

**CÁLCULO DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DE
SATÉLITES LUNARES DEVIDO À DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME
DE MASSA DA LUA**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Maria Lívia Galhego Thibes Xavier da Costa (ICT/UNIFESP, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: livia.thibes@gmail.com

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: prado@dem.inpe.br

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (ICT/UNIFESP, Orientador)
E-mail: rodolpho.vilhena@gmail.com

São José dos Campos
Julho de 2016

Ao meu grande mestre e orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela dávida da vida, salvação, infinita bondade, amor e misericórdia. Por ter me ajudado na realização deste trabalho.

Agradeço à minha família por continuamente guiar meus passos com muito amor, carinho e dedicação.

Agradeço aos meus estimados orientadores, Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, por permanentemente acreditarem em minha capacidade e competência.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

“As leis da natureza nada mais são do que pensamentos matemáticos de Deus.”

(Johannes Kepler)

“A matemática é a rainha das ciências.”

(Carl Friedrich Gauss)

“Não existe verdadeira inteligência sem bondade.”

(Ludwig Van Beethoven)

Resumo

Se ignorarmos a existência de perturbações, um veículo espacial, sujeito exclusivamente à atração gravitacional de um corpo primário, desenvolve uma trajetória cônica fixa em um plano fixo. Em outras palavras, sua órbita possui elementos keplerianos constantes. Em aplicações reais, quando forças perturbativas são levadas em conta, estes parâmetros não são mais constantes e variam com o tempo. Considerando forças de origem gravitacional, especificamente, perturbações geradas pela distribuição não uniforme de massa do corpo central, são determinadas as variações temporais dos elementos orbitais de satélites artificiais lunares através da expansão do potencial gravitacional, em termos dos Polinômios de Legendre, e das Equações Planetárias de Lagrange. Utilizando os Métodos de Runge-Kutta de ordem quatro, a integração numérica do sistema é feita para algumas condições iniciais.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Geometria para definição dos elementos orbitais. P1 é plano da órbita, P2 é plano do equador, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S.	18
Figura 2 – Zonais.	22
Figura 3 – Setoriais.	22
Figura 4 – Tesserais.	22
Figura 5 – Esquema prático do Método de Krylov-Bogolyubov.	23
Figura 6 – Ganimedes.	29
Figura 7 – Calisto.	29
Figura 8 – Europa.	29
Figura 9 – Ganim.: Δi em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 10 – Ganim.: $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 11 – Ganim.: $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 12 – Ganim.: Δi em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 13 – Ganim.: $\Delta \omega$ em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 14 – Ganim.: $\Delta \Omega$ em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	30
Figura 15 – Ganim.: Δi em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 16 – Ganim.: $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 17 – Ganim.: $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 18 – Ganim.: Δi em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 19 – Ganim.: $\Delta \omega$ em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 20 – Ganim.: $\Delta \Omega$ em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	31
Figura 21 – Calisto: Δi em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 22 – Calisto: $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 23 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 24 – Calisto: Δi em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 25 – Calisto: $\Delta \omega$ em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 26 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	32
Figura 27 – Calisto: Δi em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 28 – Calisto: $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 29 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 30 – Calisto: Δi em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 31 – Calisto: $\Delta \omega$ em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 32 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$	33
Figura 33 – Europa: Δi em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	34
Figura 34 – Europa: $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$	34

Figura 35 – Europa: $\Delta\Omega$ em 5 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	34
Figura 36 – Europa: Δi em 30 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	34
Figura 37 – Europa: $\Delta\omega$ em 30 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	34
Figura 38 – Europa: $\Delta\Omega$ em 30 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	34
Figura 39 – Europa: Δi em 90 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	35
Figura 40 – Europa: $\Delta\omega$ em 90 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	35
Figura 41 – Europa: $\Delta\Omega$ em 90 dias, $h = 500\text{ km}$, $e = 006$	35
Figura 42 – Europa: Δi em 5 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	35
Figura 43 – Europa: $\Delta\omega$ em 5 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	35
Figura 44 – Europa: $\Delta\Omega$ em 5 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	35
Figura 45 – Europa: Δi em 30 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36
Figura 46 – Europa: $\Delta\omega$ em 30 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36
Figura 47 – Europa: $\Delta\Omega$ em 30 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36
Figura 48 – Europa: Δi em 90 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36
Figura 49 – Europa: $\Delta\omega$ em 90 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36
Figura 50 – Europa: $\Delta\Omega$ em 90 dias, $h = 300\text{ km}$, $e = 001$	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Constantes utilizadas na resolução do problema (AIELLO, 2005).	26
Tabela 2 – Caso 1: satélite artificial orbitando Ganimedes. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.	27
Tabela 3 – Caso 2: satélite artificial orbitando Calisto. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.	27
Tabela 4 – Caso 3: satélite artificial orbitando Europa. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.	27
Tabela 5 – Quantidade de dias que cada órbita é propagada para cada sistema.	28
Tabela 6 – Período orbital dos satélites artificiais.	29

