meia amostra (SELESNICK, 2002; SELESNICK et al., 2005).

Figura 3.6 - Decomposição de um sinal f via DT-CWT para $J = 3$ níveis de decomposição.



Fonte: Produção do autor.

Para o primeiro nível de decomposição pode-se usar qualquer conjunto de filtros ortogonais não havendo restrições adicionais. Para os demais níveis, existem basicamente três algoritmos para a construção dos filtros escala h_0 sumarizados pela Tabela 3.1. A segunda coluna indica qual das duas condições, dadas pelas Equações 3.20 e 3.21, é satisfeita e a terceira indica a referência para o algoritmo completo de construção destes filtros.

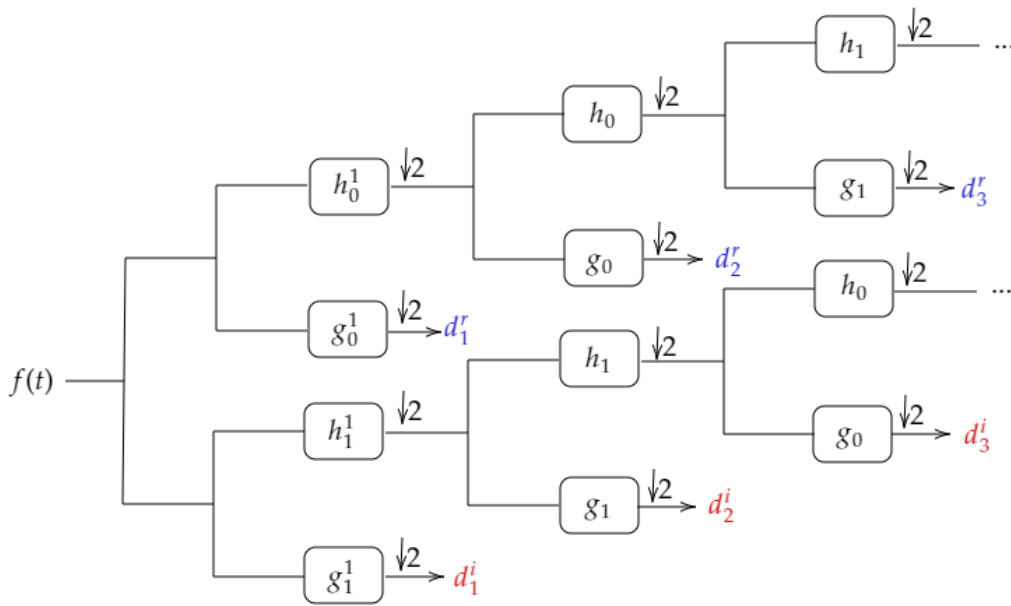
Tabela 3.1 - Métodos de construção dos filtros de análise para DT-CWT.

Construção dos Filtros h_0 e h_1 para $J > 1$ com DT-CWT		
Método	Condição de Meia Amostra	Referência
h_0 simétrico e comprimento ímpar h_1 simétrico e comprimento par	Não satisfaz a Equação 3.20 Satisfaz a Equação 3.21	(KINGSBURY, 1998)
$h_1(n) = h_0(N - n - 1)$ N : comprimento de h_0	Satisfaz a Equação 3.20 Não satisfaz a Equação 3.21	(KINGSBURY, 2000)
$h_0(n) = f(n) * d(n)$ $h_1(n) = f(n) * d(L - n)$ L : comprimento de $d(n)$	Satisfaz a Equação 3.20 Não satisfaz a Equação 3.21	(SELESNICK, 2002)

Fonte: Produção do autor.

Em termos de implementação numérica sugere-se ainda que aconteça a alternância entre os filtros passa-baixa h_0 e h_1 nos sucessivos níveis de decomposição de modo a garantir uma transformada mais simétrica (SELESNICK et al., 2005). Por clareza, a Figura 3.7 ilustra o esquema numérico de decomposição considerando a alternância sucessiva dos filtros passa-baixa entre as duas árvores.

Figura 3.7 - Decomposição de um sinal f via DT-CWT com $J = 3$ níveis com alternância dos filtros passa-baixa para $J > 1$.



Fonte: Produção do autor.

Seja com alternância sucessiva de filtros passa-baixa entre as árvores ou não, em cada estágio J de decomposição são calculados dois conjuntos de coeficientes: o obtido pela árvore superior, que define a parte real do coeficiente *wavelet* e o conjunto da árvore inferior que define a respectiva parte imaginária, destacadas em azul e vermelho, respectivamente nas Figuras 3.6 e 3.7.

Os coeficientes d^j complexos são dados pela soma das partes real e imaginária em cada nível; explicitamente, tem-se

$$d^j = d_r^j + \iota d_i^j, \quad (3.22)$$

em que os índices inferior e superior indicam o nível de decomposição e a natureza (real ou complexa) das partes componentes dos valores d^j . Definem-se ainda a

magnitude e a fase dos coeficientes *wavelet* d^j pelas igualdades

$$|d^j|^2 = \sqrt{|d_r^j|^2 + |d_i^j|^2}, \quad (3.23)$$

e

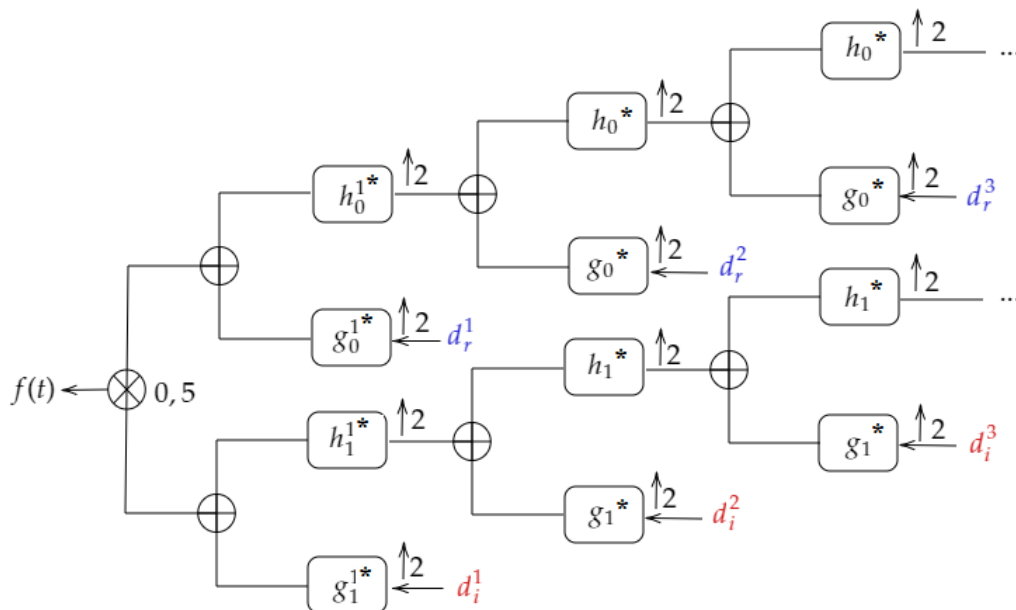
$$\angle d^j = \arctan \left(\frac{d_i^j}{d_r^j} \right). \quad (3.24)$$

O processo de reconstrução é realizado utilizando-se filtros de síntese construídos de modo análogo ao apresentado na Subseção 3.1.2 havendo contudo, a necessidade de, após o último estágio de reconstrução multiplicar o sinal por 0,5 uma vez que a DT-CWT é duas vezes redundante.

A Figura 3.8 ilustra o processo considerando a decomposição feita na Figura 3.6. Nela, os quadriláteros indicam convolução, $\uparrow 2$ a operação de superamostragem e os círculos indicam adições ou multiplicação conforme indiquem sinais de soma ou multiplicação em seu interior. O asterisco denota os correspondentes filtros de síntese para os de análise considerados nas Figuras 3.6 e 3.7.

Os filtros h_0 e h_1 utilizados nas aplicações da DT-CWT realizadas neste trabalho encontram-se detalhados no Apêndice D.

Figura 3.8 - Reconstrução de um sinal f a partir dos coeficientes complexos para a DT-CWT com $J = 3$ níveis.



Fonte: Produção do autor.

4 SISTEMAS DINÂMICOS COM MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO, FASE E SINCRONIZAÇÃO

Este capítulo apresenta uma introdução matemática aos sistemas dinâmicos caóticos com alguns exemplos ilustrativos clássicos da literatura científica na Seção 4.1. Na Seção 4.3 a sincronização entre sistemas dinâmicos caóticos via bloqueio de fase é definida e alguns métodos de sua detecção são discutidos. De particular interesse para este trabalho, na Seção 4.2 apresentam-se os sistemas dinâmicos com múltiplas escalas em que a evolução temporal é caracterizada por escalas temporais diversas e na Seção 4.4 faz-se uma revisão acerca da sincronização para os sistemas com múltiplas escalas e dos diferentes modos pelos quais define-se a fase para estes sistemas.

4.1 Sistemas dinâmicos e caos

De modo intuitivo, um sistema dinâmico é um modo de descrever-se a evolução temporal de todos os pontos de um determinado espaço S . Por exemplo, em uma perspectiva aplicada, S pode ser um espaço de estados para algum sistema físico, em que deseja-se descrever a evolução temporal de alguma grandeza ou mecânico cuja descrição da posição ou da velocidade em função da variável tempo são de maior interesse.

De modo geral, considerar-se-á o espaço S como o espaço euclidiano \mathbb{R}^n com n dimensões de modo que um sistema dinâmico constitui um conjunto de estados iniciais que são completamente caracterizados por sua evolução temporal em \mathbb{R}^n .

Particularmente são de interesse os sistemas dinâmicos cujo tempo seja considerado contínuo e estes são os de objeto de estudo neste trabalho.

Neste caso, a evolução temporal de um conjunto de estados iniciais pode ser caracterizada como uma trajetória $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$, algumas vezes também chamada de fluxo e que, de modo informal, possui toda a informação sobre como o conjunto de estados iniciais evolui ao longo do tempo.

Sobre a notação, por simplicidade, prefere-se escrever o vetor (x_1, x_2, \dots, x_n) simplesmente por x enquanto alguns autores usam X ou até mesmo \mathbf{X} ; aqui não haverá confusão com a notação uma vez que as funções consideradas estão definidas sempre em \mathbb{R}^{n+1} . Considerações informais como as feitas até aqui motivam a seguinte definição para sistema dinâmico de tempo contínuo (HIRSCH et al., 2012):

Definição 4.1. *Um sistema dinâmico contínuo em \mathbb{R}^n é uma função continuamente diferenciável $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- a) $F(t_0, x_0) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função identidade, isto é, $F(t_0, x_0) = x_0$ em que t_0 é o tempo inicial de observação do sistema e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto de estados iniciais.
- b) $F(F(s, t), x) = F(t + s, x)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Na Definição 4.1 note que o domínio de $F(t, x)$ apresenta $n+1$ dimensões para tornar explícita a dependência da variável temporal responsável pela evolução do conjunto de estados iniciais e que x é um vetor n -dimensional. A condição **a)** indica que x_0 é o conjunto de estados iniciais à qual fez-se referência de modo informal nos parágrafos anteriores.

Considerando $F(t, x)$ uma função de uma única variável independente t cuja dependência seja contínua, um sistema dinâmico em \mathbb{R}^n pode ser descrito como uma equação diferencial ordinária de ordem n ou então interpretado como um sistema constituído por n equações diferenciais de primeira ordem.

Dado o interesse na aplicação da Teoria dos Sistemas Dinâmicos em áreas diversas como a Física, a Química, a Biologia, as Engenharias, Medicina e outras possíveis, a primeira questão relevante a ser respondida é se um sistema dinâmico $F(t, x)$ visto como uma equação diferencial da forma $x' = F(t, x)$ tem solução única para todo estado (condição) inicial e sob quais hipóteses isto acontece.

O Teorema 4.1 responde a questão do parágrafo anterior ao afirmar a existência e a unicidade de soluções para um sistema dinâmico sujeito a uma condição inicial. A demonstração é omitida mas pode ser consultada em todos os seus detalhes em [Hirsch et al. \(2006\)](#).

Teorema 4.1. *Seja $F : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em que U é um aberto de \mathbb{R}^n contínua, derivável e localmente lipschitziana com respeito à variável $x \in U$. Então:*

- a) *Para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe $\gamma : I =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^d$ que é solução da equação $x' = F(t, x)$ com $\gamma(t_0) = x_0$.*
- b) *Se $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ são soluções de $x' = F(t, x)$ e existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

A existência e unicidade de soluções para a equação $x' = F(t, x)$ em que $F(t, x)$ é uma função diferenciável de \mathbb{R}^{n+1} em \mathbb{R}^n sujeita a uma condição inicial (t_0, x_0) fornece o alicerce teórico fundamental para que a Teoria dos Sistemas Dinâmicos Contínuos seja utilizada como abordagem natural de fenômenos quaisquer em que se costuma interpretar a variável independente t como o tempo.

A solução, ou fluxo, da equação $x' = F(t, x)$ fornece toda a informação acerca da evolução do estado inicial do sistema ao longo do tempo, inclusive descrevendo suas propriedades geométricas, uma das quais decorre diretamente da unicidade de soluções: fluxos $\gamma(t)$ associados a condições iniciais diferentes evoluem no tempo sem qualquer interseção com outros fluxos associados a outras condições iniciais. Dito de outro modo, soluções distintas da equação $x' = F(t, x)$ não possuem pontos de interseção.

Definição 4.2. *Seja $x' = F(t, x)$ uma equação diferencial em que $F(t, x)$ é diferenciável e definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O espaço de fases das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é o espaço n -dimensional em que se contém a evolução deste conjunto de variáveis ao longo do tempo.*

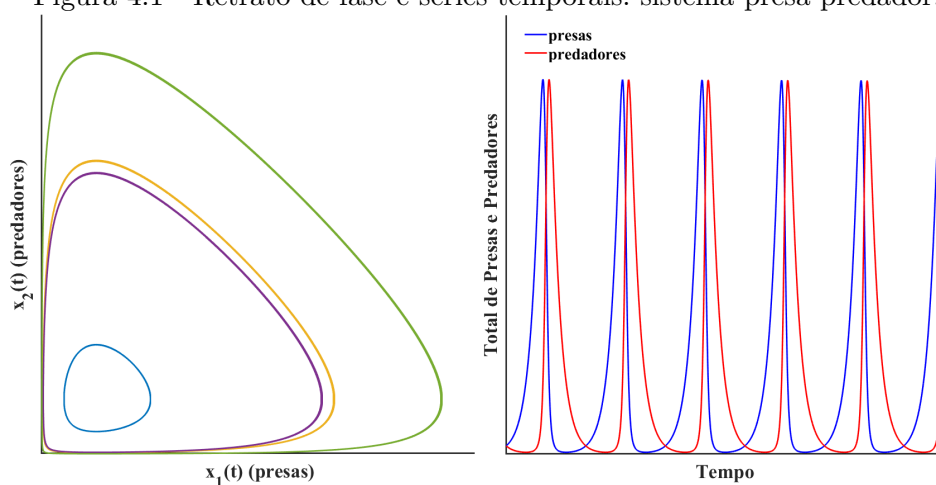
Exemplo 4.1. *O modelo de Lotka-Volterra (LOTKA, 1926) representa um sistema dinâmico não-linear que descreve a competição entre duas espécies: uma espécie presa x_1 e outra espécie predadora x_2 segundo as Equações 4.1:*

$$\begin{cases} x_1' = x_1(\alpha - \beta x_2) \\ x_2' = x_2(\delta x_1 - \xi) \end{cases} \quad (4.1)$$

O modelo baseia-se em duas hipóteses principais. A primeira é a de que na ausência de predadores x_2 a população x_1 de presas cresce a uma taxa $\alpha > 0$ sem qualquer fator de inibição; se houverem predadores x_2 , apesar de a população de presas crescer à mesma taxa α introduz-se um fator de inibição proporcional ao encontro entre predadores x_2 e presas x_1 com constante de proporcionalidade β .

A segunda das hipóteses para este modelo implica que, na ausência de presas x_1 a população de predadores está fadada à extinção apresentando taxa de decrescimento igual a ξ mas que é inibido se houverem presas pela presença de um fator proporcional ao número de encontro entre as duas espécies com constante $\delta > 0$.

Figura 4.1 - Retrato de fase e séries temporais: sistema presa-predador.



Fonte: Produção do autor.

No painel à esquerda da Figura 4.1 vê-se alguns fluxos no espaço de fases para o Sistema 4.1 com constantes $\alpha = \beta = \delta = \xi = 1$ associados a diferentes condições iniciais. O comportamento é periódico em cada caso e apesar de x_1 e x_2 tornarem-se próximos de zero, o que biologicamente significa a extinção das espécies, isto não acontece de acordo com o modelo. O painel à direita mostra, com maior clareza, o comportamento periódico das variáveis x_1 e x_2 em que as séries temporais para presas e predadores estão plotadas.

Voltando ao caso geral em discussão, note que não há qualquer restrição além da necessidade da diferenciabilidade da função $F(t, x)$ para que o sistema $x' = F(t, x)$ tenha solução única de acordo com o Teorema 4.1 e deste modo caracterize perfeitamente um sistema dinâmico contínuo. É particularmente útil considerar o caso em que $F(t, x)$ é não-linear pois a natureza e seus variados fenômenos manifestam-se principalmente via não-linearidade e caoticidade. Deste modo, no restante desta seção e deste capítulo admitir-se-á apenas o caso de sistemas dinâmicos não lineares e eventualmente caóticos. Neste trabalho, considerar-se-á a definição de caos dada por Hirsch et al. (2012) uma vez que não há uma definição aceita universalmente no meio científico.

Definição 4.3. *Caos é um comportamento aperiódico de longa duração em um sistema determinístico que apresenta sensibilidade às condições iniciais.*

A Definição 4.3 merece alguns comentários sobre os termos e expressões que nela aparecem. Por comportamento aperiódico de longa duração entende-se que o fluxo

$\gamma(t)$ que descreve a evolução temporal do sistema não se aproxima de pontos fixos ou ciclos limites e não é caracterizado por órbitas periódicas ou quase-periódicas quando $t \rightarrow \infty$. O termo determinístico é usado para enfatizar que, o comportamento caótico decorre exclusivamente da não-linearidade do sistema sendo este livre de ruído ou forçantes externas que podem interferir no comportamento do fluxo $\gamma(t)$ e por fim, a sensibilidade às condições iniciais refere-se à propriedade de que, em sistemas cujo comportamento é caótico, fluxos sujeitos à condições iniciais suficientemente próximas afastam-se exponencialmente à medida que $t \rightarrow \infty$.

Um resultado central no estudo de dinâmicas não-lineares é o chamado Teorema de Poincaré-Bendixson que, em termos gerais, estabelece que o comportamento caótico só pode manifestar-se em três ou mais dimensões; isto é, qualquer sistema dinâmico em duas dimensões, como o modelo presa-predador apresentado no Exemplo 4.1, mesmo na presença da não-linearidade, não pode ser caótico (STROGATZ, 2018). A demonstração é omitida mas pode ser encontrada em Barreira e Valls (2012).

Teorema 4.2. (Poincaré-Bendixson) *Considere $x' = F(t, x)$ um sistema dinâmico planar, isto é, $F(t, x) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função continuamente diferenciável no plano em que U é um domínio fechado e limitado. Então, se:*

- a) *Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto que contém U e não contém nenhum ponto fixo de $F(t, x)$ e,*
- b) *Existe ao menos uma trajetória $\gamma(t)$ confinada em A , no sentido de que quando $t \rightarrow \infty$, $\gamma(t)$ ainda está contida em A , então:*

ou $\gamma(t)$ é uma curva (órbita) fechada em A ou uma espiral que tende a uma curva (órbita) fechada contida em A . Em ambos os casos, existe uma trajetória fechada $\gamma(t)$ inteiramente contida em A .

A detecção do comportamento caótico é um problema de alta dificuldade em teoria mas em aspectos numéricos relacionados ao expoente de Lyapunov, que define-se à seguir, obtém-se uma relativa simplificação na detecção do caos.

Seja $x' = F(t, x)$ um sistema dinâmico caótico em n dimensões e considere $\gamma(t_0)$ uma trajetória qualquer deste sistema. Perturbando-a por um $\delta > 0$ nas condições iniciais, obtém-se outra trajetória $\gamma(t)$ com $t = t_0 + \delta$ cuja evolução é caracterizada inicialmente por $\gamma(t_0)$ mas sobre a qual nada se pode afirmar conforme $t \rightarrow \infty$ dada a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Considere $\delta(x) = \gamma(t) - \gamma(t_0)$ uma medida instantânea da separação destas duas trajetórias que depende fundamentalmente da perturbação $\delta > 0$ considerada e suponha que esta separação cresça exponencialmente entre dois instantes de tempo quaisquer de maneira que, em norma,

$$\|\delta(x)\| \approx \exp(\lambda t) \|t - t_0\|. \quad (4.2)$$

O expoente λ é denominado expoente de Lyapunov e caracteriza a taxa exponencial com que duas trajetórias arbitrariamente próximas se distanciam ao longo do tempo (MONTEIRO, 2002; PIKOVSKY; POLITI, 2016). Um sistema dinâmico contínuo em n dimensões possui exatamente n expoentes de Lyapunov e ao conjunto de todos estes expoentes dá-se o nome de espectro de Lyapunov.

Seja \mathcal{L} o espectro de Lyapunov associado a um sistema dinâmico $x' = F(t, x)$. A taxa exponencial de divergência de trajetórias cujas condições iniciais são infinitesimalmente próximas é medida pelo elemento máximo de \mathcal{L} e, quando $\max(\mathcal{L}) > 0$ há indicativo numérico da presença de caos no sistema (HIRSCH et al., 2012).

Na Subseção 4.1.1, à seguir, são apresentados dois sistemas que sob determinadas condições exibem comportamento caótico e o conceito de atrator também é apresentado. Os espectros de Lyapunov apresentados para estes sistemas são calculados via algoritmo descrito em Wolf et al. (1985).

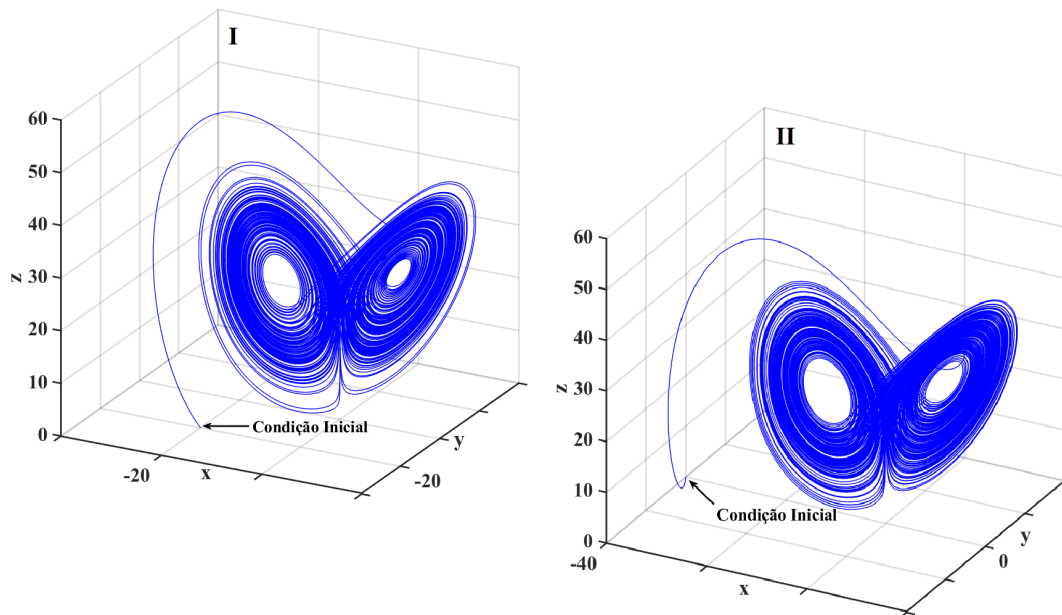
4.1.1 As equações de Lorenz e de Rössler

Em 1963, o meteorologista e matemático Edward Lorenz (1917 - 2008) ao estudar o fenômeno da convecção atmosférica utilizando um modelo simplificado observou que o comportamento das soluções numéricas encontradas se distanciavam de modo exponencial mesmo para condições iniciais bastante próximas; em linguagem atual e de acordo com a Definição 4.3 de caos, ele se deparou com a sensibilidade às condições iniciais. O Sistema de Lorenz é um sistema dinâmico em três dimensões e descrito pelas equações

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(r - z) - y \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (4.3)$$

em que σ , r e b são constantes. Em seu trabalho original, Lorenz usou os valores $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ (LORENZ, 1963) também usados nas simulações apresentadas a seguir.

Figura 4.2 - Evolução temporal do sistema de Lorenz com diferentes condições iniciais.



Fonte: Produção do autor.

A Figura 4.2 indica que, geometricamente, o Sistema 4.3 está confinado em um certo subespaço \mathcal{A} do espaço tridimensional não importando a condição inicial utilizada. Note que após transcorrido um tempo que não depende do ponto tomado como condição inicial as trajetórias tanto em (I) quanto em (II) convergem para uma região $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ não saindo mais dela. De modo a mostrar a evolução da trajetória para o subespaço \mathcal{A} não houve descarte de transiente. Por transiente, entende-se o comportamento do fluxo $\gamma(t)$ de um sistema dinâmico para o subconjunto inicial da variável independente.

Define-se a região \mathcal{A} do espaço tridimensional como o conjunto atrator caótico para o Sistema de Lorenz. Não existe condição inicial que possa ser usada de modo que as trajetórias não se confinem, quando $t \rightarrow \infty$, na região \mathcal{A} .

Além disso, as trajetórias, dada a unicidade de soluções provada anteriormente, não se auto interceptam apesar de seus pontos tornarem-se arbitrariamente próximos durante a evolução temporal.

A dimensão do atrator de Lorenz não pode ser um número inteiro: se fosse igual a 2 o atrator estaria contido em um plano, o que não é verdade por simples inspeção na Figura 4.2 e se fosse igual a 3 então ele preencheria toda a região \mathcal{A} que o contém. A dimensão para o atrator de Lorenz é estimada em 2,06 (MCGUINNESS, 1983).

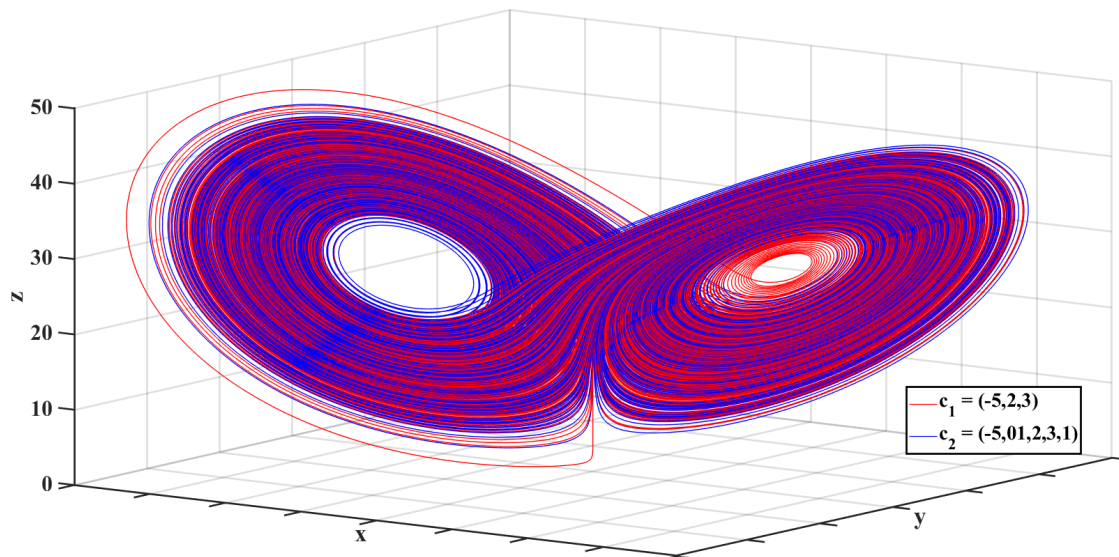
Além disso, o sistema é dissipativo, isto é, qualquer que seja o volume inicial considerado, definido pelas três coordenadas da condição inicial, certamente ele contrair-se-á ao longo do tempo, o que pode ser verificado calculando-se o divergente para o Sistema de Equações 4.3 e verificando que ele assume um valor negativo qualquer que seja a condição inicial dada. De fato, considerando f_1 , f_2 e f_3 como a primeira, segunda e terceira das equações de 4.3, tem-se:

$$\nabla S = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -\sigma - 1 - b < 0,$$

uma vez que $\sigma = 10$ e $b = 28/3$ e tal valor por ser independente das variáveis x , y e z também independe da condição inicial considerada.

Uma vez sendo conhecida a propriedade de que o Sistema de Lorenz possui trajetórias que confinam-se em um atrator mostra-se na Figura 4.3 a propriedade de sensibilidade às condições iniciais. Para tanto, na simulação numérica, tomou-se duas condições iniciais arbitrariamente próximas e fez-se o descarte de transiente de modo a observar apenas o comportamento das trajetórias já confinadas no atrator.

Figura 4.3 - Sensibilidade às condições iniciais para o sistema de Lorenz. Em vermelho e azul vê-se o respectivo atrator para as condições iniciais $C_1 = (-5, 2, 3)$ e $C_2 = (-5, 01, 2, 3, 1)$.



Fonte: Produção do autor.

Ressalta-se que, para o conjunto de parâmetros escolhidos ($\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$) o comportamento do Sistema de Lorenz é caótico pois seu espectro de Lyapunov dado por $\mathcal{L} = \{-14, 57, 0, 0, 90\}$ apresenta elemento máximo positivo.

Nota-se com mais clareza a dependência do comportamento caótico com relação ao conjunto de parâmetros escolhidos no sistema que apresentar-se-á na sequência.

Trata-se do Sistema de Rössler definido pelo sistema de Equações

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + z(x - c) \end{cases} \quad (4.4)$$

em que os parâmetros a , b e c regulam o comportamento dinâmico do sistema. No trabalho original (RÖSSLER, 1976) as constantes utilizadas foram $a = b = 0,2$ e $c = 5,7$ e Rössler chama a atenção para a maior simplicidade deste sistema quando comparado com o de Lorenz: enquanto o primeiro apresenta apenas uma equação não-linear, o segundo apresenta duas equações não-lineares.

Assim como no caso de Lorenz, observa-se que todas as trajetórias convergem para uma mesma região do espaço tridimensional que, também não possui dimensão inteira. Além disso, este sistema também é dissipativo pois:

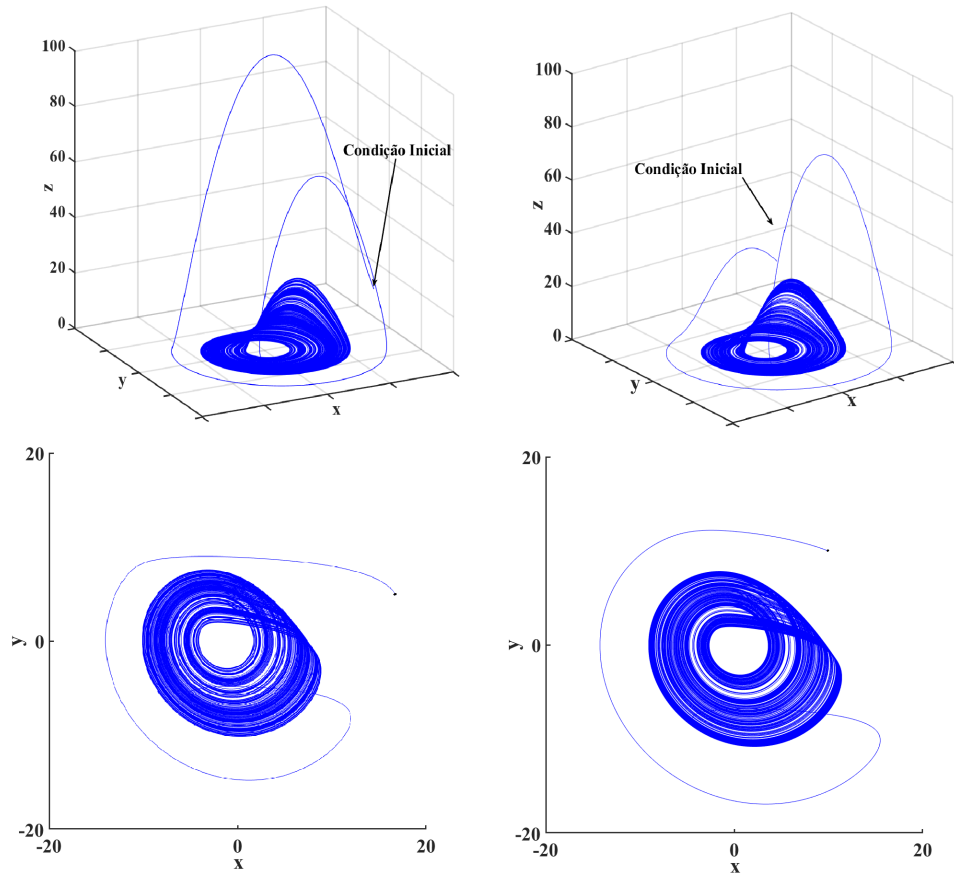
$$\nabla S = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = a - c,$$

negativo sempre que $c > a$, como no trabalho original (RÖSSLER, 1976).

Considerar-se-á o Sistema 4.4 com os parâmetros $a = 0,15$, $b = 0,20$ e $c = 10$. Dadas condições iniciais $C_1 = (20, 5, 10)$ e $C_2 = (10, 10, 5)$ vê-se, tal qual para o Sistema de Lorenz, que as respectivas trajetórias são atraídas para uma região \mathcal{A} do espaço tridimensional e de lá não saem mais. Veja a Figura 4.4: no painel superior os atratores tridimensionais com as condições iniciais destacadas; no painel inferior, vê-se a projeção do atrator no plano $x - y$ de modo a tornar de mais fácil visualização o caminho percorrido pela trajetória desde o ponto inicial até sua entrada (e portanto, permanência) no atrator.

A sensibilidade às condições iniciais também estão presentes. A Figura 4.5 mostra a simulação do Sistema de Rössler para duas condições iniciais suficientemente próximas: tomou-se $C_1 = (10, 10, 20)$ e $C_2 = (9, 98, 10, 01, 20)$ ou seja, deu-se incrementos iguais a $\Delta_1 = -0,02$ e $\Delta_2 = 0,01$ para as variáveis x e y do sistema.

Figura 4.4 - Simulações do sistema de Rössler com condições iniciais C_1 e C_2 para os gráficos à esquerda e à direita, respectivamente.



Fonte: Produção do autor.

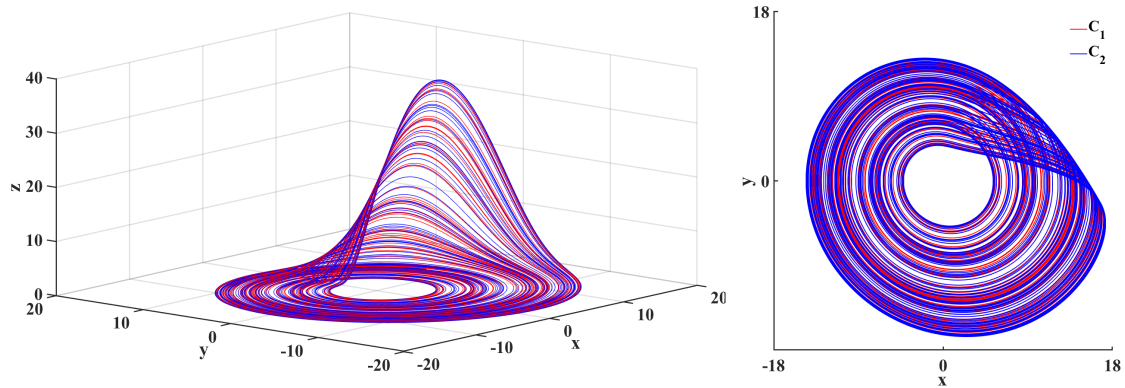
Finalmente, o comportamento caótico das variáveis x , y e z para o sistema de Rössler também se evidencia quando se observa seu espectro de Lyapunov, neste caso, dado por $\mathcal{L} = \{-14, 1, 0, 0, 13\}$.

É possível forçar o Sistema de Rössler a exibir comportamento periódico com a escolha adequada do conjunto de parâmetros a , b e c que aparecem na Equação 4.4. Utilizando $a = b = 0, 1$ e variando c é possível simular comportamentos periódicos onde se observam apenas uma órbita, duas, três, seis e comportamentos caóticos. Para detalhes e parâmetros, consulte Strogatz (2018).

4.2 Sincronização entre sistemas dinâmicos caóticos

Esta Seção define o conceito de sincronização e discute, particularmente, sua manifestação em sistemas dinâmicos caóticos quando acoplados, interagindo entre si.

Figura 4.5 - Ilustração da sensibilidade às condições iniciais para o sistema de Rössler. Em vermelho e azul vê-se o respectivo atrator para as condições iniciais $C_1 = (10, 10, 20)$ e $C_2 = (9, 98, 10, 01, 20)$.



Fonte: Produção do autor.

Faz-se também, uma revisão da literatura sobre a detecção da sincronização no caso de sistemas caóticos e também no caso de sistemas com múltiplas escalas de tempo.

É provável que o primeiro cientista a observar o fenômeno da sincronização tenha sido o holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695) ao observar dois relógios de pêndulo fixados em uma mesma viga. Ele percebeu que o movimento dos dois pêndulos em mesmo ritmo devia-se às imperceptíveis forças que os dois relógios imprimiam à viga devido aos movimentos que realizavam (PIKOVSKY et al., 2003).

Em linguagem moderna diz-se que os relógios observados por Huygens estavam acoplados e efetuavam um processo de sincronização, ou seja, o ritmo de seus movimentos estavam ajustados devido à fraca interação entre eles. Esta é exatamente a definição do fenômeno da sincronização: o ajustamento de ritmos entre dois ou mais sistemas acoplados devido a uma fraca força de interação entre eles.

Sabe-se hoje que este fenômeno é universal e está presente em diversas áreas. Na Biologia, por exemplo, pode ser observado em grupos de vaga-lumes que ajustam o ritmo cuja comunicação é caracterizada pela emissão de luz (TYRRELL et al., 2006; OTTE, 1980) ou em pássaros em caça (IMS; ANDREASSEN, 2000). Nas Ciências Sociais, por exemplo, observa-se também que uma plateia tende a ajustar o ritmo dos aplausos ao final de um espetáculo (NÉDA et al., 2000).

Sistemas caóticos podem, quando acoplados, apresentar comportamento sincronizado. Em trabalhos pioneiros na área de dinâmica não-linear nota-se o interesse na

sincronização completa em que, as trajetórias dos sistemas caóticos acoplados convergem para uma trajetória comum ao longo do tempo (FUJISAKA; YAMADA, 1983). Entretanto, atualmente, o interesse maior está na chamada sincronização de fase em que as trajetórias evoluem com amplitudes diferentes ainda que os sistemas exibam ritmos semelhantes.

De modo a tornar clara a exposição, explica-se na sequência como se faz a modelagem matemática do acoplamento utilizando dois sistemas dinâmicos caóticos $S_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $S_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidos respectivamente pelos sistemas de equações diferenciais ordinárias $x'_1 = F(t, x_1)$ e $x'_2 = F(t, x_2)$ mas cuja modelagem é análoga para k sistemas quaisquer.

O acoplamento é definido por uma matriz $M_{n \times n}(x_1, x_2)$ cujas componentes são combinações quaisquer entre as variáveis de estado x_1 e x_2 de S_1 e S_2 , respectivamente, que estão acoplados. A intensidade de acoplamento, $\epsilon > 0$, considerada sempre pequena o suficiente para que a modelagem indique fraca interação entre os sistemas, é introduzida como uma constante multiplicativa da matriz M .

No caso em que se faz a introdução da matriz M em apenas um dos sistemas, diz-se que o acoplamento é unidirecional, sendo o sistema mantido inalterado chamado de sistema condutor (ou mestre) e o outro, de sistema resposta (ou escravo). Formalmente tem-se o Modelo

$$\begin{cases} x'_1 = F(t, x_1) \\ x'_2 = F(t, x_2) + \epsilon M(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.5)$$

para o acoplamento unidirecional sendo S_1 condutor e S_2 resposta e,

$$\begin{cases} x'_1 = F(t, x_1) + \epsilon M(x_2, x_1) \\ x'_2 = F(t, x_2) + \epsilon M(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

para o acoplamento bidirecional.

Acoplamentos que consideram k sistemas acoplados todos entre si são geralmente chamados de acoplamentos globais. O Modelo 4.6 define, portanto, um acoplamento que é bidirecional e também global entre S_1 e S_2 . É bastante comum considerar o acoplamento linear, de maneira que a dependência entre as variáveis de estado x_1 e x_2 na matriz $M(x_1, x_2)$ é apenas uma combinação linear entre ambas.

O exemplo a seguir, apresentado em Ferreira et al. (2013), ilustra a manifestação da sincronização entre dois sistemas S_1 e S_2 caóticos de Lorenz quando acoplados bidirecionalmente via variável x considerando uma intensidade de acoplamento $\epsilon = 6$ e a ausência deste fenômeno para um acoplamento fraco, com $\epsilon = 0,4$.

Exemplo 4.2. Considere dois sistemas de Lorenz em típico regime caótico conforme discutido na Subseção 4.1.1:

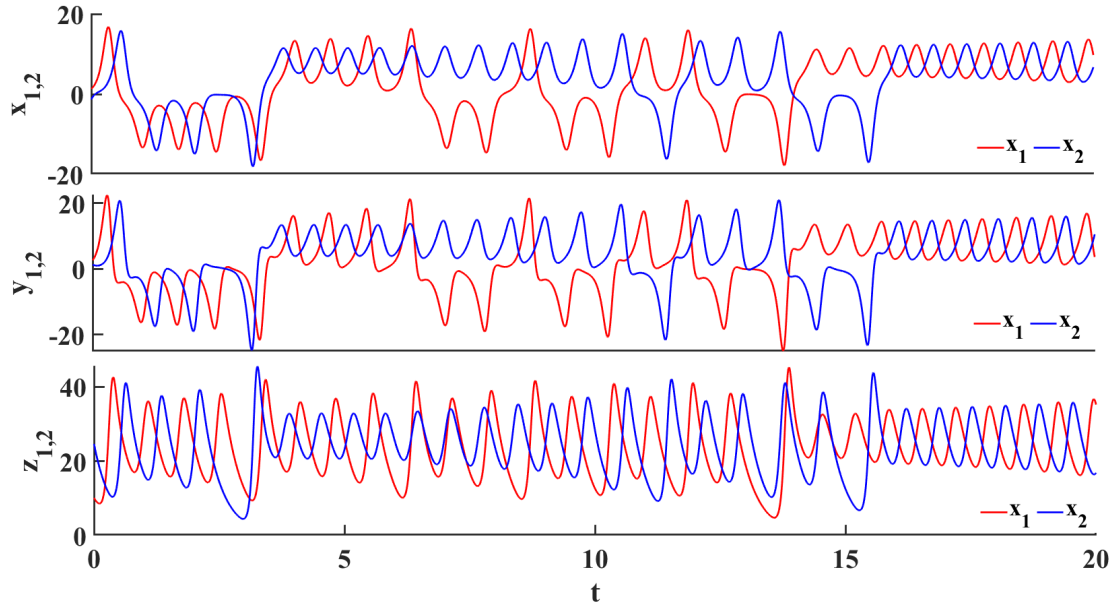
$$S_1 = \begin{cases} x_1' = 10(y_1 - x_1) + \epsilon(x_2 - x_1) \\ y_1' = x_1(28 - z_1) - y_1 \\ z_1' = 0,9831(x_1y_1 - \frac{8}{3}z_1) \end{cases} \quad (4.7)$$

e

$$S_2 = \begin{cases} x_2' = 10(y_2 - x_2) + \epsilon(x_1 - x_2) \\ y_2' = x_2(28 - z_2) - y_2 \\ z_2' = 1,018(x_2y_2 - \frac{8}{3}z_2), \end{cases} \quad (4.8)$$

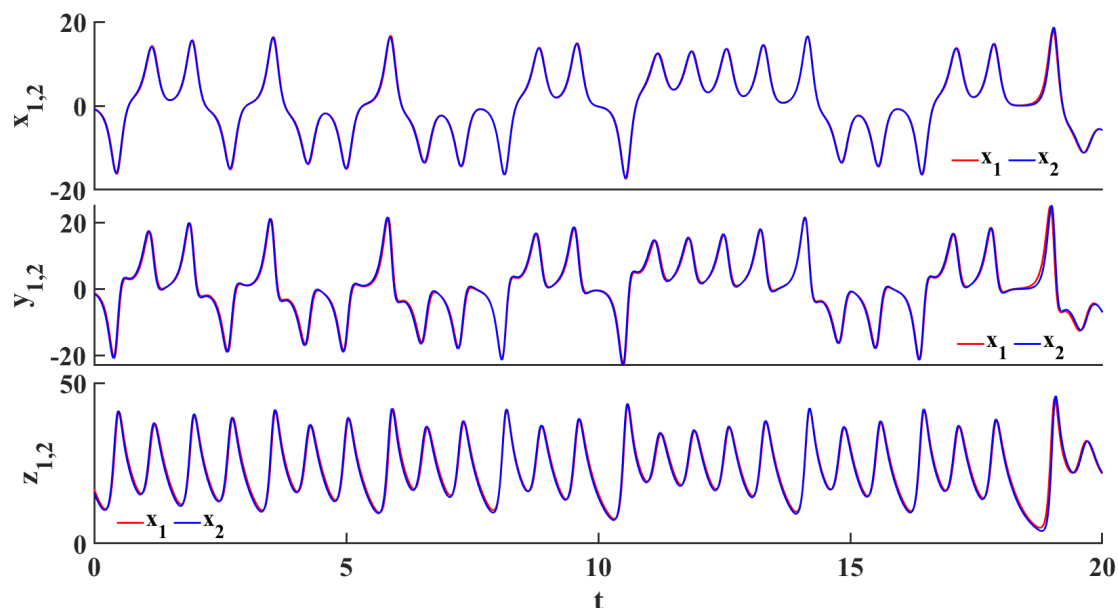
em que as constantes $c_1 = 0,9831$ e $c_2 = 1,018$ são introduzidas na variável z de modo a tornar S_1 ligeiramente diferente de S_2 .

Figura 4.6 - Variáveis de estado para os Sistemas 4.7 e 4.8 em regime caótico bidirecionalmente acoplados com $\epsilon = 0,4$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 4.7 - Variáveis de estado para os Sistemas 4.7 e 4.8 em regime caótico bidirecionalmente acoplados com $\epsilon = 6$.



Fonte: Produção do autor.

Para $\epsilon = 0, 4$, considerada uma intensidade de acoplamento fraca, os sistemas não manifestam o fenômeno da sincronização. Com o uso de uma intensidade de acoplamento $\epsilon = 6$, a sincronização completa acontece. Compare as Figuras 4.6 e 4.7

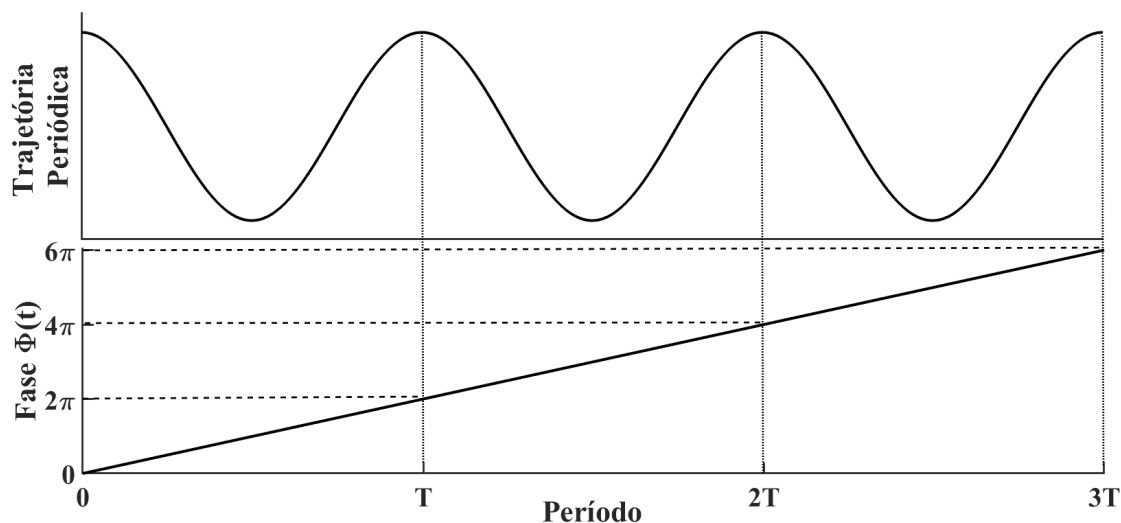
4.2.1 Fase em sistemas caóticos

A Seção 4.2 faz referência a duas típicas situações envolvendo o fenômeno da sincronização: a primeira, envolvendo o ajuste de ritmos entre as variáveis de estados de sistemas acoplados com a adicional propriedade de apresentarem amplitudes iguais e a segunda, mais sutil, em que as variáveis de estado permanecem evoluindo no tempo com amplitudes livres mas encontram-se sincronizadas.

Como na definição de sincronização exige-se que a interação entre os sistemas seja fraca e na prática aplica-se uma intensidade de acoplamento pequena, a segunda das situações é a de grande interesse para as aplicações. Trata-se da sincronização em fase, conceito que é descrito nesta Subseção.

No caso periódico, ilustrado na Figura 4.8, caso em que um sistema dinâmico S apresenta solução periódica de modo que no espaço de fase as soluções tendem a um ciclo-limite, define-se a fase como a coordenada angular $\Phi(t)$ ao longo deste ciclo limite que se incrementa em 2π à cada rotação completa (PIKOVSKY et al., 2003).

Figura 4.8 - Definição de fase para o caso de trajetórias periódicas.



Fonte: Adaptado de Pikovsky et al. (2003).

Note que ao longo do tempo a fase $\Phi(t)$ é crescente e incrementa-se em 2π a cada período percorrido pela trajetória, ou seja, a cada evolução completa em torno do ciclo limite correspondente a essa trajetória no espaço de fases.

A generalização do conceito de fase para o caso não periódico (considerando especialmente o caso caótico) não é imediata e é construída teoricamente via expoentes de Lyapunov. No que segue, a discussão será restrita ao caso de sistemas dinâmicos caóticos em que a propriedade de sensibilidade às condições iniciais está presente e de maior interesse neste trabalho.

Todo sistema dinâmico $x' = F(t, x)$ contínuo e autônomo em relação ao tempo possui ao menos um expoente de Lyapunov nulo (MONTEIRO, 2002; FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994), ou seja, existe uma direção no espaço de fases em que as trajetórias são estáveis às perturbações.

Este resultado permite que o conceito de fase, definido inicialmente nesta Seção para o caso periódico, seja generalizado para o caso caótico conforme descrito em Pikovsky et al. (2003).

Definição 4.4. *Seja $x' = F(t, x)$ um sistema dinâmico contínuo n -dimensional e caótico. A fase instantânea deste sistema é definida como a variável angular $\Phi(t)$ associada ao expoente de Lyapunov nulo existente.*

A noção de fase permite definir a sincronização entre dois sistemas nos quais os ritmos são ajustados mas as amplitudes não. Este tipo de sincronização é conhecido como sincronização via travamento de fase.

Definição 4.5. *Sejam $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ as fases instantâneas de duas variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ relativas a sistemas S_1 e S_2 , respectivamente. Os sistemas S_1 e S_2 estão sincronizados via travamento de fase se*

$$|\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| \leq 2\pi.$$

Existem diversos métodos para a atribuição da variável fase $\Phi(t)$ para sistemas caóticos. A Subseção 4.2.2 apresenta alguns dos mais conhecidos.

4.2.2 Métodos de atribuição de fase para sistemas caóticos

Nesta Subseção apresentam-se cinco métodos para a atribuição de fase em sistemas caóticos. O primeiro utiliza seções de Poincaré introduzidas convenientemente no espaço de fases; o segundo baseia-se em projeções no espaço de fase; o terceiro fundamenta-se na Transformada de Hilbert e os dois últimos são obtidos via Transformadas *Wavelet*.

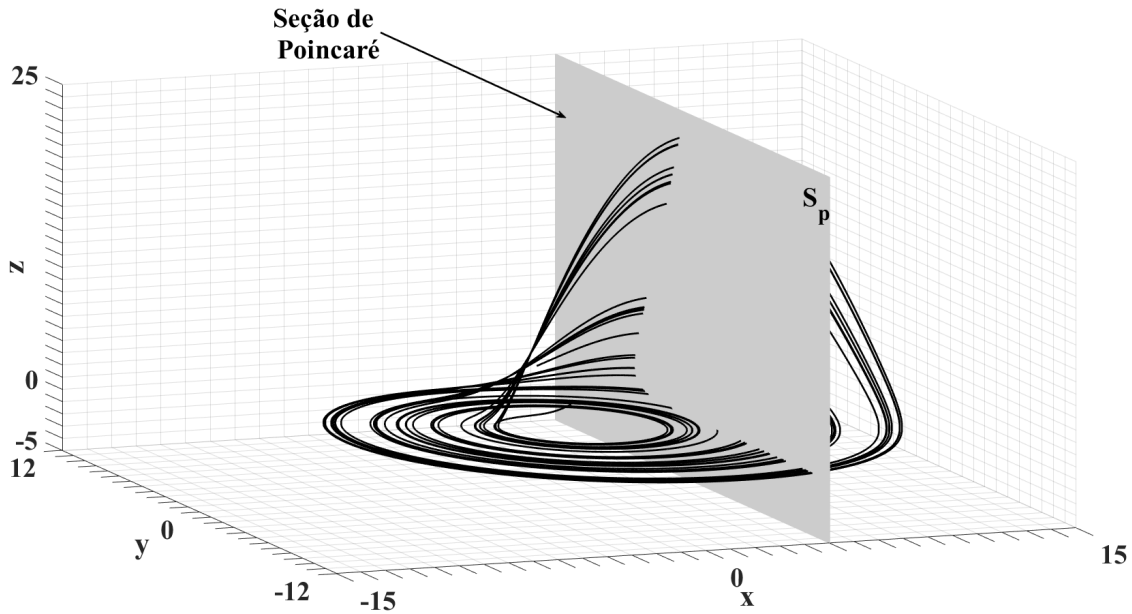
4.2.2.1 Fase via seções de Poincaré

O comportamento caótico manifesta-se em sistemas dinâmicos contínuos desde que estes estejam, pelo menos, imersos em um espaço com três dimensões. Conforme discutido na Seção 4.1 isto é uma consequência direta do Teorema de Poincaré-Bendixson. Neste contexto uma das ferramentas mais utilizadas para a análise das trajetórias caóticas é denominada Seção de Poincaré. Trata-se simplesmente de introduzir um plano S_p e analisar as interseções das trajetórias com este plano. Deste modo, o problema reduz-se a uma análise em apenas duas dimensões.

Observe na Figura 4.9 um atrator de Rössler caótico com parâmetros $a = b = 0,2$ e $c = 5,7$ e em regime coerente, ou seja, com um centro de rotação bem definido e para o qual fez-se o descarte do transiente e uma possível escolha para a introdução de uma Seção S_p de Poincaré.

Nestes casos, define-se a fase $\Phi_P(t)$ pelo incremento linear de 2π entre dois instantes t_n e t_{n+1} sucessivos em que as órbitas interseccionam a Seção de Poincaré (MOON; HOLMES, 1985; PIKOVSKY et al., 1997; ROSENBLUM et al., 1997; TIAN et al., 2013).

Figura 4.9 - Seção S_p de Poincaré para o atrator de Rössler.



Fonte: Produção do autor.

Em termos matemáticos, tem-se:

$$\Phi_P(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (4.9)$$

É importante notar que dado o comportamento caótico do fluxo, as sucessivas interseções do atrator com o plano S_p são todas distintas entre si e o tempo de retorno, isto é, o tempo decorrido entre duas interseções sucessivas, necessariamente não é constante. A fase $\Phi_P(t)$ depende fundamentalmente da Seção de Poincaré S_p introduzida no espaço de fases de maneira que esta fase pode ser ambígua (ROSENBLUM et al., 1997).

4.2.2.2 Fase via projeção no espaço de fases

Se é possível obter órbitas fechadas com centro de rotação bem definido via projeção do atrator caótico em um plano no espaço de fases então a fase pode ser definida via função arco-tangente. Neste caso, define-se a fase via função arco-tangente (ROSENBLUM et al., 1997; PIKOVSKY et al., 1996; GORYACHEV; KAPRAL, 1996):

$$\Phi_{proj}(t) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (4.10)$$

em que x e y representam as duas variáveis componentes do plano em que o atrator é projetado. Note que na Figura 4.9 uma possível projeção para que a fase seja definida para o atrator de Rössler em regime de coerência como na Equação 4.10 é a projeção no plano xy .

No caso de regime não coerente, em que não se está bem definido um centro de rotação para o atrator, a Definição 4.10 é adaptada considerando-se a projeção das derivadas das variáveis de estado x e y . Explicitamente, para este caso (CHEN et al., 2001),

$$\Phi_{proj}(t) = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right). \quad (4.11)$$

4.2.2.3 Fase via transformada de Hilbert

Dada uma função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sua Transformada de Hilbert é definida por

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{t-u} du, \quad (4.12)$$

em que P.V. indica o valor principal de Cauchy da integral da função $\frac{f(u)}{t-u}$. Note a singularidade isolada existente em $t = u$.

A partir da função real $f(t)$ e de sua respectiva $\xi(t)$ define-se uma função complexa analítica

$$s(t) = f(t) + \xi(t) = a(t) + \imath \exp(\imath \Phi_H(t)),$$

em que identifica-se imediatamente a fase $\Phi_H(t)$ atribuída via Transformada de Hilbert.

Diferente dos métodos de atribuição de fase via Seção de Poincaré e/ou projeções no espaço de fases este método é não ambíguo e aplica-se particularmente a dados experimentais de modo imediato sem a necessidade de processamentos adicionais nos dados (PIKOVSKY et al., 1997).

4.2.2.4 Fase via transformada *wavelet* contínua

A Transformada *Wavelet* Contínua apresentada em detalhes na Seção 2.3 do Capítulo 2 é outro meio de atribuição de fase para sistemas caóticos quando escolhe-se uma *wavelet* complexa como função analisadora.

Neste caso, aplica-se a CWT e identifica-se na sequência a escala a_{\max} em seu espectro global $\mathbb{G}(a)$, calculado de acordo com a Equação 2.16, apresenta energia máxima. Fixando-se esta escala define-se a fase instantânea $\phi_W(t)$ como o argumento dos coeficientes *wavelet* complexos $\mathbb{W}_f^\psi(a_{\max}, t)$ (CHANDRE et al., 2003; KORONOVSKII; HRAMOV, 2004; HRAMOV; KORONOVSKII, 2005). Explicitamente, tem-se:

$$\Phi_W(t) = \arg(\mathbb{W}_f^\psi(a_{\max}, t)). \quad (4.13)$$

É claro que neste caso a atribuição de fase volta a ser ambígua pois passa a depender da *wavelet* analisadora complexa escolhida. Nos trabalhos citados no parágrafo anterior os autores consideram a *wavelet* de Morlet com frequência central $\omega_c = 1$ Hz correspondente ao parâmetro adimensional $\omega_0 = 2\pi$.

4.2.2.5 Fase via transformada *wavelet* discreta complexa *dual-tree*

A Transformada *Wavelet* Discreta Complexa *Dual-Tree* descrita na Seção 3.2 do Capítulo 3 também é utilizada para a atribuição de fase em sistemas caóticos sejam provenientes de modelos teóricos, como os sistemas de Rössler e de Lorenz, ou de dados experimentais (FERREIRA et al., 2015; FERREIRA et al., 2017) uma vez que para seu uso basta o conhecimento de uma série temporal unidimensional.

Para isto, aplica-se inicialmente na série temporal $f(t)$, a DT – CWT utilizando -se todos os níveis de decomposição para o quais os coeficientes *wavelet* obtidos representam de modo significativo a série temporal $f(t)$ conforme discutido previamente no Capítulo 3. No que segue, seja N o número de níveis utilizados no processo de decimação.

Feito isto identifica-se o nível J , $1 \leq J \leq N$, em que o espectro global *wavelet* $\mathbb{E}(J)$ seja máximo. Então, os coeficientes *wavelet* d^j do nível J de decomposição são utilizados para a atribuição de fase via função arco-tangente:

$$\Phi_{DT}(t) = \arctan\left(\frac{\text{Imag}(d^j)}{\text{Re}(d^j)}\right), \quad (4.14)$$

em que a variável tempo t deve ser discretizada considerando um fator igual a 2^J proveniente do processo de decimação e da identificação do nível J de energia máxima.

4.3 Sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo

Nesta Seção apresentam-se os Sistemas Dinâmicos com Múltiplas Escalas de Tempo (do inglês, *Multiple-Time-Scale Dynamical Systems*) dentro de uma perspectiva matemática. Isso implica em analisar alguns resultados centrais da Teoria Geométrica das Perturbações Singulares para Equações Diferenciais Ordinárias onde define-se formalmente as oscilações de relaxação, a estrutura geométrica intrínseca aos sistemas com mais de uma escala de tempo.

Os conceitos e resultados apresentados não são triviais de modo que estes são ilustrados sempre que possível analisando-se o oscilador de Van der Pol (POL, 1934), que basicamente representa um oscilador com amortecimento não linear. Ao final da Seção, se caracteriza geometricamente a geometria típica das oscilações de relaxação: a manifestação de “pulsos” isolados ou sequências de pulsos denominados, respectivamente na literatura de *spikes* e *burstings*, respectivamente.

Apesar da escolha por este importante exemplo específico para as dinâmicas que apresentam escalas temporais distintas, estas estão presentes em variados fenômenos como lasers (GIACOMELLI; POLITI, 1998; ROY et al., 1992), ondas de Faraday (CHEN; NALS, 1999), reações químicas homogêneas (HJERTAGER et al., 2002), fenômenos eletroquímicos (KISS et al., 2006), modelos diversos para a atividade neuronal (IZHIKEVICH, 2000a; IZHIKEVICH, 2003), células cardíacas (NAQVI et al., 2014) e β -pancreáticas (RORSMAN; ASHCROFT, 2017) além de outros outros (CHEN et al., 2012; WANG; BOYD, 2009; SON; LIM, 2008).

Considerar-se-á nesta Seção o caso mais simples: a presença simultânea de apenas duas escalas temporais distintas cujas respectivas dinâmicas são denominadas dinâmicas lenta e rápida, respectivamente. Formalmente, tem-se a seguinte definição:

Definição 4.6. *Um sistema dinâmico é denominado (m,n) -rápido-lento se pode ser formulado por um sistema de equações diferenciais da forma*

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{dt} = \epsilon x' = f(x, y, \epsilon) \\ \frac{dy}{dt} = y' = g(x, y, \epsilon), \end{cases} \quad (4.15)$$

em que $f(x, y, \epsilon)$ e $g(x, y, \epsilon)$ são funções definidas de $\mathbb{R}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $0 \ll \epsilon < 1$ é um parâmetro real muito menor que 1. A variável $x \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ é a variável rápida e a variável $y \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ é denominada variável lenta.

Observa-se que fazendo-se a mudança de variável $\tau = \epsilon t$ o Sistema 4.15 pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x' = f(x, y, \epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{dy}{d\tau} = y' = \epsilon g(x, y, \epsilon). \end{cases} \quad (4.16)$$

De fato, decorre da mudança de variável e de 4.15 que

$$\tau = \epsilon t \iff d\tau = \epsilon dt \iff \begin{cases} \epsilon \frac{dx}{dt} = \epsilon \frac{1}{\epsilon} \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} = \dot{x} = f(x, y, \epsilon) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = \epsilon g(x, y, \epsilon), \end{cases}$$

em que \dot{x} e \dot{y} são usados para denotar as derivadas de x e y em relação à nova escala de tempo τ .

Uma possível abordagem para a análise do comportamento dinâmico, seja do Sistema 4.15 ou 4.16 é considerar o caso limite em que $\epsilon = 0$. Isto transforma qualquer uma das formas do sistema dinâmico (m, n) –rápido-lento em uma equação algébrico-diferencial por envolver uma equação algébrica e uma diferencial. Este caso limite motiva as duas definições à seguir:

Definição 4.7. *A equação algébrico-diferencial*

$$\begin{cases} f(x, y, 0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = y' = g(x, y, 0) \end{cases} \quad (4.17)$$

é denominada *subsistema lento* e o fluxo $\gamma_s(t)$ por ela gerado é denominado *fluxo lento*.

Definição 4.8. *A equação algébrico-diferencial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(x, y, 0) \\ \frac{dy}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

é denominada *subsistema rápido* e o fluxo $\gamma_f(t)$ por ela gerado é denominado *fluxo rápido*.

Para se distinguir o caso em que se faz referência aos subsistemas definidos por 4.17 e 4.18 é comum referir-se à Equação 4.15 como sistema completo. Dadas as Definições destes dois subsistemas a ideia central é que, no espaço de fases é possível analisar o comportamento do sistema completo ora considerando um subsistema, ora considerando outro.

Decorre da Definição 4.7 que em uma vizinhança suficientemente pequena da solução da equação algébrica $f(x, y, 0)$ o fluxo $\gamma(t)$ do sistema completo seja dominado pelo subsistema lento de modo que $f(x, y, 0)$ desempenha papel central na análise; assumir-se-á que a curva $f(x, y, 0) = 0$ seja topologicamente homeomorfa ao espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+n} de modo que ela seja uma variedade, ou seja, um espaço topológico X cujos pontos (x, y) possuem uma vizinhança na qual o comportamento quanto às propriedades geométricas é idêntico ao existente no espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+n} no sentido de que existe uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ bijetiva, diferenciável e com inversa também diferenciável. Geometricamente, isto implica que a variedade X é localmente suave e regular como o espaço euclidiano de dimensão $m + n$.

Definição 4.9. *O subconjunto $C_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definido por*

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(x, y, 0) = 0\}, \quad (4.19)$$

é denominado variedade crítica para o Sistema 4.15.

A Proposição 4.1 a seguir relaciona os pontos de equilíbrio do fluxo rápido com os pontos de C_0 .

Proposição 4.1. *Seja S um sistema dinâmico (m, n) -rápido-lento cujo fluxo rápido seja $\gamma_f(t)$. Os pontos de equilíbrio de $\gamma_f(t)$ correspondem-se biunivocamente com os pontos da variedade crítica C_0 .*

Demonstração. Considere $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fixo. Se x_0 é um ponto de equilíbrio para $\gamma_f(t)$ então $f(x_0, y_0, 0) = 0$, ou seja, $(x_0, y_0) \in C_0$. Por outro lado, seja $(x_0, y_0) \in C_0$. Pela Definição 4.9 tem-se que $f(x_0, y_0, 0) = 0$ para $y_0 \in \mathbb{R}^n$ que pertence a $\gamma_f(t)$ de acordo com a Definição 4.8. \square

O oscilador de Van der Pol (POL, 1926; POL, 1934) sem forçante é definido pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (4.20)$$

e representa a posição $x(t)$ de um oscilador sujeito a uma força μ aplicada a um amortecimento não linear.

Tal sistema pode ser visto como um sistema dinâmico $(1, 1)$ -rápido-lento. Mostrará isto no Exemplo 4.3 onde são ilustrados os conceitos apresentados nesta Seção até este ponto.

Exemplo 4.3. *Considere a mudança de variável $t = \mu\tau$. Decorre dela que as derivadas presentes na Equação 4.20 podem ser reescritas como*

$$t = \mu\tau \Leftrightarrow dt = \mu d\tau \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{d\tau} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{d\tau} = \dot{x} \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu} \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{\mu^2} \ddot{x}, \end{cases} \quad (4.21)$$

e substituindo 4.21 em 4.20, tem-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2x}{d\tau^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau} + x = 0. \quad (4.22)$$

Fazendo-se uma transformação de Liénard, isto é, definindo

$$y = \frac{1}{\mu^2} \frac{dx}{d\tau} + \frac{x^3}{3} - x \quad (4.23)$$

e derivando em relação a $y(\tau)$, tem-se:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2x}{d\tau^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau} = -x, \quad (4.24)$$

de acordo com 4.22. Assim, $\frac{dy}{d\tau} = -x$ (I). Da transformação de Liénard definida por 4.23 segue-se que $\frac{1}{\mu^2} \frac{dx}{d\tau} = y - \frac{x^3}{3} + x$ (II).

Fazendo $\epsilon = \mu^{-2}$, de (I) e (II) obtém-se um sistema $(1, 1)$ -rápido-lento para a Equação de Van de Pol 4.20 dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right) \\ \frac{dy}{d\tau} = -x. \end{cases} \quad (4.25)$$

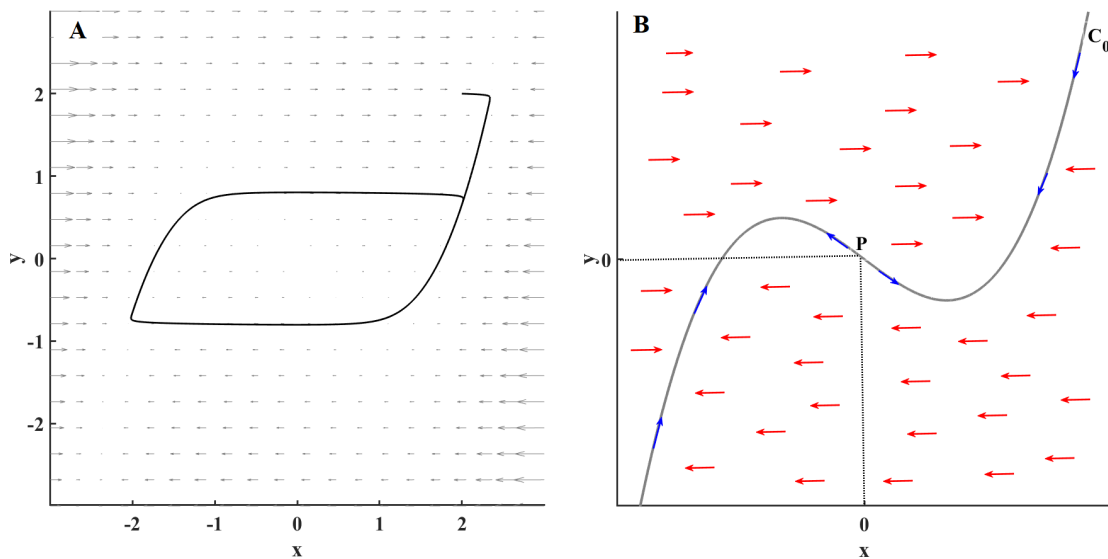
Ao considerar-se outras forçantes sejam lineares, não lineares, periódicas ou quase-periódicas para a Equação de Van der Pol ainda assim é possível convertê-lo em um sistema como 4.25. Far-se-á agora a análise de 4.25 com as ideias introduzidas nesta Seção.

Para tanto, comece observando que há apenas um ponto de equilíbrio: $P = (0, 0)$ para o sistema completo. A variedade crítica, de acordo com a Definição 4.9 é

$$C_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = \frac{x^3}{3} - x \right\}, \quad (4.26)$$

ou seja, uma cúbica passando por P e representada na Figura 4.10.

Figura 4.10 - Oscilador de Van der Pol como um sistema (1, 1)-rápido-lento com $\mu = 0,02$.
 Figura (A): retrato de fase e campo de direções. Figura (B): comportamento dos fluxos lento e rápido.



Fonte: Produção do autor.

Na Figura (4.10) (A) vê-se o espaço de fases para o oscilador de Van der Pol com condição inicial $C = (2, 2)$. Observe que o espaço de fases é composto por uma única trajetória fechada. A Figura (B) apresenta a variedade crítica C_0 para 4.25 sobre a qual se move o fluxo lento $\gamma_s(t)$, representado pelas flechas em azul e cuja direção é determinada pela segunda das equações do sistema 4.25 sendo P um ponto de equilíbrio repulsor. Para o fluxo rápido $\gamma_f(t)$ vê-se que acima da variedade crítica seu movimento se dá para a direita e abaixo, para a esquerda. Isto também pode ser

visto na Figura (A) onde o campo de direções indica esta tendência. Ao longo desta Seção, particularmente o comportamento dinâmico mostrado em (B) será analisado e explicado de modo detalhado e gradual.

Não há, infelizmente, uma uniformidade de nomenclaturas e termos com relação aos sistemas (m, n) -rápido-lento. Contudo, enfatiza-se que a exposição teórica feita a seguir está baseada nos termos usualmente encontrados nas referências Berglund (2001), Guckenheimer (2002), Kaper (1999) e Kuehn (2015). A última destas referências chama a atenção para este fato, sendo considerada, inclusive, na construção dos seguidos exemplos desta Seção usando o oscilador de Van der Pol.

Um conjunto $C \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ é dito compacto se ele for fechado e limitado (LIMA, 2004). Esta definição de compacidade para conjuntos só aplica-se à subconjuntos do espaço euclidiano n -dimensional.

Definição 4.10. *Um subconjunto compacto $M_0 \subset C_0$ é dito normalmente hiperbólico se para todo ponto $p \in M_0$ a matriz $(D_x f)(p)$ de dimensão $m \times m$ e composta pelas derivadas primeiras da Equação $f(x, y, 0)$ de 4.7 em relação à variável lenta x não possui autovalores com parte real nula.*

Exemplo 4.4. *Toda a variedade crítica C_0 do oscilador de Van der Pol é normalmente hiperbólica. Basta notar que neste caso $f(x, y, 0) = y - x^3/3 + x$ de modo que qualquer que seja $p \in C_0$ tem-se*

$$(D_x f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = -x^2 + 1|_{(x=p)} = -p^2 + 1 \neq 0.$$

Existe uma intrínseca relação entre os pontos de equilíbrio do subsistema rápido que de acordo com a Proposição 4.1 são também pontos da variedade crítica e a hiperbolicidade de um subconjunto $M_0 \subset C_0$. Esta relação é apresentada na Proposição a seguir:

Proposição 4.2. *Um subconjunto $M_0 \subset C_0$ é normalmente hiperbólico se e somente se para cada $p = (x^*, y^*)$ tem-se que x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação diferencial $x' = f(x, y, 0)$.*

Convém notar, com relação ao enunciado da Proposição 4.2 que, de maneira genérica, define-se $x^* \in \mathbb{R}^m$ como um ponto de equilíbrio hiperbólico para a equação diferencial $x' = f(x, y, 0)$ se **(a)** $f(x^*, y, 0) = x^*$ e **(b)** se o autovalor da matriz A associada a esta equação diferencial tem parte real não nula em x^* .

Subconjuntos M_0 normalmente hiperbólicos de uma variedade crítica S_0 podem ser atratores, repulsores ou do tipo sela. Trata-se de uma generalização da teoria clássica das equações diferenciais ordinárias onde pontos (e não subconjuntos) podem ser dotados destas propriedades.

Definição 4.11. *Seja $M_0 \subset C_0$ um subconjunto normalmente hiperbólico de uma variedade crítica S_0 . Então,*

- a) M_0 é atrator se todo autovalor de $(D_x f)(p)$ tem parte real negativa.
- b) M_0 é repulsor se todo autovalor de $(D_x f)(p)$ tem parte real positiva.
- c) M_0 é do tipo sela se não for nem atrator e nem repulsor,

para todo $p \in M_0$.

Exemplo 4.5. *A variedade crítica C_0 do oscilador de Van der Pol é dada por $f(x, y, 0) = y - x^3/3 + x$ de modo que qualquer que seja $p \in C_0$ tem-se*

$$(D_x f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = -x^2 + 1.$$

Como a variável x é unidimensional os autovalores λ de $(D_x f)(p)$ são as raízes da equação

$$-x^2 + 1 - \lambda = 0,$$

de onde $\lambda = -p^2 + 1$. Analisando o sinal deste autovalor em função da variável p , segue que:

- $\lambda < 0$ se $1 - p^2 < 0$, ou seja, se $p < -1$ ou $p > 1$.
- $\lambda > 0$ se $1 - p^2 > 0$, ou seja, se $-1 < p < 1$,

de modo que a variedade crítica C_0 divide-se em três subconjuntos S_0 , S_1 e S_2 disjuntos definidos por

- $S_0 = \{(x, y) \in C_0 \text{ tais que } x < -1\}$,
- $S_1 = \{(x, y) \in C_0 \text{ tais que } -1 < x < 1\}$. e
- $S_2 = \{(x, y) \in C_0 \text{ tais que } x > 1\}$.

Portanto, S_0 e S_2 são subconjuntos da variedade crítica que são atratores para o sistema rápido e S_1 é um subconjunto repulsor da dinâmica rápida. Compare estes resultados com o visto na Figura 4.10.

O Teorema 4.3 estabelece resultados centrais sobre o comportamento da dinâmica lenta em sistemas com múltiplas escalas de tempo. Contudo, a compreensão de seu enunciado depende de conceitos matemáticos que, por completude deste texto, apresentam-se a seguir como uma sequência de definições fundamentadas em Kelley (2017), Willard (2004), Lima (1983) e Royden e Fitzpatrick (1988).

Definição 4.12. (Ínfimo de um Conjunto) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio de números reais limitado inferiormente. Define-se o ínfimo de A e escreve-se $\inf(A)$ para indicar o maior de todos os reais que são minorantes do conjunto A .*

Definição 4.13. (Supremo de um Conjunto) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio de números reais e limitado superiormente. Define-se o supremo de A e escreve-se $\sup(A)$ para indicar o menor de todos os números reais que são majorantes do conjunto A .*

Definição 4.14. (Distância de Hausdorff) *Sejam A e B subconjuntos do \mathbb{R}^{m+n} não vazios. Define-se a distância de Hausdorff entre A e B pelo número real*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_A \left(\inf_B |x - y| \right), \sup_B \left(\inf_A |x - y| \right) \right\},$$

para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$.

Definição 4.15. (Difeomorfismo) *Sejam A e B variedades em \mathbb{R}^{m+n} . Diz-se que A e B são difeomórficas, ou que existe um difeomorfismo entre elas, se existe uma função $\varphi : A \rightarrow B$ bijetora, diferenciável em todos os pontos de A e com inversa diferenciável em todos os pontos de B .*

Do ponto de vista da Topologia, dois conjuntos difeomórficos são indistinguíveis, isto é, apresentam as mesmas propriedades geométricas. Dadas estas Definições, segue o importante Teorema 4.3. A demonstração foge à breve e elementar construção teórica aqui feita mas, na íntegra, pode ser consultada em Fenichel (1979) e Jones (1995).

Teorema 4.3. Fenichel-Tikhonov *Seja C_0 a variedade crítica de um sistema (m, n) -rápido-lento supondo-a normalmente hiperbólica. Sejam ainda $S_0 \subset C_0$ uma subvariedade normalmente hiperbólica e compacta e as funções $f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de classe $C^r < \infty$, isto é, r vezes diferenciáveis com derivadas contínuas*

em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Então, dado $0 < \epsilon \ll 1$ tem-se que:

- a) Existe uma variedade localmente invariante S_ϵ que é difeomórfica a S_0 .
- b) A variedade S_ϵ tem distância de Hausdorff de S_0 , isto é, $S_\epsilon \rightarrow S_0$ se $\epsilon \rightarrow 0$.
- c) O fluxo $\gamma(t)$ determinado por S_ϵ converge para o fluxo da dinâmica lenta sobre S_0 se $\epsilon \rightarrow 0$.
- d) S_ϵ é de classe $C^r < \infty$.
- e) S_ϵ é normalmente hiperbólica e possui as mesmas propriedades quanto à estabilidade que S_0 .

O Teorema 4.3 estabelece a existência da variedade localmente invariante S_ϵ que depende do $0 < \epsilon \ll 1$ considerado. Contudo, dado que todas as variedades S_ϵ obtidas pela variação do ϵ são difeomórficas, possuindo assim as mesmas propriedades geométricas, é comum referir-se a todas elas como variedade lenta S_ϵ , como a notação estabelecida no enunciado do Teorema 4.3.

A determinação da variedade lenta S_ϵ é, via de regra, um problema difícil do ponto de vista teórico e também numérico mesmo que sejam conhecidas as equações diferenciais que regular o sistema de múltiplas escalas em consideração.

Contudo, Kuehn (2015) apresenta um exemplo que encontra-se reproduzido abaixo com todos os cálculos omitidos na referência original.

Exemplo 4.6. Considere o sistema rápido-lento definido por

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -\epsilon y, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

cujo único ponto de equilíbrio é a origem e cuja variedade crítica é dada por

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } y^2 = x\}. \quad (4.28)$$

Explicitamente ilustrar-se-á o Teorema 4.3 calculando sua variedade lenta. Para tanto, considere (x_0, y_0) é a condição inicial para 4.27 e note que ele tem solução dada por

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_0 - \frac{y_0^2}{1-2\epsilon}\right) \exp(-t) + \frac{y_0^2}{1-2\epsilon} \exp(-2\epsilon t) \\ y(t) = y_0 \exp(-\epsilon t), \end{cases} \quad (4.29)$$

De fato, dado que não se é possível linearizar o sistema nas vizinhanças da origem uma vez que a matriz jacobiana para 4.27 é mal condicionada, considere inicialmente 4.27 sem o termo quadrático na primeira equação uma vez que para qualquer ponto (x, y) próximo da origem seu valor pode ser considerado pequeno o suficiente para ser desprezado. Decorre então que 4.27 escreve-se como

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -\epsilon y, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

cuja segunda equação, $y' = -\epsilon y$ é linear tendo solução dada por $y(t) = y_0 \exp(-\epsilon t)$. Substituindo esta solução na primeira equação do sistema 4.27, obtém-se a equação $x' = -x + y_0^2 \exp(-2\epsilon t)$ para a qual busca-se uma solução particular da forma $x_p(t) = c \exp(-2\epsilon t)$. Logo,

$$-2\epsilon c \exp(-2\epsilon t) = c \exp(-2\epsilon t) + y_0^2 \exp(-2\epsilon t)$$

e, sendo a exponencial uma função não nula,

$$-2\epsilon c = c + y_0^2,$$

de onde $c = \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon}$ e portanto $x_p(t) = \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon} \exp(-2\epsilon t)$ é a solução particular procurada.

Pela presença do termo linear no segundo membro da equação $x' = -x + y^2$ a sua solução geral, considerando a particular $x_p(t)$ encontrada, é

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon} \exp(-2\epsilon t)$$

em que α é uma constante real. Impondo a condição inicial $x(0) = x_0$, tem-se finalmente

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon} \right) \exp(-t) + \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon} \exp(-2\epsilon t),$$

e portanto, a solução do Sistema 4.27 é dada pelas Equações 4.29.

A solução geral encontrada pode ser simplificada deixando-a em uma mesma escala de tempo; note que fazendo $x_0 = \frac{y_0^2}{1 - 2\epsilon}$, as Equações 4.29 reduzem-se a

$$\begin{cases} x(t) = \frac{y_0^2}{1-2\epsilon} \exp(-2\epsilon t) \\ y(t) = y_0^2 \exp(-\epsilon t), \end{cases}$$

em que $\left(x_0, \frac{y_0^2}{1-2\epsilon}\right)$ é a nova condição inicial para a qual o Sistema 4.27 apresenta solução em uma mesma escala de tempo $\tau = \epsilon t$. Desta solução é possível encontrar uma relação explícita entre as variáveis $x(t)$ e $y(t)$, substituindo a expressão da segunda Equação na primeira:

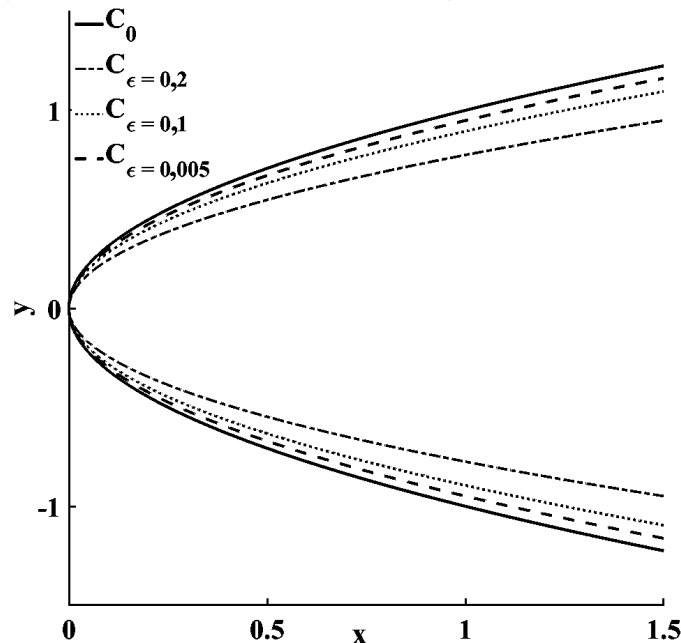
$$x(t) = \frac{y(t)^2}{1-2\epsilon}, \quad t \geq 0,$$

que de acordo com o Teorema 4.3 representa a variedade lenta em sua forma explícita:

$$C_\epsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tais que } x = \frac{y^2}{1-2\epsilon} \right\}. \quad (4.31)$$

Note que $C_\epsilon \rightarrow C_0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ em 4.31. Isto está de acordo com o item c) do Teorema 4.3. A Figura 4.11 ilustra a variedade lenta C_ϵ para alguns valores de ϵ além de exibir a variedade crítica C_0 .

Figura 4.11 - Ilustração do teorema de Fenichel: variedades lenta C_ϵ (linhas azuis tracejadas) tendendo à variedade crítica C_0 (linha azul contínua).



Fonte: Adaptado de Kuehn (2015).

Até este ponto da exposição consideramos o caso em que a variedade crítica não perde sua hiperbolicidade. Contudo, na maioria dos sistemas rápido-lento esta propriedade se perde em alguns ou em todos os pontos de C_0 . Deste modo, passar-se-á a considerar esta situação a partir deste ponto para que se possam derivar mais alguns resultados acerca das dinâmicas com múltiplas escalas de tempo.

Definição 4.16. *Seja C_0 a variedade crítica de um sistema rápido-lento. Denomina-se ponto singular a todo ponto $p_0 \in C_0$ para os quais a matriz $(D_x f)(p_0, 0)$ é singular, ou seja, não possui inversa. Formalmente,*

$$C_{0,s} = \{p_0 \in C_0 \text{ tais que } \nexists (D_x f)^{-1}(p_0, 0)\},$$

define o conjunto dos pontos singulares da variedade crítica C_0 . Seu complementar $C_{0,r}$ em relação à C_0 é definido como o conjunto dos pontos regulares do sistema, de modo que

$$C_0 = C_{0,s} \cup C_{0,r}.$$

Observe que se $p_0 \in C_{0,s}$ então C_0 é não hiperbólica em p_0 pois uma vez que não existe inversa para $(D_x f)(p_0, 0)$ então $\lambda = 0$ é um de seus autovalores. Como habitual, analisa-se o caso do oscilador de Van der Pol quanto aos pontos singulares e regulares de sua variedade crítica no Exemplo 4.7 a seguir.

Exemplo 4.7. *No caso limite, a variedade crítica C_0 para o oscilador de Van der Pol define-se a partir do Sistema 4.7 considerando $f(x, y) = y - x^3/3 + x = 0$, conforme Equação 4.26. Diferenciando $f(x, y)$ em relação à variável lenta τ , tem-se:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = (1 - x^2)\dot{x} + \dot{y} = 0,$$

e como $\dot{y} = -x$, tem-se

$$\dot{x} = \frac{x}{1 - x^2}, \tag{4.32}$$

de modo que o fluxo da variável lenta é definido explicitamente por esta equação. Contudo, vê-se que o fluxo associado à variável x não se define para $x = \pm 1$ e isto implica na divisão da variedade crítica C_0 nas três partes disjuntas, nomeadas S_0 , S_1 e S_2 de acordo com o Exemplo 4.5.

Em termos de comportamento geométrico a variedade crítica pode apresentar pontos de dobra $p \in \mathbb{R}^n$, em que o fluxo lento tende a colapsar uma vez que pela direita e pela esquerda de p o fluxo vem em sentidos opostos. Veja na Figura 4.10 (B) que de fato existem dois pontos sobre C_0 em que isto tende a ocorrer: as setas em azul,

representando o fluxo lento sobre C_0 parece que vão colidir nestes pontos, o que não ocorre, uma vez que o fluxo deve ser único para cada condição inicial. Mais adiante, ver-se-á que nas vizinhanças destes pontos o fluxo do sistema completo apresenta um comportamento bastante peculiar; geometricamente este é o comportamento dos denominados pontos de dobra cuja definição formal é dada à seguir.

Definição 4.17. *Seja $p = (x_0, y_0) \in C_0$ em que C_0 é a variedade crítica de um sistema rápido-lento. Define-se $p \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ como um ponto de dobra (do inglês, fold point) se as três condições a seguir são simultaneamente satisfeitas:*

a) $f_x(x_0, y_0) = 0$,

b) $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ e,

c) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Não é difícil ver que os pontos (x, y) tais que $x = \pm 1$ (e, conseqüentemente, $y = \mp 2/3$) em que o fluxo lento, de acordo com o Exemplo 4.7, não está definido são pontos de dobra. Por inspeção, considerando $f(x, y) = y - x^3/3 + x$ vê-se que as condições a), b) e c) da Definição 4.17 estão satisfeitas.

O ponto chave para se entender o que ocorre com o fluxo lento próximo dos pontos de dobra é a definição de órbitas singulares que são geradas pela concatenação de partes das dinâmicas rápida e lenta. Formalmente,

Definição 4.18. *Uma trajetória é singular se ela for a imagem homeomórfica $\gamma_0(t)$ de um intervalo real $I = (a, b)$ aberto em que:*

a) I está particionado de modo que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j = b$, para $j \in \mathbb{N}$.

b) A imagem de cada subintervalo $\gamma_0([t_{k-1}, t_k])$ para $k = 1, 2, \dots, j$ é uma trajetória do sistema rápido para o sistema lento, ou vice-versa.

c) A imagem $\gamma_0(a, b)$ possui uma orientação coerente com a orientação em cada subintervalo $\gamma_0([t_{k-1}, t_k])$ para $k = 1, 2, \dots, j$ induzida pelos fluxos rápido e lento.

Em geral, quando se há hiperbolicidade em uma variedade crítica C_0 as suas imagens C_ϵ difeomórficas dadas pelo Teorema 4.3 são boas aproximações para a dinâmica do

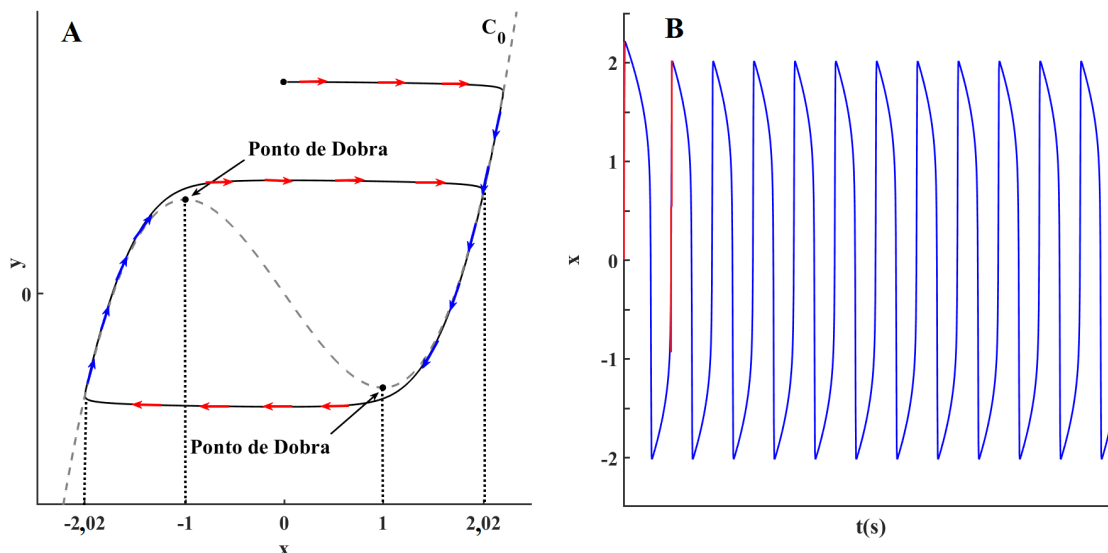
sistema completo e os pontos singulares de C_0 são os pontos de dobra por onde as aproximações da dinâmica do sistema complexo deve passar para algum instante de tempo. Este tipo de comportamento dinâmico é definido como oscilações de relaxação (GUCKENHEIMER, 2004; MISHCHENKO, 2013). Finalmente, é possível entender completamente a dinâmica mostrada na Figura 4.10 (B), como o Exemplo 4.8 mostra.

Exemplo 4.8. *Desde o início desta Seção tem-se explorado pouco a pouco a dinâmica do oscilador de Van der Pol. De modo sucinto o que fez-se, gradualmente, foi: (a) mostrar que o oscilador de Van der Pol pode ser analisado como um sistema (1, 1)-rápido-lento; (b) que sua variedade crítica C_0 , normalmente hiperbólica, corresponde aos pontos sobre a cúbica $y - x^3/3 + x$; (c) que sua variedade crítica divide-se de modo disjuncto em três subvariedades também normalmente hiperbólica S_0 , S_1 e S_2 sendo que S_1 é repulsora e as demais atratoras para o fluxo rápido; (d) que os pontos $P_1 = (1, -2/3)$ e $P_2 = (-1, 2/3)$ são pontos de dobra, em que o fluxo lento tende a colapsar e que portanto, (e) são pontos pertencentes à vizinhança da dinâmica do sistema completo para algum instante de tempo t .*

Para que não aconteça o colapso do fluxo lento nos pontos de dobra, a trajetória do fluxo se revela singular se alternando de modo concatenado entre as dinâmicas rápida e lenta de acordo com a Definição 4.18. Diante desta construção gradual feita pode-se entender que o oscilador de Van de Pol apresenta oscilações do tipo relaxação. Na sequência explora-se o significado da existência de oscilações de relaxação no espaço de fases para este oscilador e as implicações para a série temporal $x(t)$ que descreve a posição ao longo do tempo deste oscilador.

Note em (A) que partindo-se de uma condição inicial qualquer o fluxo rápido (indicado pelas setas vermelhas) é atraído para a subvariedade lenta S_2 que é subconjunto da variedade crítica C_0 (cúbica tracejada em cinza). O fluxo do sistema completo permanece sobre C_0 (indicado pelas setas azuis) no subintervalo $I_1 = [1, 2, 02]$ cuja orientação é horária até se aproximar perto do ponto de dobra com coordenada $x = 1$ onde o fluxo lento não se define e tende a colapsar mas então, novamente o fluxo rápido assume o controle do sistema atraindo-o, ainda em sentido horário, pelo subintervalo $I_2 = [-1, 1]$ até à subvariedade lenta S_0 por onde passa a percorrer, agora, sobre a variedade crítica C_0 no subintervalo $I_3 = [-2, 02, -1]$ quando novamente, dado o ponto de dobra, o sistema rápido assume o controle atraindo o fluxo em direção à S_2 no intervalo $I_4 = [-1, 2, 02]$ reiniciando assim o ciclo-limite.

Figura 4.12 - Oscilador de Van der Pol sem forçante: (A) retrato de fase com órbita singular e periódica; (B) série-temporal com manifestação de oscilação de relaxação.



Fonte: Produção do autor.

O Exemplo 4.8 está de acordo com a Definição 4.18 em que, neste caso específico, a órbita $\gamma_0(t)$ é uma imagem homeomórfica do intervalo real $I = [-2, 02, 2, 02]$. Note na Figura 4.8 item (B) que o comportamento do oscilador de Van der Pol no tempo onde destaca-se os saltos, formalmente chamado de *spikes*, provocados exatamente pela rápida atração da dinâmica rápida para uma subvariedade lenta; dois destes *spikes* estão destacados em vermelho: o primeiro, sobre o eixo y indica em (A) o segmento formado pela condição inicial até seu encontro com a subvariedade S_2 e o segundo correspondendo à primeira passagem da dinâmica rápida pelo subintervalo $I_2 = [-1, 1]$ em direção à S_0 atratora.

Esta rápida atração do fluxo rápido para subvariedades atratoras da dinâmica lenta é conhecida como *canard explosion*, fenômeno assim nomeado e descoberto pelo matemático francês Èric Benoît e pela primeira vez reportada em trabalho de sua autoria em 1981 (BENOÎT et al., 1981), seguidas de outras publicações envolvendo inclusive este fenômeno na presença de caos (BENOÎT; LOBRY, 1982; BENOÎT, 1990).

Este mesmo fenômeno tem sido descrito e observado em vários sistemas biológicos (BÖRGERS, 2017) e em sistemas químicos (SHCHEPAKINA; KOROTKOVA, 2013); infelizmente sua detecção numérica e observação é um problema em geral difícil dado

que a ocorrência de *canard explosions* acontecem em vizinhanças muito pequenas de pontos de bifurcação do espaço de fases (KUEHN, 2015).

Geometricamente as oscilações de relaxação são caracterizadas por estas rápidas transições entre dinâmicas rápida e lenta que geram os “pulsos unitários” (*spikes*) ou um conjunto de pulsos seguidos (*burstings*) por um período de aquiescência em que a dinâmica lenta está dominando o sistema completo. Ainda há a possibilidade da manifestação de caos nestes sistemas, o que torna sua descrição dinâmica e geométrica ainda mais interessante.

No contexto deste trabalho são de particular interesse as manifestações da dinâmica rápida caracterizadas pela ocorrência de *burstings* e livre de *spikes*.

4.4 Sincronização em sistemas com múltiplas escalas de tempo

Nesta Seção faz-se uma revisão da literatura científica existente sobre o fenômeno da sincronização e de sua detecção em redes de osciladores cujas dinâmicas apresentam múltiplas escalas de tempo e para as quais é um desafio a atribuição de fase.

Diversos trabalhos, principalmente na área de Neurociência, têm investigado a sincronização para sistemas com múltiplas escalas de tempo (IZHIKEVICH, 2001; XIA; QI-SHAO, 2005; KLIMESCH et al., 2008; WANG et al., 2011) mas não limitado a ela; há trabalhos que investigam o mesmo fenômeno em redes de osciladores eletroquímicos caóticos (KISS et al., 2006) ou ainda usando modelos teóricos como osciladores de Hindmarsh-Rose acoplados (WANG, 1993; INNOCENTI et al., 2007; OMELCHENKO et al., 2010).

A última destas referências indica a necessidade de se definir o conceito de sincronização para cada uma das diferentes dinâmicas presentes; para a lenta define-se a sincronização do mesmo modo como feito para sistemas periódicos ou caóticos sendo possível usar qualquer um dos métodos apresentados na Subseção 4.2.2 e para a dinâmica rápida define-se a sincronização analisando-se localmente os *burstings* e ainda os *spikes* que os constituem.

De maneira mais específica em relação à dinâmica rápida define-se a sincronização de *burstings* quando há igualdade entre o número de *spikes* presentes. Esta definição não assegura que os *spikes* exibam comportamento síncrono e portanto, define-se ainda a sincronização de *spikes* como a de *burstings* com a adicional exigência de que os *spikes* também ocorram de modo síncrono.

Quando as duas diferentes dinâmicas encontram-se sincronizadas diz-se que o sistema exibe sincronização completa. Se apenas uma das dinâmicas exibe sincronidade diz-se que a sincronização é parcial.

A detecção da sincronização em redes de sistemas com múltiplas escalas de tempo apresenta desafios adicionais. Ainda que para a dinâmica lenta isto possa ser feito atribuindo-se a fase via qualquer um dos métodos aplicáveis a dados de comportamento periódico ou caótico, para a dinâmica rápida a fase não é de fácil atribuição pois neste caso ela não é uma variável instantânea.

Neste contexto, a revisão da literatura científica pertinente feita permite identificar os meios pelos quais a sincronização em redes de osciladores cujas dinâmicas possuem diferentes escalas temporais tem sido investigada e detectada.

Uma das abordagens mais comuns é admitir que a fase para o sistema rápida permanece constante nos instantes de tempo em que a respectiva dinâmica não se manifesta sofrendo um incremento linear igual a 2π entre os instantes de tempo inicial e final de cada *bursting* (BOARETTO et al., 2018).

Outra abordagem para a detecção da sincronização nestes sistemas é considerar que entre dois instantes t_k e t_{k+1} de tempo nos quais se iniciam dois *burstings* sucessivos a fase sofre um incremento linear de 2π (BATISTA et al., 2009).

Métodos de detecção da sincronização entre dinâmicas rápida baseados na simples observação da ocorrência de *burstings* em um mesmo intervalo de tempo e com o mesmo número de *spikes* também se encontram na literatura (KARANTONIS et al., 2009)

Métodos baseados em filtragens no domínio da frequência também são utilizados. Filtros passa alta e passa baixa são usados para caracterizar as dinâmicas rápida e lenta como conteúdos de alta e baixa frequências sendo a sincronização detectada pela análise das estruturas presentes ao longo da diagonal das chamadas curvas de *Lissajous* em que uma variável é plotada em função da outra (WU et al., 2006).

Esta mesma abordagem de se associar o conjunto de baixas e altas frequências às manifestações das dinâmicas lenta e rápida é utilizada em (KISS et al., 2006) na investigação da sincronização entre osciladores eletroquímicos na presença de regime caótico para a dinâmica lenta.

No caso de dinâmicas caóticas também se encontram trabalhos em que a sincronização é investigada baseando-se na classificação das bifurcações presentes sendo medida pela taxa de convergência de diferentes trajetórias para atratores reconstruídos via Teorema de Taken's (IZHIKEVICH, 2000b; IZHIKEVICH, 2001).

Vê-se que todas estas abordagens possuem desafios em suas aplicações. No caso das três primeiras há o incômodo de dependerem fundamentalmente do que se entende pelo início e término de cada *bursting* o que não é simples uma vez que estes conceitos não estão bem definidos no caso geral.

Os métodos baseados em filtragem dependem fortemente dos filtros utilizados sendo mais ou menos efetivos conforme as características do filtro utilizado. A abordagem via curva de *Lissajous* é bastante imprecisa uma vez que não há clareza sobre o que se entende, de modo não ambíguo, por estruturas ao longo da diagonal na representação gráfica e por fim, a abordagem via classificação de bifurcações e reconstruções de atratores pressupõe um conhecimento muito maior do que aquele que se pode extrair de uma série temporal experimental e isto dificulta seu uso em dados experimentais sobre o qual se tem pouco conhecimento teórico. Além disto nenhuma destas abordagens permite que se investigue a sincronização parcial.

No Capítulo 6 propõe-se um novo método para a separação entre os diferentes comportamentos dinâmicos e uma abordagem, também inédita, para a investigação da sincronização entre as dinâmicas lenta e rápida, ambas fundamentadas na análise de *wavelets* e que particularmente são úteis no tratamento de dados experimentais uma vez que suas aplicações exigem apenas o conhecimento de uma série temporal relacionada com o fenômeno em investigação. Particularmente no caso da abordagem para investigar-se a sincronização consideram-se meios de atribuir fase instantânea para dinâmicas lenta e de se construir representantes locais de fase para a dinâmica rápida.

Parte II

ESTRATÉGIAS DESENVOLVIDAS NAS APLICAÇÕES E RESULTADOS

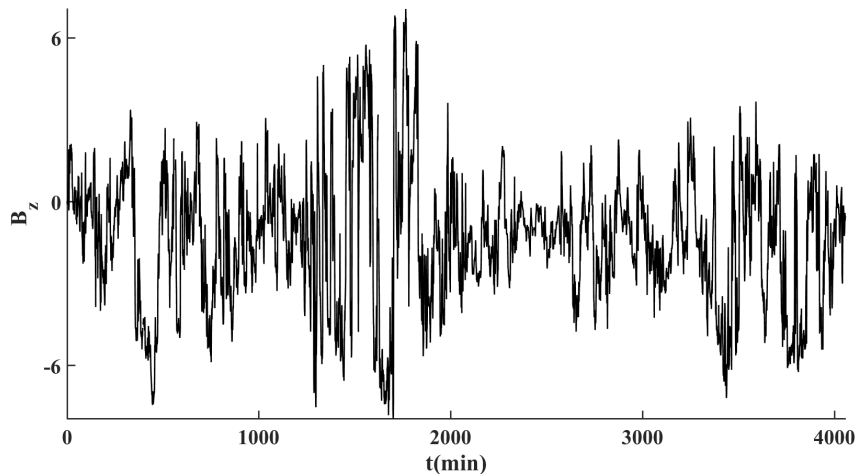
5 ANÁLISE DE FALHAS EM DADOS TÍPICOS DE GEOFÍSICA ESPACIAL

Neste capítulo apresentam-se os resultados relativos ao estudo do uso de tratamentos numéricos de falhas em sinais experimentais, típicos da Geofísica Espacial e seus possíveis efeitos quando comparados com a aplicação da análise tempo-escala, conforme apresentada na Seção 2.3 e com o uso das *gapped wavelets* introduzidas na Seção 2.4 do Capítulo 2.

5.1 Dados e metodologia

Os dados considerados são de eventos HILDCAA (do inglês, *High-Intensity, Long-Duration, Continuous Auroral Electrojet Activities*) relacionados com a presença de ondas de Alfvén no meio interplanetário e correspondem à medida da componente norte-sul do campo magnético interplanetário definida por um sistema de referências baseado na direção Sol-Terra. Considera-se, para o estudo de caso, a componente B_z deste sistema de referências, medida em nanoteslas (nT). Os dados são altamente oscilatórios; na Figura 5.1 vê-se o típico comportamento no tempo das séries temporais consideradas.

Figura 5.1 - Comportamento típico em tempo do dado relativo à componente B_z do campo magnético interplanetário.



Fonte: Produção do autor.

Estes dados, obtidos via *National Aeronautics and Space Administration* (NASA)¹ com cadência de 1 minuto, compreendem o período entre os anos de 1981 até 2012, de

¹<https://omniweb.gsfc.nasa.gov/>

modo considerou-se 120 séries temporais. Após a seleção, apenas 53 séries-temporais foram de fato consideradas por não possuírem falhas nos instantes de tempo inicial e final cuja lista pode ser encontrada em [Magrini et al. \(2017\)](#).

A seleção desta forma é importante porque métodos interpolatórios são usados e cuja aplicação pressupõe o conhecimento dos extremos dos intervalos nos quais deseja-se fazer a interpolação.

As falhas existentes nas 53 séries temporais consideradas são, para este estudo, categorizadas em quatro classes relacionadas com o comprimento que possuem: padrão A para a presença de falhas cujo comprimento é igual ou inferior à 1% do comprimento total da série e padrões B, C e D para a presença de falhas cujo comprimentos estão nos intervalos $]1\%, 5\%]$, $]5\%, 10\%]$ e maiores ou igual a 10%, respectivamente, em relação ao comprimento de cada série temporal analisada.

Esta análise preliminar quanto ao comprimento das falhas revelou que 39 das séries-temporais possuem exclusivamente falhas do padrão A enquanto o número de séries para os padrões B, C e D são 02, 09 e 03, respectivamente. Portanto, o conjunto de dados analisados pode ser considerado um conjunto no qual existe a predominância de falhas relativamente pequenas.

O objetivo do estudo realizado é o de comparar (a) a influência da posição das falhas no sinal f analisado e (b) os artefatos que tais falhas, de acordo com o comprimento que possuem e sua localização temporal introduzem no escalograma e conseqüentemente no espectro global *wavelet* quando interpretado como medida de energia em baixas e altas frequência mediante a aplicação da *CWT standard* em conjunto com algum método numérico de tratamento das falhas em uma etapa de pré-processamento e da *CWT adaptativa* para a qual não se exige a necessidade de qualquer pré-processamento numérico. Em ambos os casos a função analisadora foi a *wavelet* de Morlet.

Considera-se como métodos numéricos de tratamento das falhas as *splines* cúbicas, os polinômios cúbicos de Hermite e a interpolação linear. Registra-se que outros métodos numéricos podem ser considerados mas a escolha destes deve-se ao fato de serem métodos numéricos bastante difundidos no meio acadêmico e particularmente nas áreas em que as técnicas da Análise Numérica são utilizadas.

A descrição dos métodos interpolatórios utilizados neste trabalho podem ser encontrados em livros de Análise Numérica como nas obras clássicas de [Fröberg \(1965\)](#) e

Schatzman e Schatzman (2002). Ainda, destaca-se que o uso de métodos multi-escala na análise nas ciências espaciais e atmosféricas é bastante consolidado na literatura científica (DOMINGUES et al., 2005).

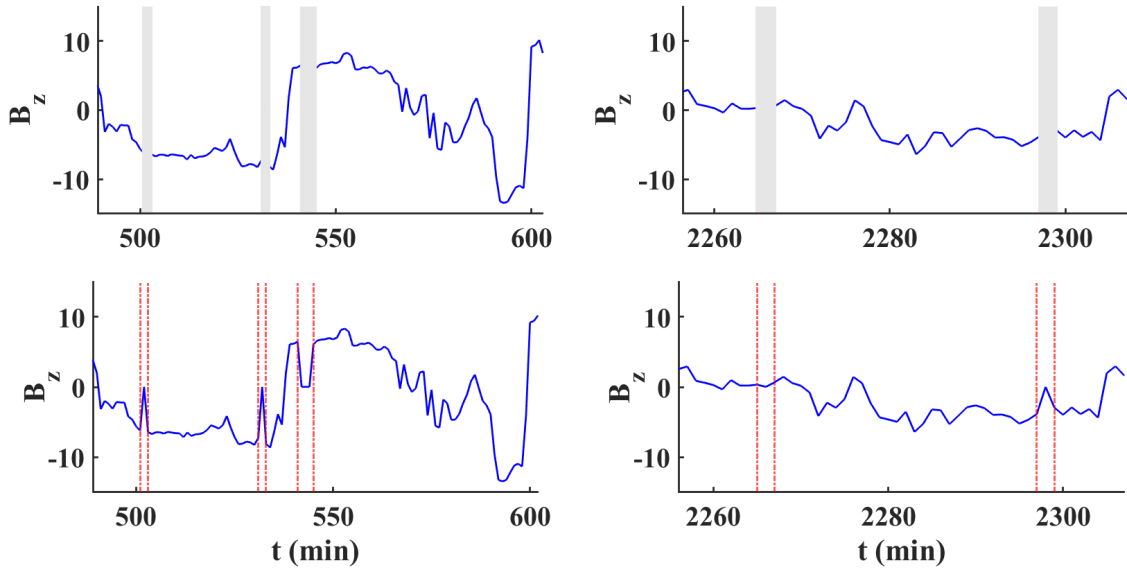
Para que o objetivo da pesquisa conduzida pudesse ser atingido, utilizando uma série temporal previamente selecionada dentre o conjunto de dados de eventos HILDCAA considerados considera-se um sinal *benchmark* e a partir dele os testes são realizados.

Os escalogramas foram analisados quanto às diferentes estruturas presentes e fez-se a comparação entre os diferentes espectros globais *wavelet* obtidos, considerado como medida local de energia por escala. Resumidamente, a metodologia aplicada pode ser descrita pelos seguintes passos:

- a) Um sinal *benchmark*, para efeitos de comparação, foi gerado e sua análise tempo-escala foi performada de modo a ser possível analisar as reais estruturas presentes no escalograma e o espectro global *wavelet*.
- b) Neste sinal *benchmark* foi feita a introdução de falhas de modo aleatório e de acordo com os padrões A, B, C e D, definidos anteriormente.
- c) Cada série obtida no item anterior foi analisada usando a CWT e a CWT adaptativa e os respectivos escalogramas e espectros globais foram computados.
- d) A comparação entre o escalograma e o espectro global original com os gerados no passo anterior foi usada como base para comparação quanto a preservação de estruturas locais e superestimação ou subestimação da energia detectada em baixas e altas frequências.

A geração de um sinal *f benchmark* permite a comparação dos efeitos em termos da análise tempo-escala. Em sua construção considerou-se o evento 80 de acordo com a numeração utilizada em Magrini et al. (2017) e que possui 14 falhas mas todas menores do que 1% do seu comprimento original. Em termos globais, estas 14 falhas correspondem a apenas (aproximadamente) 0,35% dos registros. Isto justifica nossa escolha em torná-lo um sinal *benchmark* para as análises desenvolvidas, suprimindo-as e tornando-as igual à média aritmética simples dos registros conhecidos. Neste caso, dadas as 4057 entradas do sinal com 14 falhas a média usada para preenchê-las é igual a $v_m = -1,39$.

Figura 5.2 - Painel superior: sinal f relativo ao evento 80 com regiões de falha destacadas em cinza. Painel inferior: sinal f cujas falhas foram substituídas pelo valor médio $v_m = -1,39$.



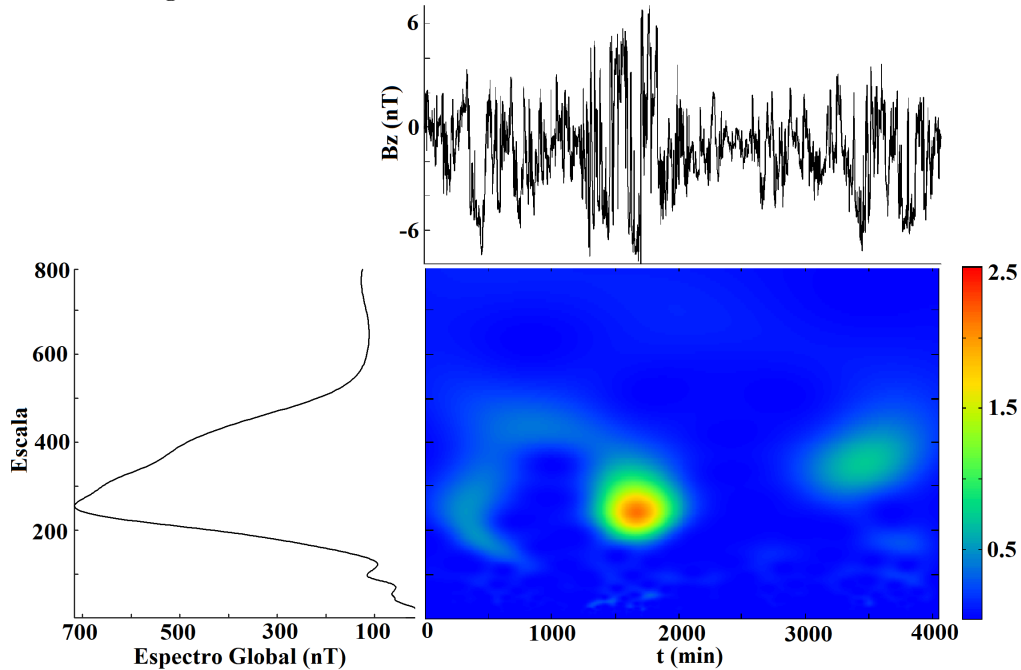
Fonte: Produção do autor.

Note que a introdução do valor $v_m = -1,39$ não é capaz de provocar mudanças bruscas no sinal usado como *benchmark*, agora sem qualquer falha. Compare com a Figura 5.2, onde se vê claramente a supressão das falhas conforme descrito e realizada de modo a não descaracterizar o comportamento do sinal experimental relativo ao evento 80 no domínio do tempo.

Aplicou-se a análise tempo-escala no sinal $f_{bench}(t)$ com a *wavelet* de Morlet usando $\omega_0 = 2\pi$ considerando 800 escalas conforme visualizado na Figura 5.3. A leitura do espectro global *wavelet* indica que existe alguma parcela de energia após as escalas maiores que 800 mas estas foram desconsideradas porque a deformação provocada pelo parâmetro de dilatação descaracteriza a auto simetria da função *wavelet* $\psi_M(t)$.

Note que existe uma contribuição em energia bastante significativa próxima à escala $a = 250$, além de outras estruturas de energia principalmente em baixas e médias escalas o que, em outras palavras, indica contribuições significativas das frequências mais altas que das mais baixas. Isto está plenamente de acordo com o sinal $f_{bench}(t)$ no domínio do tempo onde vê-se que as mudanças e/ou rajadas são abruptas e ocorrem rapidamente não apresentando temporalmente qualquer suavidade.

Figura 5.3 - Análise tempo-escala do sinal *benchmark* com respectivo escalograma e espectro global *wavelet*.



Fonte: Produção do autor.

Para a geração dos sinais com falha de acordo com os padrões A, B, C e D optou-se por: (a) não introduzir falhas nas bordas dos sinais porque isto implicaria em não ser possível o pré-processamento numérico com os métodos interpolatórios escolhidos e (b) introduzir um total de 10, 10, 5 e 4 regiões de falhas, respectivamente para cada um dos padrões A, B, C e D. Tanto os comprimentos a serem utilizados quanto os pontos iniciais de sua introdução no sinal *benchmark* foram obtidos de modo *pseudo*-aleatório em um computador para tornar o processo de análise o menos enviesado possível.

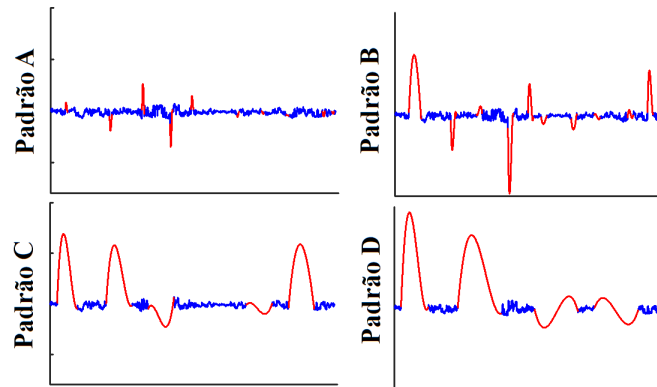
Tabela 5.1 - Resumo dos intervalos de falha introduzidos no sinal *benchmark*.

Padrão	Comprimento (%) dos Intervalos de Falhas	Comprimento (min) dos Intervalos de Falhas	Número de Intervalos de Falhas
A	0,75	31	10
B	2,00	82	5
	4,50	183	5
C	7,0	284	2
	9,0	366	3
D	10,00	406	2
	16,00	650	2

Fonte: Produção do autor.

Os padrões A, B, C e D pré-processados com splines cúbicos estão apresentados na Figura 5.4, em que o eixo-x varia no intervalo $I = [0, 4057]$ e foi omitido por melhor visualização. Estão plotados separados dos demais casos interpolatórios porque seu uso altera de modo significativo a amplitude do sinal $f_{bench}(t)$, o que não ocorre no tratamento com Hermite cúbico e interpolação linear.

Figura 5.4 - Sinais pré-processados com *splines* cúbicos. Painel superior: padrões A e B. Painel inferior: padrões C e D, respectivamente.

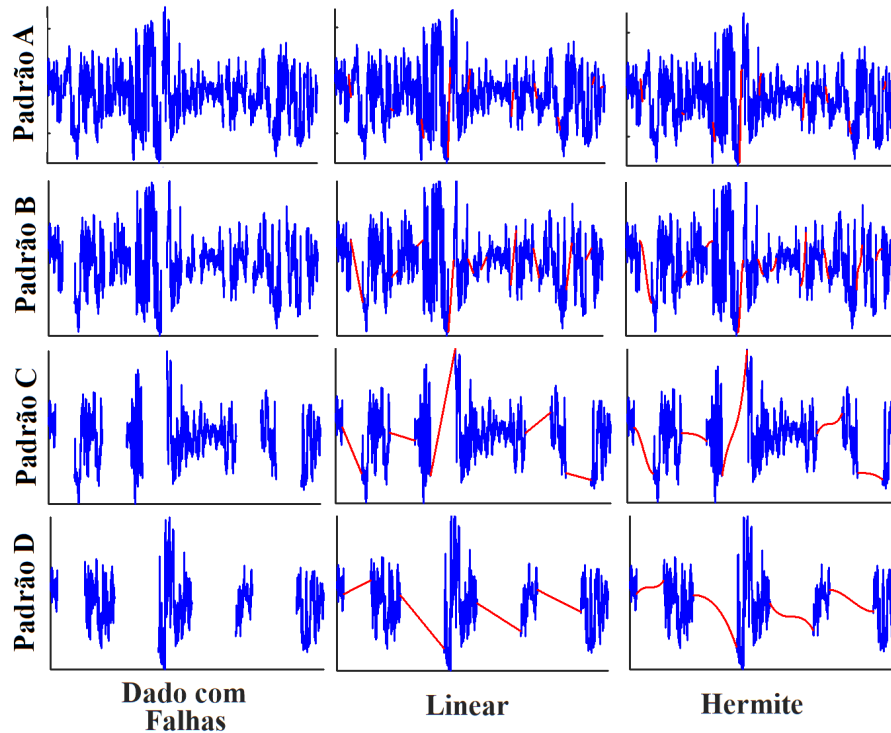


Fonte: Produção do autor.

A amplitude do sinal após o uso dos *splines* torna-se até 20 vezes maior que a amplitude do sinal *benchmark*. Isto se reflete na Figura 5.4 onde o eixo das ordenadas possui a mesma amplitude a fim de que se pudesse estabelecer a relação entre o comprimento da falha interpolada e a magnitude introduzida erroneamente por este método de interpolação.

Para os polinômios cúbicos de Hermite e a interpolação linear tal fenômeno não acontece. Os sinais com falha tratados numericamente com eles apresentam a mesma amplitude que o sinal *benchmark*, o que se espera pois, enquanto existem restrições que se aplicam à derivada do sinal interpolado quando se usam polinômios de Hermite, a interpolação linear preserva naturalmente a amplitude por considerar uma taxa de crescimento constante entre dois pontos quaisquer que representam o início e o final das falhas. É possível ver as séries interpoladas na Figura 5.5. Neste caso os dois eixos foram omitidos, por melhor visualização, mas possuem amplitudes e interpretações idênticas aos eixos da Figura 5.1.

Figura 5.5 - Sinais pré-processados com polinômios cúbicos de Hermite e com a interpolação linear para os padrões A, B, C e D respectivamente.



Fonte: Produção do autor.

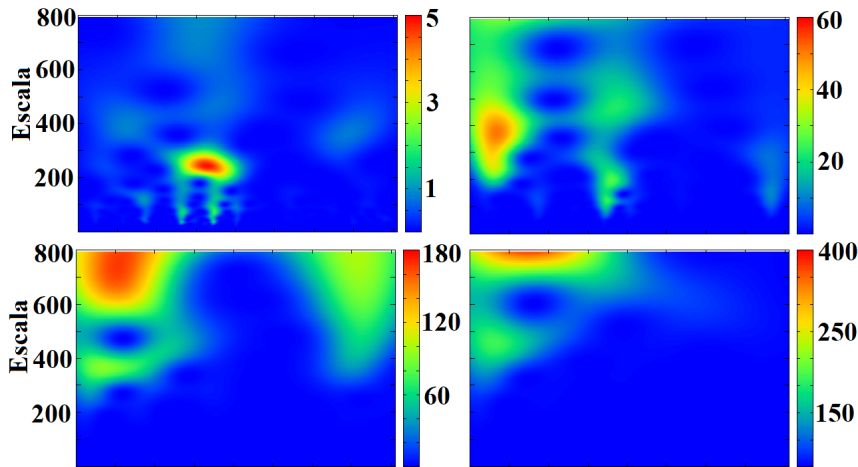
5.2 Discussões e conclusões parciais

Apresenta-se nesta Seção os resultados e discussões sobre o tratamento numérico de dados experimentais como uma etapa anterior à análise tempo-escala bem como a comparação deste tratamento com a aplicação da CWT adaptativa.

A análise baseia-se nas diferenças entre a energia detectada em cada série-temporal derivada de cada um dos padrões introduzidos considerando a supressão das falhas de acordo com cada um dos métodos numéricos utilizados. Esta análise fundamenta-se fortemente na observação espectro global *wavelet* uma vez que esta ferramenta nos fornece a distribuição de energia por escalas.