Sumário

1	Introdução	15
2	Fundamentação Teórica	17
2.1	Problema de Dois Corpos	17
2.2	Elementos Orbitais	18
2.3	Solução do Problema de Dois Corpos	19
2.4	Problema de Dois Corpos Perturbado	20
2.5	Equações Planetárias de Lagrange	21
2.6	Potencial Gravitacional	22
2.7	Métodos de Solução das Equações Planetárias de Lagrange	23
2.7.1	Métodos de Média de Krylov-Bogolyubov	23
2.7.2	Métodos de Runge-Kutta	24
3	Metodologia	25
3.1	Obtenção da Função Perturbadora	25
3.2	Obtenção das Equações de Movimento	26
3.3	Dados Utilizados e Condições Iniciais	26
3.4	Integração Numérica do Sistema	28
3.5	Ferramentas Computacionais Utilizadas	28
4	Resultados	29
4.1	Satélite Artificial Orbitando Ganimedes	30
4.2	Satélite Artificial Orbitando Calisto	32
4.3	Satélite Artificial Orbitando Europa	34
5	Conclusão	37
5.1	Análise dos Resultados	37
5.2	Considerações Finais	38
	Referências	39

1 Introdução

Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar. Devido a sua grande massa, possui 67 satélites naturais. Em especial, os quatro mais massivos foram descobertos em 1610 por Galileu Galilei e é por este motivo que são chamados de satélites galileianos. Também, foram os primeiros objetos descobertos pela humanidade em órbita de outro corpo que não a Terra ou o Sol.

Passados 406 anos do descobrimento destas luas, elas ainda são alvos da curiosidade dos amantes de astronomia e, principalmente, do interesse da comunidade científica. A primeira sonda a se aproximar do planeta joviano e, conseqüentemente, de suas luas, foi a Pioneer 10 em 1973. Desde então, inúmeras sondas e missões foram enviadas para lá, sendo a missão Juno a última, lançada em agosto de 2011. Além disso, recentemente, a Agência Espacial Americana anunciou a existência de oceanos de gelo em Europa, o que provocou a possível dúvida desta lua poder abrigar vida.

Entretanto, para o sucesso destas missões é necessário analisar o movimento orbital destes veículos, modelando possíveis forças que agem no sistema. Conforme [Nayfeh \(2008\)](#), quando forças perturbativas são consideradas, não é possível obter soluções analíticas exatas para o sistema dinâmico associado ao problema. Recorre-se, então, a métodos perturbativos. Neste caso, os parâmetros que descrevem a órbita não são mais constantes, isto é, são funções do tempo.

Considerando forças de origem gravitacional, especificamente, perturbações geradas pela distribuição não uniforme de massa do corpo central, são determinadas as variações temporais dos elementos orbitais de satélites artificiais, ao redor de Ganimedes, Calisto e Europa, por meio da expansão do potencial gravitacional e das Equações Planetárias de Lagrange.

Utilizando os Métodos de Runge-Kutta de ordem quatro, a integração numérica do sistema é feita para algumas condições iniciais. O Método de Krylov-Bogolyubov, o qual encontra soluções analíticas aproximadas das Equações Planetárias de Lagrange, também é apresentado.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Problema de Dois Corpos

Definição 2.1. Dadas posição $\mathbf{r}(t_0)$ e velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ de uma partícula de massa m relativas ao baricentro de um corpo de massa M , em um instante inicial $t_0 \in I = [0, \infty)$, o Problema de 2-Corpos consiste em estudar o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = 0. \quad (2.1)$$

Seja $G \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ a Constante Gravitacional Universal. Para o caso de satélites artificiais, dado que $M \gg m$, o parâmetro gravitacional $\mu = G(M + m)$ pode ser aproximado por GM .

De acordo com o Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais, o problema de valor inicial formado pelo Sistema (2.1) juntamente com determinadas condições iniciais, coerentes com o problema, possui solução e é única. Observe que (2.1) é um sistema de equações diferenciais de segunda ordem em \mathbb{R}^3 . Fazendo $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, é possível reduzi-lo para um sistema de primeira ordem em \mathbb{R}^6 , da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}. \end{cases}$$

Resultando em

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{z} = v_z, \\ \dot{v}_x = -\mu \frac{x}{\|\mathbf{r}\|^3}, \\ \dot{v}_y = -\mu \frac{y}{\|\mathbf{r}\|^3}, \\ \dot{v}_z = -\mu \frac{z}{\|\mathbf{r}\|^3}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Antes, porém, de apresentarmos a solução do Sistema (2.2), é necessário definirmos os chamados elementos orbitais.

2.2 Elementos Orbitais

Os elementos orbitais, também chamados de elementos keplerianos, são um conjunto de seis parâmetros, cinco geométricos e um cinemático, os quais possuem significado físico e geométrico bem definidos e permitem caracterizar a posição de um corpo celeste, natural ou artificial, em uma determinada órbita. A geometria para a definição destes elementos pode ser vista na Figura 1.

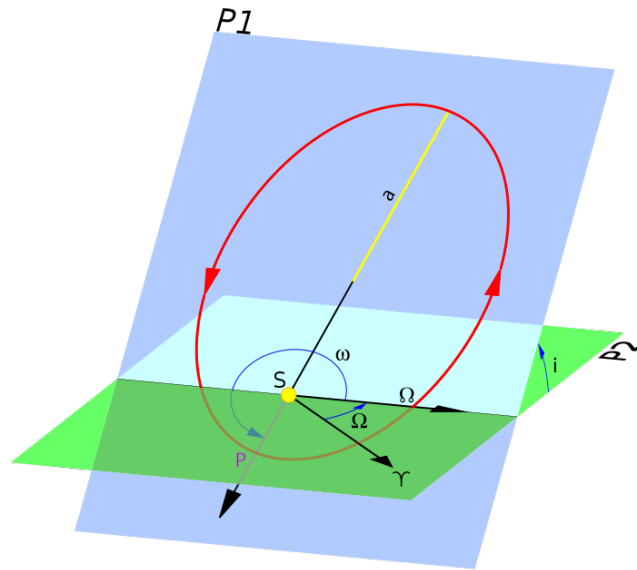


Figura 1 – Geometria para definição dos elementos orbitais. P1 é plano da órbita, P2 é plano do equador, S é o corpo central e a elipse vermelha é a órbita desenvolvida pelo corpo ao redor de S.

São os seguintes: a , e , i , ω , Ω , τ . a e e são o *semi-eixo maior* e a *excentricidade* da elipse, respectivamente. Se fixamos tais parâmetros, a forma e as medidas da elipse são conhecidas. O ângulo formado entre o plano da órbita e o plano de referência é chamado de *inclinação* i da órbita, $i \in [0, \pi]$.

A posição da elipse no plano orbital é dada pelo *argumento do pericentro* ω , $\omega \in [0, 2\pi]$. ω é a distância angular entre a linha dos nodos e o pericentro, medido no plano orbital. Este ângulo especifica a direção do semi-eixo maior da órbita e a posição do pericentro.

A posição do nodo ascendente é especificada pelo ângulo formado entre a linha dos nodos e uma certa direção fixa no plano de referência. Este ângulo é chamado de *ascensão reta do nodo ascendente* e é denotado pela letra Ω , $\Omega \in [0, 2\pi]$.

Por fim, τ é o *instante de passagem pelo pericentro*. Assim, de maneira resumida, a e e dão forma à órbita, i e Ω estabelecem o plano da órbita, ω posiciona a órbita no plano de referência e τ é um elemento cinemático.

2.3 Solução do Problema de Dois Corpos

A solução do Sistema (2.2) envolve seis constantes de integração as quais podem ser postas em correspondência com os elementos keplerianos $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau)$ (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Esta relação é conveniente pois, ao invés de trabalharmos com seis componentes cartesianas variantes no tempo, três de posição e velocidade, respectivamente, utilizamos cinco parâmetros constantes e apenas um dependente do tempo.

Em Brouwer e Clemence (1961) é demonstrado que, dada a posição e velocidade de um satélite em um determinado instante, em coordenadas cartesianas, os elementos podem ser determinados, sendo também a recíproca verdadeira (correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de parâmetros) - problema de posicionamento direto e inverso - $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \Leftrightarrow (a, e, i, \omega, \Omega, \tau)$.