Também faz-se a análise das estruturas locais de energia presentes no escalograma em cada um dos casos comparando-as com as realmente existentes conforme vistas na Figura 5.3 para fazer uma análise que considerasse a introdução de estruturas de energia espúrias e também a possível supressão das verdadeiras estruturas de energia presentes.

Figura 5.6 - Escalogramas das séries temporais obtidos pela CWT após pré-processamento via *splines*. Painel superior: padrões A e B. Painel inferior: padrões C e D, respectivamente.



Fonte: Produção do autor.

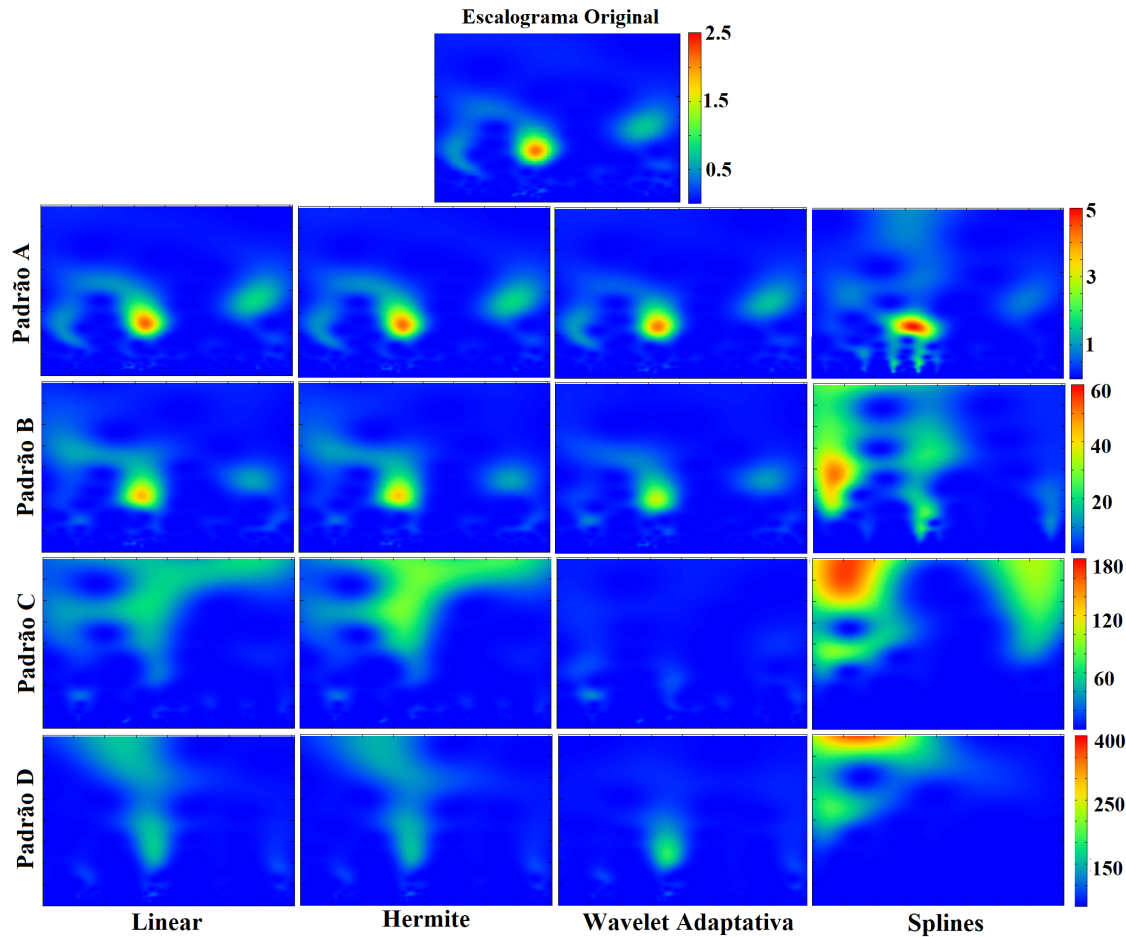
Fez-se a opção de apresentar os escalogramas para as séries interpoladas com *splines* cúbicas na Figura 5.6 separadamente dos demais uma vez que as leituras de energia para cada um dos quatro padrões de falha estudados são distintas entre si e sempre superestimadas chegando a ser 160 vezes (padrão D) superior quando comparadas com a energia do sinal $f_{bench}(t)$, conforme Figura 5.3. O eixo das abscissas foi omitido para melhor visualização e representa o tempo como na Figura 5.1.

A primeira constatação é o fato de que o uso de *splines* cúbicas não é um bom método para pré-processamento de falhas em sinais. Observe que, mesmo no caso de falhas pequenas (padrão A) já ocorrem introduções de artefatos no escalograma e que a energia presente na estrutura verdadeira, detectada pela análise do sinal *benchmark*, já deforma-se pelo tratamento numérico feito.

Nos casos dos padrões B, C e D valem as mesmas constatações com a adicional observação de que no caso de falhas maiores (padrões C e D) as reais estruturas existentes no sinal são perdidas e em contrapartida várias outras, todas em altas escalas e, portanto em baixas frequências, são introduzidas de modo espúrio.

Isto se explica observando a Figura 5.4; em contraste com o comportamento natural do sinal em possuir conteúdo de alta frequência, em cada região de falha o tratamento numérico por *splines* introduziu uma curva suave (e, portanto lida como de baixa frequência/alto escala) com registros muito acima da média do sinal o que altera significativamente a magnitude do espectro global.

Figura 5.7 - Escalogramas das séries temporais obtidos pela CWT após pré-processamentos numéricos e via CWT adaptativa. As três primeiras colunas possuem leituras de palheta de cor como a do escalograma original (linha superior).



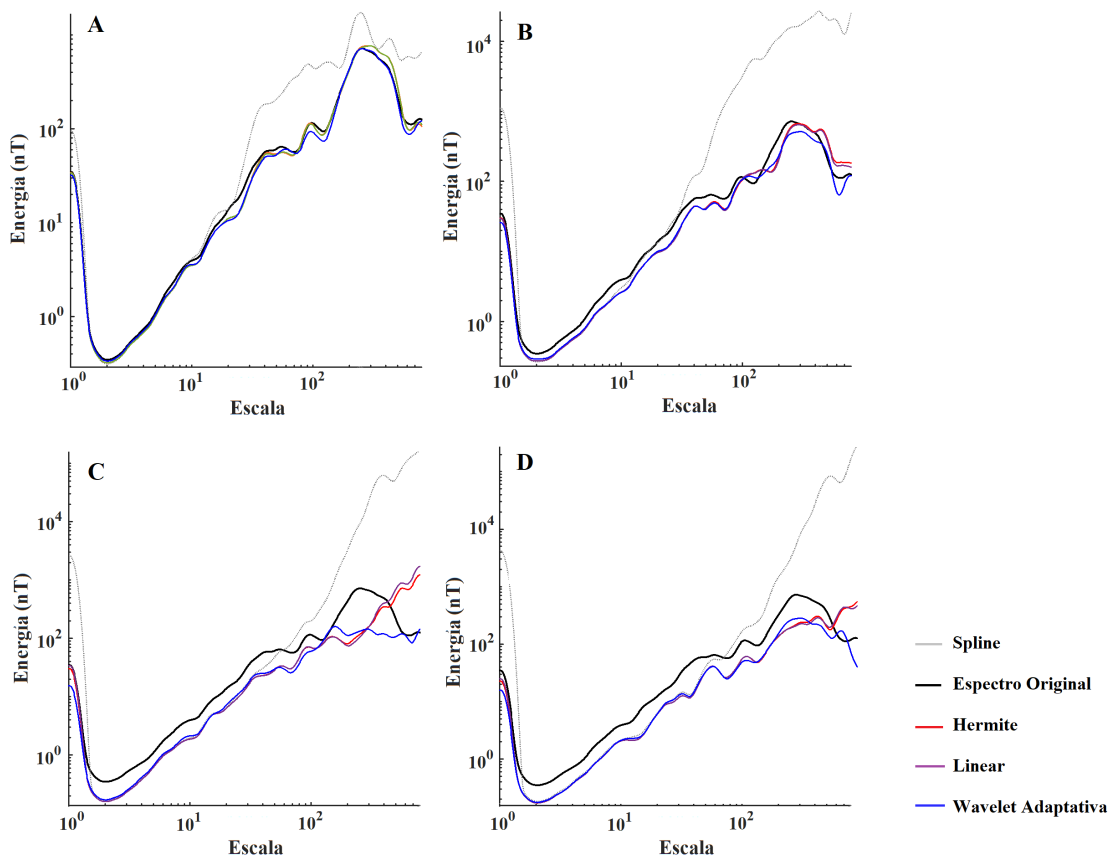
Fonte: Produção do autor.

Quanto ao uso dos polinômios cúbicos de Hermite e da interpolação linear, cujos escalogramas estão plotados na Figura 5.7 percebe-se que existe a preservação da principal estrutura de energia existente no sinal *benchmark* ainda que, como esperado, essa preservação se mostra superior quando se trata das menores falhas (padrão A). Destaca-se também que estes dois métodos de tratamento introduzem energia espúria em altas escalas para os padrões de falha C e D, perdendo completamente a capacidade de identificação das corretas estruturas de energia. Além disso, destaca-se que os dois métodos apresentam escalogramas bastante equivalentes; compare a primeira com a segunda coluna da Figura 5.7; este fato é curioso porque enquanto a interpolação linear não impõe condição alguma sobre os pontos a serem interpolados

sendo a interpolação mais simples, seus resultados são praticamente idênticos aos obtidos com os polinômios cúbicos de Hermite cujo grau é maior e para o qual se impõe algumas condições sobre as derivadas nos pontos interpolados.

Por fim, a terceira coluna da Figura 5.7 apresenta os resultados com a aplicação da *wavelet* adaptativa. Para falhas dos padrões A e B as estruturas de energia são corretamente identificadas ainda que com uma pequena deformação no segundo caso. O padrão C merece um comentário especial: a falha foi introduzida exatamente sobre a região de maior energia no sinal *benchmark*: compare com a Figura 5.3; isto explica a pouca energia detectada no escalograma pela técnica adaptativa e revela que as regiões de falha não contribuem para a energia detectada no sinal e é exatamente por isso que seu uso evita a introdução de estruturas erradas e energia espúrias no sinal analisado sendo, portanto, uma boa alternativa para sinais com falhas relativamente grandes. Para efeitos de comparação com os demais métodos, na quarta coluna os resultados com o uso de *splines* são novamente apresentados.

Figura 5.8 - Comparação entre os espectros globais *wavelet*.



Fonte: Produção do autor.

Por sua vez, a análise dos espectros globais *wavelet* para cada um dos quatro padrões estudados confirma a discussão apresentada nos parágrafos anteriores. Na Figura 5.8, com eixos em escala logarítmica, o espectro global *wavelet* do sinal $f_{bench}(t)$ está representado por uma linha contínua preta. É evidente que o uso das *splines*, gera um espectro global *wavelet* que superestima a energia tanto em baixas quanto em altas escalas (linha pontilhada cinza);

Em todos os casos apresentados, os espectros globais relativos aos polinômios cúbicos de Hermite e à interpolação linear, linhas vermelhas e roxas contínuas, respectivamente, praticamente não apresentam variações, sendo assim do ponto de vista prático, indiferente o uso de um ou outro método interpolatório como uma etapa anterior ao pré-processamento para a aplicação da CWT.

Com exceção do padrão A em que as falhas pequenas são representadas freqüentemente de modo satisfatório, desconsiderando aqui as *splines* cúbicas na análise, em todos os casos o uso da CWT adaptativa subestima a energia presente nas escalas; isto ocorre porque, ao invés de introduzir informação espúria acerca da energia presente em um sinal qualquer esta técnica simplesmente desconsidera as regiões em que não se há informação uma vez que estas regiões continuam sem informação introduzida de modo artificial via tratamentos interpolatórios ou numéricos, por exemplo.

Quanto à correta identificação do pico central de energia no espectro global, com exceção do caso C, mais delicado cuja falha se localiza exatamente sobre a região em o sinal f apresenta sua principal estrutura de energia, em todos os demais casos a CWT adaptativa o detectou corretamente, diferentemente dos demais métodos que por mais que aproximassem o espectro global só foram capaz de fazer esta correta identificação no caso de pequenas falhas (padrão A).

Resumindo a discussão feita tem-se que: (a) os *splines* causam superestimação do espectro global calculado tanto em altas quanto em baixas frequências não o tornando confiável para o tratamento de falhas existentes em sinais quaisquer; (b) o tratamento numérico via polinômios cúbicos de Hermite ou via interpolação linear apresentam praticamente os mesmos resultados independentes do padrão de falha considerado; (c) para pequenas falhas, padrão A considerado, os métodos apresentaram resultados coerentes quanto ao comportamento do espectro global e (d) apesar de haver pequena perda de energia no espectro global no uso da CWT adaptativa seu uso apresenta melhores resultados pois além de aproximar o espectro original ainda identifica os verdadeiros picos de energia existentes e isto a torna particularmente

interessante para os casos em que se deseja detectar periodicidades nos dados, como é o caso da Geofísica Espacial, por exemplo.

Os resultados desta pesquisa encontram-se publicados e apresentam além da análise aqui feita um estudo sobre a relação entre a localização da falha ao longo da série temporal em que está presente e as análises tempo-escala ([MAGRINI et al., 2017](#)).

6 APROXIMAÇÕES DAS DINÂMICAS LENTA E RÁPIDA E DETECÇÃO DA SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS COM MÚLTIPLAS ESCALAS DE TEMPO

Este Capítulo dedica-se a apresentar dois métodos inéditos que, em conjunto, permitem a investigação da sincronização em sistemas com múltiplas escalas de tempo, considerando separadamente as dinâmicas lenta e rápida presentes. No que segue, admite-se particularmente o caso em que a dinâmica lenta é caótica e a dinâmica rápida é caracterizada pela manifestação de *burstings* irregulares ao longo do tempo sendo, a sincronização estudada no sentido de travamento de fase.

O primeiro dos métodos apresentados refere-se ao cálculo de aproximações para as dinâmicas rápida e lenta de modo que elas poder ser separadas a partir do conhecimento de apenas uma série temporal unidimensional relacionada com o sistema completo em que se manifestam.

O segundo, permite que seja gerado um representante para a fase da dinâmica rápida que é capaz de indicar ou não a presença da sincronização entre essa dinâmica via análise das regiões de *overlaps* em que os *burstings* ocorrem.

Os dois métodos fundamentam-se em técnicas de análise *wavelets*, introduzidas nos Capítulos 2 e 3.

A Seção 6.1 apresenta a metodologia de separação das dinâmicas e exemplifica seu uso no caso de dados sintéticos relativos a sistemas do tipo Hindmarsh-Rose acoplados e também no caso de dados experimentais relacionados com osciladores eletroquímicos.

A Seção 6.2 apresenta a metodologia de geração dos representantes para a fase da dinâmica rápida e como a sincronização pode ser detectada usando-se a informação contida neles. Também se propõe uma modificação para o parâmetro de ordem, clássica medida de quantificação da sincronização, adequada para o caso da dinâmica rápida em estudo. O método também é exemplificado considerando os mesmos conjuntos de dados que são discutidos na Seção 6.1.

6.1 Aproximação das dinâmicas rápida e lenta via CWT

Nesta Seção descreve-se como as técnicas e métodos *wavelets* são capazes de aproximar os comportamentos dinâmicos rápido e lento presentes em uma série temporal unidimensional proveniente de um sistema onde estas duas dinâmicas estão presente.

A possibilidade de aproximar as diferentes dinâmicas, separando-as em série temporais em que apenas uma delas está presente permite que o sistema completo original seja decomposto em seus subsistemas rápido e lento, cujas análises permitem compreender em maiores detalhes a dinâmica de múltiplas escalas temporais. Essa compreensão permite analisar a existência da sincronização entre as diferentes escalas temporais (OMELCHENKO et al., 2010), prever comportamentos climáticos (HELD et al., 2010), estudar o comportamento neuronal (MAZZINO et al., 2005) dentro outras aplicações em variadas áreas como controle de sistemas (FUJIMOTO; KANEKO, 2003; HOVAKIMYAN et al., 2006).

Em teoria, conforme Seção 4.3 a separação das dinâmicas é possível partindo-se do conjunto de equações diferenciais que regule o sistema completo e revela-se importante para o entendimento global das dinâmicas. Contudo, a análise de sistemas experimentais não pode ser feita dessa maneira, pois as equações que regem o sistema completo ou são desconhecidas ou provêm de um modelo simplificado que apenas aproximam a informação contida no dado experimental.

A separação das dinâmicas rápida e lenta tem sido objeto de pesquisa em diversas áreas e reportadas mas as técnicas desenvolvidas exigem mais conhecimento sobre o sistema completo do que o método baseado em *wavelets* aqui proposto; alguns destes trabalhos reportam a necessidade do conhecimento dos autovalores e autovetores do sistema completo (CHOW; KOKOTOVIC, 1976), outros, usam algoritmos iterativos que pressupõe o conhecimento das trajetórias do sistema em baixas dimensões (GOUSSI; VALORANI, 2006) ou ainda propõe a separação das dinâmicas pela reconstrução da variedade lenta, o que não é um problema simples (CHIAVAZZO, 2012).

Essas considerações destacam a relevância do método proposto uma vez que o único pressuposto para sua aplicação é o de se dispor de uma série temporal unidimensional que descreva a evolução da dinâmica completa ao longo do tempo.

Particularmente esta Seção organiza-se em quatro Subseções. Na primeira, faz-se a descrição do método de separação das dinâmicas; na segunda e terceira, descrevem-se os conjuntos de dados teóricos e experimentais utilizados e na quarta, apresenta-se a aplicação do método nos conjuntos de dados descritos além de uma discussão acerca dos resultados obtidos.

6.1.1 Método de aproximação das dinâmicas lenta e rápida

A Seção 4.3 descreve, do ponto de vista matemático, um dos principais mecanismos pelos quais os sistemas com múltiplas escalas de tempo apresentam, no domínio do tempo, *spikes* e/ou *burstings* interrompidos por períodos de aquiescência: trata-se da existência de órbitas singulares nas quais os fluxos relativos às dinâmicas rápida e lenta alternam-se no controle do comportamento dinâmico completo de um sistema.

Do ponto de vista do domínio da frequência, os *spikes/burstings* manifestam-se nas altas frequências e os períodos de aquiescência manifestam-se nas baixas por serem típicas ondas de maior comprimento e suavidade. Como a CWT é capaz de detectar as sub-bandas de frequência que estão presentes ao longo do tempo a sua aplicação é capaz de caracterizar as típicas manifestações das dinâmicas rápida e lenta.

Partindo destes pressupostos, a análise do espectro *wavelet* global, em conjunto com a análise do escalograma de energia de uma série temporal em que as diferentes dinâmicas se manifestam, oferece a ferramenta adequada para a seleção das sub-bandas de frequência em que cada dinâmica se manifesta e, via inversão da transformada *wavelet* usando apenas estas sub-bandas, cada dinâmica pode ser reconstruída separadamente no domínio do tempo.

Estas considerações fundamentadas pelo Apêndice A e Capítulo 2 são a base da metodologia para a separação dos dois comportamento dinâmicos de forma a isolá-los (MAGRINI et al., 2020). Para tanto, considere que $f(t)$ é uma série temporal unidimensional relacionada com um sistema de múltiplas escalas.

Inicialmente aplica-se a CWT ao sinal $f(t)$ usando a *wavelet* de Morse $\psi(\omega; 3, 20)$, descrita no Capítulo 2, Seção 2.2 computada diretamente no domínio da frequência via Equação 2.9 com normalização $L^1(\mathbb{R})$.

A escolha por esta *wavelet* se deve à sua analiticidade, que, conforme apresentado anteriormente, evita completamente a detecção de frequências negativas espúrias, ainda que, de baixas amplitudes. A escolha dos parâmetros leva em consideração a necessidade de que a *wavelet* analisadora deve possuir uma largura de banda estreita de modo a favorecer a detecção de altas frequências típicas da dinâmica rápida. Tanto em tempo quanto em frequência $\psi(\omega; 3, 20)$ pode ser visualizada na Figura 2.8.

A partir dos coeficiente $\mathbb{W}_f^\psi(\omega_a, \tau)$ calcula-se o espectro global *wavelet* $\mathbb{G}(\omega_a)$ em que os parâmetros de escala são substituídos por suas respectivas pseudo-frequências de acordo com a Equação 2.3.

Apesar de ser $\mathbb{G}(\omega_a)$ uma versão suavizada do espectro de potências de Fourier, não se pode substituir o primeiro pelo último, pois Fourier não identifica com clareza as rajadas em altas frequências, característica temporal dos *burstings* (DAUBECHIES, 1996). Portanto, o uso de métodos *wavelet* é indispensável.

Busca-se identificar em $\mathbb{G}(\omega_a)$ dois picos de frequência principais: um em baixa frequência, denotado por ω_{lenta}^{\max} , em torno do qual está o conjunto de frequências responsável pela dinâmica lenta e outro em altas frequências que, de modo análogo, indica a região do espectro responsável pela dinâmica rápida, $\omega_{rápida}^{\max}$.

No caso em que estes dois picos podem ser lidos e identificados com clareza no espectro *wavelet*, então também é possível identificar dois outros máximos locais em $\mathbb{G}(\omega_a)$: m_{lenta} identificado como o primeiro máximo local maior que ω_{lenta}^{\max} e $m_{rápida}$ identificado como o primeiro máximo local menor que $\omega_{rápida}^{\max}$.

Neste caso ideal, denotando por ω_{\max} a frequência máxima utilizada na análise cujo valor depende da escala máxima ideal utilizada como na Equação 2.8, são considerados os conjuntos $\Omega_{lenta} =]0, m_{lenta}]$ e $\Omega_{rápida} = [m_{rápida}, \omega_{\max}]$ para a reconstrução de cada comportamento dinâmico via ICWT contendo apenas as frequências em cada conjunto e tornando nulas todas as demais. O resultado da aplicação da ICWT é a aproximação procurada para cada uma das duas dinâmicas, nomeadas $f_{lenta}(t)$ e $f_{rápida}(t)$.

Recomenda-se, ainda, que seja feita uma limiarização em $f_{rápida}(t)$ com o objetivo de mitigar possíveis problemas de borda em cada um dos *burstings* aproximados; ao final desta Seção faz-se uma descrição completa deste processo de limiarização.

Se os picos ω_{lenta}^{\max} e/ou $\omega_{rápida}^{\max}$ não estão bem definidos ou se não é possível a identificação dos pontos m_{lenta} e/ou $m_{rápida}$ em $\mathbb{G}(\omega_a)$, então aplica-se a estratégia abaixo que permite determinar completamente as sub-bandas de frequência Ω_{lenta} e $\Omega_{rápida}$.

Se m_{lenta} não está bem definido então considera-se o valor $m_{lenta} = 2\omega_{lenta}^{\max}$, estimado de modo empírico, via análise dos resultados para as aproximações da dinâmica rápida calculadas, considerando o conjunto de dados experimentais com a hipótese inicial de ser este valor dependente de ω_{lenta}^{\max} .

Se não é possível identificar $\omega_{rápida}^{\max}$ por ele não estar bem definido no espectro *wavelet*, então perde-se a capacidade de se definir $m_{rápida}$ como proposto no caso ideal e então o extremo inferior do intervalo $\Omega_{rápida}$ é escolhido como sendo a frequência mais alta cujo comportamento é igual ou próximo ao de um ponto de inflexão, por ser uma

região do espectro em que se identifica geometricamente mudança de comportamento da energia presente nas altas frequências. O extremo inferior para o conjunto Ω_{lenta} e o extremo superior para $\Omega_{\text{rápida}}$ são considerados, em qualquer caso, como a menor e a maior das frequências utilizadas na análise, respectivamente.

Uma vez determinado os conjuntos Ω_{lenta} e $\Omega_{\text{rápida}}$, aplica-se a ICWT, considerando não nulos apenas os coeficientes *wavelet* correspondentes a cada um, zerando os demais. Isso permite reconstruir no domínio do tempo as aproximações para as dinâmicas lenta e rápida.

Neste trabalho, considera-se a dinâmica rápida restrita à manifestação de *burstings* no tempo e, portanto, faz-se necessário considerar a estrutura topológica que eles possuem para que a aproximação $f_{\text{rápida}}(t)$ seja de erro mínimo. Em uma perspectiva teórica, a geometria dos *burstings* é classificada de acordo com as bifurcações existentes nos sistemas com múltiplas escalas de tempo responsáveis pela frequência de ocorrência do conjunto de *spikes*, conforme descrito em (RINZEL, 1987).

Assim, dependendo do comportamento dos *burstings* presentes na dinâmica rápida, pode ser necessário aplicar uma correção numérica na aproximação calculada, cujos objetivos são o de eliminar problemas de borda presentes em $f_{\text{rápida}}(t)$ e descartar falsas manifestações da dinâmica rápida.

Os problemas de borda ocorrem quando $f(t)$ não se inicia e/ou não termina em *burstings* e são caracterizados por oscilações de pequena amplitude que são confundidas com manifestações da dinâmica rápida e surgem quando $f(t)$ apresenta variações bruscas no tempo sendo comuns na aproximação das dinâmicas aplicada para os dados experimentais analisados.

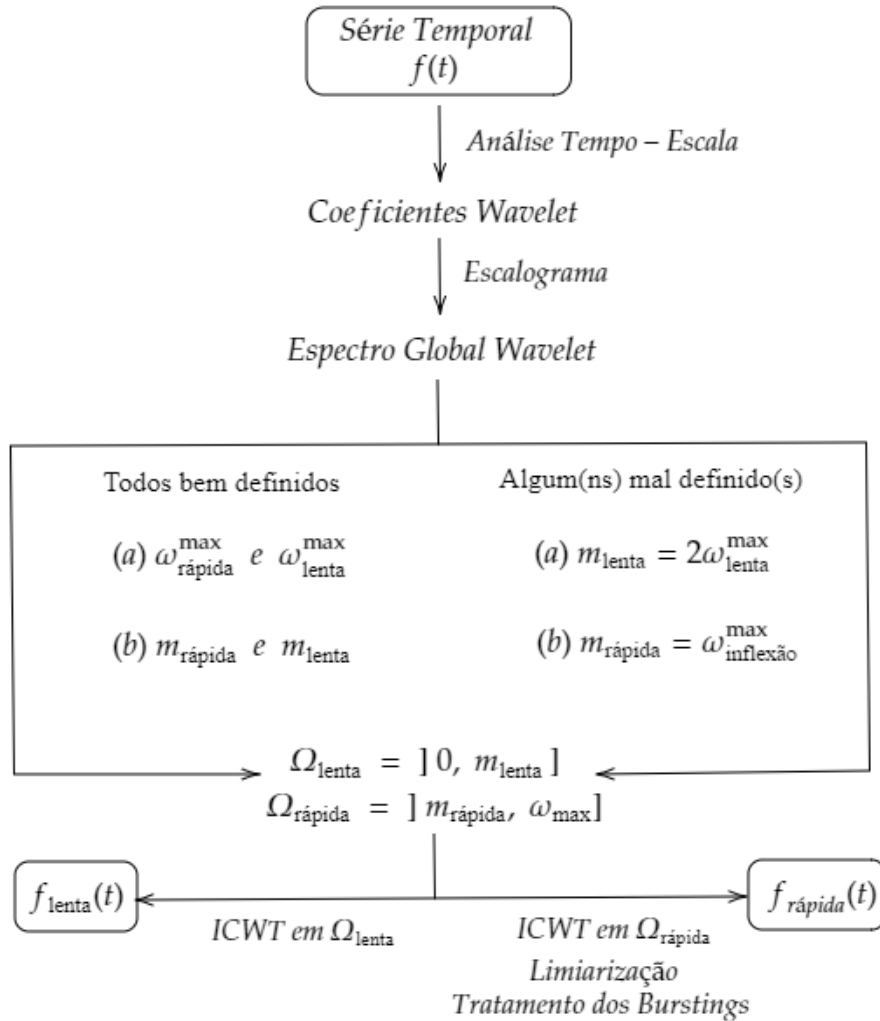
A correção numérica da aproximação $f_{\text{rápida}}(t)$ proposta neste trabalho é caracterizada pela aplicação de uma limiarização com *hard threshold*, cujo limiar $\delta > 0$ a ser aplicado depende da análise simultânea da série temporal $f(t)$, da aproximação $f_{\text{rápida}}(t)$ obtida e da energia local $\mathbb{E}(t)$, cuja medida é obtida pela integração do escalograma, correspondente à aproximação da dinâmica rápida, em relação ao tempo:

$$\mathbb{E}(t) = \int_0^{\infty} |\mathbb{W}_{\psi}^{f_{\text{rápida}}}(\omega, t)|^2 d\omega. \quad (6.1)$$

A energia $\mathbb{E}(t)$ é quase nula durante a manifestação da dinâmica lenta, de modo que os intervalos de tempo em que ela apresenta leituras altas são os mesmos em que os *burstings* estão presentes e portanto pode ser usada para caracterizá-los localmente.

A Figura 6.1 resume a metodologia proposta. Nela, $\omega_{\text{inflexão}}^{\text{max}}$ indica a frequência mais alta cujo comportamento é igual ou próximo ao de um ponto de inflexão e cuja estimativa depende da análise do espectro global *wavelet* e a possível correção numérica é indicada pelos termos *limiarização* e *tratamento dos burstings*.

Figura 6.1 - Descrição gráfica da metodologia para a obtenção das aproximações das dinâmicas lenta e rápida.



Fonte: Produção do autor.

6.1.2 Dados sintéticos: sistemas Hindmarsh-Rose caóticos acoplados

Esta Subseção descreve os dados sintéticos utilizados para ilustrar a metodologia proposta na Subseção 6.1.1 de aproximação das dinâmicas rápida e lenta, cujos resultados estão apresentados e discutidos na Subseção 6.1.4.

Este modelo teórico é o mesmo utilizado e descrito em [Omelchenko et al. \(2010\)](#) sendo constituído de dois sistemas tipo Hindmarsh-Rose com comportamento caótico acoplados bidirecionalmente. O sistema considerado é descrito pelo conjunto de equações¹

$$\begin{cases} x'_{1,2} = 0,375 x_{1,2} + y_{1,2} + 0,4(z_{1,2} + 1,7) + \epsilon(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ y'_{1,2} = -x_{1,2} + \epsilon(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ z'_{1,2} = \mu_{1,2}^{-1}(w_{1,2} - z_{1,2}^3 + 3x_{1,2}^2 - x_{1,2} - 0.15) \\ w'_{1,2} = \mu_{1,2}^{-1}(1 - 5z_{1,2}^2 - w_{1,2}), \end{cases} \quad (6.2)$$

em que $\mu_1 = 0,001$ e $\mu_2 = 0,002$ e $\epsilon > 0$ é a força de acoplamento aplicada de maneira bidirecional nas variáveis $x_{1,2}$ e $y_{1,2}$, respectivamente.

Seja o sistema Hindmarsh-Rose (HR) em que tem-se uma dinâmica lenta caótica e uma dinâmica rápida caracterizada por *burstings*, de acordo com [Omelchenko et al. \(2010\)](#).

A geometria dos *burstings* presentes é do tipo onda quadrada. Em termos topológicos isto significa que eles se iniciam em uma bifurcação do tipo sela-nó e terminam em uma homoclínica presentes no Sistema 6.2 sendo caracterizados, no tempo, por um conjunto de *spikes* cuja frequência de ocorrência é monotônica com início e término de modo abrupto ([RINZEL, 1987](#)).

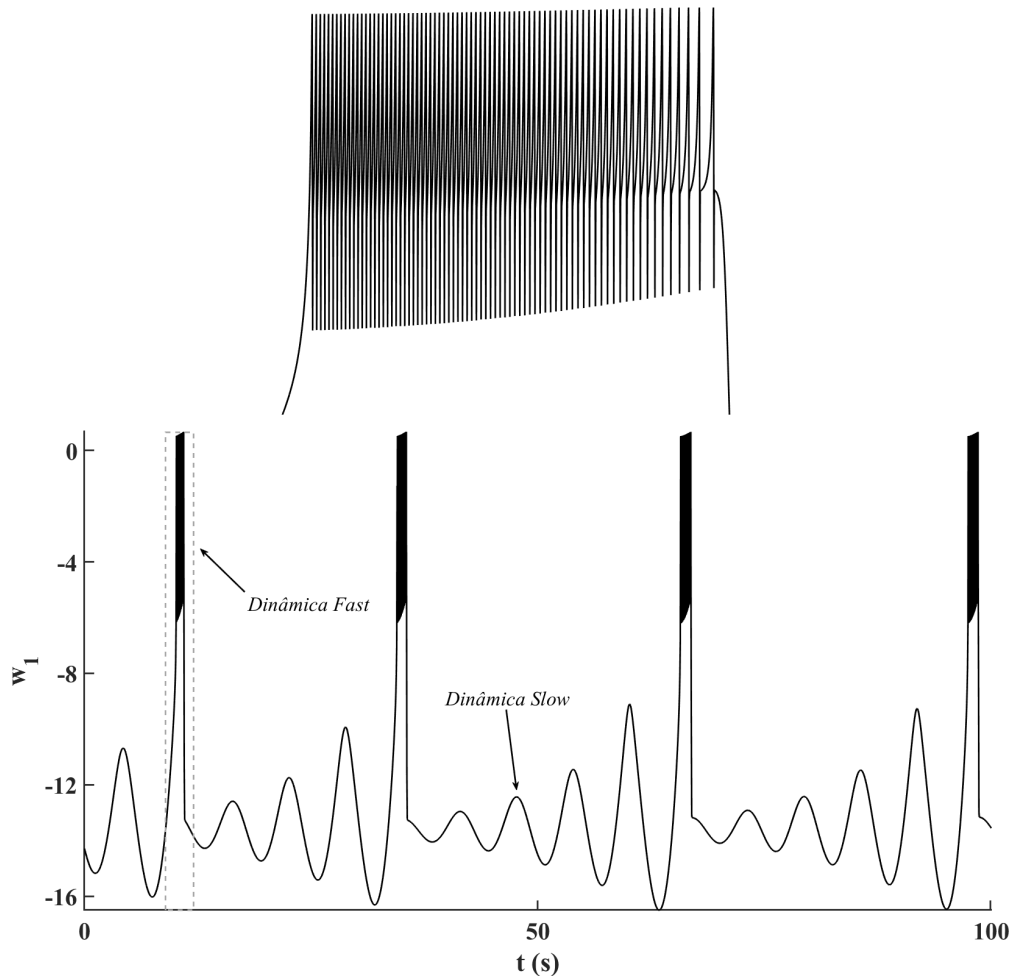
A integração numérica do Sistema 6.2 faz-se via método Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo $h = 5 \cdot 10^{-5}$ sujeito às condições iniciais $C_1 = (0, 2, 0, 2, 0, 2, -1, 66)$ e $C_2 = (-0, 1, -0, 1, -0, 1, -1, 46)$ com descarte de regime transiente. O uso de um passo de integração maior que o utilizado não é capaz de fazer a integração numérica corretamente, conforme testado durante a geração das séries temporais sintéticas consideradas.

A Figura 6.2 exhibe o comportamento da variável w_1 , similar ao da variável w_2 , em que a dinâmica lenta é caótica sendo interrompida por *burstings*.

No detalhe vê-se a manifestação da dinâmica rápida com o *bursting* típico presente no Sistema 6.2 destacado pela região pontilhada.. Como descrito, nota-se que os *spikes* possuem uma frequência de ocorrência monotonicamente decrescente no tempo.

¹Em contato com os autores de [Omelchenko et al. \(2010\)](#) verificou-se a existência de um erro de impressão nos conjuntos de equações descritos no trabalho citado em que, as equações de $y_{1,2}$ aparecem impressas sem o sinal de negativo .

Figura 6.2 - Comportamento das dinâmicas rápida e lenta presentes na variável w_1 do Sistema 6.2.



Fonte: Produção do autor.

6.1.3 Dados experimentais: osciladores eletroquímicos

Nesta Seção descreve-se o experimento e os dados experimentais com relação à dinâmica intrínseca a eles e nos quais a metodologia proposta na Subseção 6.1.1 é aplicada.

O *setup* experimental e o conjunto de dados analisados provém de experimentos realizados pelo Dr. István Z. Kiss e seus colaboradores, no Departamento de Química da Universidade de St. Louis (Missouri, Estados Unidos) que via colaboração mútua na pesquisa desenvolvida fez o compartilhamento dos mesmos para a aplicação e a validação da metodologia proposta para a separação das dinâmicas.

O experimento eletroquímico realizado consiste, basicamente, na eletrodissolução de eletrodos de ferro (Fe), em ácido sulfúrico (H_2SO_4) na concentração de 1 mol/L e saturado de sulfato de potássio (K_2SO_4).

O eletrodo de referência usado no experimento é composto por mercúrio (Hg) e sulfato de mercúrio (Hg_2SO_4); o contra eletrodo é composto de platina (Pt), usada no *setup* por não reagir quimicamente com o ácido sulfúrico e tornar nula a corrente elétrica no eletrodo de referência. Seu uso garante a não introdução de medidas espúrias de corrente elétrica durante a coleta de dados do experimento que é controlada, ainda, por um potenciostato.

Uma descrição detalhada do experimento e dos dados aqui apresentados encontram-se publicados em [Kiss et al. \(2006\)](#). Cada eletrodo de ferro envolvido no experimento é o que, em todo o restante deste Capítulo, será denominado de oscilador eletroquímico.

Os dados analisados referem-se à corrente elétrica $I(t)$ medida nos osciladores durante a eletrodissolução, cuja medida é dada em miliampères (mA), sendo esses osciladores configurados em redes com acoplamento global via introdução de uma resistência externa.

São considerados 08 conjuntos de dados referentes a redes com dois osciladores amostrados a 1000 Hz e 03 conjuntos de dados referentes a redes com vinte e cinco osciladores amostrados a 2000 Hz. A diferença entre os conjuntos de dados em cada caso são as intensidades de acoplamento ϵ utilizadas nos experimentos que variam no intervalo $[0, 1]$. Explicitamente, no caso de dois osciladores, tem-se intensidades de acoplamento iguais a $\epsilon = 0$ (caso desacoplado), $\epsilon = 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9$ e $\epsilon = 1, 0$ (caso fortemente acoplado) e no caso das redes com vinte e cinco osciladores os conjuntos de dados referem-se a $\epsilon = 0, 0$ e $\epsilon = 0, 2$ (neste caso, para $\epsilon > 0, 2$ a dinâmica rápida desaparece) sendo quatro conjuntos, ao todo.

A Tabela 6.1 sumariza os dados relativos às redes com dois osciladores.

Conforme descrito em [Kiss et al. \(2006\)](#), as oscilações de maior comprimento e suaves, são devidas à dinâmica lenta, que é caótica e interrompida por *burstings* devido à dinâmica rápida que se manifesta irregularmente ao longo do tempo

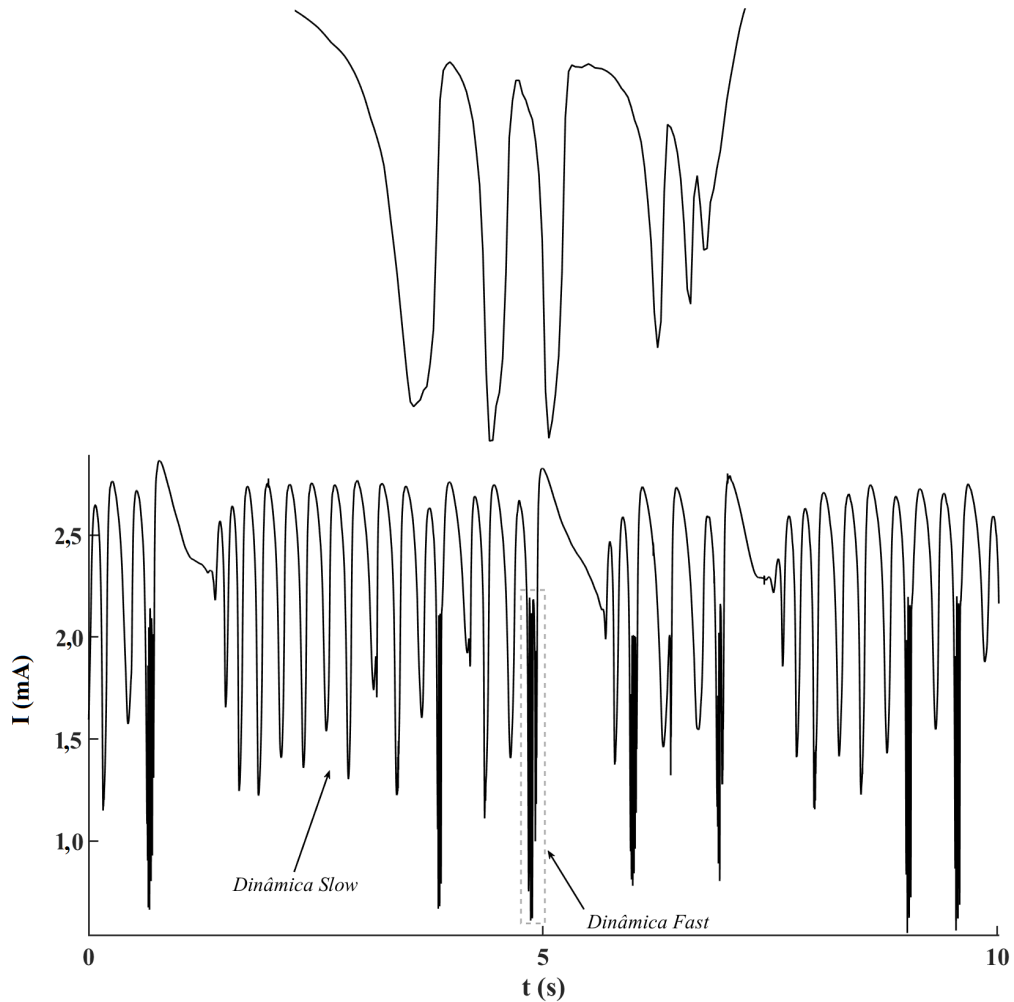
Com relação aos *burstings* presentes nestes dados, não é possível classificá-los uma vez que eles não são caracterizados por um conjunto de *spikes* e nem há informações sobre as bifurcações do sistema dinâmico que os geram.

Tabela 6.1 - Redes experimentais com dois osciladores eletroquímicos.

Rede	Oscilador	Duração (s)	Acoplamento	Rede	Oscilador	Duração (s)	Acoplamento
I	A B	64	0,0	V	I J	84	0,7
II	C D	230	0,2	VI	K L	120	0,8
III	E F	155	0,4	VII	M N	100	0,9
IV	G H	60	0,6	VIII	O P	82	1,0

Fonte: Produção do autor.

Figura 6.3 - Comportamento típico das dinâmicas rápida e lenta no conjunto de dados experimentais analisados relativos a osciladores eletroquímicos.



Fonte: Produção do autor.

Neste caso, os *burstings* são constituídos por oscilações rápidas sem frequência bem definida, sendo denominados apenas de irregulares. A Figura 6.3 ilustra o típico comportamento dos osciladores considerados, onde pode-se ver em detalhe a dinâmica rápida destacada pela região pontilhada: típico *bursting* para os dados experimentais considerados.

6.1.4 Aproximação das dinâmicas

Esta Subseção exemplifica a aplicação da metodologia proposta na Subseção 6.1.1 nos dados teórico e experimental descritos nas Subseções 6.1.2 e 6.1.3, respectivamente. Apresenta-se também uma discussão dos resultados obtidos.

6.1.4.1 Aproximações para os dados sintéticos

Considera-se nesta Subseção as variáveis $w_{1,2}$ do Sistema 6.2 em que a dinâmica lenta caótica é interrompida pela dinâmica rápida, caracterizada pelos *burstings* tipo onda quadrada conforme Figura 6.2. As séries temporais $w_{1,2}(t)$ estão amostradas a uma taxa de 20000 Hz e cada uma delas possui comprimento igual a 100 segundos. Na discussão que se segue as ilustrações são feitas considerando $w_1(t)$.

A Figura 6.4 apresenta o escalograma para a série $w_1(t)$ no intervalo de tempo $I =]0, 50]$ segundos usando a CWT via *wavelet* de Morse com parâmetros $\beta = 20$ e $\gamma = 3$ e norma usual como descrito na Subseção 6.1.1.

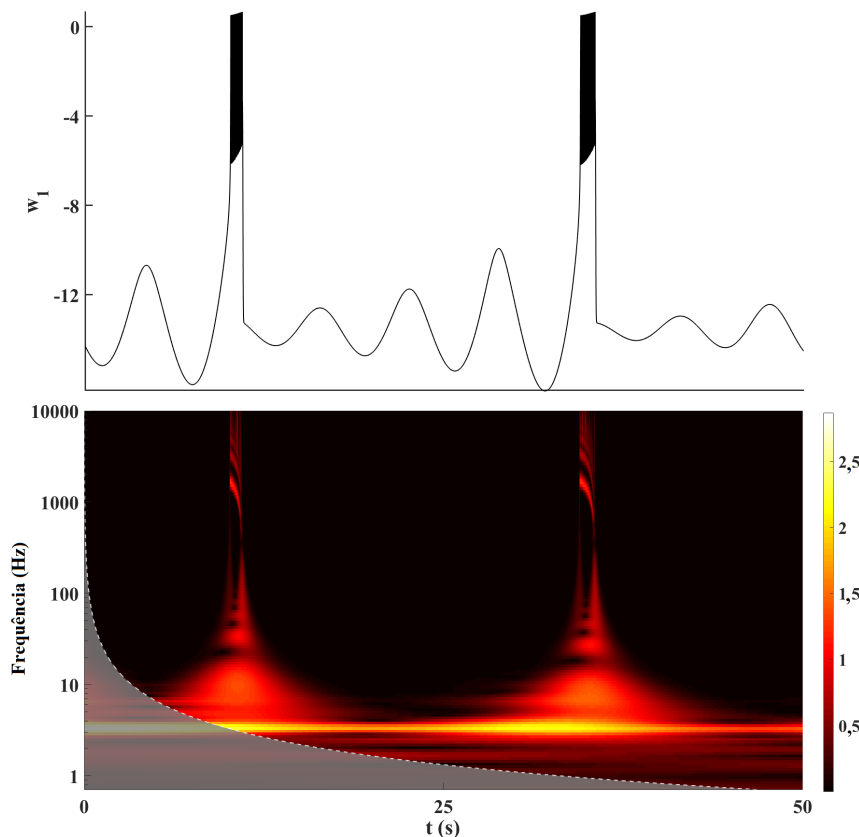
A opção em restringir a visualização a apenas metade da série $w_1(t)$ foi considerada para maior clareza de visualização das estruturas presentes principalmente nas altas frequências.

A frequência máxima, em Hertz, usada na análise foi definida de acordo com o Teorema de *Nyquist* sobre amostragens de sinais. Em termos gerais, ele estabelece que um sinal $f(t)$ amostrado a x Hz é capaz de reproduzir, corretamente em seu conteúdo, frequências de até $x/2$ Hz.

Uma análise inicial do escalograma indica que a CWT é hábil em identificar as regiões em que cada dinâmica se manifesta e que a dinâmica rápida está bem localizada em tempo e em frequência, correspondendo aos picos observados no escalograma.

Para a determinação das sub-bandas de frequência usadas na reconstrução das aproximações para cada uma das dinâmicas considerou-se, conforme a metodologia proposta na Subseção 6.1.1, o espectro global *wavelet*, mostrado na Figura 6.5.

Figura 6.4 - Escalograma para a variável w_1 do Sistema 6.2 com $t \in]0, 50]$ segundos.

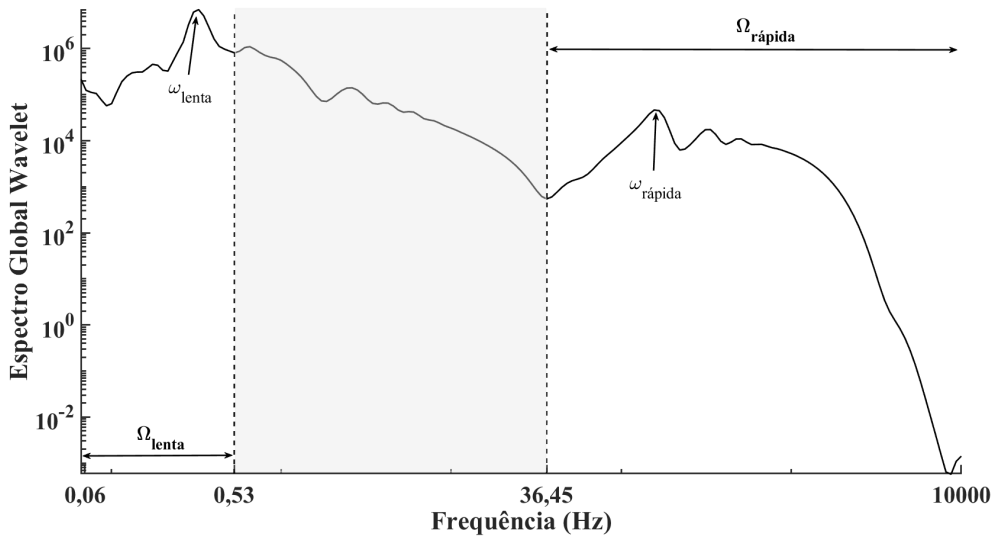


Fonte: Produção do autor.

Os picos em baixas e altas frequências ocorrem em $\omega_{\text{lenta}}^{\text{max}} = 0,33$ Hz e $\omega_{\text{rápida}}^{\text{max}} = 156,3$ Hz, respectivamente. Define-se a menor e maior frequências utilizadas na análise via CWT como os limites inferior e superior para as sub-bandas de frequência Ω_{lenta} e $\Omega_{\text{rápida}}$. Considerando que no espectro global estão bem definidos os mínimos locais $m_{\text{lenta}} = 0,53$ Hz e $m_{\text{rápida}} = 36,45$ Hz vê-se que este é o caso ideal de aplicação da metodologia de modo que $\Omega_{\text{lenta}} = [0,06, 0,53]$ Hz e $\Omega_{\text{rápida}} = [36,45, 10000]$ Hz são as sub-bandas em que cada dinâmica se manifesta.

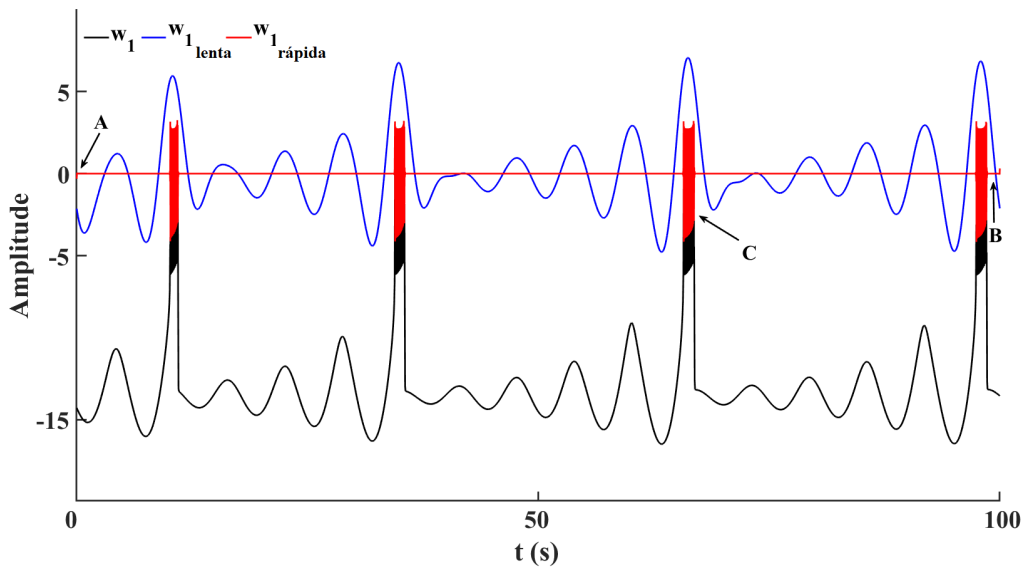
Note que a sub-banda de frequência $]0,06, 36,45[$ Hz, região em cinza na Figura 6.5, apesar de ter energia significativa não é considerada na reconstrução de nenhuma das duas dinâmicas. Considerando as sub-bandas Ω_{lenta} e $\Omega_{\text{rápida}}$ e aplicando a ICWT anulando-se todo conteúdo frequencial não contido em cada uma delas as aproximações $w_{1_{\text{lenta}}}(t)$ e $w_{1_{\text{rápida}}}(t)$ podem ser reconstruídas. Veja na Figura 6.6.

Figura 6.5 - Determinação das sub-bandas de frequência Ω_{lenta} e $\Omega_{rápida}$ pela análise do espectro global *wavelet* de w_1 .



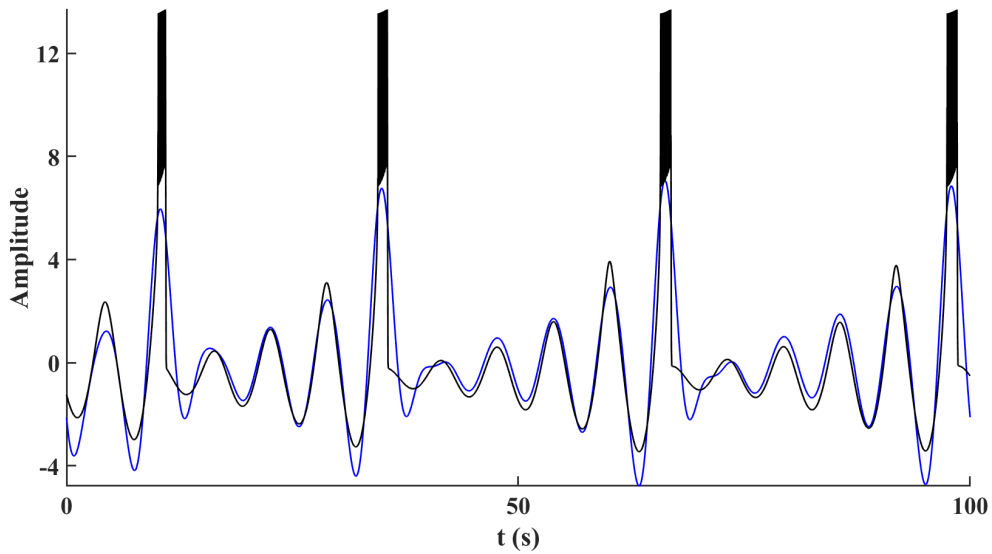
Fonte: Produção do autor.

Figura 6.6 - Aproximações $w_{1lenta}(t)$ e $w_{1rápida}(t)$, sem tratamento numérico, para $w_1(t)$.



Fonte: Produção do autor.

Figura 6.7 - Comparação da aproximação $w_{1\text{lenta}}(t)$ (linha azul) e a série original $w_1(t)$ transladada (linha preta).



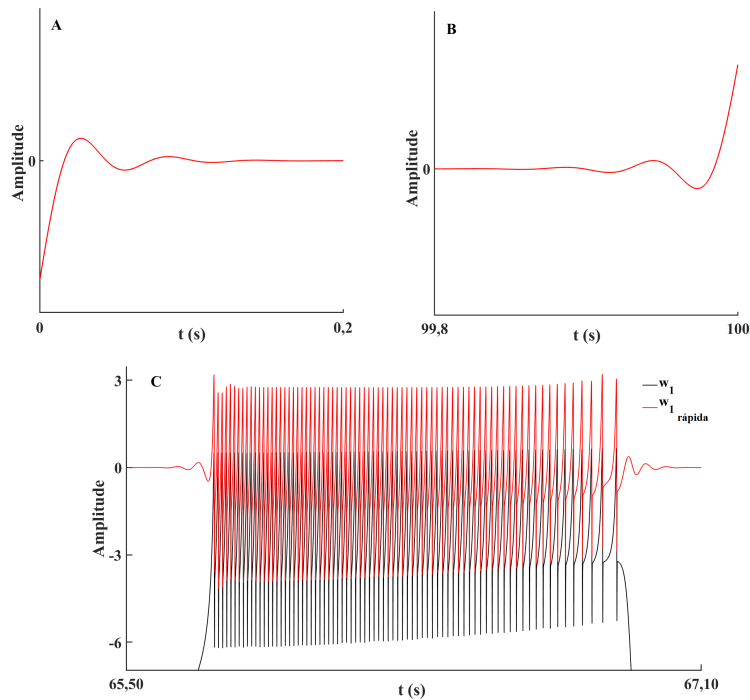
Fonte: Produção do autor.

A aproximação da dinâmica rápida deve ser analisada com maior cuidado e as regiões A, B e C mostradas na Figura 6.6 indicam regiões em que deve-se aplicar a correção numérica descrita na metodologia. Estas regiões são mostradas em detalhes na Figura 6.8.

Enquanto as duas primeiras regiões (A e B) indicam problemas de borda na aproximação calculada, a terceira (C) indica que os *burstings* são corretamente capturados com relação aos instantes em que acontecem e as rápidas oscilações são reproduzidas pela respectiva aproximação com exceção das regiões extremas deles, caracterizadas por serem de transição entre os dois comportamentos dinâmicos distintos presentes que, para os *burstings* tipo onda quadrada devem ser regiões de mudança abrupta de comportamento.

Note que $w_1(t)$ não possui manifestação da dinâmica rápida em seus extremos de maneira que a aproximação $w_{1\text{rápida}}(t)$ deve ser nula nestas regiões, o que não acontece. Trata-se de um problema de borda decorrente da seleção da sub-banda de frequência $\Omega_{\text{rápida}}$ usada para calcular a aproximação e que é numericamente corrigido via limiarização proposta.

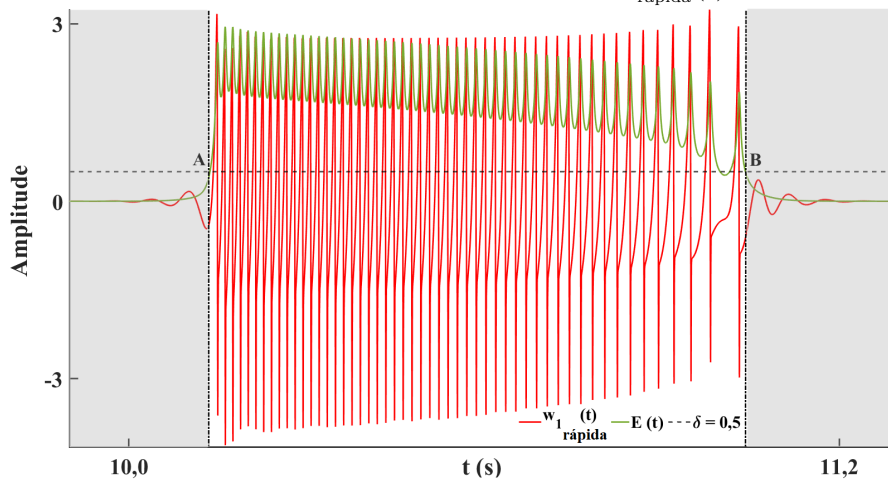
Figura 6.8 - Problemas de borda na aproximação da dinâmica rápida.



Fonte: Produção do autor.

Após a análise da variação da energia ao longo do tempo $\mathbb{E}(t)$, da aproximação $w_{1_{\text{rápida}}}(t)$ e dos quatro *burstings* presentes em $w_1(t)$ fixou-se $\delta = 0,5$ para o limiar a ser aplicado. A Figura 6.9 apresenta uma visualização geométrica da aplicação deste *threshold* para o primeiro *bursting* de $w_{1_{\text{rápida}}}(t)$.

Figura 6.9 - Correção numérica para os *burstings* de $w_{1_{\text{rápida}}}(t)$ via *hard threshold*.

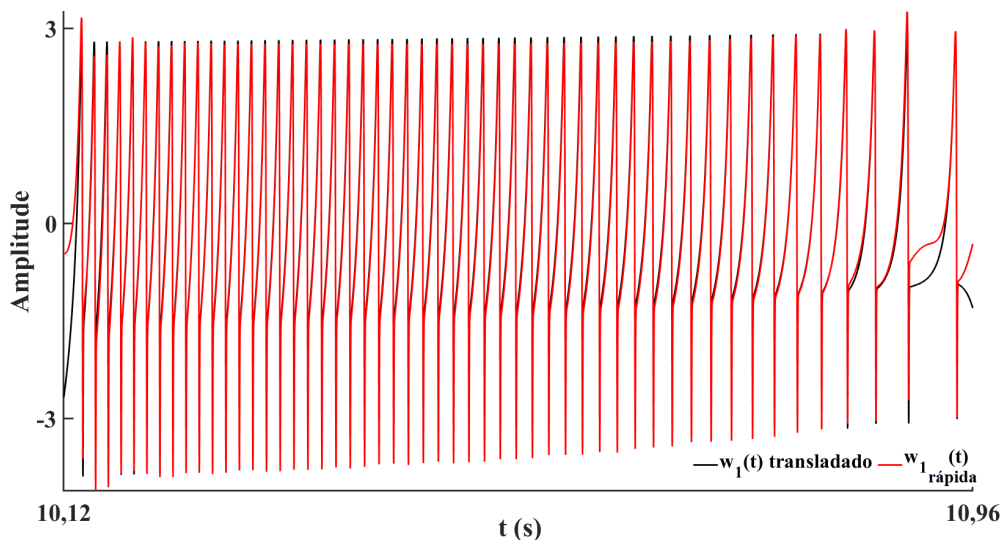


Fonte: Produção do autor.

A visualização é restrita somente ao primeiro *bursting* pois os demais apresentam o mesmo comportamento variando apenas o número de *spikes* presentes. Os pontos *A* e *B* indicam os instantes de tempo para os quais a medida da energia ao longo do tempo, normalizada para tornar possível a comparação com a respectiva aproximação da dinâmica rápida (linhas verde e vermelha, respectivamente), intersecta o limiar δ (linha pontilhada) sendo, portanto, os instantes de tempo considerados para o descarte das bordas (regiões sombreadas).

Na Figura 6.10 vê-se uma comparação entre o primeiro *bursting* presente em $w_{1\text{rápida}}(t)$ e seu correspondente em $w_1(t)$ transladado. Observa-se que a frequência monotônica de ocorrência dos *spikes* é corretamente reproduzida ainda que aconteçam pequenos desvios nas amplitudes principalmente nos extremos.