Logo, a solução de (2.2) em função dos elementos orbitais (problema direto) é dada pelas funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ de posição,

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos E - e)(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) + a \sin E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ y(t) = a(\cos E - e)(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) + a \sin E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i), \\ z(t) = a(\cos E - e)(\sin \omega \sin i) + a \sin E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}(\cos \omega \sin i), \end{cases} \quad (2.3)$$

e pelas funções $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ e $\dot{z}(t)$ de velocidade,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E}(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) + \frac{na \cos E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e \cos E}(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y}(t) = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E}(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) + \frac{na \cos E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e \cos E}(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z}(t) = -\frac{na \sin E}{1 - e \cos E}(\sin \omega \sin i) + \frac{na \cos E(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e \cos E}(\cos \omega \sin i). \end{cases} \quad (2.4)$$

Lembrando que a anomalia excêntrica E está relacionada com a anomalia média M através da equação de Kepler,

$$M = E - e \sin E, \quad (2.5)$$

e M , por sua vez, está relacionada com o instante de passagem pelo pericentro τ através de

$$M = n(t - \tau), \quad (2.6)$$

em que n é movimento médio do satélite artificial.

2.4 Problema de Dois Corpos Perturbado

O Problema de Dois Corpos é um modelo ideal, aplicado somente ao movimento relativo de um corpo, natural ou artificial, em um campo puramente central. Porém, para modelos mais realistas, precisamos estudar este movimento em campos não-centrais.

Seja $R : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial a qual chamaremos de perturbadora. Se adicionarmos R ao Sistema (2.1),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + R(\mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\mu \frac{x}{\|\mathbf{r}\|^3} + R_1(x, y, z, t), \\ \ddot{y} = -\mu \frac{y}{\|\mathbf{r}\|^3} + R_2(x, y, z, t), \\ \ddot{z} = -\mu \frac{z}{\|\mathbf{r}\|^3} + R_3(x, y, z, t), \end{cases} \quad (2.8)$$

a solução de (2.7), em função dos elementos orbitais, não é mais dada pelas Equações (2.3) e (2.4). A partir de então, nosso objetivo é encontrar a solução deste novo sistema, Equação (2.7), chamado de sistema perturbado. Antes, porém, de resolvermos o mesmo, vamos fazer alguns comentários sobre as possíveis origens de R .

Existem diversas forças as quais atuam em um satélite artificial, entre elas, podemos exemplificar:

- **Forças de Origem Gravitacional:** devido à distribuição não uniforme de massa do corpo primário, a aceleração gravitacional pode variar ligeiramente em algumas regiões. Isto altera o movimento orbital de veículos espaciais, desviando-os de suas órbitas nominais. Perturbações gravitacionais devido a mais de um corpo consiste no chamado “Problema de N-Corpos”, um dos famosos problemas da Mecânica Celeste que ainda não foi resolvido analiticamente.
- **Arrasto Atmosférico:** o arrasto é uma força de frenagem que um satélite artificial sofre ao passar por um meio gasoso, alterando principalmente o semi-eixo maior e a excentricidade de sua órbita. O arrasto atua sobretudo no pericentro, para órbitas muito excêntricas.
- **Pressão de Radiação Solar:** a radiação eletromagnética emitida pelo Sol dá origem a um efeito chamado de pressão de radiação. A incidência de fótons exercem uma pressão sobre as placas do veículo espacial, desviando-o de sua trajetória.

Assim, quanto mais forças perturbativas são consideradas em um determinado sistema, mais fiel este modelo será à realidade. Em vista disto, modelos os quais levam em conta vários tipos de perturbações são, em geral, extremamente complexos. Neste trabalho, são consideradas somente forças de origem gravitacional, especificamente, as forças geradas pela distribuição não uniforme de massa do corpo central.

2.5 Equações Planetárias de Lagrange

Em aplicações reais, quando forças perturbativas são levadas em conta, os elementos orbitais não são mais constantes e variam com o tempo. Aplicando o Método da Variação dos Parâmetros (ARNOLD, 1988) às Equações (2.7), temos que a sua solução, quando R deriva de um potencial gravitacional, é dada pelas Equações Planetárias de Lagrange.