Figura 6.10 - Comparação das dinâmicas rápida aproximada e original em $w_1(t)$.



Fonte: Produção do autor.

Termina-se esta Subseção com a observação de que o mais importante em cada aproximação calculada é que as respectivas dinâmicas são corretamente reproduzidas. As pequenas diferenças em termos de amplitude são esperadas uma vez que a seleção das apropriadas sub-bandas ocasiona um descarte de conteúdo frequencial cuja energia é significativa para a reprodução dessas amplitudes mas não para a reprodução do comportamento dinâmico de interesse.

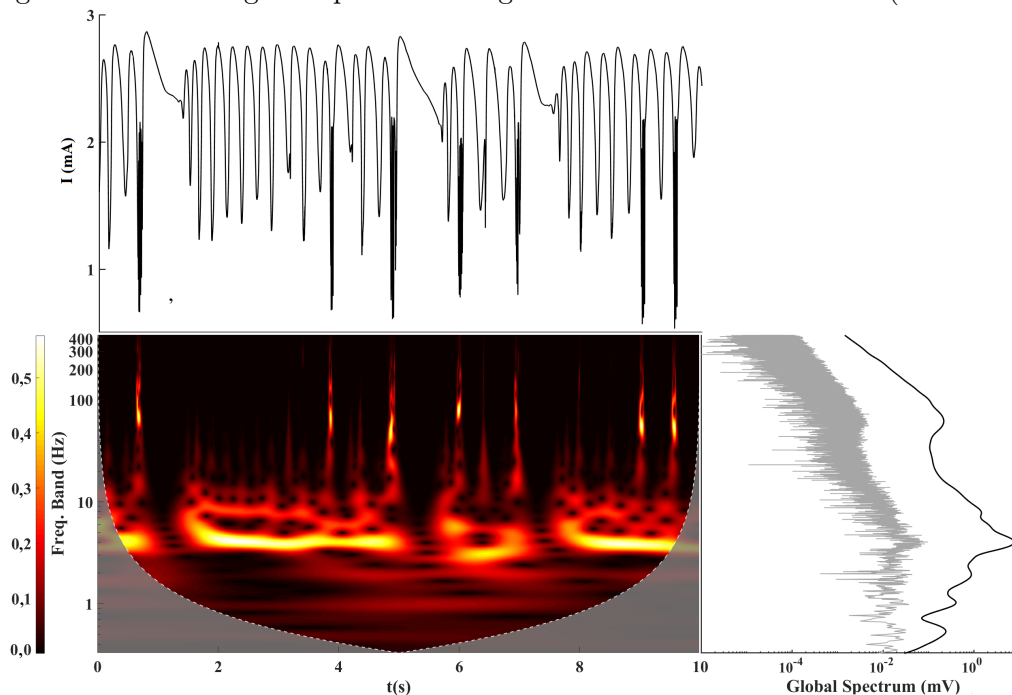
6.1.4.2 Aproximações para os dados experimentais

Nesta Subseção apresenta-se as aproximações calculadas para as dinâmicas lenta e rápida presentes nos dados experimentais apresentados na Subseção 6.1.3 via metodologia descrita na Subseção 6.1.1. Os *burstings* existentes nos osciladores eletroquímicos possuem uma estrutura topológica diferente dos *burstings* tipo onda quadrada discutidos na Subseção anterior, não possuindo uma classificação bem definida.

O típico comportamento temporal dos dados relativos aos osciladores eletroquímicos pode ser visto na Figura 6.11 em que encontra-se plotado o oscilador A considerando apenas os dez segundos iniciais e para o qual fez-se uma análise exploratória, usando a CWT como descrito na Subseção 6.1.1.

Adicionalmente, apresenta-se o respectivo escalograma e espectro global *wavelet* além do espectro de Fourier (em cinza) para efeitos de comparação. Nota-se que apesar do comportamento similar, a leitura dos picos é mais fácil de ser feita via espectro global *wavelet*, particularmente nas baixas frequências.

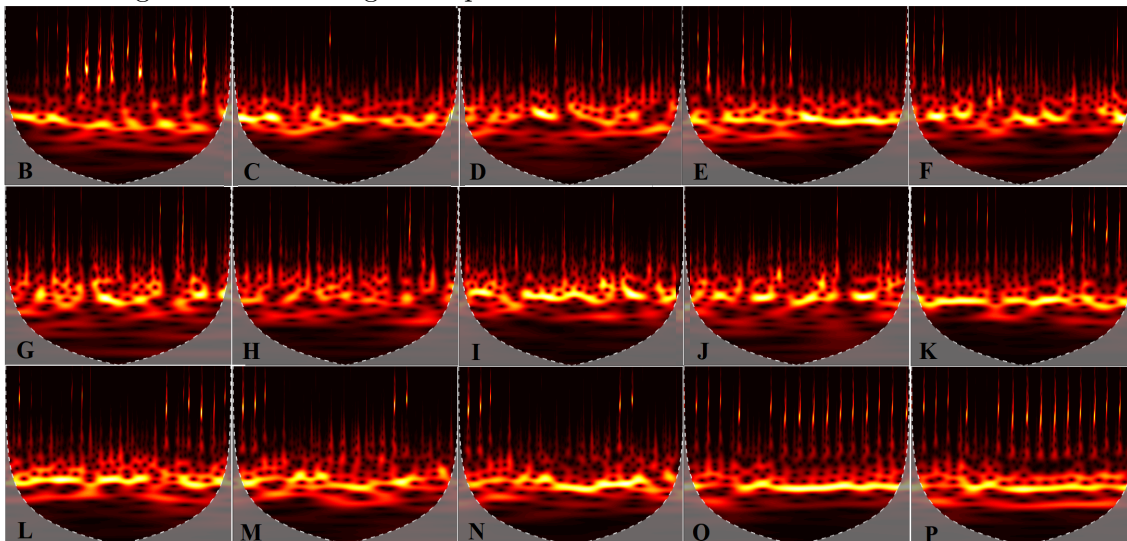
Figura 6.11 - Escalograma para os 10 segundos iniciais do oscilador A (Tabela 6.1).



Fonte: Produção do autor.

Vê-se que a dinâmica lenta manifesta-se em torno de 5 Hz e a rápida acima de 20 Hz. Em todas as séries temporais experimentais analisadas, este é o padrão observado. Além disto, os *burstings* são completamente identificados no tempo pela magnitude dos coeficientes *wavelet*. A Figura 6.12 apresenta o escalograma para as quinze séries adicionais relativas às redes com dois osciladores. Os eixos e a escala de cor são idênticos aos apresentados na Figura 6.11.

Figura 6.12 - Escalogramas para os osciladores indicados na Tabela 6.1.



Fonte: Produção do autor.

A análise dos Espectros Globais *Wavelet* para cada uma das dezesseis séries temporais descritas na Tabela 6.1 indica que as duas diferentes dinâmicas manifestam-se em bandas de frequência bem definidas. As sub-bandas de frequências utilizadas no cômputo de cada um das dinâmicas encontra-se sumarizada na Tabela 6.2.

Os extremos de cada intervalo foram aproximados para o inteiro mais próximos para melhor clareza na apresentação dos resultados e também fez-se o acréscimo de zeros à esquerda de modo que os intervalos com as sub-bandas de frequência ficassem completamente alinhados verticalmente.

Nesta exposição, apresentar-se-á o processo de obtenção das aproximações para os osciladores A e C dadas suas características bastante distintas quanto a aplicação da metodologia proposta.

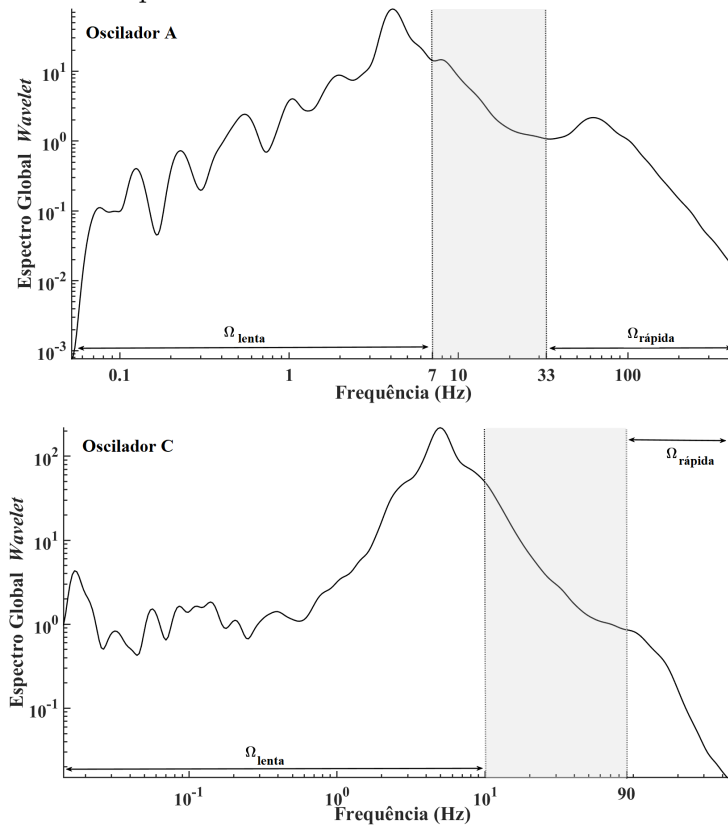
Tabela 6.2 - Sub-bandas de frequências (em Hz) para a reconstrução das aproximações das dinâmicas rápida e lenta considerando os dados descritos na Tabela 6.1.

Oscilador	Ω_{lenta} (Hz)	$\Omega_{rápida}$ (Hz)	Oscilador	Ω_{lenta} (Hz)	$\Omega_{rápida}$ (Hz)
A] 00, 07]	[033, 434]	I] 0, 5]	[82, 434]
B] 00, 14]	[036, 434]	J] 0, 5]	[82, 434]
C] 00, 10]	[090, 434]	K] 0, 5]	[82, 434]
D] 00, 08]	[050, 434]	L] 0, 5]	[82, 434]
E] 00, 08]	[047, 434]	M] 0, 8]	[44, 434]
F] 00, 10]	[066, 434]	N] 0, 8]	[41, 434]
G] 00, 10]	[143, 434]	O] 0, 8]	[36, 434]
H] 00, 05]	[082, 434]	P] 0, 8]	[36, 434]

Fonte: Produção do autor.

Enquanto o oscilador A é o típico caso em que os picos nos espectro global estão bem definidos, o oscilador C apresenta picos não bem definidos em altas frequências como vê-se na Figura 6.13.

Figura 6.13 - Sub-bandas de frequência utilizadas no cômputo das aproximações para as dinâmicas rápida e lenta dos osciladores A e C conforme Tabela 6.2.



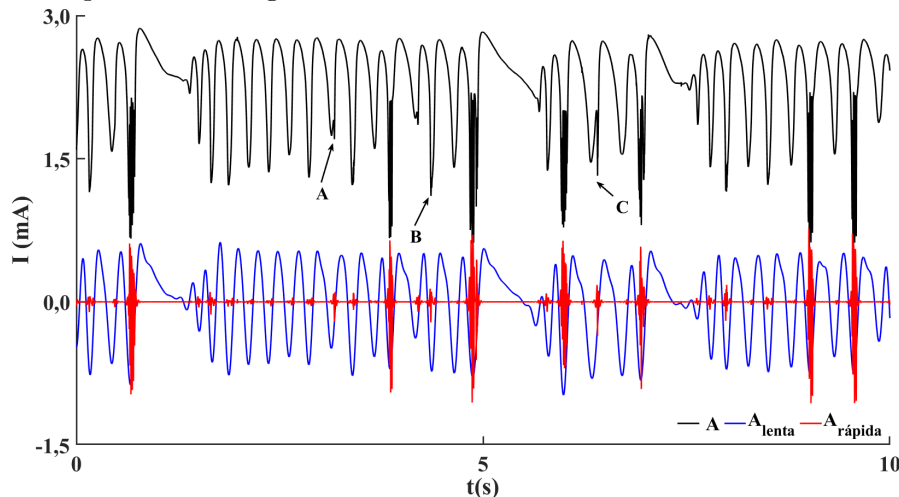
Fonte: Produção do autor.

As regiões sombreadas correspondem a sub-bandas de frequência que são descartadas no processo de construção de aproximação para cada uma das diferentes dinâmicas.

Os dados experimentais encontram-se amostrados a 1000 Hz e a aplicação da CWT com a *wavelet* de Morse de acordo com a metodologia utilizada indica como frequência máxima confiável presente nos dados o valor de 434,5 Hz, que no restante desta Seção aparece sem sua parte decimal.

Para o oscilador A faz-se a reconstrução das aproximações rápida e lenta considerando as sub-bandas de frequência registradas na Tabela 6.2 cujo resultado por ser visto na Figura 6.14.

Figura 6.14 - Oscilador A e as respectivas aproximações para as dinâmicas rápida e lenta. Apenas os 10 segundos iniciais.

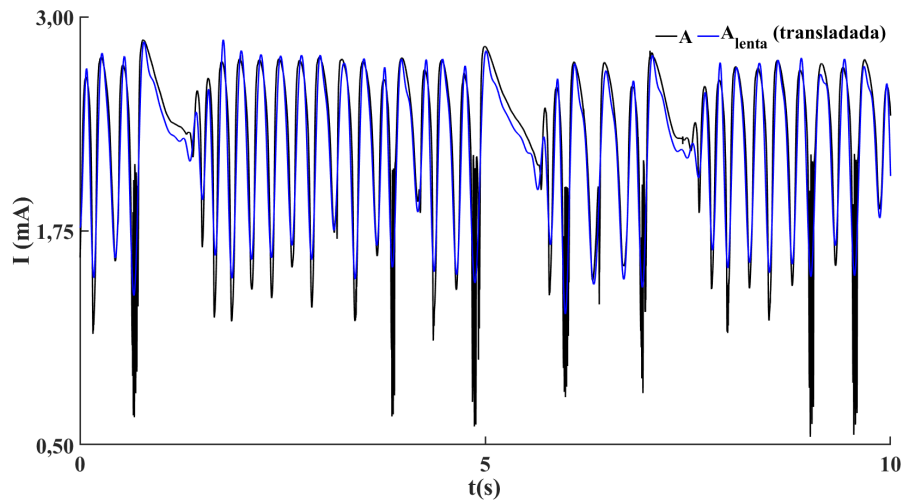


Fonte: Produção do autor.

A dinâmica lenta está bem aproximada haja visto que preserva o número de oscilações de maior comprimento de onda. Veja a Figura 6.15 em que o dado experimental A encontra-se transladado para melhor comparação com a aproximação calculada.

A aproximação para a dinâmica rápida chama a atenção inicialmente pelos problemas de borda, quase como ruídos, também presentes no caso da aproximação dos dados sintéticos e, adicionalmente, também por regiões de pequenos comprimento e amplitude que podem ser confundidos com manifestações da dinâmica rápida.

Figura 6.15 - Oscilador A e a aproximação para a dinâmica lenta calculada. Apenas os 10 segundos iniciais.



Fonte: Produção do autor.

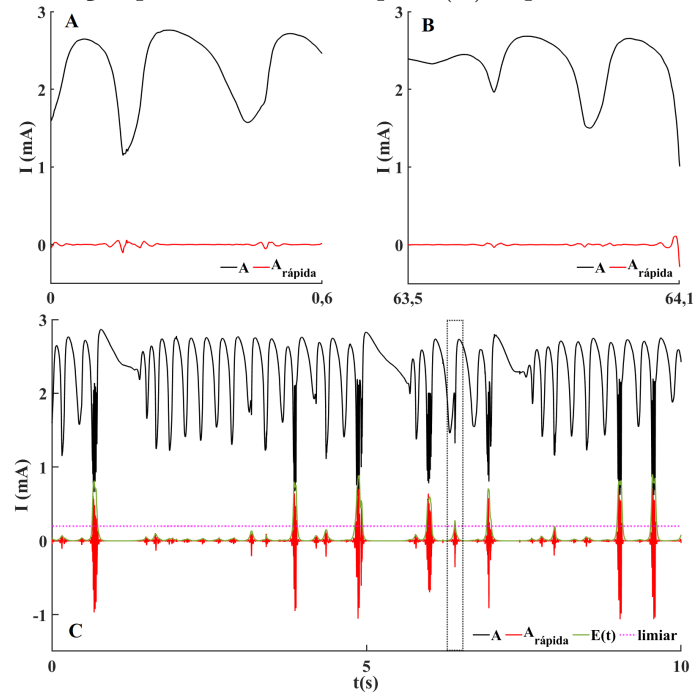
Uma vez que neste trabalho se considera a manifestação da dinâmica rápida via ocorrência de *burstings* e que os pontos destacados A, B e C na Figura 6.14 ilustram regiões cujo comportamento no tempo é bastante similar a *spikes*, as pequenas oscilações na aproximação calculada devem ser eliminadas.

Esta eliminação é feita pela aplicação de uma limiarização via *hard threshold* considerando a energia presente na aproximação da dinâmica rápida calculada. Esta medida de energia é dada pela Equação (6.1) e representa, em função do tempo, a soma das contribuições de cada uma das frequências em $\Omega_{\text{rápida}}$ para o oscilador A. Veja Tabela 6.2.

A determinação do limiar a ser aplicado considera também a necessidade de tratamento para as bordas de cada *bursting* presente na dinâmica rápida de modo a mitigar diferenças significativas entre a aproximação calculada e o dado original. Como se trata de regiões de transição entre as dinâmicas o erro na aproximação calculada tende a ser significativo para elas.

Por um lado, se o limiar considerado for relativamente grande todas as oscilações espúrias são eliminadas mas perde-se também parte das verdadeiras detecções. Por outro, se for relativamente pequeno não haverá eliminação alguma. Tem-se, portanto, a necessidade de analisar conjuntamente o dado original, a aproximação da dinâmica rápida calculada e a energia ao longo do tempo para sua determinação.

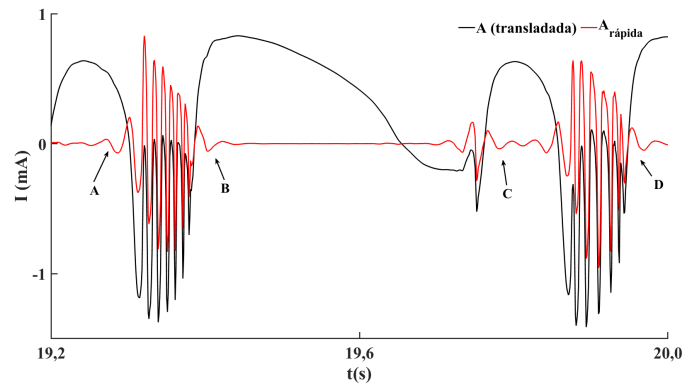
Figura 6.16 - Oscilador experimental A: problemas de borda (A e B) e regiões espúrias na aproximação para a dinâmica rápida (C). Apenas os 10 segundos iniciais.



Fonte: Produção do autor.

Para o oscilador A, após as análises, tem-se $\delta = 0,2$ escolhido como limiar. Considera-se a energia normalizada no intervalo $[0, 1]$ pois seus picos originais são, neste caso, aproximadamente cinco vezes superior ao máximo do dado original, o que dificulta a análise conjunta com as demais variáveis para o estabelecimento do limiar. Veja a Figura 6.16, painel inferior (C).

Figura 6.17 - Problemas de bordas na aproximação rápida para oscilador A.



Fonte: Produção do autor.

Note na Figura 6.16 a existência de uma região, destacada pelo retângulo pontilhado, que escapa do limiar aplicado mas que não corresponde a uma região de *bursting*. Note ainda que em relação aos reais *burstings* ela se manifesta na aproximação rápida calculada com duração muito inferior. Deste modo, faz-se ainda a necessidade de se considerar um descarte adicional após a limiarização.

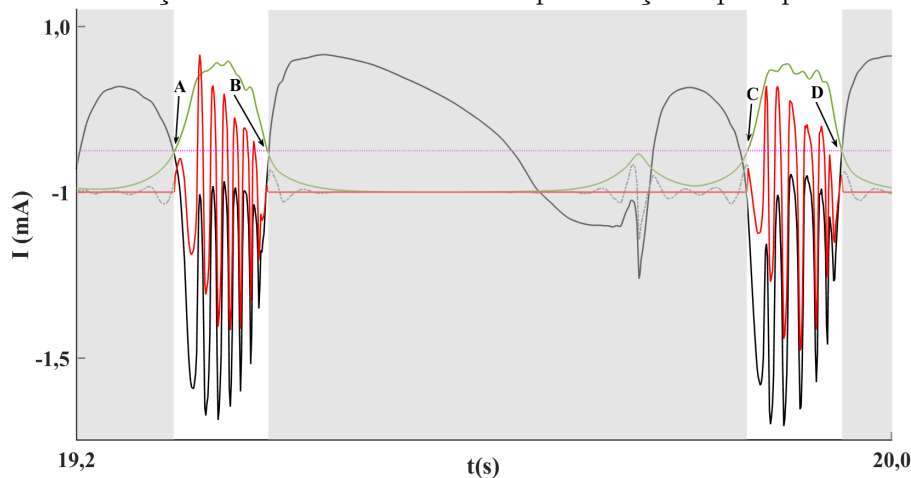
Este descarte é feito considerando apenas aqueles *burstings* cujo comprimento é maior ou igual ao valor médio dos comprimentos dos detectados. Isto não é difícil de ser feito pois a limiarização aplicada permite identificar os instantes de tempo que são considerados como de início e término para cada *bursting*.

Ainda que eventualmente algum *bursting* verdadeiro seja eliminado, este segundo descarte faz-se necessário para garantir que a aproximação da dinâmica rápida calculada esteja livre de detecções espúrias.

A Figura 6.17 ilustra os problemas de borda presentes em cada um dos *burstings* detectados na aproximação da dinâmica rápida calculada. As regiões indicadas em A, B, C e D são as regiões de borda cuja limiarização corrige.

A Figura 6.18 ilustra o processo de limiarização para a dinâmica rápida mostrada na Figura 6.17. O número de oscilações em cada *bursting* está preservado apesar das pequenas deformações em amplitude. O importante a ser considerado é que a frequência de ocorrência das oscilações é corretamente reproduzida pela aproximação.

Figura 6.18 - Correção numérica das bordas na aproximação rápida para o oscilador A.



Fonte: Produção do autor.

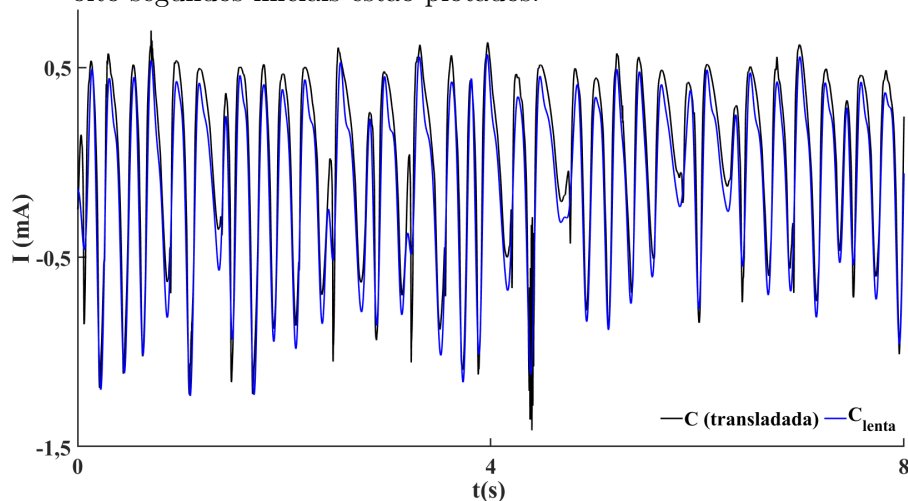
Ainda em relação à Figura 6.18, a linha verde indica a energia $\mathbb{E}(t)$ usada na limiarização e em sombreado vê-se as regiões em que a limiarização com $\delta = 0,2$ age para as quais as oscilações exibidas em linha cinza pontilhada são eliminadas. Por A, B, C e D indica-se agora os instantes de tempo considerados como de início e término de cada um dos *burstings* correspondendo às interseções entre a energia normalizada $\mathbb{E}(t)$ e o limiar δ .

Para o oscilador eletroquímico C a determinação da sub-banda Ω_{lenta} não apresenta problemas uma vez que há um pico de energia bem definido em baixas frequências no espectro global *wavelet* como mostrado na Figura 6.13 mas a determinação do conjunto $\Omega_{\text{rápida}}$ faz-se de acordo com a metodologia proposta na Subseção 6.1.1, considerando um ponto no espectro cujo comportamento é similar a um ponto de inflexão por não se ter bem definidos um pico de energia e nem um mínimo local anterior a ele em altas frequências.

Como mostrado na Tabela 6.2, considerou-se neste caso o valor de 90 Hz cujo comportamento é similar a de um ponto de inflexão no espectro global *wavelet*.

A dinâmica lenta é corretamente aproximada. Veja a Figura 6.19. O número de oscilações cujos comprimentos de onda são maiores está preservado apesar de pequenas deformações, como nos demais casos apresentados.

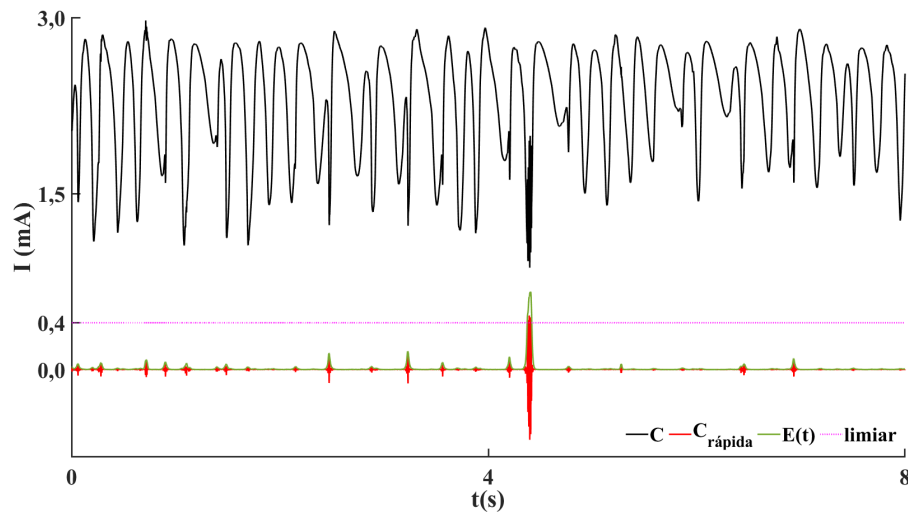
Figura 6.19 - Aproximação da dinâmica lenta para o oscilador experimental C. Apenas os oito segundos iniciais estão plotados.



Fonte: Produção do autor.

O mesmo tratamento, baseado na limiarização e na análise da energia ao longo do tempo também diminui consideravelmente os erros nas aproximações dos *burstings*. A Figura 6.20 ilustra o processo para um *bursting* presente no oscilador C. Novamente a interseção do limiar $\delta = 0,4$, determinado de modo análogo ao explicado para o caso do oscilador A, com a energia é utilizada para se determinar o início e o término de cada manifestação da dinâmica rápida. Note que, para este caso, o limiar admite outro valor, sendo de fato um valor dependente da análise do dado, da aproximação da dinâmica rápida calculada, do dado original e também da energia calculada ao longo do tempo.

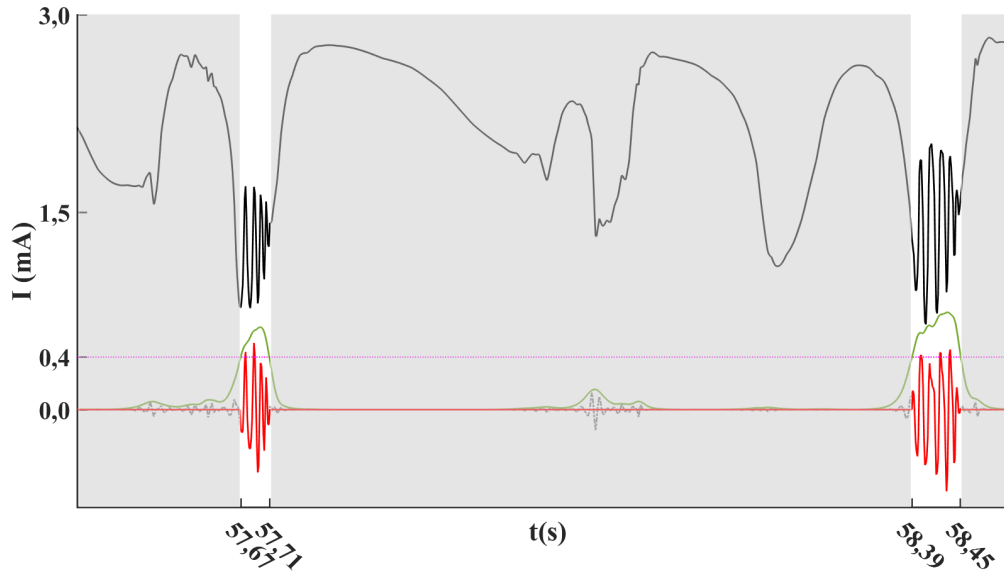
Figura 6.20 - Limiarização da dinâmica rápida para o oscilador experimental C. Limiar $\delta = 0,4$ considerado.



Fonte: Produção do autor.

A escolha do limiar é, particularmente no caso experimental, um desafio. Novamente destaca-se que as análises realizadas nos dados sintéticos e nos dados experimentais indicam que o limiar deve ser escolhido caso a caso considerando-se sempre a aproximação calculada para a dinâmica rápida, a série temporal original e a energia ao longo do tempo. A análise conjunto destas três variáveis permite que se escolha um limiar que, ainda que elimine alguns dos *burstings* reais, mantenha a dinâmica que se deseja aproximar e enfatiza-se que, neste caso, o mais importante é a preservação da frequência de ocorrência das oscilações presentes em cada *bursting*. A Figura 6.21 ilustra a limiarização para a aproximação da dinâmica rápida calculada para o oscilador C cuja interpretação é a mesma da análoga exibida para o oscilador A.

Figura 6.21 - Visualização ampliada da limiarização da dinâmica lenta para o oscilador experimental C. Limiar $\delta = 0,4$ considerado.



Fonte: Produção do autor.

Na Seção 6.2 as aproximações para as dinâmicas lenta e rápida como são utilizadas para se investigar a sincronização entre sistemas com múltiplas escalas de tempo, inclusive no caso da sincronização parcial, em que apenas uma das duas dinâmicas sincroniza-se enquanto a outra permanece dessincronizada ao longo do tempo.

6.2 Aplicação: detecção da sincronização entre dinâmicas rápida e lenta

Esta Seção descreve como as aproximações calculadas de acordo com a metodologia descrita na Seção 6.1 pode ser utilizada na detecção da sincronização entre as diferentes dinâmicas em um sistema caótico com múltiplas escalas de tempo. Trata-se de uma abordagem nova e diferente das descritas na Seção 4.4.

Por clareza, uma vez que dados sintéticos e experimentais com as dinâmicas desejadas estão apresentados e explorados na Seção 6.1, utilizar-se-á aqui os mesmo dados para exemplificar a investigação da sincronização.

Organiza-se esta Seção em quatro Subseções. Na primeira e na segunda, apresentam-se as metodologias para a investigação das dinâmicas lenta e rápida presentes em um sistema qualquer usando-se as aproximações computadas como já descrito neste trabalho.

Nas duas últimas, faz-se a aplicação das metodologias nos dados sintéticos relativos

aos sistemas Hindmarsh-Rose acoplados (veja 6.1.2) e nos dados experimentais relativos aos osciladores eletroquímicos, descritos na Subseção 6.1.3. Em cada Seção encontram-se também discussões parciais acerca dos resultados encontrados.

Como medida da sincronização, utiliza-se neste texto, o índice de sincronização parcial, designado R , cuja medida varia no intervalo real $[0, 1]$ sendo os extremos os casos em que não há qualquer nível de sincronização e em que a sincronização é completa, no sentido de fase e amplitude, respectivamente.

Sendo $osc_1(t)$ e $osc_2(t)$ dois osciladores cujas respectivas séries temporais possuem comprimento T e para os quais as fases instantâneas são $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$, respectivamente, define-se R por (MORMANN et al., 2000):

$$R_{osc_1,osc_2} = \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(\Delta\Phi_{(osc_1,osc_2)}(t)) \right|. \quad (6.3)$$

Para a análise da sincronização dos *burstings*, ou seja, da dinâmica rápida, propõe-se neste trabalho uma modificação deste índice de modo que ele seja uma medida mais precisa no caso específico desta dinâmica. Descrever-se-á a modificação proposta na Seção 6.4

6.3 Detecção da sincronização entre dinâmicas lentas

Uma vez que a dinâmica lenta considerada neste trabalho é caótica, tanto no caso experimental quanto no caso sintético, a detecção da sincronização entre duas dinâmicas lentas far-se-á via DCWA (do inglês, *Discrete Complex Wavelet Approach* (FERREIRA et al., 2017; FERREIRA et al., 2015)).

Dadas as aproximações $f_{lenta}^1(t)$ e $f_{lenta}^2(t)$ aplica-se a Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree* identificando os níveis de decomposição $J^{1,2}$ em que a energia é máxima. Caso J^1 e J^2 sejam distintos, toma-se $J = \min\{J^1, J^2\}$ e, fazendo uso dos coeficientes *wavelet* complexos $\{d^j\}$ no nível J e faz-se a extração das fases $\Phi_{1,2(slow)}(t)$ associadas respectivamente às dinâmicas lentas $f_{lenta}^1(t)$ e $f_{lenta}^2(t)$ como descrito na Subseção 4.2.2.5.

De acordo com a construção teórica apresentada no Capítulo 3, os filtros do primeiro nível de decomposição devem ser diferentes dos filtros utilizados nos demais níveis. Para este trabalho, utilizou-se os filtros detalhados no Apêndice D.

O índice de sincronização parcial R definido pela Equação 6.3 é usado como medida

de sincronização entre as dinâmicas lenta analisadas.

6.4 Detecção da sincronização entre dinâmicas rápidas

A detecção da sincronização entre as dinâmicas rápidas é feita considerando-se os *overlaps* entre as aproximações $f_{\text{rápida}}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}}^2(t)$ calculadas e limiarizadas conforme metodologia proposta na Seção 6.1.1.

Sejam B_1 e B_2 os conjuntos com p e q *burstings* extraídos das aproximações $f_{\text{rápida}}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}}^2(t)$, respectivamente e seja B_{over} o conjunto dos n *overlaps* existentes entre B_1 e B_2 tais que

$$b_i \in B_{\text{over}} \Leftrightarrow b_i = b_p \cap b_q \quad \text{e} \quad \#b_i \geq 0,5 \cdot \min\{\#b_p, \#b_q\}, \quad (6.4)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, em que $\#A$ indica o comprimento do conjunto A e $0 \leq i \leq \min\{p, q\}$, são tais que $i, p, q \in \mathbb{N}$.

De acordo com a Equação 6.4 estão no conjunto B_{over} apenas os *overlaps* cujo comprimento seja pelo menos igual à metade do menor comprimento entre os dois *burstings* que os constituem.

Faz-se esta restrição uma vez que podem ocorrer *overlaps* de tamanho insignificante; por exemplo, nas análises realizadas para os dados experimentais encontram-se *overlaps* com apenas 10 registros ou até menos e dos quais não se extrai informação alguma.

Em sequência, constroem-se séries temporais $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^2(t)$ não nulas somente nos *overlaps* $b_n \in B_{\text{over}}$, intervalos nos quais elas assumem os mesmos valores que os das aproximações $f_{\text{rápida}}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}}^2(t)$. Portanto, as séries $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^2(t)$ assim construídas contém apenas as regiões de *overlaps* existentes entre as aproximações das dinâmicas rápida.

Aplica-se, então, a CWT nas séries $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^1(t)$ e $f_{\text{rápida}(B_{\text{over}})}^2(t)$ com qualquer $\psi(t)$ analisadora complexa de modo que seja possível extrair uma medida de fase.

Neste trabalho, considera-se a *wavelet* de Morse com parâmetros $\beta = 20$ e $\gamma = 3$ escolhidos conforme discussão apresentada na Seção 2.2 do Capítulo 2: com estes parâmetros a largura de banda da resposta em frequência da *wavelet* é estreita o suficiente para privilegiar a análise de sinais altamente oscilatórios, como é o caso.

Considerando os coeficientes *wavelet* complexos correspondentes às frequências

$\omega_{\max_{1,2}}$ cujo espectro global *wavelet* apresenta valor máximo se calcula uma medida de fase $\Phi_{\text{rápida}}^{1,2}(t)$ a ser considerada somente em cada região $b_n \in B_{\text{over}}$, em que ela tem significado. Assim, se existem n elementos em B_{over} também existem n medidas de fase: uma para cada *overlap* considerado.

Tal abordagem para a atribuição de fase segue o exposto na Subseção 4.2.2.4 do Capítulo 4 e não é inédita, sendo reportada na literatura para o cômputo de fases instantâneas (CHANDRE et al., 2003; KORONOVSKII; HRAMOV, 2004; HRAMOV; KORONOVSKII, 2005); aqui, o ineditismo está em seu uso para se obter medidas de fase para dinâmicas cuja manifestação não se define para todo tempo.

Enfatizando: a abordagem proposta não implica em uma medida de fase instantânea para a dinâmica rápida, uma vez que considerar-se-á apenas a restrição das fases $\Phi_{\text{rápida}}^{1,2}(t)$ às regiões de sobreposição dos *burstings*, ou seja, aos elementos de B_{over} .

Considerando $\Phi_{\text{rápida}}^{1,2}(t)$ em cada $b_i \in B_{\text{over}}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, calcula-se o conjunto $\{R_i\}$ cujos elementos são dados pela Equação 6.3, ou seja, cada elemento de $\{R_i\}$ é a medida do índice de sincronização parcial associada a cada um dos elementos de B_{over} . A sincronização da dinâmica rápida é, então, medida pelo índice $R_{\text{rápida}}$ definido pela média $\langle R \rangle$ dos elementos de $\{R_i\}$ com a aplicação de um fator de ponderação:

$$R_{\text{rápida}} = \frac{\#B_{\text{over}}}{\min\{\#B_1, \#B_2\}} \cdot \langle R \rangle. \quad (6.5)$$

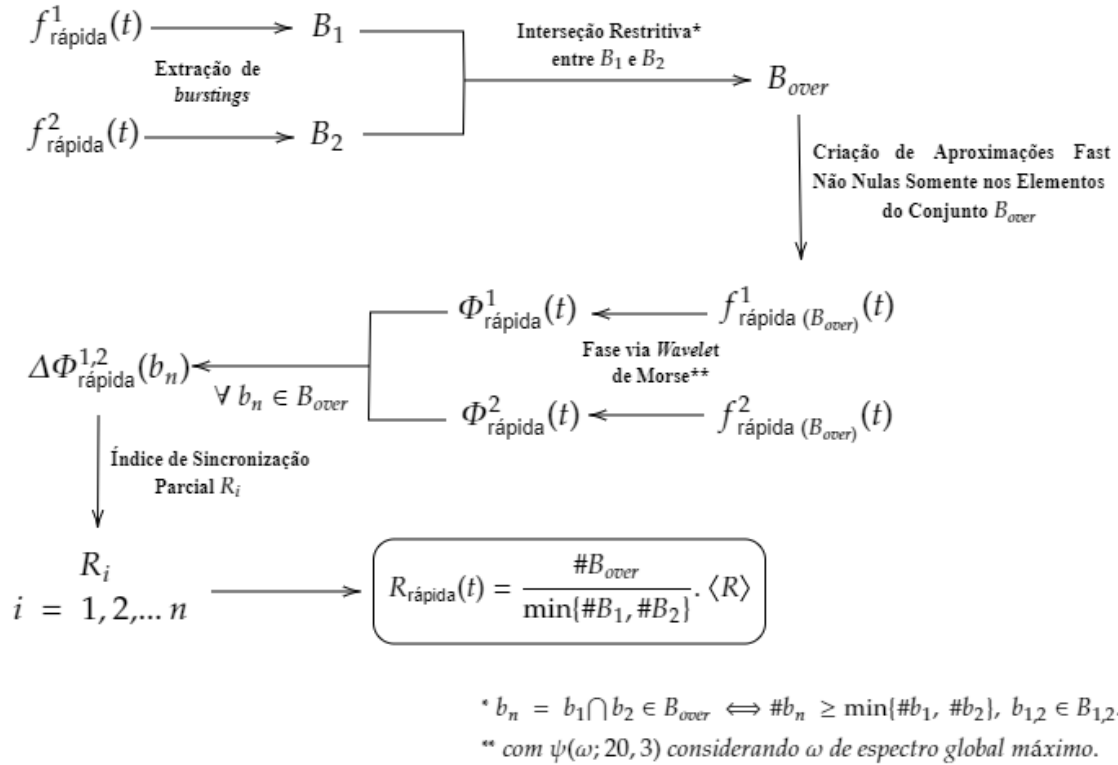
A introdução de uma medida de ponderação na Equação 6.5 é feita considerando o caso ideal em que a dinâmica rápida apresenta sincronização de *burstings*, conforme definido em Omelchenko et al. (2010).

Neste caso todos os *burstings* apresentam o mesmo número de oscilações e os instantes de tempo em que se iniciam e terminam são iguais e portanto, corresponde a um fator de ponderação igual a 1 pois $\#B_{\text{over}} = \min\{\#B_1, \#B_2\}$.

Por outro lado, se as dinâmicas rápidas estão completamente dessincronizadas não há qualquer *overlap* a ser considerado. Neste caso, $B_{\text{over}} = \{\}$ e então $R_{\text{rápida}} = 0$, como esperado.

A Figura 6.22 apresenta uma descrição gráfica do método proposto para a detecção da sincronização entre dinâmicas rápida via medição do índice R definido pela Equação 6.5.

Figura 6.22 - Detecção da sincronização entre dinâmicas rápida.



Fonte: Produção do autor.

6.5 Aplicação nos dados sintéticos

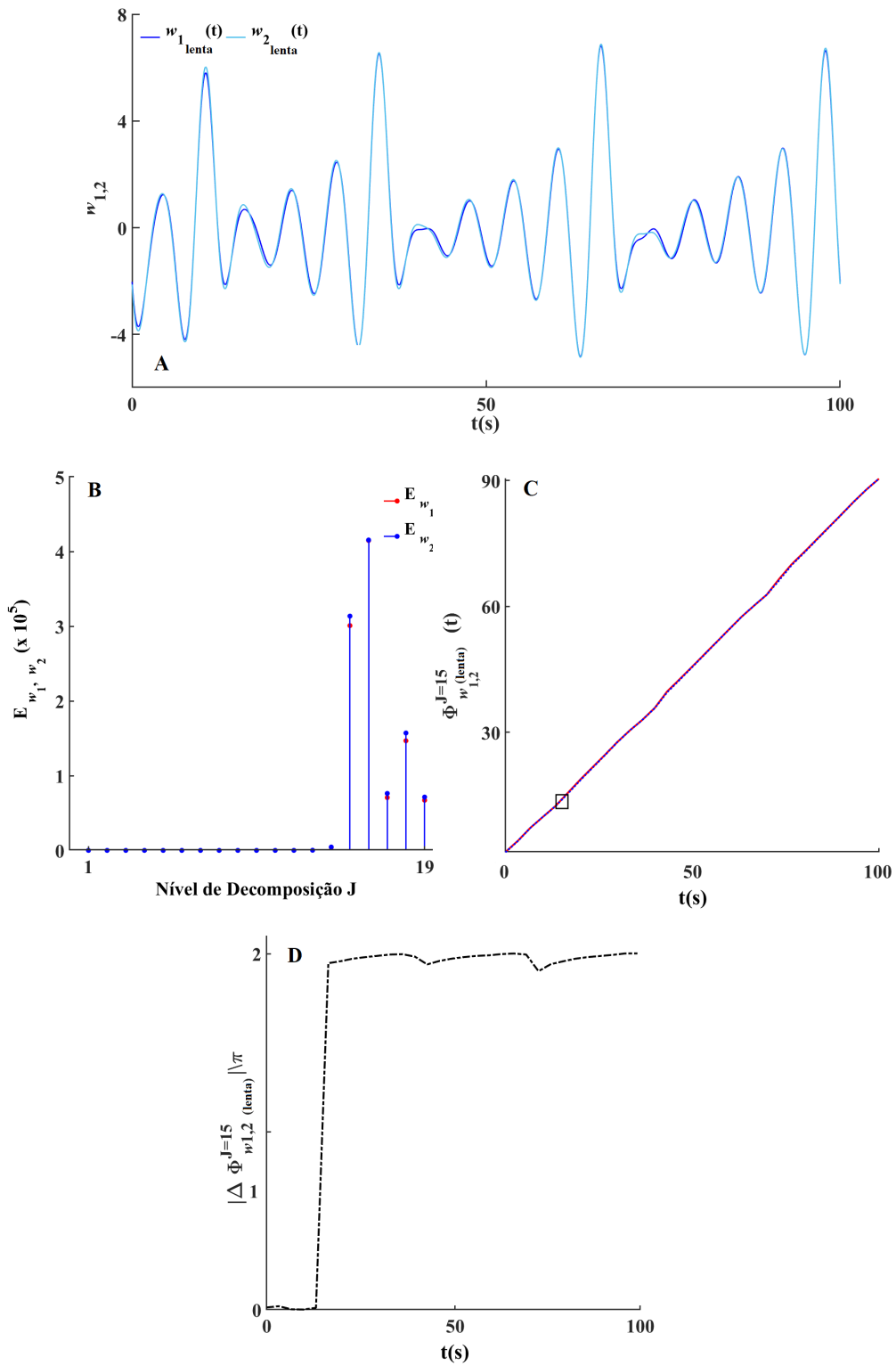
Apresenta-se nesta Seção os resultados obtidos pela aplicação das metodologias propostas para a detecção da sincronização entre as dinâmicas rápida e lenta no caso sintético, descrito na Subseção 6.1.2 como dois osciladores do tipo Hindmarsh-Rose acoplados bidirecionalmente e cujas variáveis $w_{1,2}$ exibem, no tempo, a manifestação de uma dinâmica lenta caótica sendo a rápida caracterizada por *burstings* do tipo onda quadrada. A separação das dinâmicas está descrita na Subseção 6.1.4.

Considera-se, na sequência, o caso mais interessante, descrito em Omelchenko et al. (2010): para uma intensidade de acoplamento $\epsilon = 0,06$ a sincronização do sistema é parcial: a dinâmica lenta exhibe forte sincronização mas a rápida não.

Mostra-se-á que os resultados obtidos com as novas metodologias propostas estão de acordo com o resultado reportado no trabalho citado.

Para a dinâmica lenta, o resultado encontra-se ilustrado na Figura 6.23.

Figura 6.23 - Sincronização entre dinâmicas lenta nos dados sintéticos.



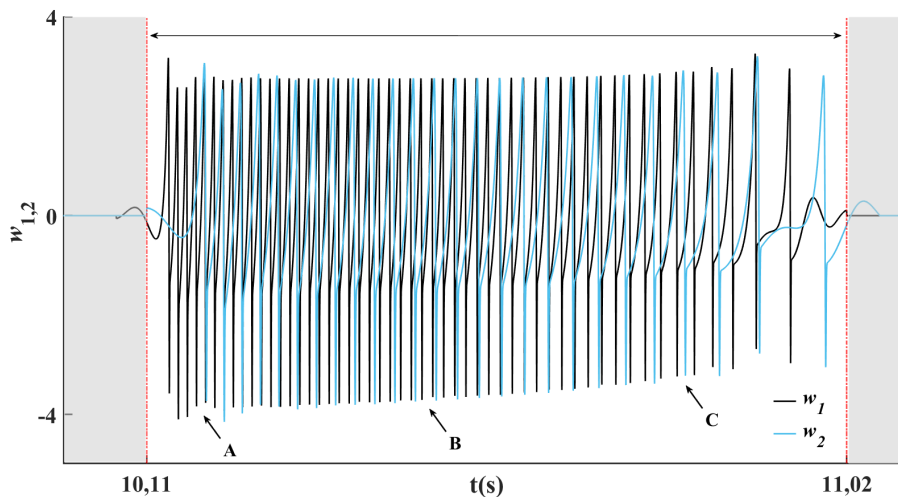
Fonte: Produção do autor.

O painel A ilustra o comportamento temporal das aproximações calculadas para as dinâmicas lenta presentes nas variáveis $w_{1,2}$. O painel B ilustra o espectro de energia via aplicação da DT-CWT com 19 níveis e que as séries temporais w_1 e w_2 apresentam medida máxima de energia nos níveis 15 e 16 de decomposição, respectivamente. Portanto, considerando-se $J = 15$, a fase calculada para as dinâmicas lentas estão apresentadas no painel C.

Finalmente, o painel D exibe a diferença de fase em que se nota um deslizamento de fase em torno de $t = 12$ s, aproximadamente; a região do deslizamento de fase está destacada pelo pequeno quadrado no painel C. Como resultado, o índice de sincronização parcial calculado é $R = 0,99$, com aproximação de duas casas decimais.

Para a dinâmica rápida, o primeiro dos elementos de B_{over} está destacado na Figura 6.24, em que a região sombreada corresponde à região descartada pelo tratamento das bordas; nota-se o comportamento assíncrono. Note que o número de *spikes* e frequência de ocorrência não coincidem (regiões B e C) e existe um atraso na manifestação da dinâmica rápida em w_2 (região A).

Figura 6.24 - Primeiro elemento do conjunto B_{over} para os dados sintéticos.



Fonte: Produção do autor.

A dinâmica rápida presente nos dados sintéticos é representada por um conjunto de 4 *burstings* do tipo onda quadrada, conforme destacado na Figura 6.10; além disto, por simples inspeção da Figura 6.6 que existem 4 regiões de *overlaps*. Portanto, $\#B_{over} = 4$.

Aplicando-se a metodologia conforme descrita na Seção 6.4 encontra-se $R_{fast} = 0,12$, ou seja, não há sincronização entre as dinâmicas rápida. Deste modo, conclui-se que a metodologia apresentada tanto para a separação das dinâmicas quanto para a detecção da sincronização entre as diferentes dinâmicas

As análises do parágrafo anterior implicam, portanto, que as dinâmicas lenta $w_{1_{lenta}}(t)$ e $w_{2_{lenta}}(t)$ encontram-se em regime de sincronização mas $w_{1_{rápida}}(t)$ e $w_{2_{rápida}}(t)$ permanecem assíncronas como esperado e relatado por Omelchenko et al. (2010). Portanto, além de corroborar os métodos aqui propostos pode-se afirmar que eles, inclusive, são capazes de detectar a sincronização parcial.

6.6 Aplicação nos dados experimentais

Nesta Seção apresenta-se os resultados dos métodos propostos de detecção da sincronização considerando os dados experimentais dos osciladores eletroquímicos em rede descritos na Subseção 6.1.3 e sumarizados na Tabela 6.2. A separação das dinâmicas, para o caso experimental, está apresentada na Seção 6.1.4.2.

A análise das aproximações para as dinâmicas lentas, considerando inicialmente as oito redes com dois osciladores, está apresentada na Figura 6.25.

Para intensidades de de acoplamento $\epsilon = 0,6$ e $\epsilon = 0,7$ o nível de decomposição considerado para o cômputo da fase é $J = 7$. Em todos os demais casos o nível considerado é o $J = 8$.

A linha superior apresenta as fases seguida da diferença de fase para $\epsilon = 0,0$ e $\epsilon = 0,2$, respectivamente. O mesmo se repete para as demais linhas considerando-se as demais intensidades de acoplamento.

De acordo com o *setup* experimental para estes dados, a sincronização manifesta-se para uma intensidade de acoplamento maior que $\epsilon > 0,7$. O cálculo do índice de sincronização parcial R para cada caso indica que, para $\epsilon > 0,7$, a sincronização está presente e seus valores em cada caso podem ser visualizados na Tabela 6.3. Os resultados para os valores de R estão arredondados, considerando-se duas casas decimais.

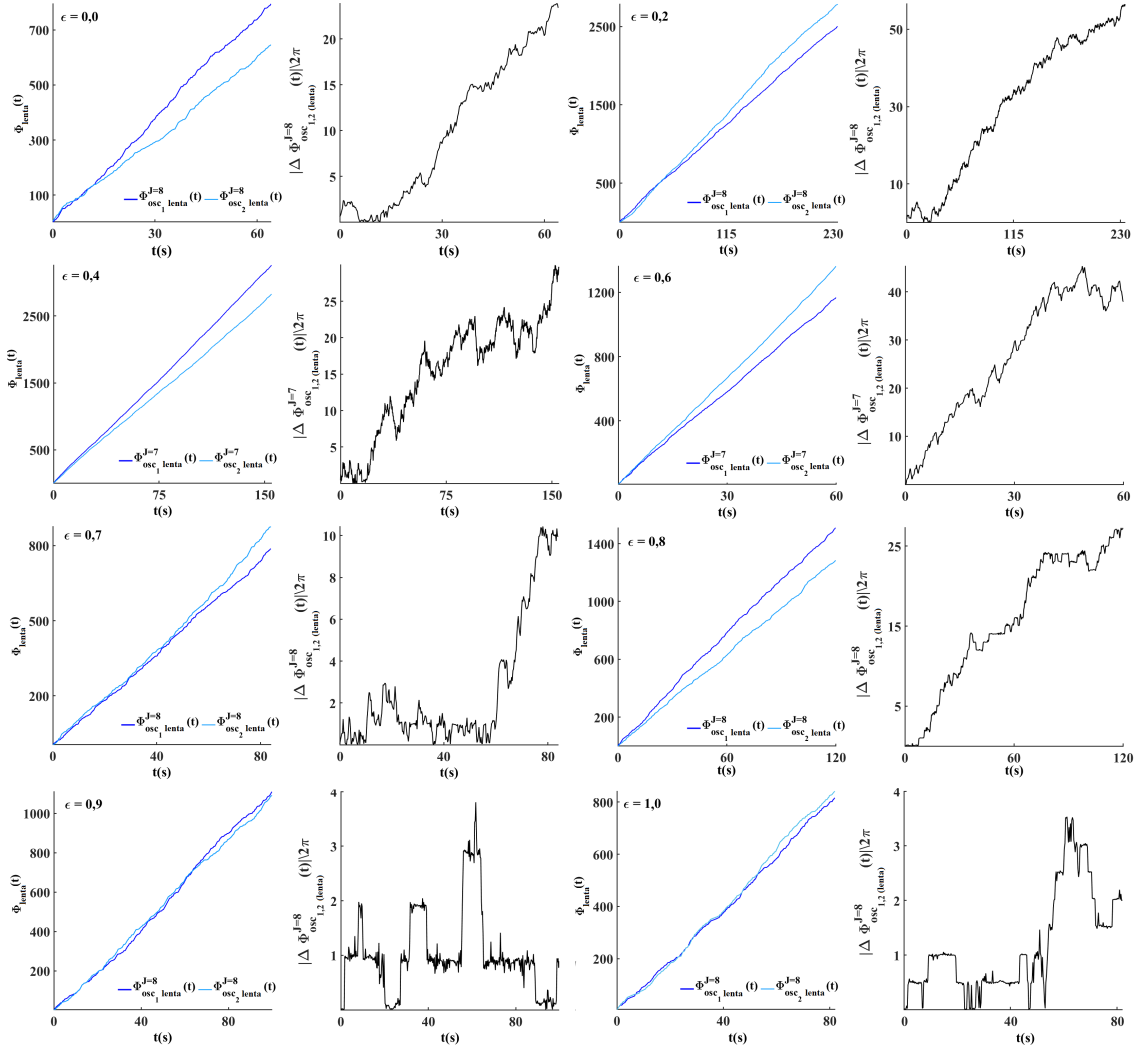
A metodologia proposta para a aproximação da dinâmica lenta é capaz de preservar a complexidade do sistema completo, de tal modo que a sincronização entre as dinâmicas lentas é corretamente detectada.

Tabela 6.3 - Índice de sincronização parcial entre as dinâmicas lentas para as redes com dois osciladores eletroquímicos experimentais.

Rede	I ($\epsilon = 0,0$)	II ($\epsilon = 0,2$)	III ($\epsilon = 0,4$)	IV ($\epsilon = 0,6$)	V ($\epsilon = 0,7$)	VI ($\epsilon = 0,8$)	VII ($\epsilon = 0,9$)	VIII ($\epsilon = 1,0$)
R_{slow}	0,11	0,10	0,19	0,26	0,26	0,64	0,76	0,96

Fonte: Produção do autor.

Figura 6.25 - Fase e diferença de fase para a dinâmica lenta nas redes com dois osciladores.



Fonte: Produção do autor.

Com relação à detecção da sincronização entre as dinâmicas rápida $I_{1rápida}(t)$ e $I_{2rápida}(t)$ das redes com dois osciladores, inicialmente apresenta-se o resultado da análise dos *burstings*, na Tabela 6.4, via aplicação da metodologia descrita na Seção 6.1.4.

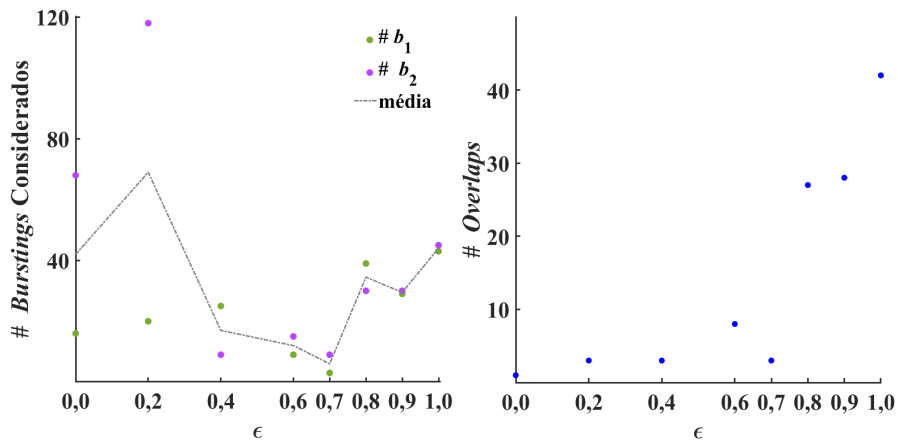
Os termos “detectados” e “considerados” são utilizados como referência ao número de *burstings* após a aplicação da limiarização da energia e após o descarte, sequencial à etapa de limiarização, em relação ao comprimento, respectivamente. A última coluna indica o número de *overlaps* existentes.

Tabela 6.4 - *Burstings* e *overlaps* nas aproximações calculadas para a dinâmica rápida.

Rede	Oscilador	Limiar $\mathbb{E}(t)$	# Burstings		#Overlaps
			Detectados	Considerados	
I	A	0,5	30	16	1
	B	0,8	106	62	
II	C	0,4	32	15	2
	D	0,5	230	121	
III	E	0,4	51	25	3
	F	0,4	24	09	
IV	G	0,3	16	09	8
	H	0,3	31	15	
V	I	0,4	07	03	3
	J	0,4	20	09	
VI	K	0,4	75	39	27
	L	0,4	61	30	
VII	M	0,4	54	29	28
	N	0,4	57	30	
VIII	O	0,4	77	43	42
	P	0,4	83	45	

Fonte: Produção do autor.

Figura 6.26 - *Burstings* e *overlaps* em função da intensidade de acoplamento $\epsilon \geq 0$ para a aproximação da dinâmica rápida.



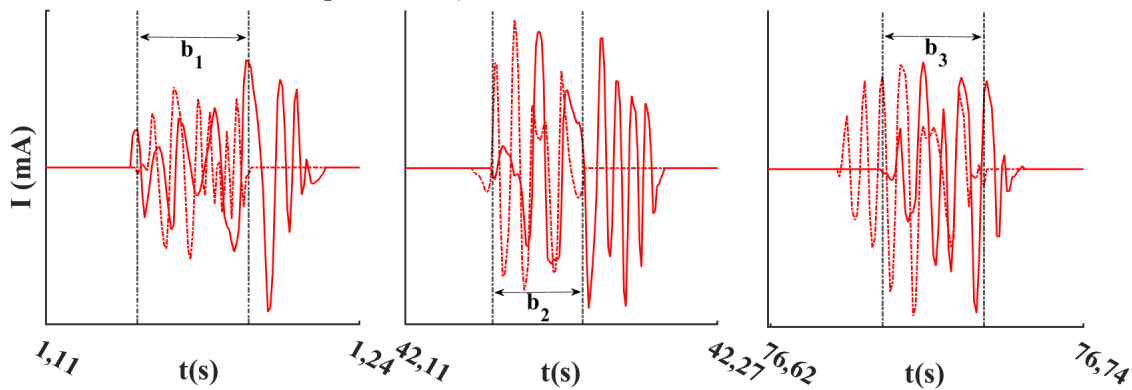
Fonte: Produção do autor.

Os dados da Tabela 6.4 indicam que, à medida que a intensidade de acoplamento $\epsilon \geq 0$ aumenta, o número de *burstings* tanto detectados quanto considerados tende a convergir para um valor comum. Além disso, o número de *overlaps* a serem considerados também aumenta consideravelmente.

Deste modo, para os dados experimentais analisados é razoável considerar o número de *burstings* e o número de *overlaps* como funções da intensidade de acoplamento $\epsilon \geq 0$ como ilustrado na Figura 6.26. O limiar baseado na energia $\mathbb{E}(t)$ utilizado em cada aproximação calculada também tende a tornar-se o mesmo para as duas séries temporais em rede à medida que $\epsilon \geq 0$ aumenta.

Quanto à sincronização da dinâmica rápida apresenta-se dois casos em detalhes: as redes correspondentes às intensidades de acoplamento $\epsilon = 0,4$ e $\epsilon = 1,0$.

Figura 6.27 - *Overlaps* para a rede de osciladores eletroquímicos experimentais com dois osciladores para $\epsilon = 0,4$.



Fonte: Produção do autor.

Para $\epsilon = 0,4$ existem apenas 3 *overlaps* conforme a Tabela 6.4. A Figura 6.27, em que as linhas contínua e pontilhada representam respectivamente os osciladores E e F, conforme nomenclatura da Tabela 6.2, mostra que eles não correspondem à perfeita sobreposição dos *burstings* presentes nas aproximações da dinâmica rápida calculada para E e F.

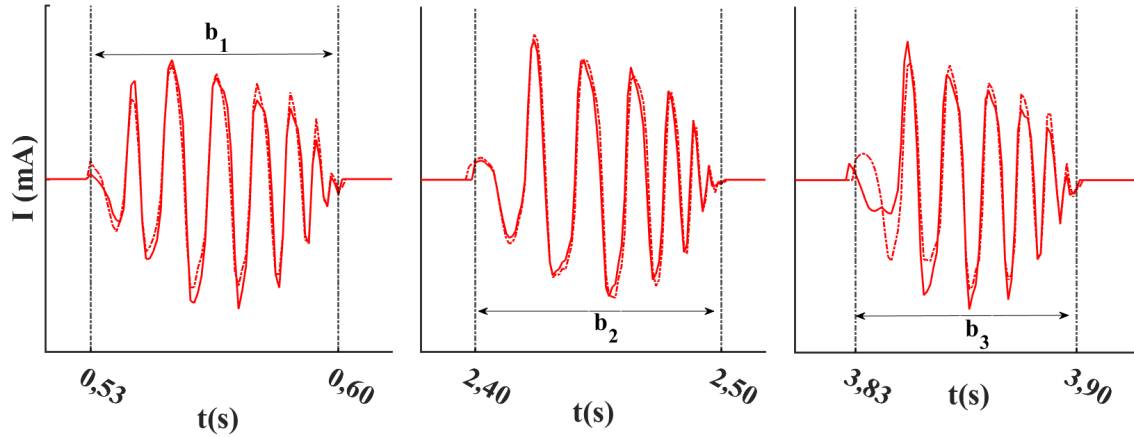
Tem-se $R = \{0,62, 0,51, 0,53\}$ considerando as regiões b_1 , b_2 e b_3 , respectivamente. Uma vez que existem 3 *overlaps* e $\min\{25, 9\} = 9$ em que 25 e 9 correspondem ao número de *burstings* considerados nos osciladores E e F, respectivamente, de acordo

com a Equação 6.5, tem-se para esta rede em particular:

$$R_{fast} = \frac{1,66}{3} \cdot \frac{3}{9} = 0,19, \quad (6.6)$$

fazendo um arredondamento com duas casas decimais. Este valor para o índice de sincronização indica, claramente, que a rede com intensidade de acoplamento $\epsilon = 0,4$ não apresenta dinâmica rápida sincronizada; nota-se que sequer a dinâmica lenta encontra-se sincronizada, de acordo com a Tabela 6.3.

Figura 6.28 - *Overlaps* iniciais para a rede de osciladores eletroquímicos experimentais com dois osciladores para $\epsilon = 1,0$.



Fonte: Produção do autor.

A rede constituída pelos osciladores O e P cuja intensidade de acoplamento é $\epsilon = 1,0$ apresenta 42 *overlaps* de acordo com a Tabela 6.4; os três primeiros estão ilustrados na Figura 6.28.

Os osciladores O e P estão indicados, respectivamente, pelas linhas contínua e pontilhada. Note que os *overlaps* correspondem exatamente aos *burstings* que os constituem. Para b_1 , b_2 e b_3 tem-se $R_1 = 1,00$, $R_2 = 1,00$ e $R_3 = 0,98$, sempre considerando um arredondamento para duas casas decimais.

A média do conjunto $\{R_i\}_{i=1,2,\dots,42}$ é igual a 1,00 e, considerando que $\min\{45, 43\} = 43$ em que 45 e 43 correspondem ao número de *burstings* considerados nos osciladores O e P, tem-se como índice de sincronização para a dinâmica

rápida:

$$R_{fast} = 1,00 \cdot \frac{42}{43} = 0,98, \quad (6.7)$$

com o arredondamento realizado com duas casas decimais. Esta medida indica a sincronização da dinâmica rápida reproduzidas nas aproximações calculada. A Tabela 6.5 sumariza os índices obtidos considerando as dinâmicas rápidas.

Tabela 6.5 - Índice R para a dinâmica rápida nas redes com 02 osciladores experimentais.

Rede	I ($\epsilon = 0,0$)	II ($\epsilon = 0,2$)	III ($\epsilon = 0,4$)	IV ($\epsilon = 0,6$)	V ($\epsilon = 0,7$)	VI ($\epsilon = 0,8$)	VII ($\epsilon = 0,9$)	VIII ($\epsilon = 1,0$)
R_{slow}	0,01	0,12	0,18	0,13	0,89	0,89	0,95	0,98

Fonte: Produção do autor.

Comparando-se as Tabelas 6.5 e 6.3 os índices para as dinâmicas lenta e rápida no caso em que $\epsilon = 0,7$ merecem uma melhor análise.

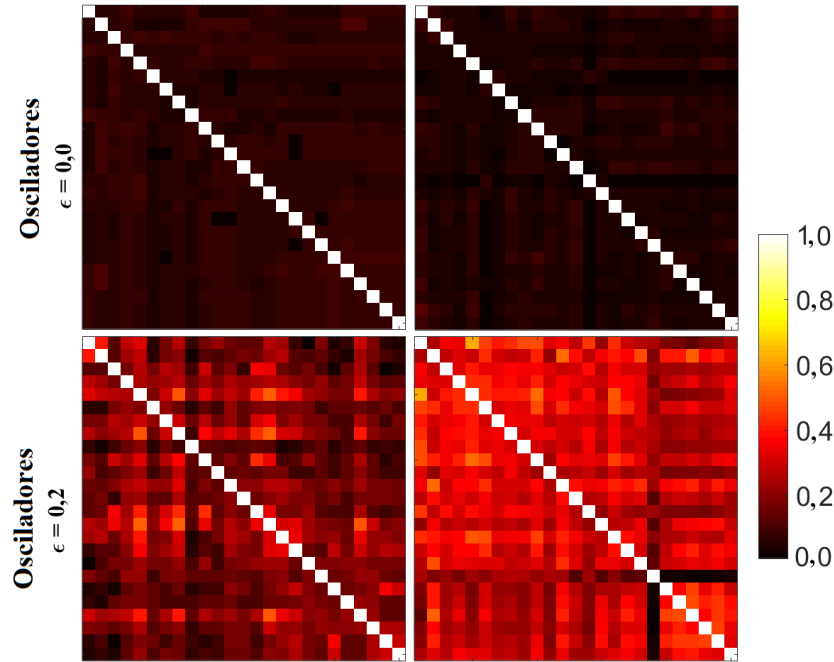
Neste caso, em particular, os índices apontam para um possível caso de sincronização parcial em que a dinâmica rápida parece sincronizar-se, enquanto a outra permanece assíncrona; contudo, esse caso deve ser analisado com alguma outra técnica, uma vez que, de acordo com os resultados da Tabela 6.5, existem apenas 3 *overlaps* que correspondem exatamente aos 3 *burstings* do oscilador I.

De todo modo, pode-se afirmar que para $\epsilon > 0,7$ as dinâmicas rápidas também sincronizam-se. Portanto, para o caso das redes com dois osciladores experimentais tem-se que: (a) as duas diferentes dinâmicas permanecem dessincronizadas para $\epsilon \leq 0,6$; (b) estão sincronizadas para $\epsilon \geq 0,8$ e (c) o caso $\epsilon = 0,7$ suscita dúvida quanto à presença ou não da sincronização parcial dado o baixo número de *overlaps* que apresenta.

Quanto às redes experimentais com 25 osciladores eletroquímicos, conforme destacado na Seção 6.1.3, para $\epsilon > 0,2$ a dinâmica rápida desaparece.

Portanto, neste trabalho pode-se analisar apenas o caso trivial da rede desacoplada uma vez que não há qualquer nível de sincronização presente e o caso em que $\epsilon = 0,2$ em que a sincronização também não se faz presente como se vê na Figura 6.29.

Figura 6.29 - Índice R para a dinâmica rápida nas redes experimentais com 25 osciladores.



Fonte: Produção do autor.

No painel superior da Figura 6.29 tem-se a análise realizada em duas redes com 25 osciladores desacoplados e no inferior para duas redes considerando uma intensidade de acoplamento $\epsilon = 0,2$.

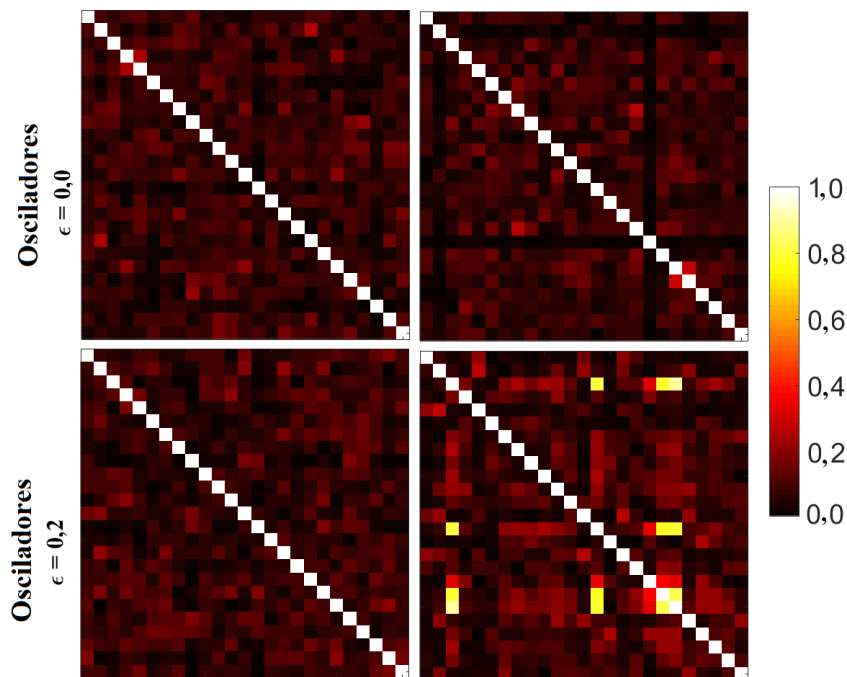
Cada um dos quatro quadros é uma matriz M 25×25 e o valor do índice R_{fast} para a análise dos osciladores i e j , com $0 \leq i, j \leq 25$ encontra-se em M_{ij} . É natural que para $\epsilon = 0,2$ os índices apresentem maiores valores; contudo, ainda são muito menores de 1.0, o que indica a não existência da sincronização.

Além disso, como observado na Seção 6.1.3, nem todos os osciladores quando dispostos em rede apresentam comportamento oscilatório. No caso das redes apresentadas na Figura 6.29 o oscilador 6 e os osciladores 1, 6, 14 e 23 não apresentam manifestação de dinâmica rápida para as duas redes desacopladas mostradas no primeiro e segundo quadros do painel superior, respectivamente.

Quanto às redes com $\epsilon = 0,2$, a ausência da dinâmica rápida e até mesmo do comportamento oscilatório (ainda que, seja um movimento caótico e portanto, para o qual a metodologia se aplica) acontece para os osciladores 9, 10, 11, 12, 13 e 23 e para os osciladores 3, 6, 11, 14, 15, 20, 22, 23 e 25 para o primeiro e segundo quadros do painel inferior, respectivamente.

Fez-se também a análise das aproximações lenta computadas para as mesmas redes que as apresentadas na Figura 6.30 e, como esperado, a sincronização não está presente. Os pontos com altos índices no último quadro do painel inferior correspondem à falsos positivos, corresponde às séries temporais cujo comportamento anômalo reportado está reportado no parágrafo anterior.

Figura 6.30 - Índice R para a dinâmica lenta nas redes experimentais com 25 osciladores.



Fonte: Produção do autor.

A comparação entre as Figuras 6.29 e 6.30 sugere que, em redes cujo comportamento dinâmico pode ser separado em duas dinâmicas, uma lenta e outra rápida, a sincronização das dinâmicas rápida ocorre com maior facilidade.

Observe que nas duas Figuras, no caso em que $\epsilon = 0,2$, o índice de sincronização para a dinâmica rápida é maior que o índice de sincronização da dinâmica lenta. Uma hipótese para este fato está na dificuldade de sincronização do comportamento caótico exibido pelas dinâmicas lenta, mas certamente, a comprovação experimental/teórica deste fato requer pesquisas adicionais.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho são apresentadas aplicações das Transformadas *Wavelet* Contínuas e Discretas em diferentes áreas demonstrando novas aplicabilidades da teoria de *wavelets* e da análise multirresolução em duas áreas distintas.

No contexto do processamento de sinais, são investigadas as relações existentes entre conjuntos de falhas em dados e as possíveis diferenças nos resultados da aplicação da análise tempo-escala quando se faz algum tratamento numérico via métodos interpolatórios quando comparados com os resultados da aplicação da análise tempo-escala adaptativa. Trata-se de estudo relevante para toda área experimental em que existe a possibilidade da existência de falhas nos dados gerados experimentalmente ou coletados eletronicamente, por exemplo.

A pesquisa sobre dados com falhas apresentada neste trabalho indica que o tratamento numérico interpolatório com polinômios cúbicos de Hermite ou interpolações lineares não provoca alterações nos resultados da análise tempo-escala quando as falhas possuem comprimentos relativos não superiores a 1% mas tendem a apresentar leituras superestimadas de energia e deformações das estruturas destas ao longo do tempo.

Para falhas cujos comprimentos relativos estão entre 1% e 10% havendo perda de confiabilidade dos resultados de análise nos casos em os comprimentos relativos das falhas são superiores a 10%. O pré-processamento via *splines* cúbicos não se mostra adequado para nenhuma das categorizações de falha propostas por superestimar a energia existente, introduzir conteúdo frequencial espúrio e falsas estruturas temporais na análises.

Por sua vez, o uso da análise tempo-escala adaptativa em todos os casos estudados elimina completamente as leituras errôneas ou superestimadas de energia, mostrando-se capaz de revelar corretamente o conteúdo frequencial e sua energia nas regiões sem falhas por eliminar qualquer interferência das falhas existentes na análise realizada.

Observa-se que na presença de falhas pequenas, de comprimento relativo não superior a 1%, o pré-processamento numérico via polinômios cúbicos de Hermite ou interpolação linear é indiferente quanto aos resultados da análise tempo-escala. Para as demais classes de falha, a técnica adaptativa apresenta superioridade de desempenho por não introduzir energia e conteúdo espúrio na análise, tornando a análise

realizada confiável e coerente com a informação disponível, ainda que corrompida.

No contexto dos sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo e da sincronização, são apresentados dois métodos que **(a)** permite separar comportamentos dinâmicos distintos, fazendo uso pela primeira vez de métodos *wavelet* e **(b)** detectar a existência ou não da sincronização entre estas dinâmicas separadas, também via aplicação inédita de uma combinação de técnicas *wavelet*. Parte da relevância dos novos métodos propostos está no fato de serem de fácil uso em dados experimentais, uma vez que o único pressuposto para suas aplicações é o conhecimento de uma série unidimensional relacionada com o sistema/fenômeno completo.

Quanto à detecção dos diferentes comportamentos dinâmicos em sistemas caóticos com múltiplas escalas de tempo, os resultados obtidos com o método proposto mostram-se coerentes com os esperados, tanto por sua aplicação em casos sintéticos considerados e cujo resultado encontra-se reportado na literatura, quanto em casos experimentais cujo conhecimento do *setup* experimental utilizado permite ser conhecido, de antemão, o comportamento síncrono ou assíncrono de cada dinâmica presente

Estes resultados indicam que a aplicação da análise de *wavelets* é capaz de extrair a informação completa de um sistema/fenômeno considerando aproximações para os diferentes comportamentos dinâmicos presentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRY, P. **Ondelettes et turbulences: multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle et signaux de pression**. [S.l.]: Diderot, 1997. 15, 28
- ADDISON, P. S. **The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance**. [S.l.]: CRC Press, 2017. 18, 37, 40
- ALLEN, J. B.; RABINER, L. R. A unified approach to short-time fourier analysis and synthesis. **Proceedings of the IEEE**, v. 65, n. 11, p. 1558–1564, 1977. 171
- AN, F.; LIU, J. Image encryption algorithm based on adaptive wavelet chaos. **Journal of Sensors**, v. 2019, 2019. 3
- ANTONINI, M.; BARLAUD, M.; MATHIEU, P.; DAUBECHIES, I. Image coding using wavelet transform. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 1, n. 2, p. 205–220, 1992. 3
- BARREIRA, L.; VALLS, C. **Teoria dos sistemas dinâmicos: uma introdução**. [S.l.]: Livraria da Física, 2012. 55
- BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PONTES, J. C. A. D.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Bursting synchronization in scale-free networks. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 41, n. 5, p. 2220–2225, 2009. 86
- BEERENDS, R. J.; MORSCHE, H. G. ter; BERG, J. C. Van den; VRIE, E. M. Van de. **Fourier and Laplace transforms**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 162
- BENOÎT, E. Canards et enlacements. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 72, p. 63–91, 1990. 84
- BENOÎT, E.; LOBRY, C. Les canards de r^3 . **Comptes rendus de l'Académie des Sciences**, v. 294, p. 483–488, 1982. 84
- BENOÎT, E. et al. Chasse au canard. 1981. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard. 84
- BERGLUND, N. Perturbation theory of dynamical systems. **arXiv preprint math/0111178**, 2001. 75

- BLOOMFIELD, P. **Fourier analysis of time series: an introduction**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. 1
- BOARETTO, B. R. R.; BUDZINSKI, R. C.; PRADO, T. L.; KURTHS, J.; LOPES, S. R. Neuron dynamics variability and anomalous phase synchronization of neural networks. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 28, n. 10, p. 106304, 2018. 86
- BÖRGER, C. Canard explosions. In: BÖRGER, C. (Ed.). **An introduction to modeling neuronal dynamics**. [S.l.]: Springer, 2017. p. 105–110. 84
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. [S.l.]: Cengage Learning, 2008. 17
- BUTZER, P. L.; NESSEL, R. J. Fourier analysis and approximation. **Reviews in Group Representation Theory, Part A (Pure and Applied Mathematics) Series, Vol. 7**, 1971. 162
- CHANDRE, C.; WIGGINS, S.; UZER, T. Time–frequency analysis of chaotic systems. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 181, n. 3-4, p. 171–196, 2003. 69, 131
- CHEN, J. Y.; WONG, K. W.; SHUAI, J. W. Properties of phase locking with weak phase-coherent attractors. **Physics Letters A**, v. 285, n. 5-6, p. 312–318, 2001. 68
- CHEN, P.; NALS, J. V. Amplitude equation and pattern selection in faraday waves. **Physical Review E**, v. 60, p. 559–570, Jul 1999. 70
- CHEN, X.; HEIDARINEJAD, M.; LIU, J.; CHRISTOFIDES, P. D. Composite fast-slow mpc design for nonlinear singularly perturbed systems. **AIChE Journal**, v. 58, n. 6, p. 1802–1811, 2012. 70
- CHIAVAZZO, E. Approximation of slow and fast dynamics in multiscale dynamical systems by the linearized relaxation redistribution method. **Journal of Computational Physics**, v. 231, n. 4, p. 1751–1765, 2012. 104
- CHOW, J.; KOKOTOVIC, P. A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 21, n. 5, p. 701–705, 1976. 104
- COCHRAN, W. T. et al. What is the fast fourier transform? **Proceedings of the IEEE**, v. 55, n. 10, p. 1664–1674, 1967. 167

- CONNES, A. **Noncommutative geometry**. Paris: [s.n.], 1994. Disponível em <https://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf>. 161
- COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. **Mathematics of computation**, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. 167
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. [S.l.]: SIAM, 1992. 2, 3, 6, 18, 35, 37, 41, 42, 177, 225
- _____. Where do wavelets come from? a personal point of view. **Proceedings of the IEEE**, v. 84, n. 4, p. 510–513, 1996. 12, 106
- DAVIES, B. **Integral transforms and their applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. 225
- DING, Q.; ZHUANG, Z.; ZHU, L.; ZHANG, Q. Application of the chaos, fractal and wavelet theories to the feature extraction of passive acoustic signal. **Acta Acustica Peking**, v. 24, p. 197–203, 1999. 3
- DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; COSTA, A. M. On wavelet techniques in atmospheric sciences. **Advances in Space Research**, v. 35, n. 5, p. 831 – 842, 2005. 93
- DOMINGUES, M. O.; MENDES, O.; KAIBARA, M. K.; MENCONI, V. E.; BERNARDES, E. Explorando a transformada wavelet contínua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 3, 2016. 29
- EVSTIFEEV, E. V.; MOSKALENKO, O. I. Using a continuous wavelet transform to characterize intermittent generalized synchronization. **Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics**, v. 84, n. 2, p. 230–233, 2020. 4
- FARGE, M. Wavelet transforms and their applications to turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 24, n. 1, p. 395–458, 1992. 11
- FENICHEL, N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. **Journal of Differential Equations**, v. 31, n. 1, p. 53–98, 1979. 77
- FERREIRA, M. T. **Detecção da sincronização de fase em sistemas caóticos por meio da transformada wavelet complexa dual–tree**. 202 p.
INPE-17430-TDI/2232. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, 2014. 183

- FERREIRA, M. T.; FOLLMANN, R.; DOMINGUES, M. O.; MACAU, E. E. Aplicação da transformada wavelet complexa dual-tree na detecção de sincronização de fase entre sistemas caóticos de lorenz. In: **ANAIS DO CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL-CMAC Sudeste**. [S.l.: s.n.], 2013. p. 414–419. 63
- FERREIRA, M. T.; FOLLMANN, R.; DOMINGUES, M. O.; MACAU, E. E. N.; KISS, I. Z. Experimental phase synchronization detection in non-phase coherent chaotic systems by using the discrete complex wavelet approach. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 27, n. 8, p. 083122, 2017. 4, 69, 129
- FERREIRA, M. T.; NOBREGA, C. B. F.; DOMINGUES, M. O.; MACAU, E. E. N. The discrete complex wavelet approach to phase assignment and a new test bed for related methods. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 25, n. 1, p. 013117, 2015. 4, 69, 129
- FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. **Caos: uma introdução**. [S.l.: s.n.], 1994. 65
- FOLLAND, G. B.; SITARAM, A. The uncertainty principle: a mathematical survey. **Journal of Fourier Analysis and Applications**, v. 3, n. 3, p. 207–238, 1997. 167
- FRAZIER, M. W. **An introduction to wavelets through linear algebra**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. 44
- FRICK, P.; BALIUNAS, S. L.; GALYAGIN, D.; SOKOLOFF, D.; SOON, W. Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations. **The Astrophysical Journal**, v. 483, n. 1, p. 426, 1997. 3, 30, 31
- FRICK, P.; GROSSMANN, A.; TCHAMITCHIAN, P. Wavelet analysis of signals with gaps. **Journal of Mathematical Physics**, v. 39, n. 8, p. 4091–4107, 1998. 3, 18, 30, 31, 34
- FRÖBERG, C.-E. **Introduction to numerical analysis**. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, M.A., 1965. 92
- FUJIMOTO, K.; KANEKO, K. How fast elements can affect slow dynamics. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 180, n. 6, p. 1–16, 2003. 104

- FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. **Progress of Theoretical Physics**, v. 69, n. 1, p. 32–47, 1983. 62
- GIACOMELLI, G.; POLITI, A. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 117, n. 1-4, p. 26–42, 1998. 70
- GORYACHEV, A.; KAPRAL, R. Spiral waves in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 10, p. 1619, 1996. 67
- GOUSSI, A. D.; VALORANI, M. An efficient iterative algorithm for the approximation of the fast and slow dynamics of stiff systems. **Journal of Computational Physics**, v. 214, n. 1, p. 316–346, 2006. 104
- GRAFAKOS, L. **Classical fourier analysis**. [S.l.]: Springer, 2008. 1
- GRIFFIN, D.; LIM, J. Signal estimation from modified short-time fourier transform. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 32, n. 2, p. 236–243, 1984. 171
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984. 2
- GUCKENHEIMER, J. Bifurcation and degenerate decomposition in multiple time scale dynamical systems. In: STROGATZ, S. H. (Ed.). **Nonlinear dynamics and chaos**. [S.l.]: CRC Press, 2002. p. 13–32. 75
- _____. Bifurcations of relaxation oscillations. **Normal Forms, Bifurcations and Finiteness Problems in Differential Equations**, v. 137, p. 295–316, 2004. 83
- GUPTA, S.; DE, S.; JANAKI, M. S.; IYENGAR, A. N. S. Using wavelet analysis to investigate synchronization. **Physical Review E**, v. 100, n. 2, p. 022218, 2019. 4
- HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 43, p. 172–198, 1927. 167
- HELD, I. M.; WINTON, M.; TAKAHASHI, K.; K., D.; T., D.; ZENG, F.; VALLIS, G. K. Probing the fast and slow components of global warming by returning abruptly to preindustrial forcing. **Journal of Climate**, v. 23, n. 9, p. 2418–2427, 2010. 104

HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. **Invariant manifolds**. [S.l.]: Springer, 2006. 52

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos**. [S.l.]: Academic Press, 2012. 51, 54, 56

HJERTAGER, L. K.; HJERTAGER, B. H.; SOLBERG, T. Cfd modelling of fast chemical reactions in turbulent liquid flows. **Computers & Chemical Engineering**, v. 26, n. 4-5, p. 507–515, 2002. 70

HÖNIG, C. S. Teoria da medida e outras contribuições. **Estudos Avançados**, v. 10, n. 26, p. 205–209, 1996. 161

HOVAKIMYAN, N.; LAVRETSKY, E.; CAO, C. (Ed.). **Dynamic inversion of multi-input nonaffine systems via time-scale separation**. Minneapolis: [s.n.], 2006. 104

HRAMOV, A. E.; KORONOVSKII, A. A. Time scale synchronization of chaotic oscillators. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 206, n. 3-4, p. 252–264, 2005. 69, 131

IMS, R. A.; ANDREASSEN, H. P. Spatial synchronization of vole population dynamics by predatory birds. **Nature**, v. 408, n. 6809, p. 194–196, 2000. 61

INNOCENTI, G.; MORELLI, A.; GENESIO, R.; TORCINI, A. Dynamical phases of the hindmarsh-rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 17, n. 4, p. 043128, 2007. 85

IZHIKEVICH, E. M. Neural excitability, spiking and bursting. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 10, n. 06, p. 1171–1266, 2000. 70

_____. Subcritical elliptic bursting of bautin type. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 60, n. 2, p. 503–535, 2000. 87

_____. Synchronization of elliptic bursters. **SIAM Review**, v. 43, n. 2, p. 315–344, 2001. 85, 87

_____. Simple model of spiking neurons. **IEEE Transactions on Neural Networks**, v. 14, n. 6, p. 1569–1572, 2003. 70

- JOHNSON, S. G.; FRIGO, M. A modified split-radix fft with fewer arithmetic operations. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 55, n. 1, p. 111–119, 2006. 167
- JONES, C. K. Geometric singular perturbation theory. In: BARREIRA L.; VALLS, C. (Ed.). **Dynamical systems**. [S.l.]: Springer, 1995. p. 44–118. 77
- JORDAN, P.; NEUMANN, J. von; WIGNER, E. P. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. In: WIGHTMAN, A. (Ed.). **The collected works of Eugene Paul Wigner (Part A: the scientific papers)**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 298–333. 161
- KAISER, G. **A friendly guide to wavelets**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. 171
- KAPER, T. J. Systems theory for singular perturbation problems. **Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation**, v. 56, n. 56, p. 85, 1999. 75
- KARANTONIS, A.; KOUTSAFTIS, D.; KOULOUMBI, N. Single and coupled electrochemical bursters during the electrodisolution/passivation of iron. **Electrochimica Acta**, v. 55, n. 2, p. 374–382, 2009. 86
- KELLEY, J. L. **General topology**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2017. 77
- KINGSBURY, N. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement. In: EUROPEAN SIGNAL PROCESSING CONFERENCE, 09., Island of Rhodes, Greece. **Proceedings**. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1998. p. 1–4. 47, 48
- _____. A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING, Vancouver, Canadá. **Proceedings**. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000. v. 2, p. 375–378. 48
- KISS, I. Z.; LV, Q.; ORGAN, L.; HUDSON, J. L. Electrochemical bursting oscillations on a high-dimensional slow subsystem. **Physical Chemistry Chemical Physics**, v. 8, n. 23, p. 2707–2715, 2006. 4, 70, 85, 86, 111
- KLIMESCH, W.; FREUNBERGER, R.; SAUSENG, P.; GRUBER, W. A short review of slow phase synchronization and memory: evidence for control processes in different memory systems? **Brain Research**, v. 1235, p. 31–44, 2008. 85

- KÖRNER, T. W. **Fourier analysis**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. 1
- KORONOVSKII, A. A.; HRAMOV, A. Chaotic phase synchronization studied by means of continuous wavelet transform. **Technical Physics Letters**, v. 30, n. 7, p. 587–590, 2004. 69, 131
- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: Wiley, 1978. 161, 162
- KUEHN, C. **Multiple time scale dynamics**. [S.l.]: Springer, 2015. 75, 78, 80, 85
- KUMAR, P.; FOUFOULA-GEORGIOU, E. Wavelet analysis for geophysical applications. **Reviews of Geophysics**, v. 35, n. 4, p. 385–412, 1997. 2, 29
- LAHMIRI, S.; BEKIROU, S. Big data analytics using multi-fractal wavelet leaders in high-frequency bitcoin markets. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 131, p. 109472, 2020. 3
- LILLY, J. M. *jlab: a data analysis package for Matlab*, v. 1.6.6. 2019. Disponível em: <<http://www.jmlilly.net/jmlsoft.html>>. 21, 22
- LILLY, J. M.; OLHEDE, S. C. Higher-order properties of analytic wavelets. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 57, n. 1, p. 146–160, 2009. 16, 21, 22
- _____. On the analytic wavelet transform. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 56, n. 8, p. 4135–4156, 2010. 16, 21
- _____. Generalized morse wavelets as a superfamily of analytic wavelets. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 60, n. 11, p. 6036–6041, 2012. 16, 20, 21
- LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983. 77
- _____. **Análise real**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004. 75
- LIU, Q.; WANG, Y.; WANG, J.; WANG, Q. Optical image encryption using chaos-based compressed sensing and phase-shifting interference in fractional wavelet domain. **Optical Review**, v. 25, n. 1, p. 46–55, 2018. 3
- LOMB, N. R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. **Astrophysics and space science**, v. 39, n. 2, p. 447–462, 1976. 30

- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. 56
- LOTKA, A. J. Elements of physical biology. **Science Progress in the Twentieth Century**, v. 21, n. 82, p. 341–343, 1926. 53
- LUO, G.; YANG, Z.; PENG, K. Synchronizing chaotic systems with uncertain model and unknown interference using sliding mode control and wavelet neural networks. **Neural Processing Letters**, v. 50, n. 3, p. 2547–2565, 2019. 4
- MAGRINI, L. A.; DOMINGUES, M. O.; JUNIOR, O. M. Análise tempoescala de séries temporais de geofísica espacial com lacunas: estudo de caso. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5, n. 1, 2017. 185
- MAGRINI, L. A.; DOMINGUES, M. O.; MACAU, E. E. N.; KISS, I. Z. Extraction of slow and fast dynamics of multiple time scale systems using wavelet techniques. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 30, n. 6, 2020. 105
- MAGRINI, L. A.; DOMINGUES, M. O.; MENDES, O. On the effects of gaps and uses of approximation functions on the time-scale signal analysis: a case study based on space geophysical events. **Brazilian Journal of Physics**, v. 47, n. 2, p. 167–181, 2017. 92, 93, 102, 185
- MAGRINI, L. A.; LACERDA, J. C.; DOMINGUES, M. O.; CARVALHO, S. V.; MACAU, E. E. N. Por que algumas órbitas periódicas são de difícil reprodução numérica via integrações numéricas convencionais? **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, 2020. 185
- MALLAT, S. Zero-crossings of a wavelet transform. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 37, n. 4, p. 1019–1033, 1991. 3
- _____. **A wavelet tour of signal processing**. [S.l.: s.n.], 1999. 23, 26, 167, 168
- MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. 2, 3, 43
- MAZZINO, A.; MUSACCHIO, S.; VULPIANI, A. Multiple-scale analysis and renormalization for preasymptotic scalar transport. **Physical Review E**, v. 71, n. 1, 2005. 104

- MCGUINNESS, M. J. The fractal dimension of the lorenz attractor. **Physics Letters A**, v. 99, n. 1, p. 5–9, 1983. 57
- MEYER, Y. Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs. In: **Séminaire Bourbaki : volume 1985/86, exposés 651-668**. Société mathématique de France, 1987, (Astérisque, 145-146). p. 209–223. Talk:662. Disponível em: <http://www.numdam.org/item/SB_1985-1986__28__209_0>. 16
- MISHCHENKO, E. **Differential equations with small parameters and relaxation oscillations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. 83
- MOHLENKAMP, M. J.; PEREYRA, M. C. **Wavelets, their friends, and what they can do for you**. [S.l.: s.n.], 2008. 167
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. [S.l.: s.n.], 2002. 56, 65
- MOON, F. C.; HOLMES, W. T. Double poincaré sections of a quasi-periodically forced, chaotic attractor. **Physics Letters A**, v. 111, n. 4, p. 157–160, 1985. 66
- MORLET, J. Sampling theory and wave propagation. In: CHEN, C. H. (Ed.). **Issues in acoustic signal—image processing and recognition**. [S.l.: s.n.], 1983. p. 233–261. 18
- MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; GLARD, D. Wave propagation and sampling theory : part i - complex signal and scattering in multilayered media. **Geophysics**, v. 47, n. 2, p. 203–221, 1982. 2
- MORLET, J.; ARENS, G.; FOURGEAU, E.; GIARD, D. Wave propagation and sampling theory: part ii — sampling theory and complex waves: geophysics. **Geophysics**, v. 47, n. 2, p. 222–236, 1982. 2
- MORMANN, F.; LEHNERTZ, K.; DAVID, P.; ELGER, C. E. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the eeg of epilepsy patients. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 144, n. 3-4, p. 358–369, 2000. 129
- NAQVI, N. et al. A proliferative burst during preadolescence establishes the final cardiomyocyte number. **Cell**, v. 157, n. 4, p. 795–807, 2014. 70
- NÉDA, Z.; RAVASZ, E.; VICSEK, T.; BRECHET, Y.; BARABÁSI, A. Physics of the rhythmic applause. **Physical Review E**, v. 61, n. 6, p. 6987, 2000. 61

OLHEDE, S. C.; WALDEN, A. T. Generalized morse wavelets. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 50, n. 11, p. 2661–2670, 2002. [16](#), [22](#)

OMELCHENKO, I.; ROSENBLUM, M.; A., P. Synchronization of slow-fast systems. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 191, n. 1, p. 3–14, 2010. [85](#), [104](#), [109](#), [131](#), [132](#), [135](#)

OTTE, D. On theories of flash synchronization in fireflies. **The American Naturalist**, v. 116, n. 4, p. 587–590, 1980. [61](#)

OZKARAMANLI, H.; YU, R. On the phase condition and its solution for hilbert transform pairs of wavelet bases. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 51, n. 12, p. 3293–3294, 2003. [47](#)

PAVEL, K.; DAVID, S. Algorithms for efficient computation of convolution. **Design and Architectures for Digital Signal Processing**, p. 179–208, 2013. [164](#)

PERMANN, D.; HAMILTON, I. Wavelet analysis of time series for the duffing oscillator: the detection of order within chaos. **Physical Review Letters**, v. 69, n. 18, p. 2607, 1992. [3](#)

PHILLIPS, C. L.; PARR, J. M.; RISKIN, E. A. **Signals, systems, and transforms**. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. [162](#)

PIKOVSKY, A.; KURTHS, J.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. [3](#), [4](#), [61](#), [64](#), [65](#)

PIKOVSKY, A.; POLITI, A. **Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. [56](#)

PIKOVSKY, A.; ZAKS, M.; ROSENBLUM, M.; OSIPOV, G.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 7, n. 4, p. 680–687, 1997. [66](#), [68](#)

PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 34, n. 3, p. 165, 1996. [67](#)

POL, B. Van der. On “relaxation-oscillations”. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 2, n. 11, p. 978–992, 1926. 72

_____. The nonlinear theory of electric oscillations. **Proceedings of the Institute of Radio Engineers**, v. 22, n. 9, p. 1051–1086, 1934. 70, 72

RAO, R. Wavelet transforms. In: HORNAK, J. P. (Ed.). **Encyclopedia of imaging science and technology**. [S.l.]: American Cancer Society, 2002. 36

RINZEL, J. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems. In: TERAMOTO E.; YAMAGUTI, M. (Ed.). **Mathematical topics in population biology, morphogenesis and neurosciences**. [S.l.: s.n.], 1987. p. 267–281. 107, 109

RORSMAN, P.; ASHCROFT, F. M. Pancreatic β -cell electrical activity and insulin secretion: of mice and men. **Physiological Reviews**, v. 98, n. 1, p. 117–214, 2017. 70

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 44, n. 10, p. 874–881, 1997. 66, 67

RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. 59

ROY, R.; MURPHY, T. W.; MAIER, T. D.; GILLS, Z.; HUNT, E. R. Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system. **Physical Review Letters**, v. 68, p. 1259–1262, Mar 1992. 70

ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. **Real analysis**. New York: Macmillan, 1988. 77

SADOWSKY, J. The continuous wavelet transform: a tool for signal investigation and understanding. **Johns Hopkins APL Technical Digest**, v. 15, p. 306–306, 1994. 25

SCARGLE, J. D. Studies in astronomical time series analysis. ii-statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. **The Astrophysical Journal**, v. 263, p. 835–853, 1982. 30

SCHATZMAN, M.; SCHATZMAN, M. **Numerical analysis: a mathematical introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2002. 93

SELESNICK, I. W. Hilbert transform pairs of wavelet bases. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 8, n. 6, p. 170–173, 2001. 47, 181

_____. The design of approximate hilbert transform pairs of wavelet bases. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 50, n. 5, p. 1144–1152, 2002. 47, 48

SELESNICK, I. W.; BARANIUK, R. G.; KINGSBURY, N. C. The dual-tree complex wavelet transform. **IEEE Signal Processing Magazine**, v. 22, n. 6, p. 123–151, 2005. 46, 47, 49

SHCHEPAKINA, E.; KOROTKOVA, O. Canard explosion in chemical and optical systems. **Discrete & Continuous Dynamical Systems-B**, v. 18, n. 2, p. 495, 2013. 84

SMITH, M. J. T. A.; BARNWELL, T. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. **IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing**, v. 34, n. 3, p. 434–441, 1986. 45

SON, J. W.; LIM, J. T. Feedback linearisation of nonlinear singularly perturbed systems with non-separate slow-fast dynamics. **IET Control Theory & Applications**, v. 2, n. 8, p. 728–735, 2008. 70

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [S.l.]: CRC Press, 2018. 55, 60

TANG, B.; LIU, W.; SONG, T. Wind turbine fault diagnosis based on morlet wavelet transformation and wigner-ville distribution. **Renewable Energy**, v. 35, n. 12, p. 2862–2866, 2010. 18, 19

TEICH, M. C.; HENEGHAN, C.; KHANNA, S. M.; FLOCK, A. A.; ULFENDAHL, M.; BRUNDIN, L. Investigating routes to chaos in the guinea-pig cochlea using the continuous wavelet transform and the short-time fourier transform. **Annals of Biomedical Engineering**, v. 23, n. 5, p. 583–607, 1995. 3

TEOLIS, A. **Computational signal processing with wavelets**. [S.l.]: Springer, 1998. 39

TIAN, J.; QIU, H.; CHEN, Z.; CHEN, Y. Poincaré section analysis to measure synchronization in coupled hamiltonian systems. **Modern Physics Letters B**, v. 27, n. 05, p. 1350036, 2013. 66

- TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. **Bulletin of the American Meteorological Society**, v. 79, n. 1, p. 61–78, 1998. 24
- TRIEBEL, H.; SCHMEISSER, H. J. **Topics in Fourier analysis and function spaces**. [S.l.]: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G, 1987. 162
- TYRRELL, A.; AUER, G.; BETTSTETTER, C. Fireflies as role models for synchronization in ad hoc networks. In: **BIO-INSPIRED MODELS OF NETWORK, INFORMATION AND COMPUTING SYSTEMS**, 01., Cavalese, Italy. **Proceedings**. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2006. p. 1–7. 61
- VANDERPLAS, J. T. Understanding the lomb–scargle periodogram. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 236, n. 1, p. 16, 2018. 30, 31
- WANG, H.; WANG, Q.; LU, Q. Bursting oscillations, bifurcation and synchronization in neuronal systems. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 44, n. 8, p. 667–675, 2011. 85
- WANG, X. J. Genesis of bursting oscillations in the hindmarsh-rose model and homoclinicity to a chaotic saddle. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 62, n. 1-4, p. 263–274, 1993. 85
- WANG, Y.; BOYD, S. Fast model predictive control using online optimization. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 18, n. 2, p. 267–278, 2009. 70
- WELCH, P. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, v. 15, n. 2, p. 70–73, 1967. 171
- WILLARD, S. **General topology**. [S.l.]: Courier Corporation, 2004. 77
- WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. 56
- WU, L.; ZHU, S.; LI, J. Synchronization on fast and slow dynamics in drive-response systems. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 223, n. 2, p. 208–213, 2006. 86
- XIA, S.; QI-SHAO, L. Firing patterns and complete synchronization of coupled hindmarsh–rose neurons. **Chinese Physics**, v. 14, n. 1, p. 77, 2005. 85

YI, H.; XIN, S.; YIN, J. A class of algorithms for continuous wavelet transform based on the circulant matrix. **Algorithms**, v. 11, n. 3, p. 24, 2018. 25

APÊNDICE A - DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

O objetivo deste Apêndice é o de apresentar uma introdução matemática aos domínios do tempo e da frequência bem como as relações fundamentais entre eles que constituem parte da fundamentação teórica desta tese. No que segue, os termos função e sinal são usados como sinônimos. A Teoria da Medida, área da Matemática cujo problema principal é o de se estender a noção intuitiva de medida definindo-a de modo rigoroso em espaços genéricos e em particular no espaço das funções reais ou complexas, desenvolveu-se fundamentalmente no início do século XX quando a Teoria da Integração de Riemann usada até então como principal instrumento de medida foi generalizada com a criação da Integração de Lebesgue (HÖNIG, 1996). Considerando-se esta nova Teoria de Integração em conjunto com os avanços da Análise Funcional, cujo objetivo é o de estender os resultados da Análise Matemática Clássica para espaços vetoriais de dimensão infinita, o conceito de espaço de medida de funções estabeleceu-se como fundamental para a Matemática de modo geral (JORDAN et al., 1993; CONNES, 1994). São de relevância teórica para este trabalho os espaços funcionais $L^p(\Omega)$ em que $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{C}$ e $0 < p < \infty$ nos quais tem-se a noção de medida de acordo com a Definição à seguir:

Definição A.1. *Dada uma função $f(t) \in L^p(\Omega)$ define-se sua medida por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty. \quad (\text{A.1})$$

Particularmente, considerar-se-á os casos em que $p = 1$ ou $p = 2$, ou seja, os espaços das funções integráveis e o das funções quadrado integráveis no sentido de Lebesgue (KREYSZIG, 1978).

Da Equação A.1 decorre que $L^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ são espaços caracterizados pelas funções $f(t) \in \Omega$ cujas normas definidas, respectivamente, por

$$\|f(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{A.2})$$

e

$$\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (\text{A.3})$$

existem e são finitas. Quando o contexto deixar implícito qual dos dois espaços é considerado escrever-se-á apenas $\|f(t)\|$ deixando subentendido a referência às equações A.2 e A.3.

Em $L^2(\Omega)$ define-se usualmente o produto interno entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ quaisquer por (KREYSZIG, 1978)

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \right)^{1/2}, \quad (\text{A.4})$$

em que $\overline{g(t)}$ indica o complexo conjugado da função $g(t)$.

As funções $f(t)$ estão definidas no domínio do tempo uma vez que a variável independente t pode ser interpretada como o tempo no sentido físico da palavra; entretanto, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) mostrou que qualquer função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser suficientemente aproximada de modo único como uma soma de senos (ou cossenos) cujas frequências são bem definidas.

Tal resultado permite considerar $f(t)$ não mais em função da variável t mas em termos da variável frequencial $\omega \in [0, 2\pi[$ medida em Hertz (Hz). Neste caso, diz-se que $f(t)$ está representada no domínio da frequência, sendo a Transformada de Fourier (FT, do inglês *Fourier Transform*) a ferramenta matemática adequada para se revelar qual o conteúdo frequencial presente em $f(t)$.

Definição A.2. *Seja $f(t) \in L^2(\Omega)$. A Transformada de Fourier de $f(t)$ é definida por*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{A.5})$$

A Transformada de Fourier apresenta variadas propriedades que a tornam manejável do ponto de vista teórico e numérico: a linearidade, os deslocamentos em tempo e frequência, a conjugação, a convolução, a diferenciação e a integração em tempo e em frequência são algumas delas. Estas e outras propriedades podem ser encontradas em conjunto com suas demonstrações em Butzer e Nessel (1971), Triebel e Schmeisser (1987), Phillips et al. (2003) e Beerends et al. (2003). Dentre estas propriedades destacam-se três pela relevância teórica que apresentam para este trabalho sendo apresentadas como teoremas a seguir.

A primeira delas, apresentada no Teorema A.1, afirma que a convolução no domínio do tempo conforme Definição A.3 é equivalente ao produto pontual no domínio da frequência. Intuitivamente a convolução entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ quadrado integráveis pode ser compreendida como o resultado da soma do produto de uma delas pela outra transladada u unidades de tempo sobre toda a reta real.

A segunda destas propriedades implica na existência da Transformada Inversa de Fourier (IFT, do inglês *Inverse Fourier Transform*) cuja demonstração é apresentada no Teorema A.2 e para a qual os Lemas A.1 e A.2 são utilizados.

A terceira propriedade revela a relação existente entre as Transformadas de Fourier de uma função $f(t)$ e de sua versão escalada $f(at)$ para $a \in \mathbb{R}^*$ e é apresentada no Teorema A.3.

Definição A.3. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções de $L^2(\Omega)$ contínuas por partes e limitadas em Ω . A convolução das funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida por*

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du \quad (\text{A.6})$$

Teorema A.1. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções de $L^2(\Omega)$ contínuas por partes e limitadas cujas Transformadas de Fourier são, respectivamente, $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$. Então:*

$$\widehat{f(t) * g(t)} = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$

Demonstração. Aplicando-se a Transformada de Fourier na convolução das funções $f(t)$ e $g(t)$ tal como definida pela Equação A.6, tem-se

$$\widehat{f(t) * g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du \right] \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{A.7})$$

Sendo, por hipótese, as funções $f(t)$ e $g(t)$ contínuas, pode-se permutar a ordem de integração estabelecida na Equação A.7. Então,

$$\widehat{f(t) * g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) \exp(-i\omega t) dt du. \quad (\text{A.8})$$

Considera-se agora na Equação A.8 a substituição $q = t - u$ de modo que $dq = du$ e $t = q + u$ de modo que

$$\widehat{f(t) * g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(q) \exp(-i\omega(q+u)) du dq. \quad (\text{A.9})$$

Aplicando a propriedade distributiva na exponencial em A.9, vê-se que

$$\begin{aligned} \widehat{f(t) * g(t)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(-i\omega u) du \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(q) \exp(-i\omega q) dq \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

□

O Teorema A.1 tem implicações numérico-computacionais importantes pois a convolução no tempo tem complexidade computacional da ordem N^2 operações enquanto que, em frequência, sua complexidade é da ordem de $N \log N$ (PAVEL; DAVID, 2013).

Os dois Lemas à seguir serão utilizados na demonstração do Teorema A.2.

Lema A.1. *A função exponencial complexa $f(t) = \exp(i\omega t)$ tem Transformada de Fourier igual a $\hat{f}(t) = 2\pi\delta(t)$ em que $\delta(t)$ representa a função generalizada Delta de Dirac definida por*

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 0 \\ 0, & \text{se } t \neq 0. \end{cases}$$

Lema A.2. *Seja $\delta(\tau-t)$ a função generalizada Delta de Dirac transladada t unidades no tempo e $f(t) \in L^2(\Omega)$ uma função contínua em todos os pontos de seu domínio. Então:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\tau-t) dt = f(t).$$

Teorema A.2. *Seja $f(t) \in L^2(\Omega)$ real contínua por partes. A Transformada de Fourier de $f(t)$ definida pela Equação A.5 é inversível com inversa dada por*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (\text{A.11})$$

Demonstração. Note que A.11 pode ser reescrita como

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (\text{A.12})$$

pela substituição direta de A.5 em A.11. Pela continuidade das funções $f(t)$ e $\hat{f}(\omega)$ tem-se de A.12 que

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(\tau-t)) d\omega \right) d\tau. \quad (\text{A.13})$$

Pelo Lema A.1, a integral entre parênteses é exatamente a Transformada de Fourier de $f(t) = \exp(i\omega t)$ e pelo Lema A.2 tem-se de A.13 que

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) 2\pi\delta(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t) d\tau \quad (\text{A.14})$$

e então, $E = f(t)$ pelo Lema A.2. □

As Equações A.5 e A.11 fornecem o instrumental matemático adequado para se fazer a transposição entre os domínios do tempo e da frequência.

Teorema A.3. *Seja $f(t)$ uma função quadrado integrável em Ω com Transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ e considere $f(at)$ uma versão escalada da função $f(t)$ com $a \in \mathbb{R}^*$. Então,*

$$\hat{f}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Demonstração. Por definição, tem-se

$$\hat{f}\{f(at)\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{A.15})$$

Fazendo a mudança de variável $u = at$, segue da Equação A.15 que

$$\hat{f}\{f(at)\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left(-i\omega \frac{u}{a}\right) \frac{du}{a}. \quad (\text{A.16})$$

Considere agora os dois casos possíveis para o parâmetro real a quanto ao sinal.

Se $a > 0$, decorre da Equação A.16 que

$$\hat{f}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left(-i\omega \frac{u}{a}\right) du = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (\text{A.17})$$

Se $a < 0$ em A.16, então

$$\hat{f}\{f(at)\} = \left(\frac{1}{-a}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\left(-i\omega \frac{u}{a}\right) du = \left(\frac{1}{-a}\right) \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (\text{A.18})$$

As Equações A.17 e A.18 estabelecem o resultado. \square

O Teorema A.4 estabelece a preservação do produto interno nos dois domínios, ou seja, não há perda de informação ao se fazer a transposição de um domínio para o outro.

Como consequência, tem-se a isometria da norma $\|f(t)\|_{L^2} = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$ entre as representações de $f(t)$ nos dois domínios.

Teorema A.4. *(Plancherel) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções quadrado integráveis e contínuas em todos os pontos de seus domínios com Transformadas de Fourier $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$, respectivamente. Então, $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle$.*

Demonstração. Considere a Equação A.11 em que faz-se a substituição direta da Equação A.5 de modo que uma função $f(t)$ contínua em $L^2(\Omega)$ se escreve como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega\tau) \exp(-i\omega t) d\tau d\omega$$

e o produto interno definido pela Equação A.4 entre $g(t) \in L^2(\Omega)$ (também contínua) e $f(t)$ de modo que

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega\tau) \exp(-i\omega t) d\tau d\omega \bar{g}(t) dt. \quad (\text{A.19})$$

Dada a continuidade das funções $f(t)$ e $g(t)$ pode-se rearranjar a ordem das integrações na Equação A.19; decorre, portanto, que

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{g}(t) \exp(i\omega t) dt \right) d\omega \\ &= \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

□

O Corolário A.1 estabelece como consequência direta do Teorema de Plancherel a preservação das normas nos domínios do tempo e da frequência.

Corolário A.1. *Seja $f(t) \in L^2(\Omega)$ uma função contínua em Ω com Transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$. Então, $\|f(t)\|_{L^2} = \|\hat{f}(\omega)\|_{L^2}$.*

Demonstração. Basta considerar $g(t) = f(t)$ no Teorema A.4. □

O Corolário A.1 é conhecido como Identidade de Parseval e é bastante comum em áreas como a Física e/ou Engenharia onde costuma ser interpretado como a preservação da energia de um sinal $f(t)$ nos domínios do tempo e da frequência. O termo energia é usado aqui em analogia com o conceito físico de energia cinética, sendo comum definir-se a energia de um sinal como o espectro de potência de Fourier definido por $S(\omega) = \|\hat{f}(\omega)\|_{L^2}^2$ do sinal $f(t)$.

A análise de $S(\omega)$ é útil no processamento de sinais por revelar quais são as frequências fundamentais, ou seja, aquelas que apresentam maior contribuição na representação de $f(t)$ no domínio da frequência. No caso do sinais reais, o espectro de potência é simétrico em relação à frequência nula $\omega = 0$.

Em termos computacionais não há necessidade de se calcular explicitamente a integral presente na Equação A.5. Existem algoritmos altamente eficientes para o cômputo da FT e da IFT: são os algoritmos da Transformada Rápida de Fourier (FFT, do inglês *Fast Fourier Transform*) e da Inversa da Transformada Rápida de Fourier cujas implementações encontram-se descritas no clássico trabalho Cooley e Tukey (1965) e detalhadas em Cochran et al. (1967). Trabalhos relativamente recentes ainda buscam modificações nestes algoritmos de modo a torná-los ainda mais eficientes (JOHNSON; FRIGO, 2006).

Apesar da possibilidade de se transitar entre os domínios do tempo e da frequência via FT e sua inversa IFT e de, com o avanço computacional, esta transição poder ser feita de modo cada vez mais eficiente via algoritmos que as calculam, existem aspectos teóricos que devem ser levados em consideração por tornarem impossível visualizar tão bem quanto se queira uma função $f(t)$ qualquer nos domínios do tempo e da frequência simultaneamente.

O Princípio da Incerteza de Heisenberg (HEISENBERG, 1927) é uma descrição da característica intrínseca dos sistemas mecânicos quânticos que implica na limitação da observação destes sistemas sem perturbá-los e equivale ao fato de que uma função não nula e sua Transformada de Fourier não podem ser nitidamente localizadas (FOLLAND; SITARAM, 1997).

Tendo em vista o Princípio da Incerteza, portanto, uma função $f(t)$ não pode ser ao mesmo tempo bem visualizada nos domínios do tempo e da frequência: uma excelente representação em um dos dois implica em uma pobre ou nenhuma representação simultânea no outro. A representação simultânea implica em visualizações que, num certo sentido, são inversamente proporcionais entre si: ao se visualizar bem em um domínio se perde, em parte, a capacidade de visualização no outro conforme enunciado na Proposição A.1 (MALLAT, 1999; MOHLENKAMP; PEREYRA, 2008).

Proposição A.1. *Dada $f(t) \in L^2(\Omega)$ tal que $\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ tem-se*

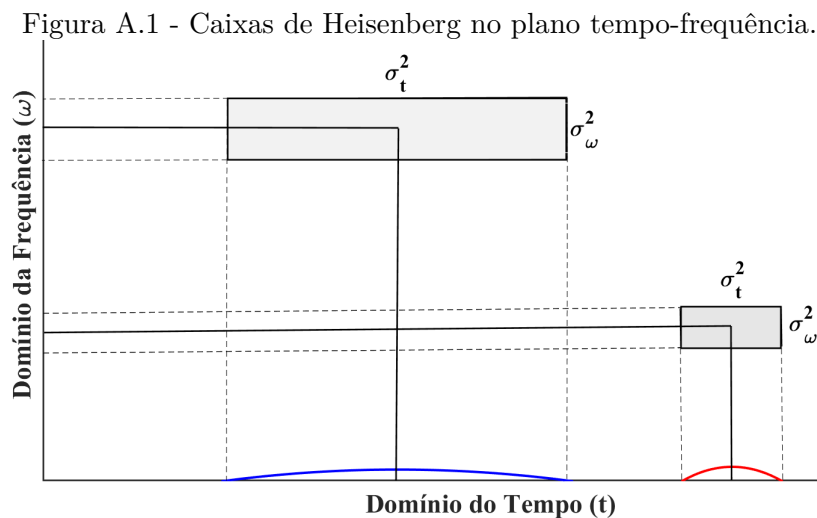
$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{\pi^2}{16}, \quad (\text{A.21})$$

em que σ_t^2 e σ_ω^2 representam, respectivamente, a resolução de visualização, em tempo e em frequência, de $f(t)$.

Geometricamente, é conveniente para compreender as considerações do parágrafo anterior introduzir a definição de plano tempo-frequência onde no eixo das abscissas

encontra-se a representação da informação contida em $f(t)$ no domínio do tempo e no eixo das ordenadas a correspondente informação no domínio da frequência. A proporcionalidade expressa por A.1 delimita regiões neste plano conhecidas como caixas de Heisenberg.

A Figura A.1 ilustra duas destas caixas (retângulos em cinza). Nota-se que quanto melhor for a localização da informação no domínio do tempo, pior será a localização em frequência e vice-versa. Por um instante apenas, imagine que a informação contida na linha azul estivesse cobrindo toda a reta, não havendo localização no tempo; isto implicaria em uma caixa de Heisenberg cuja largura seria infinitesimal e portanto, a informação estaria completamente localizada no domínio da frequência.



Fonte: Adaptado de Mallat (1999).

Sendo conhecidos os conceitos de plano tempo-frequência e de caixa de Heisenberg é possível explicar o porquê de a Transformada de Fourier fornecer perfeitamente a visualização de uma função $f(t)$ no domínio da frequência. Comparando a Equação A.5 com a Equação A.4 vê-se que a FT pode ser considerada do ponto de vista teórico como o produto interno usual em $L^2(\Omega)$ entre a função $f(t)$ e uma base exponencial complexa definida pelo termo $e^{-2i\pi\omega t}$ que não apresenta qualquer localização em tempo.

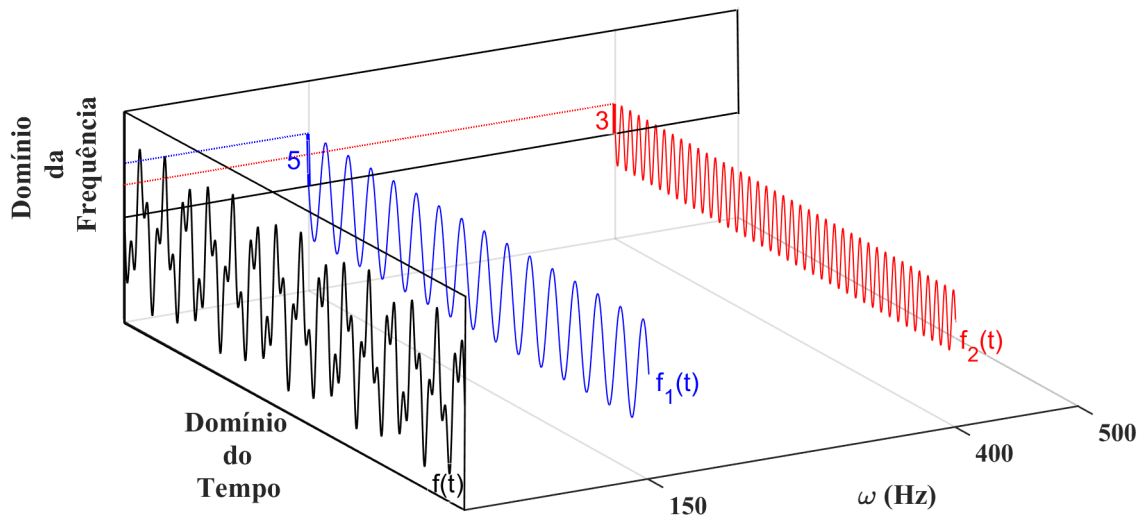
Em outras palavras, a base usada na definição da FT é uma combinação linear de senos e cossenos que estão definidos para todo $t \in \Omega$ tendo, portanto, as correspondentes caixas de Heisenberg larguras infinitesimais. Como consequência, nota-se que

a Transformada de Fourier é uma importante ferramenta matemática para a análise global de funções quaisquer uma vez que ela revela perfeitamente todo seu conteúdo frequencial.

De modo a exemplificar e tornar mais claras as ideias expostas anteriormente considere a função $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ em que $f_1(t) = 5 \text{ sen}(300\pi t)$ e $f_2(t) = 3 \text{ sen}(800\pi t)$. Vê-se que $f(t)$ é, em termos de frequências fundamentais, a soma de 150 Hz com amplitude 5 e 400 Hz com amplitude 3.

O cômputo da Transformada de Fourier revela as duas frequências fundamentais e suas respectivas amplitudes de modo que, mesmo não se sabendo, à priori, que $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Veja a Figura A.2 em que $f(t)$ está simultaneamente representada em tempo e em frequência. Observe que a Transformada de Fourier revela através de seu espectro de potência que a função $f(t)$ é a soma das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$.

Figura A.2 - Representação de um sinal em tempo e em frequência.



Fonte: Produção do autor.

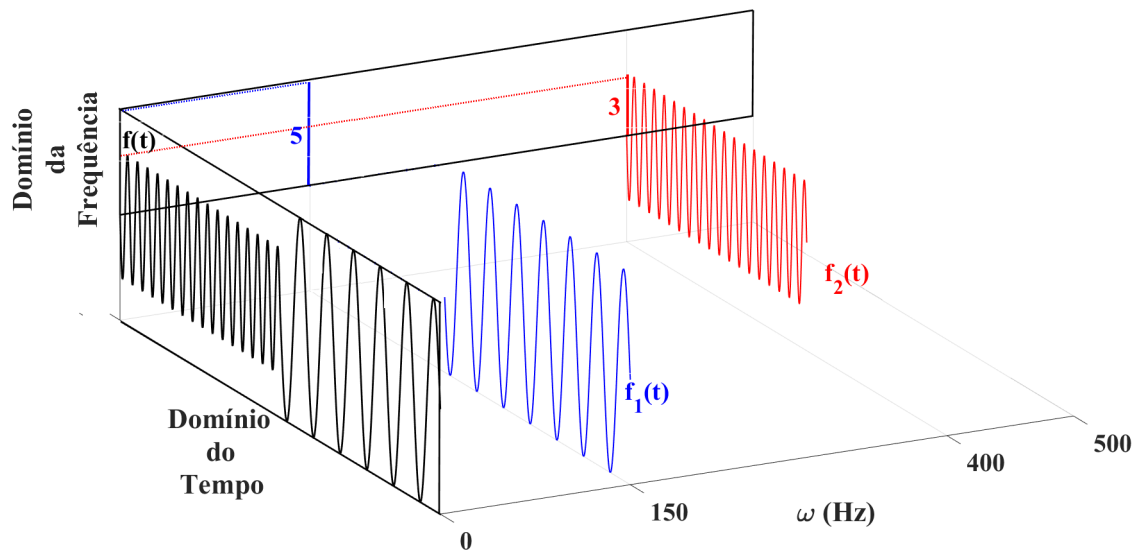
O sinal $f(t)$ simulado na Figura A.2 é estacionário, ou seja, as frequências fundamentais que o compõe estão presentes para todo t real. Quando o sinal $g(t)$ é não-estacionário, no sentido de que certas frequências aparecem e/ou desaparecem em determinados intervalos de tempo, ainda assim a Transformada de Fourier é

capaz de revelá-las. Para exemplificar isto, considere o sinal $g(t)$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} 5 \operatorname{sen}(300\pi t), & 0 \leq t < \pi \\ 3 \operatorname{sen}(800\pi t), & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

amostrado no tempo do mesmo modo que $f(t)$.

Figura A.3 - Transformada de Fourier de um sinal não-estacionário.



Fonte: Produção do autor.

Note que agora $g(t)$ é constituído pelas mesmas frequências fundamentais que compõe $f(t)$ exibida na Figura A.2 mas as frequências 150 Hz e 400 Hz estão definidas respectivamente nos intervalos $I_1 = [0, \pi[$ e $I_2 = [\pi, 2\pi[$ havendo uma alternância entre elas em $t = \pi$ onde a frequência de 150 Hz desaparece dando lugar à frequência de 400 Hz. Veja na Figura A.3 que o Espectro de Potência de Fourier de $g(t)$ coincide com o de $f(t)$ apesar de os comportamentos no domínio do tempo serem diferentes.

Neste contexto, convém destacar que a Transformada de Fourier é a ferramenta matemática apropriada para revelar frequências fundamentais em um sinal $f(t)$ estacionário para os quais não há necessidade alguma da informação temporal sobre o conjunto de frequências fundamentais.

A análise de sinais não-estacionários, no âmbito da Análise de Fourier é feita usando-se, por exemplo, a Transformada Janelada de Fourier (WFT, do inglês, *Windowed Fourier Transform*) mas a fixação da função janela usada para a análise não permite alterações na resolução da visualização em tempo e em frequência. Para detalhes, consulte, por exemplo, o Capítulo 2 de (KAISER, 2010) além de (WELCH, 1967; ALLEN; RABINER, 1977; GRIFFIN; LIM, 1984).

APÊNDICE B - CONVOLUÇÃO DISCRETA

O objetivo deste Apêndice é apresentar o conceito de convolução, fundamental para a compreensão do algoritmo de Mallat descrito na Subseção 3.1.2 do Capítulo 3. São apresentados, adicionalmente, algumas de suas principais propriedades e alguns exemplos.

Definição B.1. *Seja x e y dois sinais reais discretos, respectivamente. Define-se a convolução de x e y , denotada por $x * y$, pela soma*

$$x * y(n) = \sum_k x(k)y(n - k), \quad (\text{B.1})$$

constituída por $l_1 + l_2 - 1$ amostras em que l_1 e l_2 indicam o comprimento dos sinais x e y , respectivamente.

As propriedades básicas desta operação são apresentadas pela Proposição B.1.

Proposição B.1. *Sejam x, y e z sinais discretos e seja $*$ a operação de convolução conforme a Definição B.1. São válidas as seguintes propriedades para $*$:*

- a) *(Comutativa) $x * y = y * x$;*
- b) *(Associativa) $x * (y * z) = (x * y) * z$;*
- c) *(Distributividade pela Soma) $x * (y + z) = x * y + x * z$;*

Demonstração. a) Por definição,

$$x * y(n) = \sum_k x(k)y(n - k) = \sum_{k'} x(n - k')y(k) = \sum_{k'} y(k')x(n - k'),$$

em que $k' = n - k$.

b) De $x * (y * z)(n) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(k_1)y(k_2)z((n - k_1) - k_2)$ decorre que

$$x * (y * z)(n) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(k_1)y(k_1 + k_2 - k_1)z(n - (k_1 - k_2)).$$

Fazendo a substituição $k_3 = k_1 + k_2$,

$$x * (y * z)(n) = \sum_{k_3} \left(\sum_{k_1} x(k_1)y(k_3 - k_1) \right) z(n - k_3) = (x * y) * z(n).$$

c) Note que

$$x * (y + z)(n) = \sum_k x(k)(y(n - k) + z(n - k)).$$

Reescrevendo o segundo membro desta igualdade como dois somatórios, tem-se:

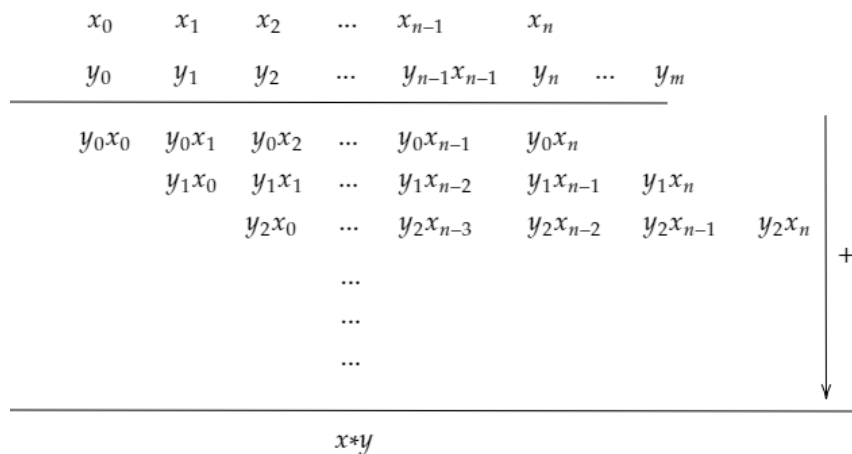
$$x * (y + z)(n) = \sum_k x(k)y(n - k) + \sum_k x(k)z(n - k) = (x * y + x * z)(n).$$

□

Um método prático para o cômputo de $x * y$ é indicado na sequência. Para tanto, considere explicitamente $x = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ e $y = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_m]$ e os passos descritos abaixo:

- Escreva o sinal y abaixo do sinal x alinhando seus primeiros elementos x_0 e y_0 , respectivamente.
- Efetue a multiplicação do sinal x pelo escalar y_0 dispondo-a imediatamente abaixo de x e y .
- Repita a multiplicação do sinal x pelos elementos y_i , $1 \leq i \leq m$ dispondo cada uma abaixo da anterior deslocada em i posições com relação à posição inicial de x_0 .
- Some cada uma das $n + m - 1$ colunas resultantes da aplicação dos passos b) e c). O sinal resultante é o resultado de $x * y$.

Figura B.1 - Algoritmo para o cálculo da convolução de dois sinais discretos x e y .



Fonte: Produção do autor.

A Figura B.1 apresenta uma descrição gráfica do algoritmo para o cômputo da convolução entre dois sinais discretos x e y . À seguir apresenta-se um exemplo de sua aplicação.

Exemplo B.1. Considere dois sinais discretos x e y tais que $x = \{2, -3, 0, 5, 7, \}$ e $y = \{0, 5, -1, 2, 3, -2\}$ para os quais deseja-se calcular $x * y$. Seguindo o método representado na Figura B.1, tem-se:

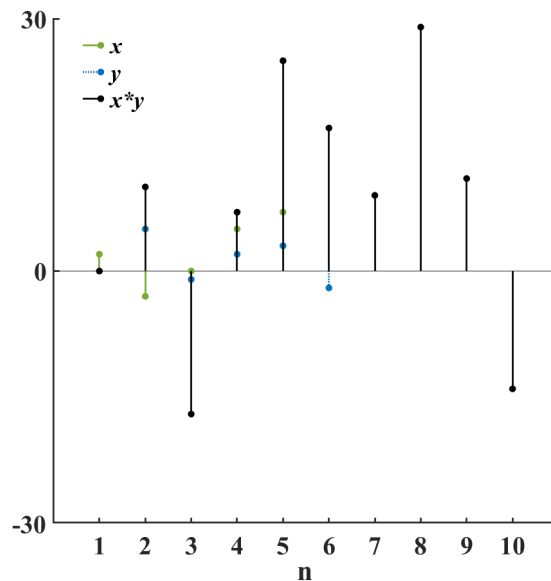
Figura B.2 - Convolução de $x = \{2, -3, 0, 5, 7, \}$ e $y = \{0, 5, -1, 2, 3, -2\}$.

2	-3	0	5	7					
0	5	-1	2	3	-2				
0	0	0	0	0					
	10	-15	0	25	35				
		-2	3	0	-5	-7			
			4	-6	0	10	14		
				6	-9	0	15	21	
					-4	6	0	-10	-14
0	10	-17	7	25	17	9	29	11	-14

Fonte: Produção do autor.

Os sinais x e y e a convolução $x * y$ encontram-se plotados na Figura B.3.

Figura B.3 - Representação gráfica da convolução do Exemplo B.1.



Fonte: Produção do autor.

APÊNDICE C - FILTROS ASSOCIADOS À TEORIA WAVELET

Apresenta-se neste Apêndice o conjunto de funções implementadas¹ em código livre *Python 3* que gera os filtros associados às funções escala e *wavelet* de Daubechies dado como *input* apenas o comprimento n (número par) do filtro desejado ou, de modo equivalente, o número de momentos nulos $n/2$ que a função *wavelet* a ser construída deve possuir.

Adicionalmente, a implementação permite visualizar as funções escala e *wavelet* usando como entrada apenas o filtro passa baixa associado e utilizando convoluções calculadas no domínio da frequência.

A fundamentação teórica da implementação feita pode ser consultada em Daubechies (1992). Uma descrição algorítmica para a construção dos filtros e a geração das visualizações das funções escala e *wavelet* associadas é feita na sequência. A implementação feita faz uso do módulo de matemática simbólica *Sympy* em *Python* uma vez que o algoritmo baseia-se em operações algébricas com polinômios complexos.

No que segue, seja $n = 2n'$ ($n' \in \mathbb{N}$) o comprimento do filtro a ser construído.

Passo I: construção de um polinômio complexo auxiliar $P_n(z)$

Fixado $n = 2n'$ faz-se a construção inicial do polinômio $P_n(z)$ de variável complexa z e grau $n - 1$ definido por

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} z^k, \quad (\text{C.1})$$

em que $\binom{n+k-1}{k}$ indica um número binomial para $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$.

Passo II: cálculo das raízes do polinômio $P_n(z)$ para $n' \in \mathbb{N}$ e $z' \in \mathbb{C}$ fixados e definidos por $n' = n/2$ e $z' = 0, 5 - 0, 25 z^{-1} - 0, 25 z$

Definidos $n' = \frac{n}{2}$ e $z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4z} - \frac{z}{4}$ calcula-se as raízes complexas de $P_{n'}(z')$, isto é, determina-se numericamente as soluções de

$$P_{n'}(z') = \sum_{k=0}^{n'-1} \binom{n'+k-1}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4z} - \frac{z}{4} \right)^k = 0, \quad (\text{C.2})$$

¹<https://github.com/magriniluciano1983/codes/blob/master/daubechies.py>.

construindo-se o conjunto $\mathcal{R} = \{r_j, 0 \leq j \leq n - 1\}$ formado pelas soluções de C.2 contidas no disco complexo unitário, isto é, pelas soluções de C.2 cujo módulo é, no máximo, igual a 1. Prova-se que \mathcal{R} possui $n' - 1$ elementos.

Passo III: computação de escalares via igualdade de polinômios complexos dependentes do conjunto de raízes determinado no passo II.

Identificam-se os n escalares $\{c_k, k = 0, 1, \dots, (n - 1)\}$ para os quais

$$(z + 1)^{n'} \prod_{j=1}^{n'-1} (z - r_j) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{n-k-1}. \quad (\text{C.3})$$

Passo IV: determinação do filtro passa baixa via normalização do conjunto de escalares do passo III

O conjunto $\{c_k\}$ normalizado corresponde ao filtro procurado para a função escala $\phi(t)$, ou seja, tomando a norma

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_k^2}$$

euclidiana para $\{c_k\}$ interpretado como elemento de \mathbb{R}^k , constrói-se o filtro passa baixa

$$h(k) = \frac{\{c_k\}}{a}. \quad (\text{C.4})$$

Passo V: determinação do filtro passa alta

Utilizando-se a Equação 3.15 determina-se o filtro passa alta associado à função *wavelet* construída no contexto da MR, definindo conforme Equação 3.15 do Capítulo 3,

$$g(k) = (-1)^n h(k - n + 1), \quad (\text{C.5})$$

para $n = 1, 2, \dots, k$.

Passo VI: geração de visualizações das funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$

A geração das visualizações das funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ correspondentes aos filtros desenhados nos Passos C e C é obtida pela aplicação da reconstrução da função delta de Dirac, via algoritmo de Mallat, com a utilização de filtros de síntese $h^*(k)$ e $g^*(k)$ construídos a partir de $h(k)$ pela aplicação das Equações 3.16 e 3.17.

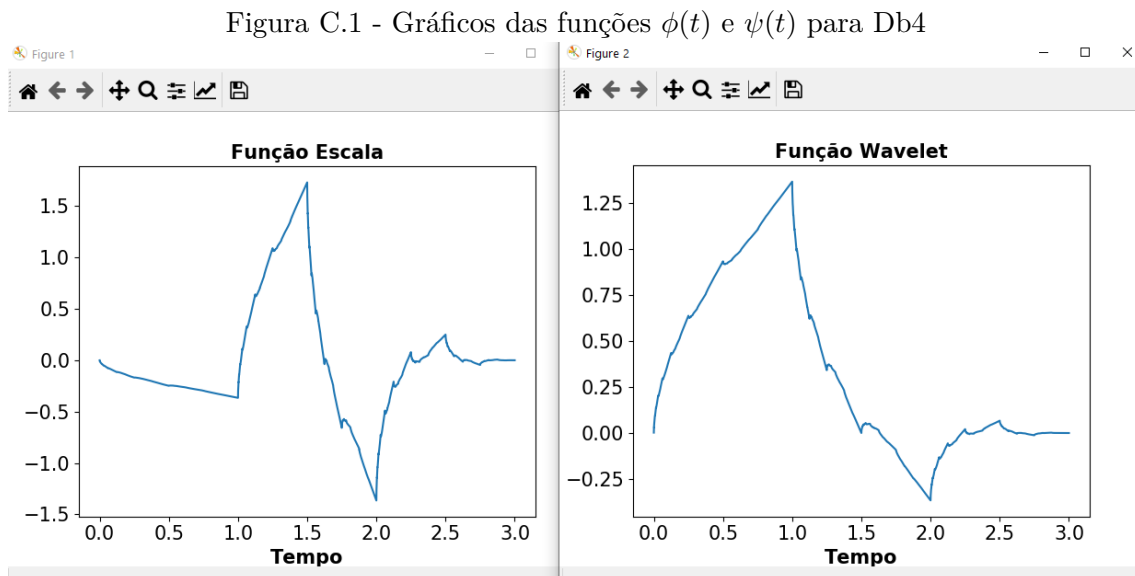
Por *default*, são utilizadas de 15 iterações/convoluções no processo de reconstrução. O número de iterações é estabelecido levando-se em conta a eficiência computacional e a geração de boas visualizações para as funções escala e *wavelet* mas pode ser alterado pelo usuário via modificação das funções auxiliares 10 e 11 contidas na implementação feita e disponível no *Github*.

O código de visualização utiliza como *input* apenas o filtro passa baixas $h(k)$ da MR desejada, aceitando como entrada inclusive filtros não criados pelo algoritmo completo.

Apresenta-se na sequência um exemplo de uso do código² em que se considera a construção de filtros passa baixa e passa alta de comprimento 4 para a MR, ou seja, da denominada *wavelet* de Daubechies 4 (dB4) com a adicional geração das visualizações das funções escala e *wavelet*. A saída do código de exemplo é o filtro passa baixa

$$h = \{-0,1294095225, 0,2241438680, 0,8365163037, 0,4829629131\}, \quad (C.6)$$

aqui exibido com dez casas decimais de precisão, seguido das visualizações das funções escala *wavelet* conforme montagem feita na Figura C.1.



Fonte: Produção do autor.

²https://github.com/magriniluciano1983/codes/blob/master/exemplo_daubechies.py

APÊNDICE D - FUNÇÕES ESCALA E WAVELET PARA DT-CWT

Apresenta-se neste Apêndice os filtros h_0 e h_1 em conjunto com as funções escala e *wavelet* utilizadas neste trabalho para o cômputo das fases associadas às dinâmicas rápida e lenta presentes nos sistemas discutidos nos Capítulos 4 e 6 deste trabalho.

Segue-se aqui a notação introduzida no Capítulo 3 em que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são as funções escalas e *wavelet* associadas aos filtros h_0 e h_1 . Para o nível $J = 1$ de decomposição estas funções são denotadas $\phi^1(t)$ e $\psi^1(t)$. Para os demais níveis utiliza-se os índices s e i para referir-se à árvore superior e inferior da decomposição *dual-tree* responsáveis pelas partes real e imaginária dos coeficientes *wavelet* calculados, respectivamente.

Para o primeiro nível de decomposição os filtros são aproximadamente simétricos de comprimentos 13 e 19 utilizados em conjunto com filtros *q-shift* de comprimento 14 para os demais níveis (SELESNICK, 2001).

Tabela D.1 - Filtros de análise para DT-CWT.

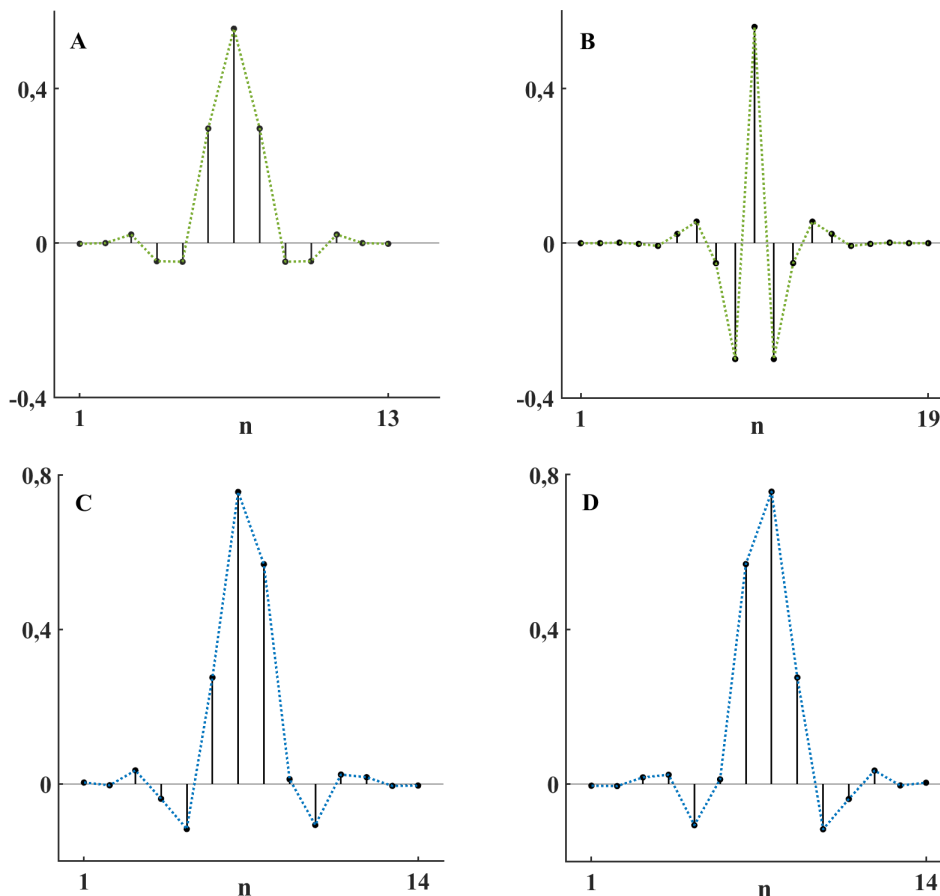
Banco de Filtros de Análise					
Primeiro Nível de Decomposição ($J = 1$)		Demais Níveis ($J > 1$)			
Parte Real	Parte Imaginária	Parte Real (Árvore Superior)		Parte Imaginária (Árvore Inferior)	
$\phi_1(t)$	$\psi_1(t)$	$\phi_s(t)$	$\psi_s(t)$	$\phi_i(t)$	$\psi_i(t)$
-0,0017581	-0,0000706	0,0032531	-0,0045569	-0,0045569	-0,0032531
0,0000000	0,0000000	-0,0038832	0,0054394	-0,0054394	-0,0038832
0,0222656	0,0013419	0,0346603	0,0170252	0,0170252	-0,0346603
-0,0468750	-0,0018834	-0,0388728	-0,0238253	0,0238253	-0,0388728
-0,0482422	-0,0071568	-0,1172038	-0,1067118	-0,1067118	0,1172038
0,2968750	0,0238560	0,2752953	-0,0118660	0,0118660	0,2752953
0,5554688	0,0055643	0,7561456	0,5688104	0,5688104	-0,7561456
0,2968750	-0,0516881	0,5688104	-0,7561456	0,7561456	0,5688104
-0,0482422	-0,2997576	0,0118660	0,2752953	0,2752953	-0,0118660
-0,0468750	0,5594308	-0,1067118	0,1172038	-0,1172038	-0,1067118
0,0222656	-0,2997756	0,0238253	-0,0388728	-0,0388728	-0,0238253
0,0000000	-0,0516881	0,0170252	-0,0346603	0,0346603	0,0170252
-0,0017581	0,0055643	-0,0054394	-0,0038832	-0,0038832	0,0054394
	0,0238650	-0,0045569	0,0032531	0,0032531	-0,0045569
	-0,0071568				
	-0,0018834				
	0,0013419				
	0,0000000				
	-0,0000706				

Fonte: Adaptado de Selesnick (2001).

A Tabela D.1 apresenta o banco de filtros utilizado na análise com sete dígitos sendo o respectivo banco de síntese obtido de acordo com as Equações 3.16 e 3.17. Note as relações entre os filtros passa alta e passa baixa utilizados a partir do segundo nível de decomposição: (a) o filtro escala da árvore inferior é o reverso do utilizado na árvore superior; (b) o filtro *wavelet* da árvore inferior corresponde ao filtro escala da árvore superior em que os coeficientes de posição ímpar são opostos e (c) o filtro escala da árvore inferior corresponde ao filtro *wavelet* da árvore superior em que os coeficientes de posição par são opostos.

A Figura D.1 mostra uma visualização destes filtros. Observe na linha pontilhada o comportamento esperado para as respectivas funções escala e *wavelet*.

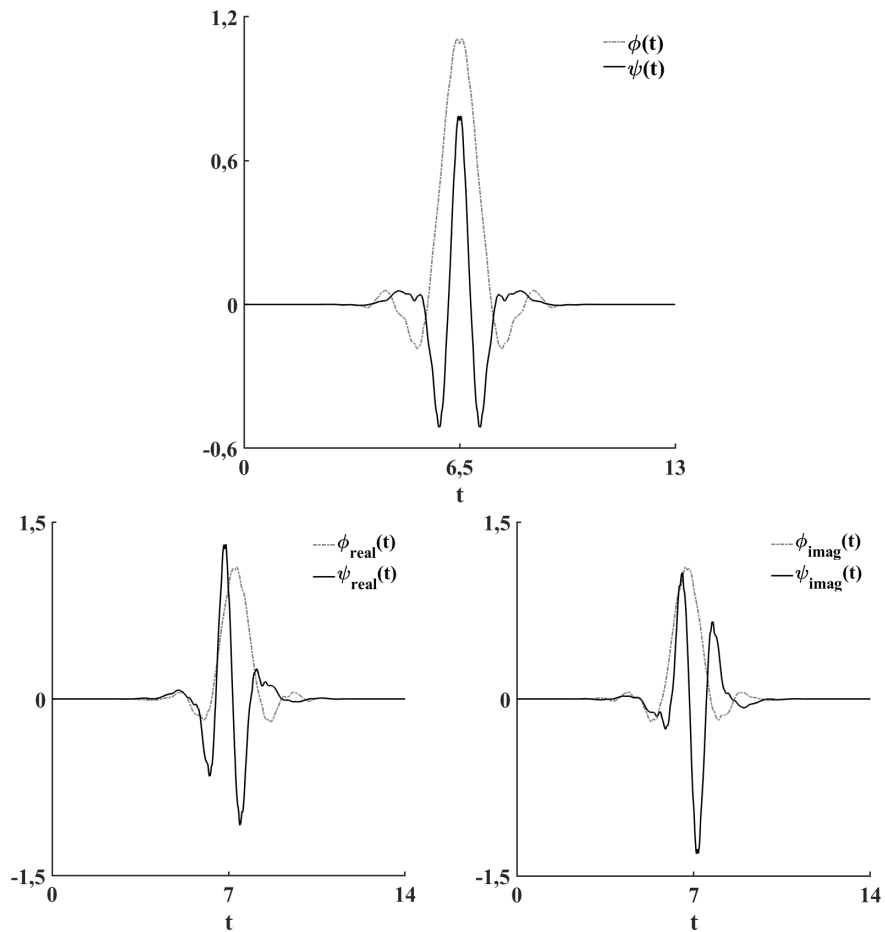
Figura D.1 - Filtros aproximadamente simétricos de comprimento 13 (A) e 19 (B) para $J = 1$ e filtros *q-shift* de comprimento 14 (C) e (D) para $J > 1$.



Fonte: Produção do autor.

As correspondentes funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ estão representadas na Figura D.2 e foram obtidas pelo uso das funções implementadas descritas no Apêndice C. No painel superior vê-se estas funções para o primeiro nível e no painel superior as funções para os demais níveis correspondentes às arvores superior (parte real dos coeficientes) e inferior (parte imaginária dos coeficientes), respectivamente.

Figura D.2 - Funções escala e *wavelet* correspondentes aos filtros de análise da Tabela D.1 e visualizados na Figura D.1.



Fonte: Produção do autor.

Um estudo completo sobre a resposta em frequência das funções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ apresentadas na Figura D.2 está realizado em trabalho anterior. Para detalhes, consulte Ferreira (2014).

APÊNDICE E - PARTICIPAÇÕES EM EVENTOS CIENTÍFICOS E PUBLICAÇÕES

Neste Apêndice estão incluídas as publicações realizadas e participações em eventos científicos durante o doutorado, em ordem cronológica.

Inclui-se aqui dois artigos publicados em periódicos com avaliação pelos pares, a publicação de um trabalho completo apresentado no XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2016) promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) e publicado nos anais do evento e de um resumo, apresentado na forma de pôster no XXXIX CNMAC (2019) também publicado nos anais da respectiva edição do CNMAC.

Inclui-se também duas participações no *Workshop* de Computação Aplicada (Worcap) promovido anualmente pelo Programa de Pós Graduação em Computação Aplicada (INPE) com apresentação de pôsteres e uma comunicação oral feita no IX *WWlet - Wavelets & Applications in Signal Processing*, evento organizado pelo Comitê Temático “Análise Multiescala e Wavelets – Teoria, Desenvolvimento e Aplicações” (SBMAC), sobre parte das aplicações das técnicas *wavelet* apresentadas nesta tese.

O artigo publicado no *Brazilian Journal Physics* e o trabalho completo publicado nos anais do CNMAC 2016 apresentam a pesquisa desenvolvida sobre a análise de séries temporais com falhas e apresentada no Capítulo 5 desta tese (MAGRINI et al., 2017; MAGRINI et al., 2017) com um adicional estudo sobre a influência da localização da falha ao longo da série temporal para os resultados da análise realizada.

O segundo artigo, publicado no periódico *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, reporta a metodologia apresentada no Capítulo 6 para a separação das dinâmicas lenta e rápida em sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo via técnicas *wavelet* apresentando os resultados para os dados experimentais descrito nesta tese.

Na edição do XXXIX CNMAC de 2019 fez-se a apresentação de um pôster, publicado em forma de resumo nos anais do evento sobre estudo realizado acerca das dificuldades na reprodução numérica do atrator de Rössler nos casos em que ele exhibe comportamento periódico (MAGRINI et al., 2020).

As participações em eventos com apresentação de trabalho estão descritas a seguir. As publicações encontram-se anexadas na sequência, começando pelos artigos se-

guido do trabalho completo e resumos publicados.

- **IX WWlet - Wavelets & Applications in Signal Processing**

Comunicação Oral: *Multi-scale Identification of Dynamics in Chaotic Electrochemical Oscillators*

Abstract: *Dynamical systems related to climate models, relaxation oscillators (as Van der Pol, cardiac cells or neural activity, for example) exhibits different timescales in your manifestations. The comprehension of full dynamics in these dynamical systems whose behavior exhibits two or more different time scales generally is complicated because each time scale presents one specific behavior in the time domain and can manifest together or in specific time intervals. In this work using wavelet techniques, we calculated approximations for each dynamics (namely slow and fast dynamics, respectively) considering only the inverse wavelet transform applied in specific frequency bands presents in one-dimensional time-series related to experimental data obtained from oscillators coupled in a network where slow dynamics is chaotic and fast dynamics is characterized in time-domain by irregular bursting's. The applied methodology show that it is possible calculated good approximations for each different dynamics and that particularly to slow dynamics the small frequency contributions cannot be discarded without to introduce deformations in your manifestation in time-domain. The principal advantage of our approach is that only is necessary to know one-dimensional time-series about the full multiple time-scale dynamical system considered because all process is performed in the frequency domain by wavelet analysis.*

Autores: Magrini, L.A., Domingues, M.O., Macau, E.E.N.

Gramado/RS.

- **XVIII Workshop de Computação Aplicada (WORCAP 2018)**

Pôster: Aproximação de Dinâmicas *Fast* e *Slow* em Sistemas Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo.

Resumo: Sistemas dinâmicos caóticos com múltiplas escalas de tempo constituem a adequada formulação matemática para diversos fenômenos em áreas fundamentais como a Física, a Química, a Biologia e a Neurociência. Em todas estas áreas é relativamente comum encontrar modelos

em que as diferentes variáveis presentes apresentam diferentes taxas de variação em relação à variável independente. Estas diferentes taxas de variação permitem, no caso mais simples, identificar no sistema duas sub-dinâmicas, chamadas de fast e slow, cujas caracterizações é relativamente simples em modelos teóricos, uma vez que é possível neste caso analisar as equações diferenciais envolvidas e seus parâmetros numéricos, mas se mostra desafiadora no caso experimental em que geralmente só se dispõe de uma série temporal na qual tais dinâmicas evoluem juntas ao longo do tempo. Neste trabalho apresentamos uma metodologia, baseada na análise de wavelets, para obter aproximações das dinâmicas fast e slow no caso em que as duas evoluem conjuntamente em uma mesma série temporal e exemplificamos seu uso em dados experimentais provenientes de osciladores eletroquímicos.

Autores: Magrini, L.A., Domingues, M.O., Macau, E.E.N.

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE.

São José dos Campos/SP.

- **XVI Workshop de Computação Aplicada (WORCAP 2016)**

Pôster: Reprodução do Comportamento Periódico do Atrator de Rössler por Integração Numérica: Desafios e Propostas.

Resumo: A dinâmica determinada por sistemas de equações diferenciais onde pelo menos uma das equações é não linear pode apresentar comportamento caótico ou periódico. A alternância entre estes dois regimes pode ser controlada pela variação de um conjunto de constantes próprias de cada sistema. Bem conhecido na literatura, o sistema de Rössler constitui-se de um conjunto de três equações diferenciais e uma vez fixadas duas das constantes que nele aparecem, a alternância entre os regimes caótico e periódico é conseguida pela variação de uma terceira. A reprodução numérica do regime periódico para o sistema de Rössler através da integração numérica via métodos Runge-Kutta ou via integradores disponíveis em bibliotecas para *Python* ou *Octave* apresenta dificuldades significativas. Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a reprodução numérica do comportamento periódico no sistema de Rössler e comparamos o desempenho dos métodos empregados na integração.

Autores: Magrini, L.A., Domingues, M.O., Macau, E.E.N.

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE.

São José dos Campos/SP.




Extraction of slow and fast dynamics of multiple time scale systems using wavelet techniques

Cite as: Chaos 30, 063139 (2020); doi: 10.1063/5.0004719

Submitted: 13 February 2020 · Accepted: 1 June 2020 ·

Published Online: 17 June 2020



Luciano A. Magrini,^{1,2,a)}  Margarete Oliveira Domingues,^{3,4,b)}  Elbert E. N. Macau,^{4,5,c)}  and István Z. Kiss^{6,d)} 

AFFILIATIONS

¹Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo (IFSP), São Paulo 01109-010, Brazil

²Graduation Program of Applied Computing (CAP/INPE), São José dos Campos 12227-010, Brazil

³National Institute for Space Research (INPE), São José dos Campos 12227-010, Brazil

⁴Associated Laboratory of Computation and Applied Mathematics (LabAC), São José dos Campos 12227-010, Brazil

⁵Federal University of São Paulo at São José dos Campos (UNIFESP), São José dos Campos 12231-280, Brazil

⁶Department of Chemistry, Saint Louis University, 3501 Laclede Ave., St. Louis, Missouri 63103, USA

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: magrini@ifsp.edu.br

^{b)}margarete.domingues@inpe.br

^{c)}elbert.macau@unifesp.br

^{d)}izkiss@slu.edu

ABSTRACT

A methodology is presented based on wavelet techniques to approximate fast and slow dynamics present in time-series whose behavior is characterized by different local scales in time. These approximations are useful to understand the global dynamics of the original full systems, especially in experimental situations where all information is contained in a one-dimensional time-series. Wavelet analysis is a natural approach to handle these approximations because each dynamical behavior manifests its specific subset in frequency domain, for example, with two time scales, the slow and fast dynamics, present in low and high frequencies, respectively. The proposed procedure is illustrated by the analysis of a complex experimental time-series of iron electrodisolution where the slow chaotic dynamics is interrupted by fast irregular spiking. The method can be used to first filter the time-series data and then separate the fast and slow dynamics even when clear maxima and/or minima in the corresponding global wavelet spectrum are missing. The results could find applications in the analysis of synchronization of complex systems through multi-scale analysis.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0004719>

Complex behavior in natural systems is often generated by interactions of periodic phenomena with largely different time scales. For example, heart rate variations can be affected by neuronal firings, breathing, or sleep-wake patterns. When the time scales of such processes are well separated and the behavior is highly periodic, the signals can be analyzed with simple low and high-pass filters. In this work, we consider a very complex electrochemical behavior, the corrosion of iron in an acid. A wavelet-based methodology is presented where the slow and fast time scales can be separated even with chaotic slow and irregular fast spiking.

I. INTRODUCTION

Systems with different processes taking place over separate time scales are ubiquitous in a large range of phenomena in areas such as physics (e.g., lasers,^{1,2} forced Van der Pol oscillators,³ and Faraday waves⁴), chemistry (e.g., homogeneous reactions⁵ and electrochemical phenomena⁶), biology (e.g., neural activity^{7,8} and cardiac⁹ and β -pancreatic¹⁰ cells), and others.¹¹⁻¹³ In the most common scenario, there are fast and slow dynamics where the slow variable acts as a slowly varying “parameter” in the fast subsystem. With oscillatory dynamics, the time-series consist of fast repetitive bursting interrupted by slow, acquiescent, dynamics where the oscillations are

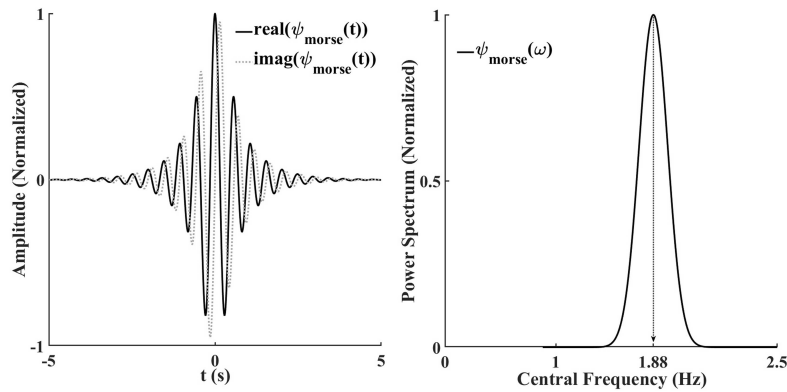


FIG. 1. Morse wavelet with $\beta = 20$ and $\gamma = 3$ in time domain (left) and in frequency domain (right).

smooth, and the wavelength is large in comparison with bursting. The system description and technological applications require the separation of the system time scales. This is the case, for example, in neuronal and climate systems and the corresponding control applications. In particular, this separation is of importance to characterize synchronization phenomena in nonlinear systems.¹⁴⁻¹⁸ Several studies have investigated approaches to separate the fast and slow dynamics.¹⁹⁻²¹ For example, one can take advantage of the known eigenvalues and eigenvectors of the full system¹⁹ or apply computational methods based on identification of low dimensional surface trajectories in phase space.²⁰ Separation can help construction of slow invariant manifolds with fast relaxations²¹ to overcome the numerical difficulties of integration of stiff systems.²² Therefore, with the experimental data, it is essential to properly extract the fast and slow dynamics so that accurate models can be formulated.

When the underlying dynamics are relatively simple (e.g., simple periodic oscillations with a well-defined frequency), combination of low-pass, high-pass, and bandpass FFT filters can be used to process data.²³ However, when the underlying dynamics are more complex (e.g., chaotic or oscillations with largely varying frequencies and amplitudes), automatic processing of a large amount of data can be challenging. In this paper, a wavelet-based technique is presented that allows the proper separation of slow and fast dynamics from the experimental data, as well as de-noise the signal at the same time. The method was developed aiming to analyze an electrochemical process, iron dissolution in sulfuric acid, which exhibits fast periodic spiking in a large frequency range with a highly complex, chaotic slow dynamics. The data were collected from a coupled pair of oscillators with different coupling strengths. The occurrence of the irregular bursting activities affected by the coupling along the

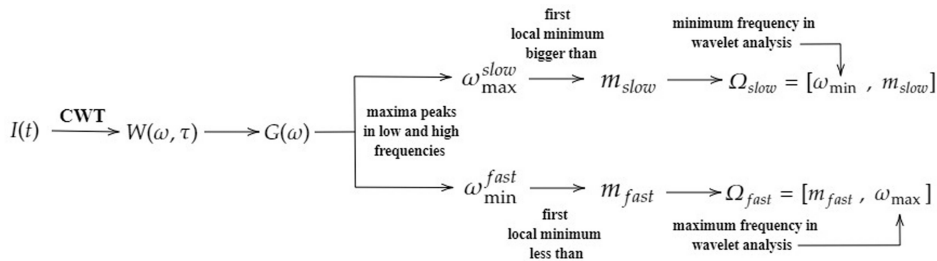


FIG. 2. General scheme to find sets Ω_{slow} and Ω_{fast} in a typical case.

TABLE I. Results summary of the dataset analyzed. Asterisks indicates values that cannot be obtained from the global wavelet spectrum. We notice that time-series with the same coupling strength are not independents.

Time-series	Length (s)	Coupling strength (ε)	Peaks		Local minima		Approximation sets	
			$\omega_{\max}^{\text{slow}}$	$\omega_{\max}^{\text{fast}}$	m_{slow}	m_{fast}	Ω_{slow} (Hz)	Ω_{fast} (Hz)
A	60	0.0	4	62	7	33]0, 7]	[33, 434]
B	60	0.0	4	36	14	*]0, 14]	[36, 434]
C	235	0.2	5	*	*	*]0, 10]	[90, 434]
D	235	0.2	4	88	*	50]0, 8]	[50, 434]
E	150	0.4	4	66	*	47]0, 8]	[47, 434]
F	150	0.4	5	76	*	66]0, 10]	[66, 434]
G	55	0.6	5	176	*	143]0, 10]	[143, 434]
H	55	0.6	4	134	5	101]0, 5]	[82, 434]
I	82	0.7	5	94	*	82]0, 5]	[82, 434]
J	82	0.7	5	101	*	82]0, 5]	[82, 434]
K	120	0.8	5	94	*	82]0, 5]	[82, 434]
L	120	0.8	5	101	*	82]0, 5]	[82, 434]
M	100	0.9	4	88	8	44]0, 8]	[44, 434]
N	100	0.9	4	88	*	41]0, 8]	[41, 434]
O	80	1.0	4	67	*	36]0, 8]	[36, 434]
P	80	1.0	4	67	*	36]0, 8]	[36, 434]

chaotic trajectories demanded a versatile technique to separate noise and fast and slow oscillations. The method is based on wavelet transform, exploiting its remarkable characteristic that allows time scale analysis for performing the identification of different behaviors in time domain,²⁴ associating them with different frequency subbands. The article is organized as follows. Section II presents the proposed approach to separate fast and slow dynamics. The data collection details are described in Sec. III. Section IV illustrates the application in detail and discusses the results. Finally, the conclusions are drawn in Sec. V.

II. METHODOLOGY

This section describes the proposed methodology to unveil fast and slow dynamics embedded in a time-series. Our approach is based on a continuous wavelet transform (CWT) that is used to reliably identify dynamics in the frequency of time-series $I(t)$. In the first step, noise is removed from the time-series using non-linear filtering.²⁵ In the sequence, the wavelet analysis is performed applying the continuous wavelet transform (CWT) with L_1 norm in the frequency domain according to Ref. 26,

$$W_I^\psi(a, \tau) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(I; \omega) \mathcal{F}^*(\psi; \omega, a, \tau) (e^{i\omega\tau}) d\omega, \quad (1)$$

where τ is a translation parameter in time domain, $\mathcal{F}(I; \omega)$ denotes the Fourier transform of the signal $I(t)$, $\mathcal{F}^*(\psi; \omega, a, \tau)$ ($a\omega$) is the conjugate of wavelet function $\psi(t)$ defined in frequency domain and calculated at $a\omega$ for each real positive value, a , called a scale and related to the central pseudo-frequency²⁷ given by $\omega = \frac{\omega_c}{a\Delta t}$, where Δt is the sampling time for the measurement signal $I(t)$ and ω_c is the central frequency of wavelet $\psi(\omega)$. The wavelet function considered

here is the Morse wavelet defined in the frequency domain^{28–31} by

$$\psi(\beta, \gamma, \omega) = 2(\mathbf{e}\gamma\beta)^{(\beta/\gamma)} U(\omega) \omega^\beta e^{-\omega^\gamma}, \quad (2)$$

where γ and β are real positives dimensionless parameters that control the waveform, regulating the frequency-domain and time-domain decay, respectively.³¹ $U(\omega)$ is the Heaviside step function. The Morse wavelet function is analytic, therefore, in a time-frequency analysis of any real signal, all non-positive frequencies are zero. This property is important because it avoids the detection of small spurious negative frequencies that could influence our results. It is important to highlight that the real parameters γ and β in Eq. (2) are similar to the parameters scale a and translation τ used in the usual definition of the CWT given by Eq. (1). The chosen parameters are $\gamma = 3$ and $\beta = 20$. The value $\gamma = 3$ is suggested in the literature as standard value for analysis of oscillatory signals as it is highly related with Gaussian with zero skewness.^{29–31} The parameter $\beta = 20$ controls the wavelet length in time domain. Consequently, usually large values are considered. This choice implies that the wavelet function is highly oscillatory in time domain and, therefore, the resolution in frequency domain is increased.³¹ More details about the choice of parameters γ and β can be found in Refs. 29–31. Figure 1 shows the Morse wavelet in time- and frequency domains. Notice that the behavior in frequency domain is related to the Gaussian distribution and in time domain exhibits an oscillatory behavior. The magnitude scalogram defined by the absolute value of measures $W_I^\psi(a, \tau)$ allows us to calculate the global wavelet spectrum $G(\omega)$,

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |W_I^\psi(a, \tau)|^2 d\tau. \quad (3)$$

As it was previously noted,²⁴ the high-frequency bursts could not be easily extracted using the Fourier spectrum, but the global wavelet

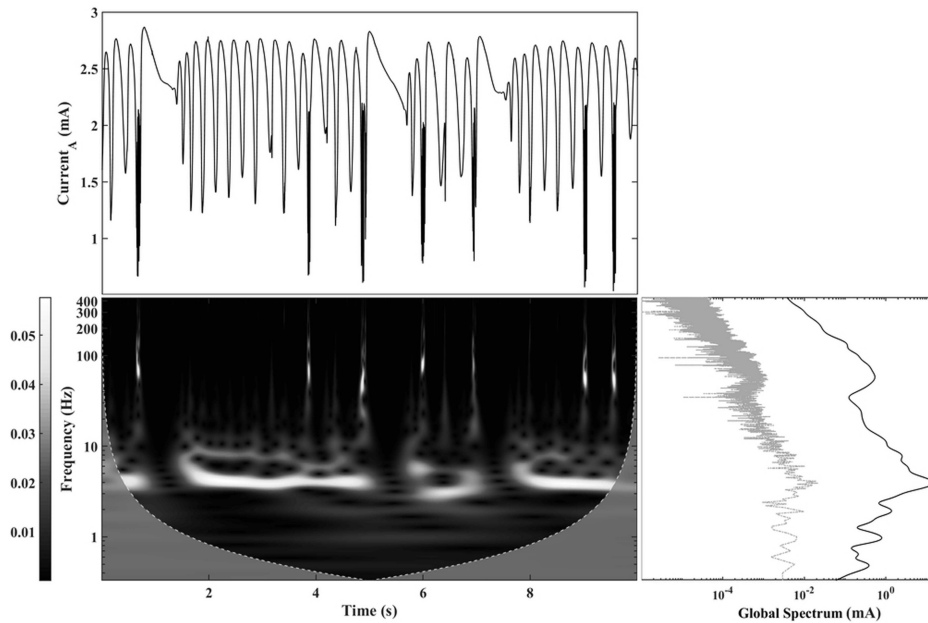


FIG. 3. Typical behavior in time domain to current in data A with $\varepsilon = 0.0$ and respective scalogram with the Fourier (gray) and global wavelet spectrum (black). Shifted for better visualization.

spectrum provides a better approach. (Indeed, roughly speaking, the global wavelet spectrum can be seen as a smooth version of the Fourier spectrum.^{32–34}) The central idea in our approach is that by a careful analysis of $G(\omega)$, it is feasible to localize subbands Ω_{slow} and Ω_{fast} , whose content corresponds to each time scale. These subbands of the wavelet transform are used to reconstruct time domain signals associated with the underlying time scales using the inverse continuous wavelet transform (ICWT). For this purpose, it is necessary to know the upper and lower extremes of the intervals Ω_{slow} and Ω_{fast} (Hz). Ideally, the fast and the slow oscillations generate a global wavelet spectrum with two dominant frequency peaks. Let ω_{max}^{slow} and ω_{max}^{fast} be the frequencies where global wavelet spectrum $G(\omega)$ exhibits the largest peaks related to the slow and the high frequency contents. If the amplitude of these two peaks is sufficiently large, then there will be a local minimum at a frequency $m_{slow} \geq \omega_{max}^{slow}$. Similarly, at the peak corresponding to the fast time scale, there will be a minimum just below the dominant peak $m_{fast} \leq \omega_{max}^{fast}$. The slow dynamics thus can be represented by the frequency components from zero up to m_{slow} : $\Omega_{slow} =]0, m_{slow}]$. The fast dynamics contains frequencies from

m_{fast} to the maximum frequency ω_{max} : $\Omega_{fast} = [m_{fast}, \omega_{max}]$ (see general scheme in Fig. 2). After a careful analysis of a large body of collected experimental data, we found that in some examples m_{slow} , m_{fast} , and/or the peaks ω_{max}^{slow} and ω_{max}^{fast} cannot be well defined in the global wavelet spectrum. In these cases, two alternative strategies can be followed. If the value m_{slow} cannot be determined by the analysis of global wavelet spectrum $G(\omega)$, then $2\omega_{max}^{slow}$ was chosen as upper extreme for interval Ω_{slow} . The choice for $2\omega_{max}^{slow}$ was done empirically: we analyzed each case and possible choices for ω_{slow} ; the value $2\omega_{max}^{slow}$ presented better results for the slow dynamics approximation process. In this case, the lower extreme is equal to the smallest frequency ω_{slow} detected in time-frequency analysis.

If it is not possible to localize well-defined peak ω_{max}^{fast} in $G(\omega)$, then the lower extreme for Ω_{fast} must be chosen at an inflection point in $G(\omega)$. In this case, the upper extreme is equal to the largest frequency ω_{fast} detected in the time-frequency analysis. After determining Ω_{slow} and Ω_{fast} , the approximations $I_{slow}(t)$ and $I_{fast}(t)$ to slow and fast dynamics present in the signal $I(t)$ are obtained using the ICWT, considering the frequency bands Ω_{slow} and Ω_{fast} , respectively.

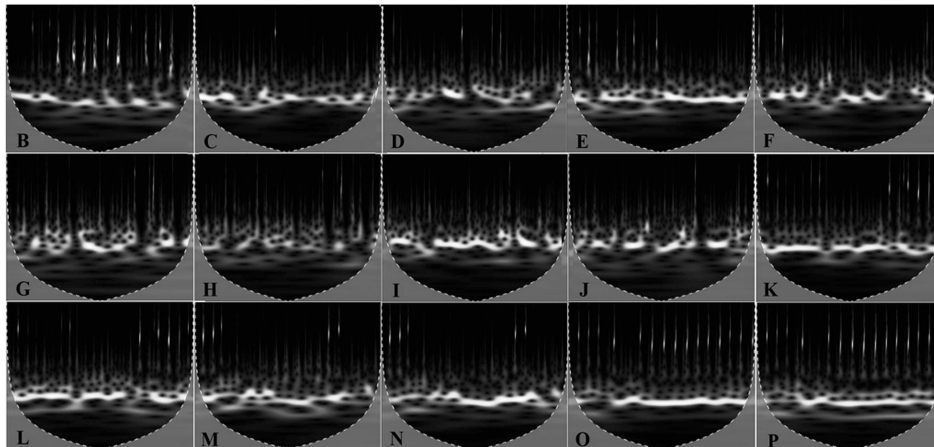


FIG. 4. Scalograms to time-series described in Table I. The frequency band, time, and colorbar ranges are the same as Fig. 3.

Then, we considered the computation in each case as a possible approximation for each different dynamics. We note that for the identification of repetitive fast spiking events, one has to set a threshold amplitude at which the event is relevant (limiarization). Such an additional step is unavoidable to discard isolated spike or other behaviors close to discontinuities in the time domain.

III. DATA COLLECTION AND EXPERIMENTAL SETUP

The experimental time-series was collected during iron electro-dissolution in 1 mol/l sulfuric acid. The experiments were performed in an electrochemical cell consisting of 0.5 mm diameter iron

working, Hg/Hg₂SO₄/ sat. K₂SO₄ reference, and Pt counter electrodes. When the potentiostat applies constant circuit potential V with respect to the reference electrode, the current $I(t)$ can be measured with zero resistance ammeter at a sampling rate of 1000 Hz. In a previous study,⁶ it was shown that bursting current oscillations can occur when 1 kOhm external resistance is attached to the iron wire. The time-series data exhibited slow chaotic variations, which were interrupted with high-frequency bursting. Here, we consider an even more complex system, where two iron wires dissolve simultaneously. The electrodes were connected to the potentiostat through two individual parallel resistors (R_{ind}) and one series collective resistor (R_{coll}), in such a way that the total resistance

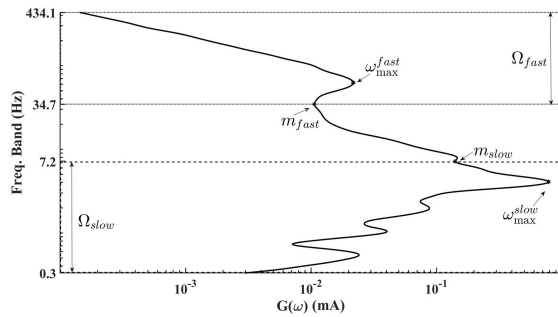


FIG. 5. Sets Ω_{fast} and Ω_{slow} to fast and slow approximations to data A whose $\epsilon = 0.0$: frequency range $]7.2, 34.7[$ Hz is not used to build approximations.

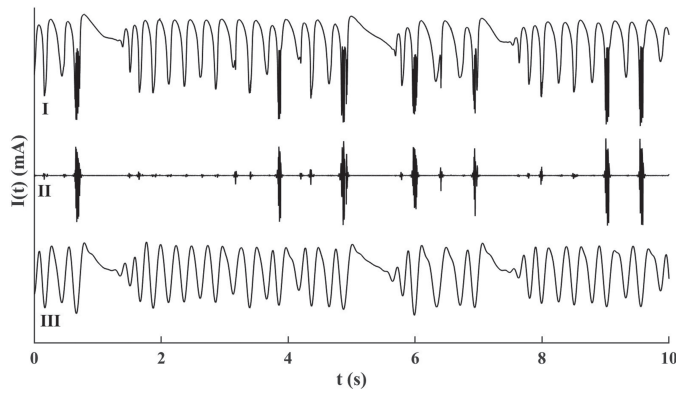


FIG. 6. The experimental current (I) and approximations to fast and slow dynamics (II) and (III) reconstructed using $\Omega_{fast} = [34.7, 434.1]$ Hz and $\Omega_{slow} = [0, 7.2]$ Hz. For better visualization, only initial 10 s are plotted, and the approximation time-series are shifted. Representation using data A with $\varepsilon = 0.0$.

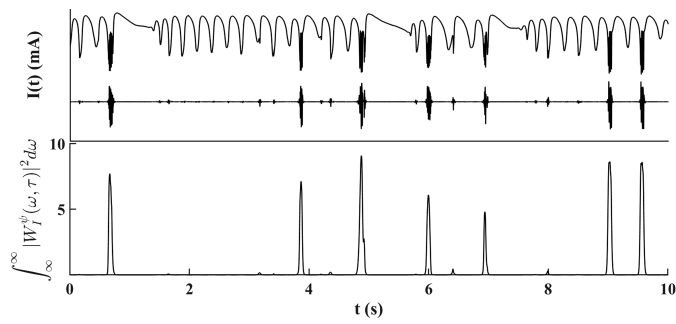


FIG. 7. The largest peaks (bottom panel) permits identify real bursters in fast approximation to the original current (top panel). Representation using data A with $\varepsilon = 0.0$.

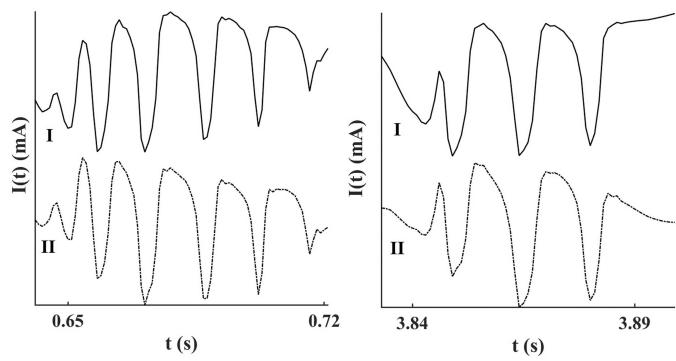


FIG. 8. Comparison between bursters in original current (I) and fast approximations (II) in time intervals $[0.64, 0.72]$ (s) and $[3.83, 3.90]$ (s) using data A with $\varepsilon = 0.0$.

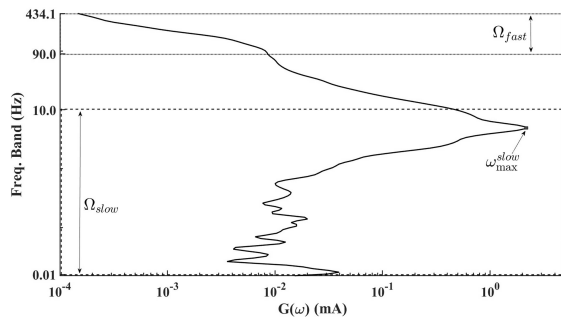


FIG. 9. Sets Ω_{fast} and Ω_{slow} to fast and slow approximations to data C with $\varepsilon = 0.2$.

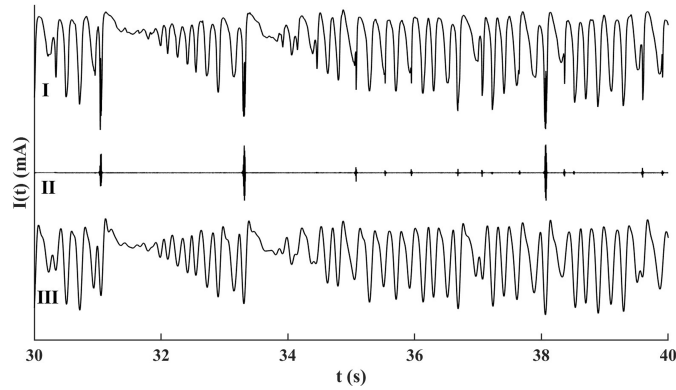


FIG. 10. The experimental current (I) and approximations to fast and slow dynamics (II) and (III) reconstructed using $\Omega_{fast} = [90, 434.1]$ Hz and $\Omega_{slow} =]0, 10]$ Hz (degenerate case). For better visualization, only initial 10 s are plotted, and the approximation time-series are shifted. Representation using data C with $\varepsilon = 0.2$.

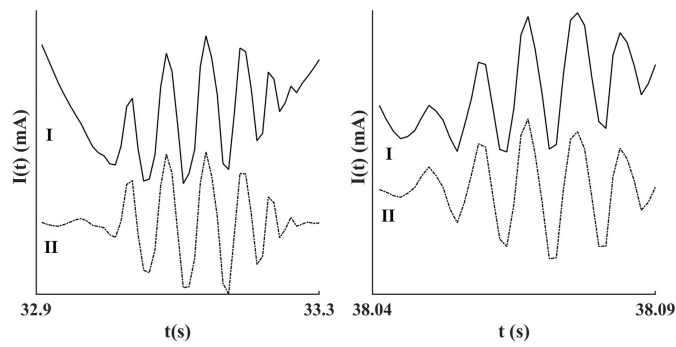


FIG. 11. Comparison between burstings in original current (I) and fast approximations (II) in time intervals $[32.9, 33.3]$ and $[38.04, 38.09]$. Representation using data C with $\varepsilon = 0.2$.

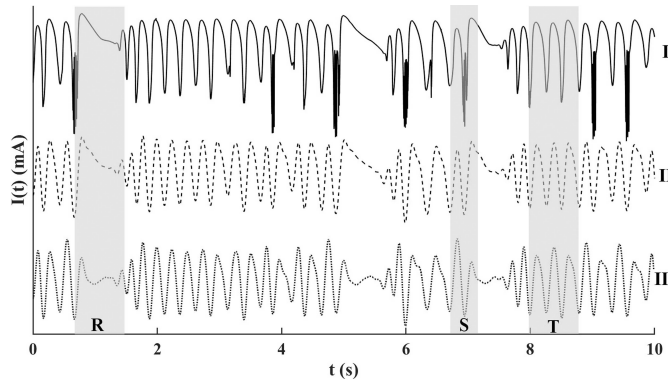


FIG. 12. Deformation regions (R, S, and T) in slow approximation (III) computed with the maximum peak region in low frequency ([2.4, 7.2] Hz) and (II) computed with proposed methodology ([0, 7.2] Hz), compared with experimental current (I). Representation using data C with $\varepsilon = 0.2$.

$R_{\text{tot}} = R_{\text{ind}} + 2R_{\text{coil}}$ was kept constant, but the collective resistance fraction $\varepsilon = 2R_{\text{coil}}/R_{\text{tot}}$ was changed. The collective resistance introduces electrical coupling between the wires, whose strength can be controlled with ε . Such coupling can greatly enhance the complexity of the individual time-series of the chaotic system. As shown in Table I, such experiments were performed, and two time-series were collected for wires 1 and 2, respectively. The coupling strength ε was varied between 0 (no coupling) and 1 (strong coupling).

IV. RESULTS AND DISCUSSIONS

This section presents the results obtained with the application of the proposed methodology in the computation of approximations for fast and slow dynamics of the experimental dataset described in Sec. III.

A. Scalograms with two well-defined peaks

The top panel in Fig. 3 shows the typical behavior of time-series with chaotic slow dynamics and irregular burstings over the fast dynamics (only the initial 10 s are shown for better visualization). Visual inspection of the scalogram (bottom panel in Fig. 3) reveals that the fast subsystem (the bursting intervals) corresponds to frequencies larger than approximately 30 Hz and the slow subsystem corresponds to the frequencies between 3 Hz and 10 Hz, approximately. These frequency ranges can be better inferred from the global wavelet spectrum (right plot in bottom panel); the spectrum exhibits two different and well-defined peaks: One around 4 Hz and the other around 60 Hz (the exact values are 3.91 Hz and 58.37 Hz, respectively). Note that the system exhibits complex dynamics, whose behavior cannot be localized to narrow frequency bands. Instead, some contribution to the slow and the fast subsystems occur with frequencies above and below 100 Hz and

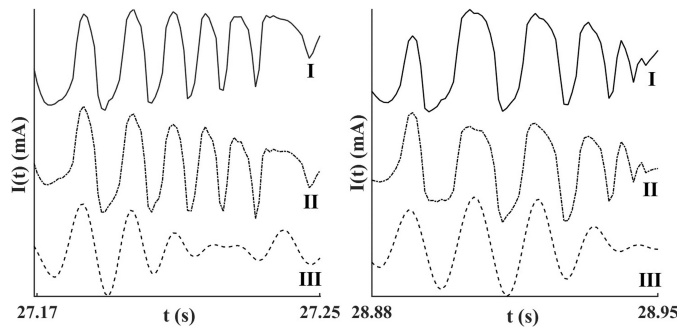


FIG. 13. Bursting regions in fast approximation (III) computed with the maximum peak region in fast frequency ([47, 88] Hz) and (II) computed with proposed methodology ([47, 434.1] Hz). Comparing experimental current (I) to data E with $\varepsilon = 0.4$ according to Table I. The approximations are shifted to better visualization.

3 Hz, respectively. In Fig. 4, the scalograms are shown for the first 10 s of the time-series listed in Table I. While the complexity of the time-series is certainly different, the fast and slow dynamics manifest, approximately, in the same frequency ranges. The separation of the fast and slow dynamics using the wavelet transform, in the most trivial case is explained with dataset A (see Fig. 3 for the time-series). In this example, there are well-defined *minima* below the fast ($m_{fast} = 34.7$ Hz) and above the slow ($m_{slow} = 7.2$ Hz) peaks in the global wavelet spectrum $G(\omega)$ as can be seen in Fig. 5. Therefore, the fast and slow dynamics correspond to frequency sets $\Omega_{fast} = [34.7, 434.1]$ Hz and $\Omega_{slow} =]0, 7.2]$ Hz. In order to generate the approximations to dynamics, namely, $I_{fast}(t)$ and $I_{slow}(t)$, the ICWT was performed using the sets $\Omega_{fast} = [34.7, 434.1]$ Hz and $\Omega_{slow} =]0, 7.2]$ Hz and considering zero all others frequency contents. The results can be seen in Fig. 6. The slow approximation $I_{slow}(t)$ captures very well the behavior of largest amplitude, slow oscillations in time domain; for example, comparison of panels (I) and (III) in Fig. 6 reveals that the number of oscillations and their shapes are preserved. The analysis for fast dynamics is more subtle: notice that the repetitive fast oscillations are correctly localized in (II), although there are small amplitude burstings that are not easy to recognize in the original current $I(t)$. These spurious small burstings correspond to regions in the original data whose time behavior is very similar to a single isolated spike. As such, we do not consider them as bursting regions. A possible way to eliminate such regions is to linearize $I_{fast}(t)$: The CWT of $I_{fast}(t)$ is performed, the scalogram is integrated over frequency. Figure 7 shows that this procedure is able to detect the seven bursting regions in the given time-series. The time-series of two of these bursts are shown Fig. 8. The original (top) and the reconstructed (bottom) burstings are similar in the sense that they have the same number of cycles and the cycles have similar waveforms.

B. Scalograms without two well-defined peaks

While one could expect that the above described procedure can be routinely applied to datasets with fast and slow dynamics, the difficulties of separating the two time scales are illustrated using data C in Table I; the global wavelet spectrum is shown in Fig. 9. In this case, the maximum of the slow peak is well defined with $\omega_{max}^{slow} = 5$ Hz. However, there is no clear minimum above the slow peak that could define m_{slow} . In such examples, we found that very good reconstruction of the slow dynamics can be achieved by setting $m_{slow} = 2\omega_{max}^{slow}$, i.e., in this example $m_{slow} = 10$ Hz. The analysis of the high-frequency region is even more complicated because there is no clear maximum. However, notice that there is an inflection point in the global wavelet spectrum at around $F = [70, 110]$ Hz. In such examples, we found that the fast dynamics can be reconstructed assuming that $m_{fast} = 90$ Hz (basically, we used the mean between the 110 Hz and 90 Hz), and thus the reconstruction is made with all the frequencies above this threshold. Using subsets $\Omega_{slow} =]0, 10]$ Hz and $\Omega_{fast} = [90, 434.1]$ Hz, the approximations were calculated (see Fig. 10); with these ranges, the largest oscillations were preserved in slow approximation and the burstings were correctly identified in fast approximation. Figure 11 shows that the waveform and the number of spikes in burstings in fast approximation are the same as that in the experimental current.

C. Pitfalls of finding frequency intervals

Finally, we must emphasize that the broad-range frequencies are essential to properly characterize the complex dynamics of the system. In other words, a simple pass-through filter can dramatically change the waveform of oscillations, which can misrepresent the corresponding dynamics. For example, the waveform deformation is illustrated with dataset A in Fig. 12. If the range $[2.4, 7.2]$ Hz is used instead of the proposed $]0, 7.2]$ Hz, the slow dynamics can exhibit spurious oscillations close to bursting dynamics or during a quite acquiescence period (e.g., see time domains I, II, and III). In relation to fast approximation, similar effect can be observed if high-frequency components are discarded. Figure 13 shows two bursting regions in dataset E, where the proposed $[47, 434.1]$ Hz range is replaced with a narrower $[47, 88]$ Hz range around the maximum. Notice that the bursting regions in the narrow band approximation [Subfigure III] do not preserve waveform and the number of spikes, that is, the approximation to fast dynamics is not correct. Table I summarizes which approximations were applied to reconstruct the slow and fast dynamics from the experimental data. (The time and frequency values are rounded to the nearest integer.) Out of the 16 datasets, only three exhibited a well-defined maximum and surrounding minima in the global wavelet spectrum that could be used for the approximations (datasets A, H, M). In one example, (dataset B), only m_{fast} was missing. In a typical dataset (11 examples), m_{slow} was not used, and thus we used $m_{slow} = 2\omega_{max}^{slow}$. With the most difficult dataset C, only ω_{max}^{slow} could be identified. Nonetheless, as described above, with the proposed methodology presented, we succeeded in reconstructing the fast and slow dynamics with an automated range identification based on the global wavelet spectrum.

V. CONCLUSION

The proposed analysis was found to be useful in locating frequency intervals by which the slow and fast dynamics of the complex multi-scale system can be separated. The method can be used to first filter the time-series data and then separate the fast and slow dynamics even when clear maxima and/or minima in the corresponding global wavelet spectrum are missing. The method was applied to the chaotic iron electrodisolution system where the chaotic slow dynamics made the identification of the fast bursting regions challenging. It was demonstrated that with such broad-frequency dynamics, application of simple pass-through filters are problematic. The methodology could facilitate the analysis of synchronization of bursting oscillations, where separate analysis could be performed for the synchronization of the slow and the fast oscillations.

ACKNOWLEDGMENTS

L.A.M. received financial support from the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brazil (CAPES) (Finance Code No. 001). M.O.D. acknowledges the financial support from the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (Grant No. 302226/2018-4) and São Paulo Research Foundation (FAPESP) (Grant No. 2015/25624-2). E.E.N.M. is supported by Grant No. 2015/50122-0 of the São Paulo

Research Foundation (FAPESP) and Grant No. 307714/2018-7. I.Z.K. acknowledges support from the National Science Foundation (NSF) (Grant No. CHE-1900011).

DATA AVAILABILITY

The dataset that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request with previous authorization by co-author I.Z.K. Further details of the experiments are given in Ref. 6.

REFERENCES

- ¹G. Giacomelli and A. Politi, "Multiple scale analysis of delayed dynamical systems," *Physica D* **117**, 26–42 (1998).
- ²R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier, Z. Gills, and E. R. Hunt, "Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system," *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1259–1262 (1992).
- ³M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. Kuehn, H. M. Osinga, and M. Wechselberger, "Mixed-mode oscillations with multiple time scales," *SIAM Rev.* **54**, 211–288 (2012).
- ⁴P. Chen and J. Vinals, "Amplitude equation and pattern selection in faraday waves," *Phys. Rev. E* **60**, 559–570 (1999).
- ⁵K. L. Hjertager, B. O. Hjertager, and T. Solberg, "CFD modelling of fast chemical reactions in turbulent liquid flows," *Comput. Chem. Eng.* **26**, 507–575 (2002).
- ⁶I. Z. Kizz, L. Qing, O. Levent, and J. L. Hudson, "Electrochemical bursting oscillations on a high-dimensional slow subsystem," *Phys. Chem. Chem. Phys.* **8**, 2707–2715 (2006).
- ⁷E. M. Izhikevich, "Neural excitability, spiking and bursting," *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10**, 1171–1266 (2000).
- ⁸E. M. Izhikevich, "Simple model of spiking neurons," *IEEE Trans. Neural Networks* **14**, 1569–1572 (2003).
- ⁹N. Naqvi, M. Li, J. W. Calvert, T. Tejada, J. P. Lambert, J. Wu, S. H. Kesteven, S. Holman, T. Matsuda, J. D. Lovelock *et al.*, "A proliferative burst during preadolescence establishes the final cardiomyocyte number," *Cell* **157**, 795–807 (2014).
- ¹⁰P. Rorsman and F. M. Ashcroft, "Pancreatic β -cell electrical activity and insulin secretion: Of mice and men," *Physiol. Rev.* **98**, 117–214 (2017).
- ¹¹X. Chen, M. Heidarnejad, J. Liu, and D. P. Christofides, "Composite fast-slow MPC design for nonlinear singularly perturbed systems," *AIChE J.* **58**, 1802–1811 (2012).
- ¹²J.-W. Son and J.-T. Lim, "Feedback linearisation of nonlinear singularly perturbed systems with non-separate slow-fast dynamics," *IET Control Theory Appl.* **2**, 728–735 (2008).
- ¹³Y. Wang and S. Boyd, "Fast model predictive control using online optimization," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **18**, 267–278 (2010).
- ¹⁴I. Omelchenko, M. Rosenblum, and A. Pikovsky, "Synchronization of slow-fast systems," *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **191**, 3–14 (2010).
- ¹⁵K. Fujimoto and K. Kaneko, "How fast elements can affect slow dynamics," *Physica D* **180**, 1–16 (2003).
- ¹⁶A. Mazzino, S. Musacchio, and A. Vulpiani, "Multiple-scale analysis and renormalization for preasymptotic scalar transport," *Phys. Rev. E* **71**, 011113 (2005).
- ¹⁷N. Hovakimyan, E. Lavretsky, and C. Cao, "Dynamic inversion of multi-input nonaffine systems via time-scale separation," in *2006 American Control Conference* (Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), Minneapolis, 2006).
- ¹⁸I. M. Held, M. Winton, K. Takahashi, T. Delworth, F. Zeng, and G. K. Vallis, "Probing the fast and slow components of global warming by returning abruptly to preindustrial forcing," *J. Clim.* **23**, 2418–2427 (2010).
- ¹⁹J. Chow and P. Kokotovic, "A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes," *IEEE Trans. Autom. Control* **21**, 701–705 (1976).
- ²⁰A. D. Goussis and M. Valorani, "An efficient iterative algorithm for the approximation of the fast and slow dynamics of stiff systems," *J. Comput. Phys.* **214**, 316–346 (2006).
- ²¹E. Chiavazzo, "Approximation of slow and fast dynamics in multiscale dynamical systems by the linearized relaxation redistribution method," *J. Comput. Phys.* **231**, 1751–1765 (2012).
- ²²E. Vander-Eijnden, "Fast communications: Numerical techniques for multiscale dynamical systems with stochastic effects," *Commun. Math. Sci.* **1**, 385–391 (2003).
- ²³A. E. Cetin, O. N. Gerek, and Y. Yardimci, "Equiripple FIR filter design by the FFT algorithm," *IEEE Signal. Process. Mag.* **14**, 60–64 (1997).
- ²⁴I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (SIAM, 1992).
- ²⁵A. Azzalini, M. Fargie, and K. Schneider, "Nonlinear wavelet thresholding: A recursive method to determine the optimal denoising threshold," *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **18**, 177–185 (2005).
- ²⁶J. Sadowsky, "The continuous wavelet transform: A tool for signal investigation and understanding," *Johns Hopkins APL Tech. Dig.* **15**, 306–318 (1994).
- ²⁷P. Abry, *Ondelettes et Turbulences: Multirésolutions, Algorithmes de Décomposition, Invariance D'échelle et Signaux de Pression* (Diderot éd., 1997).
- ²⁸S. C. Olhede and A. T. Walden, "Generalized Morse wavelets," *IEEE Trans. Signal Process.* **50**, 2661–2670 (2002).
- ²⁹J. M. Lilly and S. C. Olhede, "Higher-order properties of analytic wavelets," *IEEE Trans. Signal Process.* **57**, 146–160 (2009).
- ³⁰J. M. Lilly and S. C. Olhede, "On the analytic wavelet transform," *IEEE Trans. Inf. Theory* **56**, 4135–4156 (2010).
- ³¹J. M. Lilly and S. C. Olhede, "Generalized Morse wavelets as a superfamily of analytic wavelets," *IEEE Trans. Signal Process.* **60**, 6036–6041 (2012).
- ³²J. F. Kirby, "Which wavelet best reproduces the Fourier power spectrum?," *Comput. Geosci.* **31**, 846–864 (2005).
- ³³V. Perrier, T. Philipovitch, and C. Basdevant, "Wavelet spectra compared to Fourier spectra," *J. Math. Phys.* **36**, 1506–1519 (1995).
- ³⁴P. Frick, D. Galyagin, D. Hoyt, E. Nesme-Ribes, K. H. Schatten, D. Sokoloff, and V. Zakharov, "Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups," *Astron. Astrophys.* **328**, 670–681 (1997).

On the Effects of Gaps and Uses of Approximation Functions on the Time-Scale Signal Analysis: A Case Study Based on Space Geophysical Events

Luciano A. Magrini¹ · Margarete O. Domingues² · Odim Mendes³

Received: 7 October 2016
© Sociedade Brasileira de Física 2017

Abstract The presence of gaps is quite common in signals related to space science phenomena. Usually, this presence prevents the direct use of standard time-scale analysis because this analysis needs equally spaced data; it is affected by the time series borders (boundaries), and gaps can cause an increase of internal borders. Numerical approximations can be used to estimate the records whose entries are gaps. However, their use has limitations. In many practical cases, these approximations cannot faithfully reproduce the original signal behaviour. Alternatively, in this work, we compare an adapted wavelet technique (gaped wavelet transform), based on the continuous wavelet transform with Morlet wavelet analysing function, with two other standard approximation methods, namely, spline and Hermite cubic polynomials. This wavelet method does

not require an approximation of the data on the gap positions, but it adapts the analysing wavelet function to deal with the gaps. To perform our comparisons, we use 120 magnetic field time series from a well-known space geophysical phenomena and we select and classify their gaps. Then, we analyse the influence of these methods in two time-scale tools. As conclusions, we observe that when the gaps are small (very few points sequentially missing), all the methods work well. However, with large gaps, the adapted wavelet method presents a better performance in the time-scale representation. Nevertheless, the cubic Hermite polynomial approximation is also an option when a reconstruction of the data is also needed, with the price of having a worse time-scale representation than the adapted wavelet method.

Keywords Signals with gaps · Adaptive wavelet · Numeric approximations · Data treatment · Space Geophysics

✉ Margarete O. Domingues
margarete.domingues@inpe.br

Luciano A. Magrini
magrini@ifsp.edu.br

Odim Mendes
odim.mendes@inpe.br

¹ National Institute for Space Research (INPE), Associated Laboratory of Computation and Applied Mathematics (LAC), Graduation Program of Applied Computation (CAP), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo., São José dos Campos, Brazil

² National Institute for Space Research (INPE), Associated Laboratory of Computation and Applied Mathematics (LAC), São José dos Campos, Brazil

³ National Institute for Space Research (INPE), Space Geophysics Division (DGE), São José dos Campos, Brazil

1 Introduction

Since the middle of the last century [9, 17, 18, 20, 27], wavelet method has been an important tool for the analysis of non-stationary signals [25, 28, 31], which nowadays are easily accessible to different research areas. Among many other applications or interests, the use of this tool can help to extract significant information from data and to understand their multiscale features [13]. To apply the standard wavelet transform, one requirement is the need of equally spaced signals. A non-regular data distribution can be interpreted as an equivalent of the existence of regions of gap in the data records. In this case, the standard time-scale analysis cannot be used and adaptive wavelet analysing functions must be used, as described and proposed in [14]. Unfortunately, gap

in the data records is a recurrent situation for most data sets, specially collected in the space environment.

In the Space Sciences, the selection of intervals of signals is not always applicable directly to develop studies. Sometimes, some numerical manipulations of the data are required by technical circumstances. These procedures interfere in the signals and affect the way that one can interpret them. Consequently, the understanding of complex systems whose behaviours are represented in signals requires great attention and consistent numerical treatments. Naturally, imposed restrictions such as equipment problems, space weather conditions, broadcasting failures and the storage capacity can be translated into gaps in the records, the case under study in this work.

Concerning this kind of challenge, interpolating methods are presented as a useful pre-processing tool. However, some methods may have difficulty in replacing the expected values and recomposing features of the studied phenomena, specially when gaps are relatively large [22]. Some numerical interpolations can lead to an overestimation of the data set power spectrum, especially at low frequencies (related to high scales), due to the introduction of artefacts in the time-scale analysis [14]. The Russian researcher Frick and his team developed an adaptive wavelet method by modifying the Morlet wavelet, which restores the condition of admissibility in the gap regions by introducing a correction parameter [14, 15]. This procedure can recover some of the local spectral features of the gaped data.

Focusing on a practical use, the goal of this work is to investigate the effects of gaps of an important geophysical signal and the role of the more usual approximation treatments on the time-scale signal analysis. We have developed a local spectral study applied to a real set of records obtained from the space environment measured by satellites at the Lagrangian location known as $L1$ (a region under gravitational equilibrium between the Sun and the Earth). Artificial gap patterns were introduced in an original non-gaped signal provided in this work. These patterns were chosen to match a selection of real gap patterns encountered in these kinds of data sets. Basically, we have investigated the effects of two approximation methods [3, 32] usually used to deal with gap cases, namely the approximation function methods based on the cubic spline function [11, 26, 29] — the most well known of them —, and the Hermite function — proposed here as an interesting alternative —, and have compared them with the gap wavelet method — useful for spectral reconstruction of signals —, proposed by [14, 15]. These comparisons were based on the local energy preservation [1, 12] to obtain the scalogram, with refined details on the signal features and the global wavelet spectrum, with the common view of the ordinary users. This procedure has helped us to reach conclusive interpretations on the treatments of data sets.

This work has great importance because some interplanetary measurements are used to directly investigate the energy transfer from the solar plasma to the magnetosphere-ionosphere system [21, 24], and even to model the magnetohydrodynamical coupling [5, 16] between the interplanetary input (the space forcing) and the geomagnetic disturbance output (the plasma fluctuation and electrical current behaviours inside the magnetosphere).

Not only does this evaluation on the use of interpolated signals help to avoid artefacts, but it also aids in better understanding numerical artefacts present in a rebuild signal or in a model-output signal.

The results of this work have very well characterised the conditions for the use of those methods, the domains of applications, and the importance of the control on interpolating procedures for space geophysical purposes.

This paper is organised as follows. Section 2 describes the data set, the identification of gap patterns, the mathematical methodology, and the analysis approach implemented. Section 3 presents the results, the discussions done, and the interpretations reached with the comparisons. Section 4 establishes the conclusions. Finally, in the Appendix, a complete list of the geophysical events that define the intervals used for the interplanetary measurements is shown.

2 Data Set and Methodology

The first part of this section describes the data set used and what this kind of information represents in terms of Space Geophysics. Following, the main gap patterns that exist in these data sets are identified and some considerations are made. Then, the mathematical methodology is described in more details. Last, the scheme of the analysis is established.

2.1 Interplanetary Magnetic Field

Geomagnetic disturbances are manifestations of the influences of the solar wind plasmas and interplanetary magnetic field incident upon the Earth's atmosphere. The region surrounding our planet is composed by ionised gas, composed mostly by plasmas, involved by a geomagnetic field [21]. The behaviours of the interplanetary parameters, as space forcing agents or inputs, have great importance concerning to the outputs (*e. g.* electrical currents and plasma fluctuations) inside the magnetosphere [24].

Taking into account the geomagnetic disturbance on the ground as an effect of the solar plasma-magnetosphere-ionosphere coupling, this work deals with periods of *High-Intensity, Long-Duration, Continuous Auroral Electroject Activities*, connected with the presence of interplanetary Alfvén wave trains in the interplanetary medium. The north-south component of the interplanetary magnetic field, taken

here in the Geocentric Solar Magnetosphere coordinate frame (a system of references defined by the Sun-Earth direction and the geomagnetic dipole direction [21]), is an important aspect in this input-output electrodynamic performance. Then, the B_z component is used for our purposes of analysis. We arbitrarily selected a long experimental interval, from 1981 to 2012, with data collected by interplanetary satellites. These geophysical events were studied in [19]. A set of 120 time data series (signals) was initially considered. Data was obtained using a temporal resolution of one minute provided by the OMNIweb service¹ from NASA. For every geophysical event, we considered an anticipation shift of 30 and 90 minutes with respect to the start and end times of the effect on ground in order to take the interplanetary measurement interval, respectively. That way, we considered the propagation of the magnetic field signal from the location of measurement by the satellite to the boundary of the Earth's magnetised atmosphere, *i. e.* at the magnetopause [23]. The correspondence between the identification numbers used throughout this work and all the events studied can be found in the Appendix, where complete information on the dates of occurrences is given.

However, there is a great heterogeneity of the data when taking into account the gap percentage in the time series. The first 65 events have higher percentages of gaps. They correspond to events that occurred before 1992. Later than this, the records are more complete. In 48 % of the first 109 signals, it is detected some border problem, *i.e.* some missing records related to the beginning or end of the physical event. In events before 1993, those kinds of problems occur more often. To simplify this study and ensure conditions for the correct application of our methodology, we selected only 53 events whose signals do not have a gap in the edges (borders), as described in Appendix. Here, we deal with the gap intervals in the signals. Considering the length of the gap range ($\Delta\ell$) related with the total length of the data as presented in Table 1, we classify the signals related to the gaps as classified in four patterns, namely A, B, C, and D. Table 2 shows the number of events in which the gap patterns are observed, according to the higher gap lengths in the records. One needs to recall that the kind of gap pattern affect the local and global scale analysis done.

To apply the calculation of our method and plot examples, a benchmark signal, *i.e.* a data series without gap, is created in this work. This series consists of 3,129 records built based on the event 84, identified in the table at the Appendix. The reason for this procedure is explained as follows. Among all the selected events, this event presented the greatest integrity in the data records, in which only six are failures. Then, these flawed records were replaced by

¹<http://omniweb.gsfc.nasa.gov/>

Table 1 Gap pattern definition

Length of the gap range	Pattern
$0 \leq \Delta\ell \leq 1 \%$	A
$1 < \Delta\ell \leq 5 \%$	B
$5 < \Delta\ell \leq 10 \%$	C
$\Delta\ell > 10 \%$	D

the average of the known records near the gap, giving rise to the benchmark signal, shown in Fig. 1. The amplitude of the signal is given in nanoteslas, or nT, because it is related to the intensity of the interplanetary magnetic field. The benchmark signal is modified with the introduction of gaps obeying the Patterns A, B, C, and D to create the data series to be examined in this work.

Using a real signal (without gap) as the benchmark signal, we establish an ideal signal and with a defined length that allow us to investigate the local and global scale analysis in some common basis (signal with the same number of records). The choices of patterns allows us to examine the worst condition for each gap pattern and compare them.

2.2 Mathematical Methodology and Analysis Approach

To use signals in analysis, one needs to pay attention to the conditions of the signals. The ideal condition, when the signal is sampled with a regular cadence in long periods without any gap interval, is a very improbable situation in the geophysical area. Therefore, the treatment or the analysis procedure of the data collected under the most different purposes is a crucial situation in many occasions. Two immediate solutions can be applied: either the use of a more restricted time series or the use of an interpolated time series done by a proper method that treats the gap in time series. Both have advantages and disadvantages. In our study case, we have taken care of the needs of interpolation.

As a primary assumption, the interpolation method is applied locally. In the remainder of this section consider a signal s defined in the instants $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, assuming the hypothesis of differentiability when necessary. Among several techniques for interpolation in time data series, two

Table 2 Distribution of the gap patterns in selected events

Pattern	Events Number	% of total
A	39	73.58
B	09	17.99
C	02	3.77
D	03	5.66
Total	53	100.00

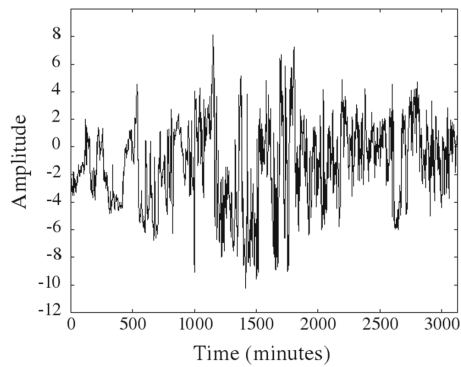


Fig. 1 This benchmark signal $s(t)$ refers to Event 84 (identified in the Table 4 at the Appendix)

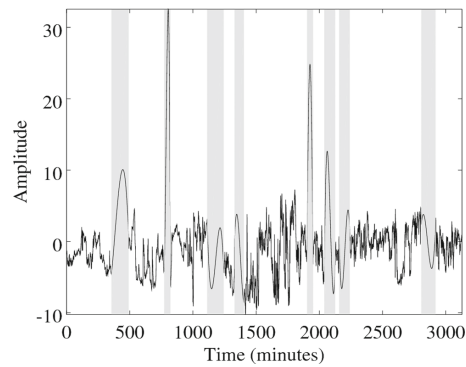


Fig. 2 An example of the time series presented in Fig. 1 with the introduction of sequential gaps with the Pattern B and then reconstructed with cubic spline. (Gray intervals indicate the gap regions)

of them are very popular because they adapt to the general behaviour of the pre-existing records. Those techniques are the cubic spline interpolation and the cubic Hermite interpolation.

An interpolating cubic spline $S(t)$ for s is a function of third-degree that satisfies the conditions:

1. For $j = 0, 1, \dots, (n - 1)$ let $S_j(t_j) = s_j(t_j)$;
2. For $j = 0, 1, \dots, (n - 2)$ let $S_j(t_{j+1}) = S_{j+1}(t_{j+1})$;
3. For $j = 0, 1, \dots, (n - 2)$ let $S'_j(t_{j+1}) = S'_{j+1}(t_{j+1})$;
4. For $j = 0, 1, \dots, (n - 2)$ let $S''_j(t_{j+1}) = S''_{j+1}(t_{j+1})$;
5. $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$.

Condition 1 means that the spline S coincides with the approximate signal at the known points. Conditions 2, 3, and 4 imply the continuity of the spline up to the second derivative, and the sixth condition is commonly called natural condition [6]. The last condition (called free or natural boundary) stated allows to determine uniquely the splines S_j that approximate the s signal in each of the sub-intervals $[t_j, t_{j+1}]$ where $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Figure 2 presents a time series $s(t)$ with a gap and its version reconstruction using the cubic spline method. One can observe that the cubic spline method increases the oscillations on the data, this effect will be observed in the scale-time analysis as a strong increase of energy locally in scalogram and globally in the wavelet global spectrum.

The cubic polynomial $H_3(t)$ is a Hermite interpolating polynomial for the signal s in the interval $[t_j, t_{j+1}]$ for $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ if:

1. $H_3(t_j) = s(t_j)$;
2. $H'_3(t_j) = s'(t_j)$.

One needs to note that this form of approximation is more restrictive than the one made via the cubic splines. Here, equality of interpolating polynomial and the approximate signal is required in the points in which it is known, and also in the first derivative. Figure 3 presents a time series $s(t)$ with a gap and its version reconstructed using the cubic Hermite method. One can observe that with this method, smooth flat connections on the data are introduced. This effect is also observed in the scale-time analysis as a local increase of energy in the high scales.

Let $H_3(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ be an explicit form of the Hermite cubic interpolating polynomial for the signal s in the interval $[t_j, t_{j+1}]$ with $j = 0, 1, \dots, n$.

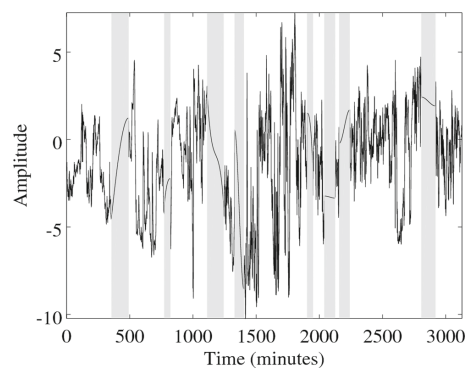


Fig. 3 Idem Fig. 2 with cubic Hermite reconstruction. (Gray intervals indicate the gap regions)

Unequivocally, its coefficients can be determined by solving the system:

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ t^3 & t^2 & t & 1 \\ 3t^2 & 2t & 0 & 1 \\ 3t^2 & 2t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t_j) \\ s(t_{j+1}) \\ s'(t_j) \\ s'(t_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

In most practical cases, no information about the values of the derivative of the signal s is held, making unfeasible direct calculation of the coefficients $a, b, c,$ and d using the matrix system above; a way to handle this difficulty is to build the polynomial through Newton's divided differences for the Lagrange polynomial, as done in [30]. In terms of divided differences, the Hermite cubic polynomial in the interval $[t_j, t_{j+1}]$ for $j = 0, 1, \dots, n-1$ is written as follows:

$$H_3(t) = s(t_j) + s[t_j, t_j](t - t_j) + s[t_j, t_j, t_{j+1}](t - t_j)^2 + s[t_j, t_j, t_{j+1}, t_{j+1}](t - t_j)^2(t - t_{j+1}),$$

where $s[t_j, t_j], s[t_j, t_j, t_{j+1}]$ and $s[t_j, t_j, t_{j+1}, t_{j+1}]$ denotes the divided differences of first, second, and third order, respectively.

In principle, those techniques allow to complete data in time series following some properties. However, a complete understanding of the effects of interpolations in the signal representation is an important requirement for any utilisation of the rebuilt signal. To compare the local energy and the contribution calculated in each of the derived signals and in the original signals, the wavelet method for the signal analysis can be applied.

Initially, this work presents a wavelet transform. Consider a real nonzero scale parameter $a,$ a real translation parameter $b,$ and an analysing wavelet function $\psi.$ We define the continuous wavelet transform of a signal s by the equation:

$$\mathcal{W}_s^\psi(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} s(t) dt, \tag{1}$$

where $\overline{\psi}$ is the conjugate of the wavelet function ψ [1]. On this transform, the parameters a and b vary continuously in closed intervals that are set. Practically, in the numerical implementation, we choose appropriate ranges and variations of these parameters. Geometrically, the parameter a can produce contraction or dilation of the analysing wavelet function ψ (as $0 < a < 1$ or $a > 1,$ respectively) around the translation parameter $b.$ The variations of these parameters provide multiscale aspects of the transform [1, 8, 10]. The number $\frac{1}{\sqrt{a}}$ is the normalisation constant used to ensure the energy conservation between time domain and frequency domain.

A function ψ is an analysing wavelet if the following conditions are satisfied:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$

The first condition (known as admissibility condition) states that the function ψ has mean equal zero and this ensures the oscillatory nature of the function $\psi.$ The second condition (know as unitary energy) implies the existence of a compact support, outside of which, there is a rapid fall in range of $\psi.$ It is equivalent to a localisation of the energy of the frequency-domain.

The values $\mathcal{W}_s^\psi(a, b)$ are called the wavelet coefficients and the square of their modules when arranged in a two-dimensional array of size $a \times b$ (in the case of one-dimensional signals) are interpreted as the energy present in the time b and scale $a.$ The term energy is used in the mathematical sense of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (the space of square integrable functions on \mathbb{R}) in an analogy of energy sense in physics [4, 10, 12]. Therefore,

$$E_s^\psi(a, b) = |\mathcal{W}_s^\psi(a, b)|^2$$

is a local measure of the energy present in the signal s in the time-frequency plane and is called scalogram.

Interpreting the scalogram by an appropriate colour palette allows the detection of sudden changes in the signal behaviour (as discontinuities or frequency changes) versus time. Its reading identifies the moments when these phenomena occur because these regions readings of wavelet coefficients indicate higher values of energy.

It is important to note that a scalogram of a signal s is not unique despite the wavelet coefficients having the energy conservation property in the sense of Parseval². The distribution of energy in the time-frequency plan is different for each choice of wavelet function $\psi.$

The global wavelet spectrum is defined by

$$\mathbb{S}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} E_s^\psi(a, b) db,$$

and it can be interpreted as the distribution of energy present for their scales a [10]. In the case of periodic signals, it provides a smooth version of the Fourier spectrum, which is not true in the case of non-periodic signals [14].

²The Parseval theorem implies the conservation of energy in physical and Fourier space. In mathematical terms, it has been $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\xi)|^2 d\xi,$ where $s(t)$ e $\hat{s}(\xi)$ indicate any signal and its Fourier transform, respectively, where ξ is the frequency.

Well known in the literature, the Morlet wavelets are defined by

$$\psi(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i\omega t),$$

where ω and $\sigma \geq 1$ are constants (the restriction to σ ensure the validity of the admissibility condition). In this work, we use a standard wavelet where $\omega = 6$ e $\sigma = 1$.

The scalogram for the benchmark signal is presented in Fig. 4. For the signal $s(t)$ (at the top panel), the scalogram for $s(t)$ (at the bottom panel) shows the signal energy (quantified by the bar colour representation in $(nT)^2$) per scale band at each time. Then, one can follow the evolution of the signal energy and identify relevant signal features.

The wavelet transform defined in Eq. 1 cannot be applied to data sets with gaps because in the positions where there is no record, the admissibility condition is not valid, i.e. the wavelet basis function loses its oscillatory feature.

Frick and his team [15] presented a technique known as *Gap Wavelet Transform*, which adapts the wavelet function by introducing a correction constant, calculated for

each time and scale for the case in which the signal $s(t)$ presents gaps so that the admissibility condition is not lost. We observed that, unlike the interpolation methods, the Gap Wavelet Transform does not reconstruct the analysed series in the gap positions. For this purpose it is necessary to build an auxiliary signal $s(t)G(t)$, where

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } s(t) \text{ exists at time } t, \\ 0, & \text{if } s(t) \text{ does not exist at time } t. \end{cases}$$

After, it arises directly that the continuous wavelet transform of the auxiliary signal is given by:

$$\psi(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{2}$$

where $\psi^*(t) = \psi(t)G(t)$.

During the analysis in the regions with gaps, the function ψ^* is used instead of ψ . The problem of the analysis of the signals with gaps becomes to determine a basis wavelet function $\tilde{\psi}$ to replace the ψ^* in (2), for which the condition of admissibility initially lost is valid.

The construction of $\tilde{\psi}$ based on Morlet wavelet presupposes that $\psi(t) = h(t)\Phi(t)$ could be written, where h and Φ are responsible for the oscillatory part, and for the envelope of ψ , respectively. According to [14], the function $\tilde{\psi}$ is given explicitly by:

$$\tilde{\psi}(t, b, a) = \left[h\left(\frac{t-b}{a}\right) - C(a, b) \right] \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t), \tag{3}$$

where $C(a, b)$ is the correction parameter responsible for restoring the condition of admissibility, which must be calculated for each time b and the scale a

Explicitly, the value of $C(a, b)$ can be obtained imposing the validity of the condition of admissibility for (3), where

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt = C(a, b) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt.$$

and isolating $C(a, b)$ in this following equation:

$$C(a, b) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt}.$$

The gap wavelet transform gave basis to an adaptive wavelet method, which allowed the identification of the scales that compose a signal. It allows obtaining an approximated polynomial function for a spectral reconstruction of signals. The way to compute the inverse gap transform is not available, therefore there is no way to reconstruct the signal in the physical space with this method.

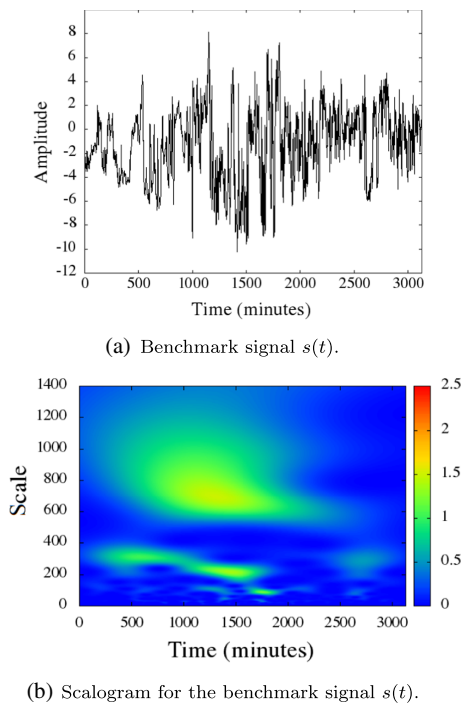


Fig. 4 Scalogram of the benchmark signal $s(t)$

Thus, based on these formalisms and related numerical tools, the analysis approach used in this work can be established as:

1. We choose a benchmark signal (data series with no gap) and introduce artificially a sequence of gaps obeying the patterns A, B, C, and D (as early defined in the text);
2. Then, we approximate values in the gaps to have a time series without gaps. We use spline or Hermite method for these approximations (as earlier described in the text);
3. After that, we compute the wavelet transform and consequently the scalogram, and the global wavelet spectrum of these series.
4. Finally, we compare these time-scale results with the one obtained from the wavelet transform of the original signal (without gap) and the transformed data using the adaptive wavelet transform.
5. We repeat steps two and three for data series (derived from the benchmark signal) with a significant gap interval located under three conditions: almost at the beginning, in the middle and almost at the end of the data series.

As the last remark, one can obtain the global wavelet spectrum of a signal (similar to Fourier spectrum) and the local wavelet spectrum (scalogram). The use of both information avoids misleading the interpretation based only on the global wavelet spectrum.

3 Results and Discussions

To allow the evaluation of the effects of gaps on the signal analysis, two comprehensive study cases were defined. In the first case, the benchmark signal is modified to reproduce the data gap patterns A, B, C, and D. In the second case, the locations of the gap (close to the beginning, in the middle, and close to the end) in the data series are considered. Using prepared data series according to the cases, the interpolation treatments are done and the signal analyses are obtained by the wavelet methodology.

For the first case, the gap patterns are reproduced by introducing 19, 8, 5, and 4 gap intervals in the original signal. These intervals are randomly introduced (except at the edges) in the benchmark signal. The gaps have different lengths but obeying the limits, *i.e.* a percentage of the data series extension to obtain each gap patterns. Figure 5 presents the gap-pattern signals, designated as pattern from A to D. All signals are treated with cubic spline method and Hermite polynomial method before the signal analyses.

The wavelet methodology applied for the signal analysis allows obtaining the scalograms and, from them, to calculate the global wavelet spectra. Then, the time-scale analyses related to the spline interpolation, to the Hermite interpolation, and to the adaptive wavelet are shown in Fig. 6. Each column gives the results for patterns from A to D, respectively. The preservation of the local energy structures is directly related to the length of gap intervals. Therefore, the results are worse in the case of patterns B, C, and D, as can be seen in the Figure. For pattern A, the existing structures in the benchmark signal were preserved in these scalograms. That means that minor gaps in the signal can be satisfactorily processed by the interpolation techniques earlier discussed.

By comparing the result of the benchmark signal (Fig. 4) and the results presented in Fig. 6, the influence of the number of gap intervals in the time-scale analysis can be evaluated and a quantitative interpretation can be done. Concerning the signal analysis, very compatible results of interpolation techniques were obtained for the gap pattern A; although the Hermite interpolation presents a slightly better performance than the spline interpolation. Under other gap patterns, the use of interpolation techniques (spline and Hermite) introduced artefacts in the reconstructed signal. Hermite interpolation might be used in gap pattern B condition under certain circumstances. Under gap patterns B, C, and D, the approximation spline function must not be applied for interpolation purposes. As seen in panels (b), (c) and (d) in Fig. 6, the signals reconstructed by splines do not exhibit energy conservation, where the maximum values of the colour bars indicate this behaviour clearly.

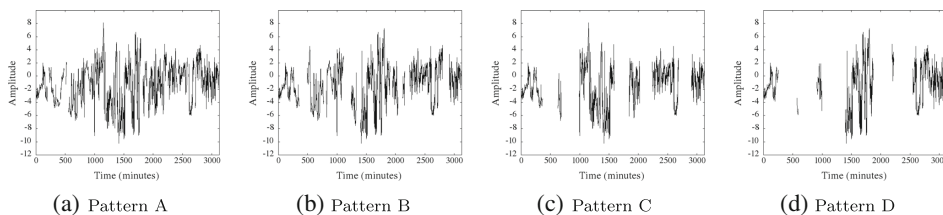


Fig. 5 Created from the benchmark signal, data series with gaps obeying patterns A, B, C, and D (defined in the text) are shown

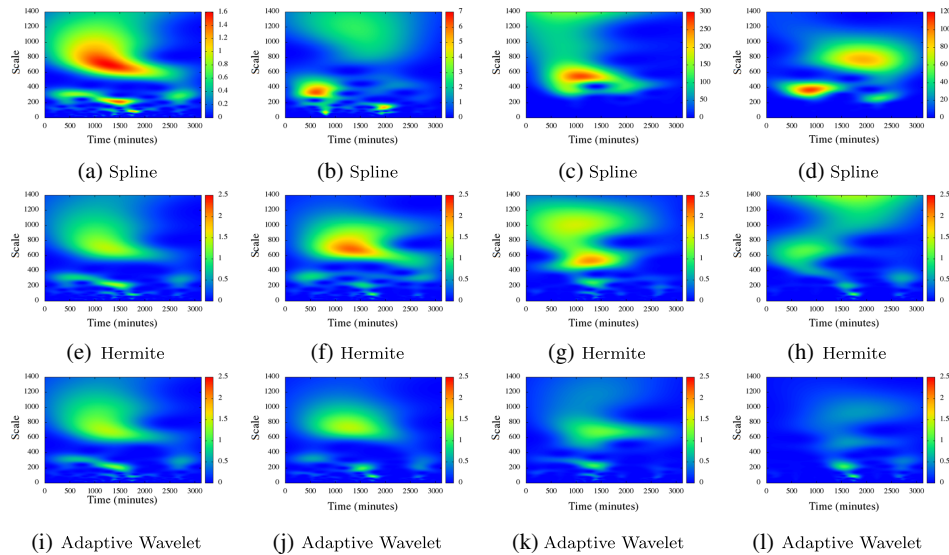


Fig. 6 Modulus of the squared wavelet coefficients (scalograms showing signal energy) obtained from the approximated time series computed from the spline and the Hermite cubic polynomial

methods, and directly by the adaptive wavelet method. The results for Gap Patterns A, B, C, and D are shown, respectively in each column

To obtain signal spectrum analysis, the adaptive wavelet method presents proper results dealing with all gap pattern conditions, because it does not create artefacts nor does it overestimate the features of the signals. In fact, this method is able to identify the remnant energy of the original signal.

As summary, based on second-column panels to the fourth-column panels of Fig. 6, one can verify that the representation of the signal by spline is not correct; the Hermite creates artefacts the adaptative wavelet loses energy in the representation.

Complementary, we discuss now the global wavelet spectra of the signals and take into account all the gap patterns. The reason is that common users usually apply the

conventional fast Fourier analysis to obtain the spectra of a signal. The interpretation of the result in this kind of Fourier analysis may be misleading. Presenting an equivalent result, the global wavelet spectra help one to deal with this dilemma, aided mainly with detailed view provided by the earlier scalograms.

Figure 7 shows the global wavelet spectra allowing comparison among the benchmark signal, the Hermite-treated data series and the adaptive wavelet result for the gap Patterns A, B, C, and D. The global spectrum results obtained with splines are not displayed due to the energy overestimation caused by this technique. Only in the analysis of Pattern A, the performance of the splines is

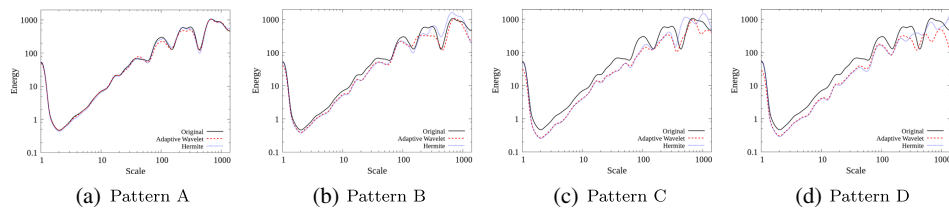


Fig. 7 Global wavelet spectrum of the benchmark signal and the interpolated data series obtained from approximation Hermite function technique, and the global adaptive wavelet spectrum. The results for the gap Patterns A, B, C, and D are shown

Table 3 Identification of the energy peaks in the global wavelet spectrum (the original signal has four energy peaks)

Method	Pattern B		Pattern C		Pattern D	
	Correct	False positives	Correct	False positives	Correct	False positives
Gap wavelet	4	0	4	1	4	1
Hermite cubic	3	2	2	3	3	3

equivalent to the other two treatments. This spectrum analysis of the signal processed with Hermite polynomials and via adaptive wavelet reproduced the behaviour of the benchmark signal, designated henceforth as the original signal. At larger sequences of gaps the treatments difference are noticed at middle-high scales mainly. In these cases, the use of cubic splines significantly changes the behaviour of the global wavelet spectrum. An overestimation of the calculated energy occurs especially in the presence of gaps with patterns C and D. A problem with the edges is noticed in all cases, even in Pattern A, except for the adaptive wavelet method, as discussed in [15]. The main structures present in the scalogram are reproduced by the adaptive wavelet technique and the time series reproduced with Hermite approximation, specially for Patterns A and B; however, the energy is over estimated locally with the Hermite method. Strong differences in Patterns C, and D are noticed, as show in Fig. 7. With the adaptive wavelet strategy there is more agreement with expected results in scalogram. The global spectrum of the original signal has four energy peaks. Note that the Hermite polynomials treatment causes the appearance of false peaks in the global wavelet spectrum and overestimate some of them. The performance of adaptive wavelet is slightly superior because it more effectively detects the energy peaks present as in the original signal and is less sensitive to the detection of false positives; however, it slightly underestimates the energy. An analysis of the detection of the energy peaks in the global wavelet spectrum is shown in Table 3, where the performance of splines is not included due to its low performance.

The classification of patterns A, B, C, or D is based on the percentage lengths of the gap intervals, regardless of the location of these intervals within the signals, which seem relevant information for time-scale analyses.

The performance of the interpolation methods with respect to processing gaps relates (but not exclusively) to the number of k positions estimated between points t_i and t_f , with the continuity and smoothness of the estimated signals. The softer the behaviour of the approximated signal, the better the results in terms of time-scale analysis. In fact, let I be a gap interval in signal $s(t)$ defined in the interval $[t_i, t_f]$. The local application of the interpolation depends only on the values $f(t_i - 1)$ and $f(t_f + 1)$, so that the position of I becomes a relevant issue for time-scale analysis. For each offset of I , new records $f(t_i - 1)$ and $f(t_i + 1)$ are obtained by changing the result of the interpolation.

Suppose I located in a region of low energy signal, *i.e.* a region with some regularity in the records, the processing using interpolating methods, even if using third-degree polynomials, will introduce fluctuations in the estimated values. The bigger the length I , the less efficient the local interpolation to approximate the interpolated points and, thus, irregularities are introduced in the records. These irregularities cause an overestimation of the calculated energy. However, given the restrictions on the derivative signal the interpolated Hermite polynomials used in the treatment of I results are more consistent than those presented by the use of splines, where restrictions on the interpolated signal f are smaller.

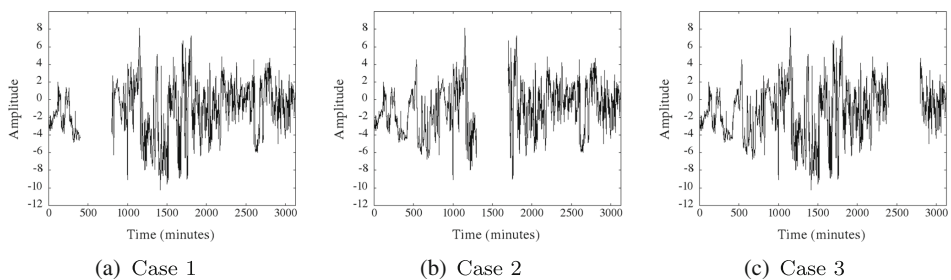


Fig. 8 Significant gap located close to the beginning, in the middle and close to the end of a data series, which are created based on the benchmark signal

For the adaptive wavelet technique, the gap location is also a relevant issue, but for a different reason, since in this case any estimate of x in the interval I is not done. The relevance here comes from the nature of the gap. The gap may be located in a region with a lot of variation in the time series domain, a situation in which losses in the calculated energy occur. On the other hand, the gap may be located in an undisturbed region (regular region), a situation in which the loss of information in the time-scale area is small or insignificant.

In order to illustrate the discussion on the importance of the gap location interpreted in the preceding paragraphs, we have modified the benchmark signal to generate three data series for tests. Composing the second case in our study, an arbitrary gap interval of length equal to 400 records was introduced almost at the beginning, at the central region, and almost at the end of the data series. It is an empirical approach that allows a common basis for scale analysis

comparison. Figure 8 shows the data series, respectively. The processing techniques have been applied in each case and scalograms have been calculated with the results seen in Fig. 9.

From the comparison with the scalogram of the benchmark signal, one notices that the adaptive wavelet does not detect the largest structure of the signal energy, when the gap lies in the region corresponding in the time domain. This causes a loss in the estimation of the signal energy. Nevertheless, the cubic spline treatment implies in an over-estimation in the signal energy in the locations of the gaps and distortions in the signal energy structures. One can see that (except for pattern A in Fig. 6) the calculated energies are overestimated. In the worst case, the calculated energy is a thousand times bigger than the energy in the original signal existing (see in Fig. 9). The use of the Hermite treatment identifies most of the existing energy structures in the signal in a compatible way, but with some distortions in time

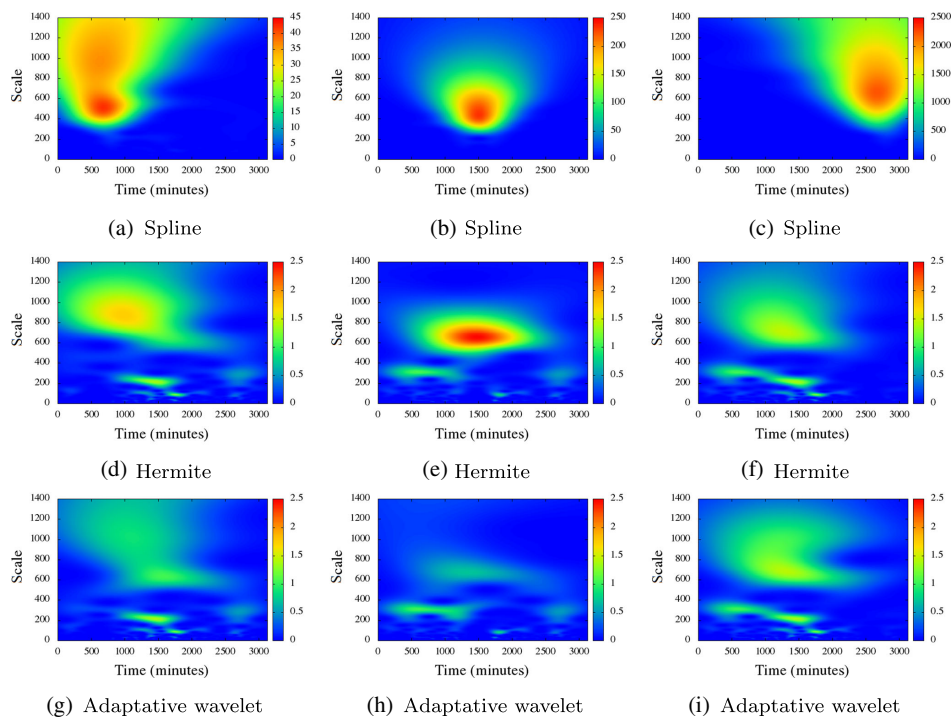


Fig. 9 Local energy structures related to the effect of positions of the gaps in the data series: near the beginning, in the centre and near the end, for the spline, Hermite, and adaptive wavelet approach. The columns refer to the gap position, respectively

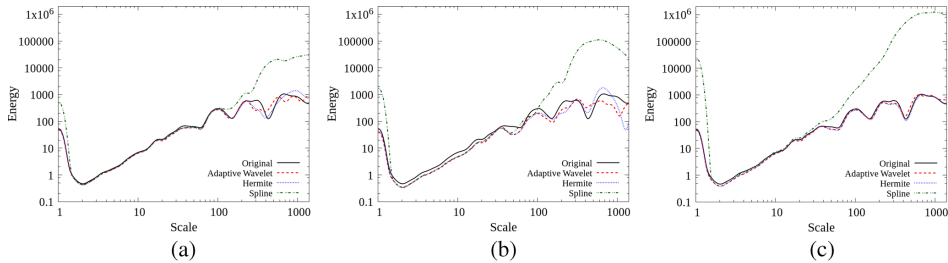


Fig. 10 Global wavelet spectrum related to the effect of positions of the gaps in the data series: near the beginning, at the centre and near the end (respectively in the plot), for the spline, Hermite and adaptive wavelet approach. The result for the benchmark signal is given as reference

location and energy intensity. The performance by this technique depends on the gap location to occur in a less crucial position in the original signal, *i.e.* the gap location occurs in a part of the signal naturally presenting a low signal energy. With exception of the spline case, high frequency structures are identified in the signals compatible with the structures of the benchmark signal.

Last, in order to complement the work, the global wavelet spectrum analysis is discussed. Figure 10 presents the global wavelet spectrum related to the effect of positions of the gaps in the data series: near the beginning, in the centre, and near the end (respectively in the plot), for the spline, Hermite, and adaptive wavelet approach.

The result for the benchmark signal is given as reference. It is verified that for high frequencies the estimated global wavelet spectra reproduces the behaviour of the original signal. However, at low frequencies only the Hermite polynomial and the adaptive wavelet technique present results consistent with the original spectrum. In addition to the relative length and the location, another important factor affecting the results of the time-scale analysis is the number of intervals I with gaps in the signal, verified in the previous first case of data study. The more intervals I throughout the signal, the greater will be the changes in the energy calculated at each considered scale.

As summary, based on first-column panel to the third-column panel of Fig. 9, one can verify using the scalogram that spline is not useful; Hermite presents a similar scalogram if the main energy is not in the gap region, otherwise it creates artefacts, and the adaptive wavelet loses energy in general, and in these cases it also produces some artefacts with relatively low energy.

From these case studies, the effects of the gaps (length of the intervals, quantities of gaps interval, locations of the intervals, and the level of regularity of the function represented in the data series) are investigated. To attend the

different purposes of the scientific or technical teams, the results and interpretations as a reference basis help to understand in a practical way the use of interpolating methods that apply approximation functions, as spline, Hermite, and the adaptive wavelet.

4 Conclusions

This work investigates the use of approximation functions to fill up different kinds of gaps on a time-scale approach. The real data in time series presents general intervals with gaps. This situation affects the way in which data can be used in a great number of scientific or technical developments, for instance, as input to space plasma modelling. Nevertheless, there are many approximations functions defined in the mathematics which help this task. Three techniques are considered and evaluated in the context of helping the use of real data series. They are the cubic spline, the cubic Hermite function, and the adaptive wavelet function. In a practical sense, this study helps the analysis of data series of significant space geophysical events.

A benchmark signal was built using a data series obtained from the interplanetary magnetic field, which is related to an important space phenomena, the electrodynamic coupling between the plasma of the solar wind and the magnetosphere-ionosphere system. Gaps present in data series can be classified by the distribution and extension. Two comprehensive study cases are defined. In the first case, the benchmark signal is modified to reproduce the main data gap patterns identified, taking into account the length of the gap intervals, the quantities of gaps interval, and a random distribution. In the second case, the locations of the gap (close to the beginning, in the middle, and close to the end) in the data series are considered. Using the prepared data series according to those cases, the approximation functions

are applied and the signal analyses are performed by the wavelet transform approach.

As a result, the following information is obtained, as an important characterisation of the effects of gaps in time-scale analysis. The time-scale analysis of a time series that have gaps can be done via cubic splines or cubic Hermite polynomial approximations of the gaps, creating an artificial time series without gaps, and then apply the wavelet transform on it. Alternatively, we can compute the time-scale analysis direct in time-space with the adaptive wavelet method. However, all these techniques could introduce changes in the signal energy locally, which also depend on the extension, location, and amount of the gap intervals in the signal and the level of regularity of the function represented in the time series. In general, considering gaps inside the edges, the scale-time analysis performance of the cubic spline, cubic Hermite and adaptive wavelet methods have a similar behaviour for small sequential gaps in the time series. However, the cubic spline method tends to increase signal energy, this effect tends to be intensified as the sequential gaps enlarge. Then, for larger and very larger sequential gaps, cubic spline method is not recommended as it interferes strongly in the scale-time analysis. This effect is somehow expected from the spline theory that establish that this technique is recommended for small sequence of gaps. For time series with large number of sequential gaps the cubic Hermite method increases locally the energy in the main structure and in the high-scales in the scalogram. This effect can be also noticed in the global wavelet spectrum. The adaptive wavelet method maintains the energy in the main structure region. Both methods have a reduction of energy in low and middle scales and present similar peaks, except in high scales where the peaks obtained by the cubic Hermite method are shifted and over estimated. For very large number of sequential gaps, the cubic Hermite approximation method presents an over estimation of the energy in high-scales and in middle-scales that are not originally present on that time intervals. This over estimation effect is attenuated in the global spectrum, however the energy peaks are shifted in high-scales. On this gap case, the adaptive wavelet method does not produce the over estimation of the energy in high-scales, however there is a small spread of the energy in the middle-scales around the main energy region. In both cases there are energy lost in some low-scales structures. In summary, in this gap case the global wavelet spectra present similar energy peaks, however the scalogram obtained directly with the adaptive wavelet methods preserves the local signal energy features compared to the expected scalogram. Another advantage of the adaptive wavelet method is that it can be used in sequential gaps in the edges, and also if its time series is not periodic, as needed in the usual wavelet transform. Nevertheless, the cubic Hermite polynomial approximation is also an option

when a reconstruction of the time series is also needed, with the price of having a worse time-scale representation than the adapted wavelet technique.

Special care must be taken if large gaps are present. Both Hermite and adaptive wavelet can be useful sometimes. Nevertheless, they can create artefacts.

From this case study, a clear understanding and illustrative examples were provided about dealing with gaps in data series. To attend the different purposes of the scientific or technical teams, the results and interpretations as a reference basis may help the researchers interested in a good practical use of interpolating methods. As a promising recipe, the content of this work could be used to investigate other approximation functions and their applications to other data series.

Acknowledgments Authors acknowledge the support and grants received from CAPES, CNPq (grants: 306038/2015 – 3, and 312246/2013 – 7), FAPESP (grant 2015/25624 – 2), and FINEP. We also thank NASA for the data set — OmniWeb service (<http://omniweb.gsfc.nasa.gov>) —, and Prof. Peter Frick for the original version of the code used on this work and scientific discussions during his visits to INPE.

Appendix

To allow work reproduction, a complete list of the geophysical events used in this study is shown in Table 4. Complementary, this information can be used for geophysicists in further studies. The events are related to the ones analysed in the work of [19]. Taking into account the geomagnetic disturbance on ground as an answer of the solar plasma-magnetosphere-ionosphere coupling, this work deals with the period of High-Intensity, Long-Duration, Continuous Auroral Electroject Activities (HILDCAAS), connected with the presence of interplanetary Alfvén wave trains in the interplanetary medium. The Auroral Electroject index, designated as AE, evaluates the geomagnetic disturbance level in the auroral regions established by magnetometer records collected on ground, as described in [7]. Relative to the Geocentric Solar Magnetospheric (GSM) coordinate frame, the north-south component, B_z , of the interplanetary magnetic field is used for the signal analysis. For each event, they identify the initial time (Start), the final time (End), and we verify the number of gaps according to the gap pattern presented on the time series. Corresponding to each of the patterns discussed in this work, the count of the gap intervals was done. The not-shown events are those whose data are not available in OMNIWeb service site³ from NASA, and the events marked with an asterisk (*) are those that do not have gaps in the edges.

³http://omniweb.gsfc.nasa.gov/ow_min.html

Table 4 Time series intervals and number of gaps on the B_z component of the interplanetary magnetic field

Event	Start	End	Number of gaps in Pattern			
			A	B	C	D
1	1981/04/20 09:47	1981/04/23 22:58	17	07	02	02
2	1982/01/21 23:43	1982/01/25 00:27	03	01	03	03
3	1982/02/17 06:09	1982/02/21 02:00	24	05	02	03
4	1982/02/23 10:11	1982/02/25 22:49	10	03	03	03
6	1982/08/25 00:59	1987/08/27 01:21	10	01	02	01
8	1983/03/18 15:57	1983/03/21 06:57	11	06	01	02
9	1983/03/31 08:06	1983/04/03 13:18	17	05	03	02
10	1983/04/05 23:55	1983/04/11 08:55	22	01	03	02
11	1983/06/17 11:44	1983/06/20 17:19	04	07	01	02
13	1983/08/23 09:00	1983/08/26 21:39	12	00	01	01
14	1983/08/29 09:11	1983/09/01 05:38	04	06	01	03
15	1983/12/05 02:39	1983/12/07 04:31	10	01	00	04
17	1983/12/30 03:49	1984/01/01 23:59	08	01	03	02
18	1984/05/28 07:22	1984/05/31 02:13	01	00	00	04
19	1984/06/18 08:06	1984/06/20 17:59	03	00	00	01
20	1984/07/16 18:28	1984/07/19 15:11	00	00	01	01
21	1984/08/28 05:34	1984/08/31 03:32	11	03	02	02
24	1984/12/15 20:03	1984/12/18 19:00	03	00	02	02
25	1984/12/28 06:34	1984/12/31 23:29	05	04	00	03
26	1985/06/06 11:11	1985/06/08 13:06	01	00	00	01
27	1985/06/25 06:45	1985/06/30 00:41	11	02	01	03
28	1985/07/03 22:59	1985/07/07 16:44	15	00	01	01
29	1986/01/27 02:35	1986/01/31 06:01	33	03	03	01
*30	1986/02/21 16:23	1986/02/25 22:18	36	02	00	04
*31	1986/05/30 17:34	1986/06/02 09:34	22	02	00	02
33	1986/08/28 23:24	1986/08/31 07:05	15	01	01	02
34	1986/12/22 13:14	1986/12/24 14:42	11	02	00	02
35	1987/08/30 15:24	1987/09/02 14:07	06	01	01	03
36	1987/09/13 20:58	1987/09/17 10:25	09	00	00	02
37	1987/10/13 05:18	1987/10/15 23:11	15	03	01	01
38	1987/10/26 23:30	1987/10/30 14:33	10	02	02	01
39	1988/03/27 15:18	1988/03/30 08:19	19	01	03	01
40	1990/02/28 02:02	1990/03/02 23:11	15	03	01	01
42	1991/06/01 19:33	1991/06/04 01:22	20	07	01	01
43	1991/07/18 11:26	1997/07/23 19:36	48	04	01	03
44	1991/08/31 03:06	1991/09/02 18:19	39	02	00	02
47	1992/09/06 12:10	1992/09/08 18:50	12	01	01	04
48	1992/10/27 23:05	1992/10/29 23:11	10	05	00	01
49	1992/12/07 20:40	1992/12/10 01:31	13	02	02	03
50	1993/01/01 22:02	1993/01/05 13:42	23	03	01	03
51	1993/04/20 01:41	1993/04/22 07:52	04	02	00	02
52	1993/06/23 18:51	1993/06/26 04:41	00	00	00	01
53	1993/11/04 20:58	1993/11/09 05:10	19	02	01	01
54	1993/12/16 09:24	1993/12/18 19:07	05	01	00	02
55	1994/01/11 15:19	1994/01/15 08:59	27	04	02	02
56	1994/01/15 11:39	1994/01/20 00:46	27	05	01	01
57	1994/02/07 01:39	1994/02/16 05:58	42	05	00	01
58	1994/03/07 23:24	1994/03/18 08:45	49	07	00	01

Table 4 (continued)

Event	Start	End	Number of gaps in Pattern			
			A	B	C	D
59	1994/04/04 08:15	1994/04/15 19:17	74	09	02	01
60	1994/05/14 20:47	1994/05/17 14:02	27	03	00	01
61	1994/07/15 19:41	1994/07/18 15:12	32	05	02	01
62	1994/09/08 15:29	1994/09/12 00:43	13	00	00	03
63	1994/10/09 23:45	1994/10/12 13:50	01	01	02	03
*64	1994/10/30 02:38	1994/11/02 22:53	00	00	00	02
*66	1995/01/02 14:13	1995/01/06 00:11	77	01	00	00
*67	1995/02/02 00:49	1995/02/04 20:29	49	05	00	00
*68	1995/02/02 00:49	1995/02/04 20:29	49	05	00	00
69	1995/05/30 02:53	1995/06/04 01:48	92	00	00	00
*70	1995/10/06 02:23	1995/10/08 22:59	14	00	00	00
*71	1993/03/12 02:04	1993/03/14 02:58	30	02	00	00
*72	1996/04/18 09:34	1996/04/21 05:01	22	01	01	00
*73	1996/08/28 03:54	1996/08/30 09:02	06	00	00	00
*74	1996/09/19 15:57	1996/09/22 18:27	61	00	00	00
*75	1998/04/24 17:11	1998/04/27 16:46	32	00	00	00
*76	1998/07/22 20:56	1998/07/25 13:32	49	03	00	00
*77	1999/03/30 06:32	1999/04/01 06:58	33	00	00	00
*78	1999/04/29 09:48	1999/05/03 19:35	36	00	00	00
*79	1999/08/31 15:30	1999/09/02 20:10	13	05	02	01
*80	1999/10/23 13:20	1999/10/25 19:08	14	00	00	00
*81	1999/12/03 09:59	1999/12/05 23:58	55	00	00	00
*82	1999/12/30 20:01	2000/01/03 04:04	100	02	00	00
*83	2000/01/27 18:06	2000/01/31 03:02	65	01	00	00
*84	2000/02/05 15:53	2000/02/08 05:26	06	00	00	00
*85	2000/02/24 02:42	2000/02/26 02:53	28	00	00	00
*86	2001/07/15 06:19	2000/07/17 06:50	58	00	00	00
*87	2002/07/22 01:35	2002/07/24 02:20	17	00	00	00
*88	2002/09/11 05:22	2002/09/13 13:16	24	00	00	00
*89	2002/11/29 12:05	2002/12/02 01:34	77	00	00	00
*90	2003/04/20 15:45	2003/04/23 02:01	79	00	00	00
*91	2003/04/24 05:06	2003/04/28 11:05	243	00	00	00
*92	2003/05/05 08:50	2003/05/09 16:59	70	01	00	00
*93	2003/05/13 04:31	2003/05/16 03:50	23	01	00	00
*94	2003/06/26 21:14	2003/06/30 22:16	60	00	00	00
*95	2003/07/03 08:47	2003/07/06 06:00	37	00	00	00
*96	2003/08/20 15:11	2003/08/24 15:43	45	00	00	00
*97	2003/09/15 21:02	2003/09/20 22:03	62	01	00	00
*98	2003/09/23 23:31	2003/09/26 02:36	45	01	01	00
*99	2003/10/15 03:28	2003/10/22 18:35	281	00	00	00
*100	2003/12/09 02:48	2003/12/16 04:02	45	00	00	00
*101	2004/01/02 08:24	2004/01/06 11:11	100	00	00	00
*102	2004/02/12 01:35	2004/02/15 11:36	41	00	00	00
*103	2004/09/15 19:49	2004/09/18 05:39	48	01	00	00
*104	2005/05/15 17:08	2005/05/18 16:03	44	00	00	00
*105	2005/08/05 22:19	2005/08/07 22:54	47	00	00	00
*106	2005/11/03 10:33	2005/11/05 11:58	43	00	00	00

Table 4 (continued)

Event	Start	End	Number of gaps in Pattern			
			A	B	C	D
*107	2006/03/18 05:25	2006/03/20 11:19	29	00	00	00
*108	2006/06/06 06:02	2006/06/10 06:28	48	00	00	00
*109	2006/10/13 15:17	2006/10/16 00:16	71	00	00	00
110	2006/10/28 14:15	2006/10/30 16:27	32	00	00	00
*111	2006/12/06 00:00	2006/12/08 21:49	55	02	00	00
*112	2007/01/29 14:02	2007/01/31 14:14	22	00	00	00
113	2007/02/27 15:31	2007/03/01 17:07	122	00	00	00
*114	2007/09/01 16:31	2007/09/03 17:10	60	00	00	00
115	2008/02/28 09:23	2008/03/01 23:42	52	01	00	00
*116	2011/04/30 18:04	2011/05/03 04:56	78	00	00	00
*117	2011/09/11 12:17	2011/09/13 12:42	74	00	00	00
*118	2012/05/08 21:22	2012/05/11 06:35	38	00	00	00
*119	2012/06/04 03:06	2012/06/06 06:10	61	00	00	00
*120	2012/06/29 21:08	2012/07/02 21:01	126	00	00	00

References

- J.P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, S.T. Ali, *Two-dimensional wavelets and their relatives* (Cambridge, Cambridge, 2008)
- W.S. Araujo, F.A.S. Souza, J.I.B. Brito, L.M. Lima. *Revista Brasileira de Geografia Física* **4**, 741 (2012)
- K. Atkinson, *An introduction to numerical analysis* (Jonh Wiley & Sons, New York, 1978)
- E. Bernardes, M.O. Domingues, O. Mendes, Transformadas integrais e suas aplicações em tecnologias espaciais. relatório final de projeto de iniciação científica, Maringá (2015)
- J. Büchner, C.T. Dum, M. Scholer, (Eds.), *Space Plasma Simulation* (Springer, New York, 2003)
- R.L. Burden, J.D. Faires, *Análise Numérica*. CENGAGE learning, São Paulo (2015)
- W.H. Campbell, *Introduction to Geomagnetic Fields* (Cambridge, Cambridge, 2003)
- M.O. Domingues, O. Mendes, J.E. Castilho, A. Pagamisse, *Introdução ao mundo das wavelets* (SBMAC, São Carlos, 2012)
- M.O. Domingues, O. Mendes, A.M. da Costa. *Adv. Space Res.* **35**(5), 831 (2005)
- M.O. Domingues, O. Mendes, M. Kaibara, V.E. Menconi. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **38**(5), 1 (2016)
- W.J. Emery, R.E. Thomson, *Data analysis methods in physical oceanography, Chapter 11: Smoothing with cubic splines* (Elsevier, Amsterdam, 2004)
- M. Farge. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24**, 395 (1992)
- E. Foufoula-Georgiou, P. Kumar, (Eds.) *Wavelets in Geophysics* (Academic Press, New York, 1994)
- P. Frick, S.L. Baliunas, D. Galyagin, D. Sokoloff, W. Soon. *Astrophys J.* **483**, 426 (1997)
- P. Frick, A. Grossmann, P. Tchamitchian. *J. Math. Phys.* **39**, 4091 (1998)
- W.D. Gonzalez, F.L. Guarnieri, A.L. Clua-Gonzalez, E. Echer, M.V. Alves, T. Ogino, B.T. Tsurutani. *Geophysical Monograph Series.* **167**, 175 (2013)
- P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet. *Geoexploration* **23**, 85 (1984)
- A. Grossmann, J. Morlet. *SIAM J. Math. Anal.* **15**, 723 (1984)
- R. Hajra, E. Echer, B.T. Tsurutani, W.D. Gonzalez. *J. Geophys. Res. Space.* **118**, 5626 (2013)
- B.B. Hubbard, *The World According to Wavelets: The Story of a Mathematical Technique in the Making* (A K Peters/CRC Press, Massachusetts, 1998)
- M.G. Kivelson, C.T. Russell, (eds.), *Introduction to Space Physics* (Cambridge, New York, 1996)
- L.A. Magrini, M.O. Domingues, O. Mendes, Análise tempo-escala de séries temporais de geofísica espacial com lacunas: estudo de caso. in *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, (2016)
- O. Mendes, A origem interplanetária e o desenvolvimento da fase principal das tempestades geomagnéticas moderadas (1978-1979). Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE-5445-TDI/491, São José dos Campos (1992)
- O. Mendes, M.O. Domingues, A.M. da Costa. *Adv. Space. Res.* **35**(5), 812 (2005)
- Y. Meyer, (Ed.), *Wavelets and applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1992)
- G. Micula, S. Micula, *Handbook of splines, Chapter 11 Smoothing with cubic splines* (Springer Sciences-Business Media, Dordrecht, 1999)
- J. Morlet, Sampling Theory and wave propagation. Issues in Acoustic Signal - Image Processing and Recognition NATO ASI Series. **1**, 233 (1983)
- D.B. Percival, A.T. Walden, *Wavelet methods for time series analysis* (Cambridge, New York, 2000)
- D.S.G. Pollock, Vol. I, *A Handbook of Time-series Analysis Signal Processing and Dynamics* (Academic, San Diego, 1999)
- M.J.D. Powell, *Approximation theory and methods* (Cambridge, New York, 1981)
- M.B. Ruskai, G. Beylkin, R. Coifamn, I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, L. Raphael, (Eds.), *Wavelets and their applications* (Jones and Bartlett, Boston, 1992)
- L.R. Scott, *Numerical Analysis* (Princeton University, New Jersey, 2011)

Análise tempoescala de séries temporais de geofísica espacial com lacunas: estudo de caso

Luciano Aparecido Magrini¹

Programa de Pós Graduação em Computação Aplicada

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFSP

Margarete Oliveira Domingues²

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - INPE

Odim Mendes Junior³

Divisão de Geofísica Espacial - INPE

Resumo. Séries temporais que não estejam regularmente distribuídas ao longo do tempo não podem ser tratadas pela análise espectral padrão. Nestes casos, é prática comum usar algum método interpolatório para estimar os valores nas lacunas e na sequência fazer a análise tempoescala ou, como alternativa, aplicar uma técnica *wavelet* adaptada e desenvolvida especialmente para estes casos. Neste trabalho, utilizando uma série temporal típica de dados medidos em satélites para aplicações da Geofísica Espacial e a construção de uma série sintética derivada para testes analisam-se as alterações que o uso da interpolação e da técnica *wavelet* adaptada introduzem na energia calculada do sinal e no comportamento do escalograma e do espectro global *wavelet*. Os resultados são bastante esclarecedores dos efeitos das técnicas de tratamento.

Palavras-chave. Séries temporais. *Wavelet* adaptativa. Interpolação. Lacunas em dados.

1 Introdução

A análise de *wavelets* tem sido amplamente empregada por pesquisadores ligados a diversas áreas que possuem interesse em extrair informações relevantes de séries temporais. Neste caso, uma das poucas exigências é de que as séries temporais sejam regularmente distribuídas no tempo, o que principalmente no caso das ciências espaciais pode ser um problema devido a limitações naturalmente impostas, como por exemplo, as condições atmosféricas e de clima espacial, funcionamento dos equipamentos de medição e capacidade de armazenamento e transmissão dos dados. Tais limitações podem gerar séries temporais com dados irregularmente distribuídos no tempo, ou seja, séries que apresentam falhas. As regiões com falha causam dificuldades para a análise tempoescala, porque nessas regiões ocorre a perda da condição de admissibilidade da base *wavelet* escolhida.

¹magrini@ifsp.edu.br

²margarete.domingues@inpe.br

³odim.mendes@inpe.br

Um possível tratamento nesses casos consiste em aplicar algum método interpolatório para estimar numericamente os registros nas regiões que apresentam lacunas, sendo comumente empregados *splines* cúbicos neste processo. Alternativamente, *Frick et al* [1998] propuseram a introdução de uma família de *wavelets* adaptadas, baseadas na *wavelet* de Morlet e caracterizada pela introdução de um fator de correção a ser computado para cada tempo e escala considerados de modo a restaurar a condição de admissibilidade nas regiões de lacuna.

Neste trabalho, apresenta-se um exemplo sintético construído de modo a reproduzir um comportamento bastante observado nas séries de Geofísica Espacial. O objetivo é analisar séries temporais com lacunas para investigar as variações provocadas no escalograma e no espectro global *wavelet* quando se estuda o desempenho, no sentido de reprodução tempoescala, dos dados tratados por três técnicas. A primeira técnica é a do método interpolatório por *splines* cúbicos [1, 6], escolhida por ser de uso habitual. A segunda é a do método interpolatório dos polinômios cúbicos de Hermite [1, 6], que permitirá uma comparação de desempenho com relação aos *splines*. A terceira técnica diz respeito a *wavelets* adaptadas às regiões com falhas [2–4], sendo que aqui a *wavelet* de Morlet é usada como função base para as análises espectrais apresentadas.

2 Metodologia

Fazendo uso de uma série temporal de dados sem falhas derivou-se um exemplo sintético com intervalos de falhas artificialmente introduzidos. O exemplo foi tratado com interpolações via *splines* cúbicos e via polinômios cúbicos de Hermite, aplicando na sequência a transformada *wavelet* contínua. Fez-se também o tratamento desta série com falhas com a transformada *wavelet* contínua adaptativa. Os resultados de análise espectral obtidos foram comparados com a análise espectral da série sem falhas, de forma que fosse possível comparar as técnicas de tratamento empregadas. A seguir estão descritas, resumidamente, as três técnicas.

Polinômios Cúbicos de Hermite A interpolação de Hermite permite aproximar um sinal f por um polinômio H (chamado polinômio de Hermite) que coincide com f nos pontos conhecidos, exigindo além disso que as derivadas também coincidam nestes mesmos pontos. Suponha f conhecido em $n + 1$ pontos t_0, t_1, \dots, t_n com $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$. Por construção, para se obter H impõe-se

$$H(t_i) = f(t_i), i = 0, 1, \dots, n$$

$$H'(t_i) = f'(t_i), i = 0, 1, \dots, n$$

que é equivalente a um sistema com $2n + 2$ equações; tal sistema conduz a um polinômio interpolador de grau menor ou igual a $2n + 1$, conforme [1].

Nota-se que o grau de H tende a ser relativamente alto quando n é grande, e isto, pode conduzir a erros causados pelo excessivo número de oscilações deste polinômio; para contornar tal dificuldade, se forem conhecidos os valores de f e f' nos pontos $t_0 \leq t_1 \leq$

... $\leq t_n$ faz-se a construção de um polinômio cúbico de Hermite em cada subintervalo $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ de modo a se obter uma função contínua (por partes) no intervalo $[t_0, t_n]$.

A construção do polinômio H pode ser feita por meio da interpolação por diferenças divididas de Newton para o polinômio de Lagrange e a demonstração deste fato pode ser encontrada em [6]. Em termos de diferenças divididas o polinômio cúbico de Hermite no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ se escreve

$$H_3(x) = f(t_k) + f[t_k, t_k](t - t_k) + f[t_k, t_k, t_{k+1}](t - t_k)^2 + f[t_k, t_k, t_{k+1}, t_{k+1}](t - t_k)^2(t - t_{k+1}).$$

Splines Cúbicos Menos restritiva que a interpolação de Hermite, a interpolação por *splines* cúbicos não exige que as derivadas da função interpoladora S coincidam com as derivadas do sinal aproximado em ponto algum; esta técnica assegura, contudo, que o sinal S seja continuamente diferenciável e tenha derivada segunda contínua [6].

Considere o sinal f definido no intervalo $[t_0, t_n]$ e conhecido no conjunto de pontos t_0, t_1, \dots, t_n . Define-se um *spline* cúbico S para f como a função que satisfaz as seguintes condições:

1. $S(t)$ tem grau três (denotado $S_j(t)$ no intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \dots, n - 1$);
2. $S_j(t_j) = f(t_j)$ e $S_j(t_{j+1}) = f(t_{j+1})$ para $j = 0, 1, \dots, n - 1$;
3. $S_{j+1}(t_{j+1}) = S_j(t_{j+1})$ para $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
4. $S'_{j+1}(t_{j+1}) = S'_j(t_{j+1})$ para $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
5. $S''_{j+1}(t_{j+1}) = S''_j(t_{j+1})$ para $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
6. $S'''(t_0) = S'''(t_n) = 0$

CWT Adaptada A transformada *wavelet* contínua (CWT) de um sinal f é definida como

$$\psi(a, b) = C_\psi^{-1/2} a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} f(t) dt,$$

em que C_ψ é uma constante, a é um número real positivo e $\bar{\psi}$ é o conjugado da função ψ que satisfaz as condições de energia unitária e de admissibilidade. A primeira condição garante a existência de um suporte compacto para a função ψ fora do qual acontece uma rápida queda em sua amplitude e a segunda garante que ψ é uma função de média zero com caráter oscilatório e inversível. *Frick et al* [1998] apresentaram uma técnica *wavelet*, conhecida como *wavelet gapped* que adapta a função *wavelet* para o caso em que f apresenta falhas; para tal, é necessário construir um sinal auxiliar $f_{aux} = f(t)G(t)$ definido pelo produto de f por

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(t) \text{ é corretamente conhecido} \\ 0, & \text{se } f(t) \text{ é uma falha ou está fora da janela de observação} \end{cases}$$

A CWT deste sinal auxiliar é $\psi(a, b) = C_\psi^{-1/2} a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{aux}\left(\frac{t-b}{a}\right)} f_{aux}(t) dt$, em que se define $\psi_{aux}\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t)$, exigindo deste modo que a função G seja "absorvida" pela função de base wavelet.

Durante a análise nas regiões com falha emprega-se ψ_{aux} ao invés de ψ ; deste modo, o problema de se analisar o sinal f com falhas equivale ao problema de se encontrar uma *wavelet* adaptada $\tilde{\psi}$ que substitua ψ_{aux} e que garanta a validade da condição de admissibilidade. A construção de $\tilde{\psi}$, baseada na *wavelet* de Morlet, pressupõe ser possível escrever $\psi(t) = h(t)\Phi(t)$, em que h e Φ são responsáveis pela parte oscilatória e pelo envelope de ψ , respectivamente. De acordo com [3], a função $\tilde{\psi}$ é dada explicitamente por

$$\tilde{\psi}(t, b, a) = \left[h\left(\frac{t-b}{a}\right) - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t) dt} \right] \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right) G(t),$$

3 Dados

Para demonstrar a importância prática dos cuidados na utilização de métodos de tratamentos de dados escolheu-se, para a série temporal em análise, os dados do meio interplanetário relacionados a um importante efeito geofísico da interação do vento solar com a atmosfera da Terra: o evento geofísico HILDCAA (*High-intensity, long-duration, continuous auroral electrojet activity*). Foram analisadas 120 séries temporais referentes à componente B_z , de direção norte-sul, do campo magnético interplanetário no período de 1975 a 2012 [5]. Os dados foram obtidos do site OMNIWeb⁴ usando a resolução de um minuto. Devido a propagação do sinal do campo magnético da posição do satélite em que é medido até o seu efeito na interação com a atmosfera magnetizada da Terra, considerou-se um tempo de deslocamento de 30 e 90 minutos com relação aos horários de início e término dos eventos HILDCAAs, respectivamente. Isso definiu o intervalo da série a ser analisada.

Com o objetivo de analisar o desempenho dos *splines* cúbicos, dos polinômios cúbicos de Hermite e das *wavelets* adaptadas no tratamento das lacunas, bem como as alterações que o uso destas técnicas provocam no espectro global, gerou-se um exemplo sintético por meio da introdução artificial de lacunas na série temporal correspondente ao evento HILDCAA ocorrido entre 28/08/1996 e 30/08/1996, por estar livre de falhas. As falhas introduzidas reproduzem um dos padrões observados no conjunto das séries, pois em aproximadamente 53,3% delas encontram-se falhas do mesmo tipo (cujo comprimento é superior a 10% do comprimento do sinal). Foram introduzidas quatro lacunas de comprimentos 14,60%, 12,81%, 12,81% e 11,28% nos intervalos [5, 461], [1000, 1400], [2200, 2600] e [2747, 3099] respectivamente. Na Figura 1, vê-se a componente magnética B_z referente ao evento HILDCAA e a série sintética, com falha, dela derivada.

⁴<http://omniweb.gsfc.nasa.gov/>

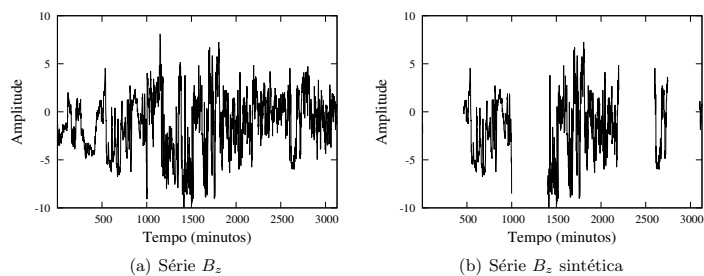


Figura 1: Componente magnética B_z do plasma solar referente a evento HILDCAA e a série derivada sintética com falhas.

4 Resultados e discussões

Na Figura 2 é possível ver os escalogramas do evento original HILDCAA e do caso sintético tratado com as técnicas anteriormente descritas.

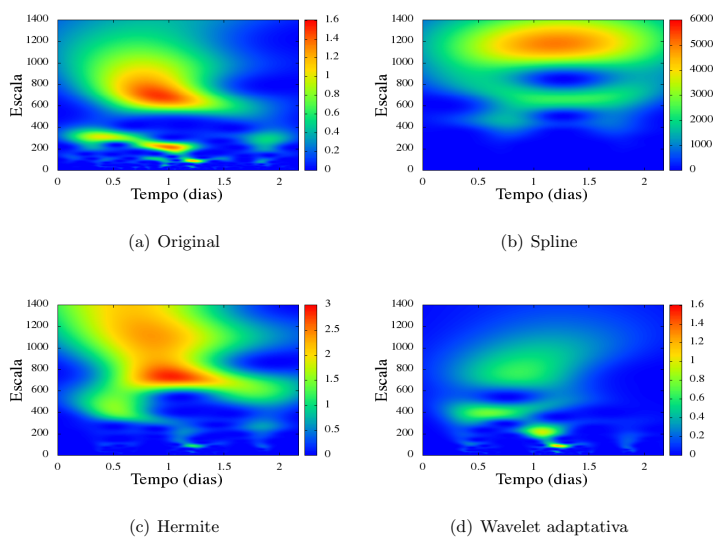


Figura 2: Escalogramas de energia: sinal original (a) e caso sintético: spline (b), Hermite (c) e *wavelet* adaptativa (d).

A interpretação dos escalogramas mostra que dentre os métodos empregados para o tratamento das falhas, somente o baseado na *wavelet* adaptada foi capaz de preservar as estruturas de energia presentes no sinal original, ainda que seja possível notar uma pequena perda da energia calculada no contexto do Teorema de Parseval⁵. Também se nota que o uso de *splines* cúbicos foi responsável por superestimar a energia em 3750 vezes. É possível verificar o mesmo no caso em que o tratamento se deu por polinômios cúbicos de Hermite, ainda que em menor proporção, pois neste caso a energia foi superestimada em 1,875 vezes. De forma importante, observa-se que nenhum dos dois métodos interpolatórios preservou as estruturas de energia do sinal original.

A análise do espectro global (Figura 3) indica que em altas frequências os resultados apresentados pela *wavelet* adaptada e pelo uso dos polinômios de Hermite são bastante próximos dos valores calculados para o sinal original; em baixas frequências, contudo, verifica-se que o erro apresentado pelo uso dos dois tratamentos tende a aumentar. Em consonância com o verificado no escalograma, o espectro *wavelet* obtido via uso de *splines* apresenta-se superestimado com relação ao original, sendo maior o erro em baixas frequências.

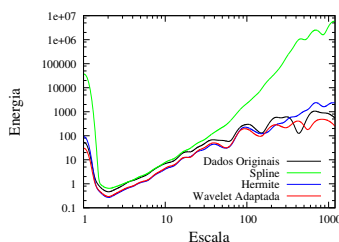


Figura 3: Espectros globais *wavelet*: Sinal original e casos de estudo.

Identificam-se no espectro global do sinal original cinco picos de energia que não foram, na totalidade, corretamente identificados pelas técnicas de tratamento estudadas. A *wavelet* adaptada foi capaz de identificar corretamente três picos de energia, apresentando dois falsos positivos; o tratamento com *splines* não permitiu identificar nenhum dos picos exatos e apresentou quatro falsos positivos; e o tratamento com polinômios cúbicos de Hermite identificou três dos picos e apresentou apenas um falso positivo. Em outras palavras, no caso da identificação dos picos de energia, os resultados apresentados pela *wavelet* adaptada e os resultados apresentados pelo uso da interpolação de Hermite estão bem próximos. Contudo, as estruturas identificadas pela *wavelet* estão melhor caracterizadas que as por Hermite.

⁵O Teorema de Parseval implica na conservação da energia nos espaços físico e de Fourier. Em termos matemáticos, tem-se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi$, onde f e F indicam, respectivamente, um sinal qualquer e sua Transformada de Fourier.

5 Conclusão

A qualidade dos sinais disponíveis para análise espectral apresenta grande importância. Quando, por alguma razão, há restrições a essa qualidade, os tratamentos a que são submetidos os dados podem criar artefatos nas análises. A análise local da energia de um sinal que apresente falhas similares às presentes no caso sintético desenvolvido neste trabalho mostrou ser mais adequadamente tratada por meio do método da *wavelet* adaptada. Para a análise global, os resultados indicam que em altas frequências o espectro é aproximado de modo satisfatório pela *wavelet* adaptada e pelo uso dos polinômios de Hermite. A interpolação por *splines* não constitui uma boa abordagem para o tratamento das falhas do tipo apresentado, pois provoca mudanças bastante significativas na energia local e global. Este tipo de estudo revela-se de grande importância para as aplicações espaciais, sobretudo para as análises feitas na Geofísica Espacial.

Agradecimentos

Agradecemos os apoios e auxílios recebidos do CNPq (processos 306038/2015-3 e 312246/2013-7), da CAPES e também à NASA pelos dados disponibilizados via OMNIWeb (<http://omniweb.gsfc.nasa.gov>).

Referências

- [1] R. L. Burden, J. D. Faires. *Análise Numérica*. CENGAGE Learning, São Paulo, 2015.
- [2] J. E. Castilho, M. O. Domingues, O. Mendes, A. Pagamisse. *Introdução ao mundo das wavelets*. Sociedade Brasileira de matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, 2012.
- [3] P. Frick, A. Grossmann and P. Tchamitchian. Wavelet analysis of signals with gaps. In *Journal of Mathematical Physics*, 39:4091-4107, 1998. DOI: 10.1063/1.532485.
- [4] P. Frick, S. L. Baliunas, D. Galyagin, D. Sokoloff and W. Soon. Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations. In *The Astrophysical Journal*, 483:426-434, 1997.
- [5] R. Hajra, E. Echer, B. T. Tsurutani, W. D. Gonzalez. Solar cycle dependence of High-Intensity Long-Duration Continuous AE Activity (HILDCAA) events, relativistic electron predictors?. In *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 118:5626-5638, 2013. DOI: 10.1002/jgra.50530.
- [6] M. J. D. Powell. *Approximation theory and methods*. University Press, Cambridge, 1981.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Por que algumas órbitas periódicas são de difícil reprodução numérica via integrações numéricas convencionais?

Luciano Ap. Magrini¹

Programa de Pós Graduação em Computação Aplicada

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFSP (Câmpus São Paulo)

Juliana Cestari Lacerda²

Programa de Pós Graduação em Computação Aplicada

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Margarete O. Domingues e Solon V. de Carvalho³

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LabAC / INPE

Elbert E. N. Macau⁴

Universidade Federal de São Paulo - Unifesp

1 Introdução

Para o estudo do regime periódico em sistemas dinâmicos é um problema relevante conhecer e caracterizar as órbitas periódicas existentes cuja computação via métodos de integração numéricos convencionais (como, por exemplo, métodos Runge-Kutta) pode exibir períodos distintos para órbitas periódicas iguais. Esta aparente contradição é explicada pela natureza do período a ser reproduzido numericamente: quando T é racional periódico com período suficientemente grande ou irracional não se consegue, por menor que seja o passo de integração h usado, reproduzi-lo numericamente. Neste trabalho, considerando um estudo de caso baseado no Sistema de Rossler [3] definido pelas equações $x'(t) = -y - z$; $y'(t) = x + ay$ e $z'(t) = b + z(x - c)$ e para o qual são bem conhecidas as caracterizações do regime dinâmico periódico em termos da família $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$, tal fato é ilustrado.

2 Metodologia

O sistema de Rossler foi considerado com $\mathcal{F} = \{0.1, 0.1, 4\}$ responsável pela exibição de dinâmica periódica [1]. Tal sistema foi integrado considerando métodos Runge-Kutta

¹magrini@ifsp.edu.br

²juliana.lacerda@inpe.br

³margarete.domingues@inpe.br, solon@lac.inpe.br

⁴elbert.macau@inpe.br

2

de quarta e quinta ordens (RK4 e RK5) com passo fixo de acordo com o descrito em [2] e as séries unidimensionais relativas à variável z deste atrator foram analisadas quanto ao período exibido, caracterizado numericamente neste trabalho como o tempo T decorrido entre dois máximos locais sucessivos.

3 Resultados e Conclusão

O uso de passos de integração cada vez menores não é suficiente para atingir exatamente o período existente (cf. Tabela 1). As séries unidimensionais geradas exibem *pseudoperíodos* de comprimentos bastante próximos mas ainda assim distintos; além disso, a análise dos períodos médios (\bar{T}) calculados sugere que T deve ser (i) um racional com parte decimal cujo período é suficiente longo ou (ii) um número irracional.

Tabela 1: Períodos T calculados para Rossler com parâmetros $a = b = 0.1$ e $c = 4$.

h	RK4			RK5		
	Análise dos Períodos		\bar{T}	Análise dos Períodos		\bar{T}
	# Períodos	Comprimento		# Períodos	Comprimento	
0,01	71	6,000000	5,998658	70	6,010000	6,008536
	11	5,990000		12	6,000000	
0,005	59	6,000000	5,998597	59	6,005000	6,003595
	53	5,995000		23	6,000000	
0,001	50	5,999000	5,998609	49	6,000000	5,999597
	32	5,998000		33	5,999000	
0,0005	65	5,998500	5,998603	64	5,999000	5,999109
	17	5,999900		18	5,999500	
0,0001	77	5,998600	5,998606	76	5,998700	5,998707
	05	5,998700		06	5,998800	
0,00005	70	5,998600	5,998607	71	5,998650	5,998656
	12	5,998650		11	5,998700	
0,00001	58	5,998610	5,998607	58	5,998620	5,998617
	24	5,998600		24	5,998610	

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro das agências CAPES (001) e CNPq.

Referências

- [1] K. T. Alligood, T. Sauer e J. A. Yorke. Chaos: an introduction to dynamical systems. Sgringer, London, 2011.
- [2] R. Burden e J. D. Faires. Análise Numérica. CENGAGE Learning, São Paulo, 2015.
- [3] O. E. Rossler. An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, 57:397–398, 1976. DOI:10.1016/0375-9601(76)90101-8.

Identificação de períodos em sistema com múltiplas escalas de tempo via transformada *wavelet* contínua complexa

Luciano Aparecido Magrini¹

Programa de Pós Graduação em Computação Aplicada

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFSP

Maria Teodora Ferreira²

Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP

Faculdade Bilac

Margarete O. Domingues e Elbert E. N. Macau³

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - INPE

1 Objetivos

Demonstrar que o comportamento periódico em sistemas dinâmicos com múltiplas escalas de tempo, particularmente diante da ocorrência de *burstings*, pode ser corretamente identificado pelo uso da transformada *wavelet* contínua complexa.

2 Dados e Metodologia

O sistema considerado constitui-se de dois sistemas de Lorentz caóticos acoplados com um parâmetro de controle responsável por introduzir escalas de tempo distintas [2] :

$$x' = \sigma(y - x) - c(aX + k); y' = rx - y - xz + c(aY + k); z' = xy - bz + c_z Z;$$

$$X' = \epsilon\sigma(Y - X) - c(x + k); Y' = \epsilon(rx - Y - XZ) + c(y + k); Z' = \epsilon(aXY - bZ) - c_z z.$$

As variáveis minúsculas e maiúsculas indicam os sistemas de dinâmica rápida e lenta cujo fator escala de tempo é a constante $\epsilon = 0,1$. A força de acoplamento $c = 0.8$ torna o sinal periódico apesar do emprego das constantes $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ [2], típicas do comportamento caótico. Considerou-se ainda $a = 1$, $k = 0$ e $c_z = c$. A integração se fez por Runge-Kutta de 4a. ordem com passo $\Delta t = 0.01$ e condição inicial $(0, 01, 0, 01, 0, 01, 0, 02, 0, 02, 0, 02)^T$.

¹magrini@ifsp.edu.br

²mteodoraf25@gmail.com

³{margarete.domingues,elbert.macau}@inpe.br

2

Nas variáveis x e y do sistema rápido, que apresentam *burstings*, aplicou-se a transformada *wavelet* contínua (CWT), com a *wavelet* complexa de Morlet $\psi(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \exp(5it)$. Detalhes sobre esta função *wavelet* e sobre a CWT podem ser encontrados em [1] e referências lá citadas. A análise do espectro global permitiu identificar a escala s_M de maior energia, a partir dos coeficientes *wavelet* complexos associados a essa escala calculou-se a fase ϕ_M . Utilizando essa técnica de obtenção de fase, os períodos existentes na série temporal, cf. Fig. 2 foram identificados corretamente. Para efeitos de comparação, incluiu-se também a fase ϕ_H , calculada via Transformada de Hilbert; neste caso, apesar da correta identificação dos períodos existentes, a fase calculada apresenta variadas flutuações e ausência de crescimento linear, conforme esperado no caso de séries periódicas.

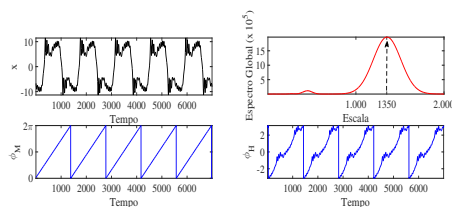


Figura 1: A escala $s_M = 1350$ é a de maior energia e foi usada para o cálculo da fase ϕ_M .

3 Conclusão e Trabalhos Futuros

Com o uso da CWT identificou-se corretamente os períodos existentes em séries com ocorrência de *burstings*. Essa metodologia se mostrou superior a metodologia de Hilbert para este caso, uma vez que o incremento da fase calculada em cada período aconteceu de modo linear. Como possibilidade de trabalhos futuros citamos a aplicação desta metodologia em dados reais relativos a sistemas biológicos e/ou químicos.

Agradecimentos Os autores agradecem o suporte financeiro das agencias CAPES, CNPq (proj. 306038/2015 – 3) e FAPESP (proj. 2015/25624 – 2).

Referências

[1] M. O. Domingues, O. Mendes, M. K. Kaibara, V. E. Menconi and E. Bernardes. Explorando a transformada *wavelet* contínua, *Revista Brasileira do Ensino de Física*, 38:1-20, 2016.

[2] S. Soldatenko and D. Chichkine. Basic properties of slow-fast nonlinear dynamical system in the atmosphere-ocean aggregate modeling, *WSEAS Transactions on Systems*, 13:757-766, 2014.

APÊNDICE F - DEMONSTRAÇÕES DE TEOREMAS

Neste Apêndice apresenta-se as demonstrações dos principais aspectos teóricos apresentados nos Capítulos (2) e (3) como Teoremas, Lemas, Proposições e Corolários.

F.1 Capítulo 2

Lema 2.1

Para o item (b) recomenda-se a prova descrita em (DAUBECHIES, 1992). Apresentar-se-a apenas a demonstração para o item (a). De modo direto, basta computar a Transformada de Fourier para a função $\psi(t)$ para a qual a condição (I) da Definição 2.1 é satisfeita. Tem-se:

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (\text{F.1})$$

para todo ω . Em particular, tomando $\omega = 0$ na Equação F.1 obtém-se $\hat{\psi}(0) = 0$.

Teorema 2.1

Basta mostrar que 2.6 é o único máximo local para a função $\psi(\omega; \beta, \gamma)$. Para isso deve-se provar que (a) $\omega_{\beta, \gamma}$ é o único ponto crítico para $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ e que (b) a derivada segunda de $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ é negativa para $\omega_{\beta, \gamma}$.

Para demonstrar (a), como a derivada da função $U(\omega)$ é igual a 1 (DAVIES, 2012), pela regra do produto para a derivação tem-se

$$\frac{d\psi(\omega; \beta, \gamma)}{d\omega} = \kappa \left(\frac{d\psi}{d\omega}(\omega^\beta) \right) \exp^{-\omega^\gamma} + \omega^\beta \left(\frac{d\psi}{d\omega}(e^{-\omega^\gamma}) \right), \quad (\text{F.2})$$

ou seja,

$$\frac{d\psi(\omega; \beta, \gamma)}{d\omega} = \kappa \left(\beta \omega^{\beta-1} e^{-\omega^\gamma} - \omega^\beta e^{-\omega^\gamma} \gamma \omega^{\gamma-1} \right). \quad (\text{F.3})$$

Sendo a exponencial $e^{-\omega^\gamma}$ e $\omega^{\beta-1}$ fatores comuns para os termos da Equação F.3 segue que

$$\frac{d\psi}{d\omega} \psi(\omega) = k e^{-\omega^\gamma} \omega^{\beta-1} [\beta - \gamma \omega^\gamma], \quad (\text{F.4})$$

e, considerando que $\kappa e^{-\omega^\gamma} \omega^{\beta-1}$ nunca se anula, deve-se ter

$$\beta - \gamma \omega^\gamma = 0 \implies \omega(\beta, \gamma) = (\beta/\gamma)^{(1/\gamma)},$$

sendo este o único ponto crítico para a *wavelet* de Morse.

Para demonstrar **(b)**, computando-se a derivada segunda de $\psi(\omega; \beta, \gamma)$ tem-se

$$\frac{d^2 \psi(\omega; \beta, \gamma)}{d\omega^2} \psi(\omega) = \frac{d\psi}{d\omega} (\kappa e^{-\omega^\gamma}) [\beta - \gamma\omega^\gamma] + \kappa e^{-\omega^\gamma} \frac{d\psi}{d\omega} [\beta - \gamma\omega^\gamma], \quad (\text{F.5})$$

que se reescreve como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi(\omega; \beta, \gamma)}{d\omega^2} \psi(\omega) &= -\kappa e^{-\omega^\gamma} \gamma\omega^{\gamma-1} (\beta - \gamma\omega^\gamma) + \kappa \gamma^{-\omega^\gamma} (-\gamma^2 \omega^{\gamma-1}) \\ &= \kappa e^{-\omega^\gamma} (\gamma\omega^\gamma - \beta)(\gamma\omega^{\gamma-1}) - \kappa \gamma^{-\omega^\gamma} (\gamma^2 \omega^{\gamma-1}) \\ &= (\kappa e^{-\omega^\gamma} \gamma\omega^{\gamma-1}) (\gamma\omega^\gamma - \gamma\omega^{\gamma-1} - \beta) \\ &= (\kappa e^{-\omega^\gamma} \gamma\omega^{\gamma-1}) (\gamma\omega^{\gamma-1}(\omega - 1) - \beta) \\ &= f(\omega)g(\omega), \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

em que $f(\omega) = \kappa e^{-\omega^\gamma} \gamma\omega^{\gamma-1}$ and $g(\omega) = \gamma\omega^{\gamma-1}(\omega - 1) - \beta$.

Como $f(\omega)$ é positiva para todo ω basta mostrar que $g(\omega) < 0$ em $\omega = \omega(\beta, \gamma)$.

De fato,

$$\begin{aligned} g(\omega(\beta, \gamma)) &= \gamma \left(\left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma-1} \left(\left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) - \beta \\ &= \gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \beta \\ &= \gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) - \gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \beta = \beta - \gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \beta \\ &= -\gamma \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < 0. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Lema 2.2

Partindo-se do primeiro membro da Equação 2.10 mostrar-se-á a validade do Lema ao obter-se o segundo membro. Nesta demonstração também escrever-se-á $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt$ ao invés de $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ para tornar as expressões mais sucintas.

Seja M o primeiro membro da Equação 2.10. De acordo com a Equação 2.9 pode-se

reescrevê-lo como

$$M = a \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \exp(-i\tau\omega) d\omega \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(\omega)} \hat{\psi}(a\omega) \exp(i\tau\omega) d\omega \right) \frac{da}{a^2} d\tau, \quad (\text{F.8})$$

Os conteúdos do primeiro e do segundo parênteses da Equação F.8 podem ser lidos como a transformada de Fourier de $F(\omega; a)$ e o conjugado da transformada de Fourier de $G(\omega; a)$, ambas multiplicadas por $\sqrt{2\pi}$, e vistas como funções da variável ω mas também dependentes do parâmetro real a , sendo definidas como

$$F(\omega; a) = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \quad \text{e} \quad \overline{G(\omega; a)} = \overline{\hat{g}(\omega)} \hat{\psi}(a\omega), \quad (\text{F.9})$$

de modo que a Equação F.8 assume a forma

$$M = 2\pi a \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} |\psi(\omega a)|^2 \frac{da}{a^2} d\omega. \quad (\text{F.10})$$

Invertendo a ordem de integração, uma vez que a é uma constante e as funções $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$ são contínuas com derivadas primeiras também contínuas, tem-se

$$M = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(\omega a)|^2}{a} da \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \quad (\text{F.11})$$

Como

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(\omega a)|^2}{a} da$$

exprime a condição de admissibilidade para a *wavelet* $\psi(t)$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega$$

é o produto interno usual em $L^2(\Omega)$, decorre da Equação F.1 e do Teorema A.4 que

$$M = C_{\psi} \langle f(t), g(t) \rangle, \quad (\text{F.12})$$

o que conclui a demonstração.

Teorema 2.2

Seja $f(t) \in L^2(\Omega)$ a função definida no enunciado e considera-se uma função $g(t)$ não nula para a qual valem as mesmas hipóteses impostas para a função $f(t)$. Pelo

Lema 2.2 e pela Equação A.4 que define o produto interno em $L^2(\Omega)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \int_0^\infty f(t) \bar{g}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \psi_{a,\tau}(t) \bar{g}(t) dt d\tau \frac{da}{a^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Sendo $g(t)$ não nula e considerando a unicidade do produto interno, da Equação F.13 obtém-se

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \psi_{a,\tau}(t) d\tau \frac{da}{a^2}. \quad (\text{F.14})$$

Teorema 2.3

Considerando-se o Lema 2.2 e fazendo $g(t) = f(t)$ na Equação 2.10, tem-se

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{W}_f^\psi(a, \tau) \overline{\mathbb{W}_f^\psi(a, \tau)} \frac{da}{a^2} d\tau = C_\psi \langle f(t), f(t) \rangle, \quad (\text{F.15})$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbb{E}(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau. \quad (\text{F.16})$$

Proposição 2.2

Deseja-se que a *gapped wavelet* $\tilde{\psi}_{a,\tau}(t)$ seja admissível, isto é, que ela tenha a propriedade de média nula através da correção numérica em sua parte oscilatória $h_{a,\tau}$. Considerando as Equações 2.20, 2.21 e 2.22, deve-se ter:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}_{a,\tau}(t) - C(a, \tau) \zeta_{a,\tau}(t) dt &= \int_{-\infty}^\infty \zeta_{a,\tau}(t) h_{a,\tau}(t) - C(a, \tau) \zeta_{a,\tau}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \zeta_{a,\tau}(t) h_{a,\tau}(t) dt - C(a, \tau) \int_{-\infty}^\infty \zeta_{a,\tau}(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Isolando $C(a, \tau)$ na Equação F.17 e usando 2.20 com a suposição adicional de que $\zeta_{a,\tau}(t)$ é não nula no suporte K onde a *wavelet* está definida, segue o resultado:

$$C(a, \tau) = \frac{\int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}_{a,\tau}(t) dt}{\int_{-\infty}^\infty \zeta_{a,\tau}(t) dt}. \quad (\text{F.18})$$

F.2 Capítulo 3

Proposição 3.1

As propriedades *d*), *e*) e *f*) da Definição 3.2 implicam que as funções do conjunto $B = \{\phi_k^j(t) = \phi(2^j t - k)_{j,k \in \mathbb{Z},}\}$ formam uma base de Riesz para o subespaço V^j sendo $\phi(t)$ um múltiplo escalar de $\phi_k^j(t)$; particularmente isto implica que a medida de energia em ambas, no sentido de Parseval, é a mesma. Considerando $\alpha \in \mathbb{R}$ como a constante de proporcionalidade entre $\phi(t)$ e $\phi_{j,k}(t)$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t)} dt = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k) \overline{\phi(2^j t - k)} dt. \quad (\text{F.19})$$

Fazendo a mudança de variável $u = 2^j t - k$ segue da Equação F.19 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t)} dt = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \overline{\phi(u)} 2^{-j} du,$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\phi(t)} dt = \frac{\alpha^2}{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \overline{\phi(u)} du$$

de onde $\alpha = 2^{j/2}$ estabelecendo a Equação 3.8.

Proposição 3.2

Apresentar-se-á a prova para o item *a*) uma vez que *b*) tem demonstração análoga. A Equação 3.11 implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \sqrt{2} \sum_k h(k) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) dt.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = 2t - k$ nesta igualdade, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \sqrt{2} \sum_k h(k) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) \frac{du}{2}$$

e portanto,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h_0(k) = 1 \quad (\text{F.20})$$

de onde segue o resultado.

ANEXO A - AUTORIZAÇÕES DE REPRODUÇÃO DE PUBLICAÇÕES: AIP, SPRINGER e SBMAC

SPRINGER NATURE LICENSE
TERMS AND CONDITIONS

May 22, 2020

This Agreement between Mr. Luciano Magrini ("You") and Springer Nature ("Springer Nature") consists of your license details and the terms and conditions provided by Springer Nature and Copyright Clearance Center.

License Number	4834440054018
License date	May 22, 2020
Licensed Content Publisher	Springer Nature
Licensed Content Publication	Brazilian Journal of Physics
Licensed Content Title	On the Effects of Gaps and Uses of Approximation Functions on the Time-Scale Signal Analysis: A Case Study Based on Space Geophysical Events
Licensed Content Author	Luciano A. Magrini et al
Licensed Content Date	Feb 16, 2017
Type of Use	Thesis/Dissertation
Requestor type	academic/university or research institute
Format	print and electronic
Portion	full article/chapter
Will you be translating?	no

Circulation/distribution 50000 or greater

Author of this Springer Nature content yes

Title Transformadas Wavelet na Análise de Sinais com Falhas e na Detecção da Sincronização das Dinâmicas Lentas e Rápidas em Sistemas Dinâmicos Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo

Institution name Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Expected presentation date Jun 2020

Requestor Location
 Mr. Luciano Magrini
 Rua Ana Tenorio 66 apto 02
 São Paulo, Brás 03040050
 Brazil
 Attn: Mr. Luciano Magrini

Total 0.00 USD

Terms and Conditions

Springer Nature Customer Service Centre GmbH Terms and Conditions

This agreement sets out the terms and conditions of the licence (the **License**) between you and **Springer Nature Customer Service Centre GmbH** (the **Licensor**). By clicking 'accept' and completing the transaction for the material (**Licensed Material**), you also confirm your acceptance of these terms and conditions.

1. Grant of License

1.1. The Licensor grants you a personal, non-exclusive, non-transferable, world-wide licence to reproduce the Licensed Material for the purpose specified in your order only. Licences are granted for the specific use requested in the order and for no other use, subject to the conditions below.

1.2. The Licensor warrants that it has, to the best of its knowledge, the rights to license reuse of the Licensed Material. However, you should ensure that the material you are requesting is original to the Licensor and does not carry the copyright of another entity (as credited in the published version).

1.3. If the credit line on any part of the material you have requested indicates that it was reprinted or adapted with permission from another source, then you should also seek permission from that source to reuse the material.

2. Scope of Licence

2. 1. You may only use the Licensed Content in the manner and to the extent permitted by these Ts&Cs and any applicable laws.

2. 2. A separate licence may be required for any additional use of the Licensed Material, e.g. where a licence has been purchased for print only use, separate permission must be obtained for electronic re-use. Similarly, a licence is only valid in the language selected and does not apply for editions in other languages unless additional translation rights have been granted separately in the licence. Any content owned by third parties are expressly excluded from the licence.

2. 3. Similarly, rights for additional components such as custom editions and derivatives require additional permission and may be subject to an additional fee. Please apply to Journalpermissions@springernature.com/bookpermissions@springernature.com for these rights.

2. 4. Where permission has been granted **free of charge** for material in print, permission may also be granted for any electronic version of that work, provided that the material is incidental to your work as a whole and that the electronic version is essentially equivalent to, or substitutes for, the print version.

2. 5. An alternative scope of licence may apply to signatories of the [STM Permissions Guidelines](#), as amended from time to time.

3. Duration of Licence

3. 1. A licence for is valid from the date of purchase ('Licence Date') at the end of the relevant period in the below table:

Scope of Licence	Duration of Licence
Post on a website	12 months
Presentations	12 months
Books and journals	Lifetime of the edition in the language purchased

4. Acknowledgement

4. 1. The Licensor's permission must be acknowledged next to the Licenced Material in print. In electronic form, this acknowledgement must be visible at the same time as the figures/tables/illustrations or abstract, and must be hyperlinked to the journal/book's homepage. Our required acknowledgement format is in the Appendix below.

5. Restrictions on use

5. 1. Use of the Licensed Material may be permitted for incidental promotional use and minor editing privileges e.g. minor adaptations of single figures, changes of format, colour and/or style where the adaptation is credited as set out in Appendix 1 below. Any other changes including but not limited to, cropping, adapting, omitting material that affect the meaning, intention or moral rights of the author are strictly prohibited.

5. 2. You must not use any Licensed Material as part of any design or trademark.

5. 3. Licensed Material may be used in Open Access Publications (OAP) before publication by Springer Nature, but any Licensed Material must be removed from OAP sites prior to final publication.

6. Ownership of Rights

6. 1. Licensed Material remains the property of either Licensor or the relevant third party and any rights not explicitly granted herein are expressly reserved.

7. Warranty

IN NO EVENT SHALL LICENSOR BE LIABLE TO YOU OR ANY OTHER PARTY OR ANY OTHER PERSON OR FOR ANY SPECIAL, CONSEQUENTIAL, INCIDENTAL OR INDIRECT DAMAGES, HOWEVER CAUSED, ARISING OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE DOWNLOADING, VIEWING OR USE OF THE MATERIALS REGARDLESS OF THE FORM OF ACTION, WHETHER FOR BREACH OF CONTRACT, BREACH OF WARRANTY, TORT, NEGLIGENCE, INFRINGEMENT OR OTHERWISE (INCLUDING, WITHOUT LIMITATION, DAMAGES BASED ON LOSS OF PROFITS, DATA, FILES, USE, BUSINESS OPPORTUNITY OR CLAIMS OF THIRD PARTIES), AND WHETHER OR NOT THE PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES. THIS LIMITATION SHALL APPLY NOTWITHSTANDING ANY FAILURE OF ESSENTIAL PURPOSE OF ANY LIMITED REMEDY PROVIDED HEREIN.

8. Limitations

8. 1. *BOOKS ONLY:* Where 'reuse in a dissertation/thesis' has been selected the following terms apply: Print rights of the final author's accepted manuscript (for clarity, NOT the published version) for up to 100 copies, electronic rights for use only on a personal website or institutional repository as defined by the Sherpa guideline (www.sherpa.ac.uk/romeo/).

9. Termination and Cancellation

9. 1. Licences will expire after the period shown in Clause 3 (above).

9. 2. Licensee reserves the right to terminate the Licence in the event that payment is not received in full or if there has been a breach of this agreement by you.

Appendix 1 — Acknowledgements:

For Journal Content:

Reprinted by permission from [**the Licensor**]: [**Journal Publisher** (e.g. Nature/Springer/Palgrave)] [**JOURNAL NAME**] [**REFERENCE CITATION** (Article name, Author(s) Name), [**COPYRIGHT**] (year of publication)

For Advance Online Publication papers:

Reprinted by permission from [the Licensor]: [Journal Publisher (e.g. Nature/Springer/Palgrave)] [JOURNAL NAME] [REFERENCE CITATION (Article name, Author(s) Name), [COPYRIGHT] (year of publication), advance online publication, day month year (doi: 10.1038/sj.[JOURNAL ACRONYM].)]

For Adaptations/Translations:

Adapted/Translated by permission from [the Licensor]: [Journal Publisher (e.g. Nature/Springer/Palgrave)] [JOURNAL NAME] [REFERENCE CITATION (Article name, Author(s) Name), [COPYRIGHT] (year of publication)]

Note: For any republication from the British Journal of Cancer, the following credit line style applies:

Reprinted/adapted/translated by permission from [the Licensor]: on behalf of Cancer Research UK: : [Journal Publisher (e.g. Nature/Springer/Palgrave)] [JOURNAL NAME] [REFERENCE CITATION (Article name, Author(s) Name), [COPYRIGHT] (year of publication)]

For Advance Online Publication papers:

Reprinted by permission from The [the Licensor]: on behalf of Cancer Research UK: [Journal Publisher (e.g. Nature/Springer/Palgrave)] [JOURNAL NAME] [REFERENCE CITATION (Article name, Author(s) Name), [COPYRIGHT] (year of publication), advance online publication, day month year (doi: 10.1038/sj.[JOURNAL ACRONYM].)]

For Book content:

Reprinted/adapted by permission from [the Licensor]: [Book Publisher (e.g. Palgrave Macmillan, Springer etc) [Book Title] by [Book author(s)] [COPYRIGHT] (year of publication)]

Other Conditions:

Version 1.2

Questions? customercare@copyright.com or +1-855-239-3415 (toll free in the US) or +1-978-646-2777.

AIP PUBLISHING LICENSE
TERMS AND CONDITIONS

Jun 23, 2020

This Agreement between Mr. Luciano Magrini ("You") and AIP Publishing ("AIP Publishing") consists of your license details and the terms and conditions provided by AIP Publishing and Copyright Clearance Center.

License Number 4854810599645

License date Jun 23, 2020

Licensed Content Publisher AIP Publishing

Licensed Content Publication Chaos

Licensed Content Title Extraction of slow and fast dynamics of multiple time scale systems using wavelet techniques

Licensed Content Author Luciano A. Magrini, Margarete Oliveira Domingues, Elbert E. N. Macau, et al

Licensed Content Date Jun 1, 2020

Licensed Content Volume 30

Licensed Content Issue 6

Type of Use Thesis/Dissertation

Requestor type Author (original article)

Format Print and electronic

Portion Excerpt (> 800 words)

Will you be translating? No

Title Transformadas Wavelet na Análise de Sinais com Falhas e na Detecção da Sincronização das Dinâmicas Lentas e Rápidas em Sistemas Dinâmicos Caóticos com Múltiplas Escalas de Tempo

Institution name Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Expected presentation date Jun 2020

Portions I intent attachment the article (in PDF format like published) as appendix in my thesis without modifications contenting all publications during my Ph.D
appendix in my thesis withou modifications contenting all publications during my Ph.D

Mr. Luciano Magrini
Rua Ana Tenorio 66 apto 02

Requestor Location São Paulo, Brás 03040050
Brazil
Attn: Mr. Luciano Magrini

Total 0.00 USD

Terms and Conditions

AIP Publishing -- Terms and Conditions: Permissions Uses

AIP Publishing hereby grants to you the non-exclusive right and license to use and/or distribute the Material according to the use specified in your order, on a one-time basis, for the specified term, with a maximum distribution equal to the number that you have ordered. Any links or other content accompanying the Material are not the subject of this license.

1. You agree to include the following copyright and permission notice with the reproduction of the Material: "Reprinted from [FULL CITATION], with the permission of AIP Publishing." For an article, the credit line and permission notice must be printed on the first page of the article or book chapter. For photographs, covers, or tables, the notice may appear with the Material, in a footnote, or in the reference list.
2. If you have licensed reuse of a figure, photograph, cover, or table, it is your responsibility to ensure that the material is original to AIP Publishing and does not contain the copyright of another entity, and that the copyright notice of the figure, photograph, cover, or table does not indicate that it was reprinted by AIP Publishing, with permission, from another source. Under no circumstances does AIP Publishing purport or intend to grant permission to reuse material to which it does not hold appropriate rights.
You may not alter or modify the Material in any manner. You may translate the Material into another language only if you have licensed translation rights. You may not use the Material for promotional purposes.
3. The foregoing license shall not take effect unless and until AIP Publishing or its agent, Copyright Clearance Center, receives the Payment in accordance with Copyright Clearance Center Billing and Payment Terms and Conditions, which are incorporated herein by reference.
4. AIP Publishing or Copyright Clearance Center may, within two business days of granting this license, revoke the license for any reason whatsoever, with a full refund payable to you. Should you violate the terms of this license at any time, AIP Publishing, or Copyright Clearance Center may revoke the license with no refund to you. Notice of such revocation will be made using the contact information provided by you. Failure to receive such notice will not nullify the revocation.
5. AIP Publishing makes no representations or warranties with respect to the Material. You agree to indemnify and hold harmless AIP Publishing, and their officers, directors, employees or agents from and against any and all claims arising out of your use of the Material other than as specifically authorized herein.
6. The permission granted herein is personal to you and is not transferable or assignable without the prior written permission of AIP Publishing. This license may not be amended except in a writing signed by the party to be charged.
7. If purchase orders, acknowledgments or check endorsements are issued on any forms containing terms and conditions which are inconsistent with these provisions, such inconsistent terms and conditions shall be of no force and effect. This document, including the CCC Billing and Payment Terms and Conditions, shall be the entire agreement between the parties relating to the subject matter hereof.

This Agreement shall be governed by and construed in accordance with the laws of the State of New York. Both parties hereby submit to the jurisdiction of the courts of New York County for purposes of resolving any disputes that may arise hereunder.

V1.2

Questions? customercare@copyright.com or +1-855-239-3415 (toll free in the US) or +1-978-646-2777.

12/09/2019

Gmail - Re: Autorização para Reprodução de Minhas Publicações em Minha Tese



Luciano Magrini <magriniluciano1983@gmail.com>

Re: Autorização para Reprodução de Minhas Publicações em Minha Tese

1 mensagem

sbmac <sbmac@sbmac.org.br>
Para: Luciano Magrini <magriniluciano1983@gmail.com>

11 de setembro de 2019 16:32

Prezado Luciano, Boa Tarde

Consultei o Diretor de Publicações da SBMAC, Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho, a SBMAC autoriza você a reproduzir as publicações que você é autor e estão nos Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics.

Atenciosamente,
Andrea A. Ribeiro
Secretária Executiva
SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
[Rua Maestro João Seppé, nº. 900, 16º. andar - Sala 163 - Jardim Paraíso](#)
São Carlos - SP Cep. 13561-180
Tel/Fax: (16) 3412-9752
CNPJ: 51.793.982/0001-57
e-mail: sbmac@sbmac.org.br

Em ter, 10 de set de 2019 às 14:35, Luciano Magrini <magriniluciano1983@gmail.com> escreveu:
Obrigado Andrea.
Aguardo seu retorno.

Att:
Luciano

Em ter, 10 de set de 2019 14:32, sbmac <sbmac@sbmac.org.br> escreveu:
Prezado Luciano, Boa Tarde

Vou consultar o Diretor de Publicações da SBMAC e te posiciono.

Atenciosamente,
Andrea A. Ribeiro
Secretária Executiva
SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
[Rua Maestro João Seppé, nº. 900, 16º. andar - Sala 163 - Jardim Paraíso](#)
São Carlos - SP Cep. 13561-180
Tel/Fax: (16) 3412-9752
CNPJ: 51.793.982/0001-57
e-mail: sbmac@sbmac.org.br

Em ter, 10 de set de 2019 às 09:27, Luciano Magrini <magriniluciano1983@gmail.com> escreveu:
Prezados,

Participei dos CNMAC 2016 (comunicação oral), CNMAC 2017 (pôster) e novamente participarei esse ano (pôster). Como de praxe, todas as submissões estão publicadas nos proceedings dos eventos mas eu gostaria de colocá-los como apêndices da minha tese (em elaboração).

Segundo a biblioteca da minha instituição, eu só posso fazer isso se houver documento por escrito da parte que publica os proceedings autorizando expressamente a reprodução dos mesmos na minha tese (e inclusive esse documento deve ser anexado à minha tese, para garantir que não estou infringindo qualquer direito autorai). Não vou usar para qualquer outro fim que não o descrito acima.

Como faço para solicitar da SBMAC o uso expresso dos meus trabalhos como anexos da minha tese? Na Springer eu consegui gerar esse documento online mas pelo que vi nas páginas dos proceedings do CNMAC isso não é possível.

Podem me ajudar com essa questão?

Obrigado
Luciano Aparecido Magrini

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Contam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.