As Equações (2.9)-(2.14) descrevem as variações dos elementos orbitais devido às perturbações derivadas de um potencial gravitacional, determinando a real posição e velocidade de um satélite artificial em sua órbita em um dado instante t (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \quad (2.9)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (2.10)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (2.13)$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (2.14)$$

Originalmente desenvolvidas para o movimento planetário, as Equações Planetárias de Lagrange formam uma teoria geral para encontrar as taxas de variação dos elementos keplerianos quando são consideradas perturbações. São um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas em \mathbb{R}^6 , as quais fornecem soluções analíticas para problemas envolvendo perturbações em órbitas keplerianas.

2.6 Potencial Gravitacional

O potencial gravitacional de um corpo com distribuição homogênea de massa e forma geométrica simples admite, em geral, representação matemática exata. Entretanto, o potencial de corpos com distribuição heterogênea de massa e forma geométrica complexa, como a dos corpos celestes, só pode ser obtido por aproximação através de séries. Desta maneira, o potencial gravitacional, expresso em termos dos harmônicos esféricos, é dado em [Morando \(1974\)](#) por

$$R = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin(\phi)) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_{n,k} a_e^n}{r^n} P_{n,k}(\sin(\phi)) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) \right]. \quad (2.15)$$

Em que:

- μ é a constante gravitacional do corpo central;
- r é o raio vetor;
- a_e é o raio equatorial do corpo central;
- n é o grau dos Polinômios e Polinômios Associados de Legendre;
- k é a ordem dos Polinômios Associados de Legendre;
- P_n são os Polinômios de Legendre;
- $P_{n,k}$ são os Polinômios Associados de Legendre;
- ϕ é a latitude do satélite;
- λ é a longitude do satélite;
- J_n , $J_{n,k}$ e $\lambda_{n,k}$ são características do corpo central que o satélite orbita, referentes à distribuição de massa;

Da Equação (2.15), temos a seguinte classificação:

- a) Os termos independentes de λ , $P_{n,0}(\sin(\phi)) = P_n(\sin(\phi))$, são chamados de **Harmônicos Esféricos Zonais**, pois dividem um corpo em seções horizontais (Figura 2).
- b) Os termos dependentes de λ , $P_{n,k}(\sin(\phi)) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k})$, são chamados de:

1. **Harmônicos Esféricos Setoriais**, se $n = k$ (Figura 3),
2. **Harmônicos Esféricos Tesserais**, se $n \neq k$ (Figura 4).

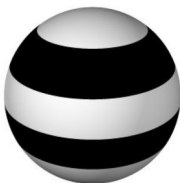


Figura 2 – Zonais.



Figura 3 – Setoriais.



Figura 4 – Tesserais.

2.7 Métodos de Solução das Equações Planetárias de Lagrange

Como já dito na Seção 2.5, as Equações Planetárias de Lagrange formam um sistema de equações diferenciais ordinárias altamente não-lineares acopladas em \mathbb{R}^6 , logo, resolver o sistema formado pelas Equações (2.9)-(2.14), juntamente com o potencial R considerado, não é uma tarefa nada fácil. Nesta Seção, portanto, falaremos rapidamente sobre alguns métodos empregados para encontrar soluções deste sistema, sendo um analítico e outro numérico.

2.7.1 Métodos de Média de Krylov-Bogolyubov

Existem vários processos propostos na literatura para resolver analiticamente as Equações (2.9)-(2.14) (NAYFEH, 2008). Soluções analíticas aproximadas podem ser obtidas, por exemplo, através de Métodos de Média Generalizada, Método de Hori-Deprit (FERRAZ-MELLO, 2007), Método de Krylov-Bogolyubov, entre outros. Aqui, vamos apresentar um esquema geral do Método Krylov-Bogolyubov.

De modo geral e simplificado, o Método de Média de Krylov-Bogolyubov é uma ferramenta matemática de análise aproximada de processos oscilantes em dinâmica não-linear. O método é baseado no princípio de cálculo da média quando a equação diferencial exata de movimento é substituída por sua versão média.

Sejam $X : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $H : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções de classe C^2 tais que $X(x, \theta, \varepsilon)$ e $H(x, \theta, \varepsilon)$ são, por hipótese, funções periódicas nas componentes de θ e infinitesimais de mesma ordem que ε , para $\varepsilon \rightarrow 0$. O Método de Krylov-Bogolyubov é aplicado em um sistema de equações diferenciais sob a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, \theta, \varepsilon), \\ \dot{\theta} &= \omega(x) + H(x, \theta, \varepsilon), \\ x &\in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{2.16}$$

conforme o esquema mostrado na Figura 5.

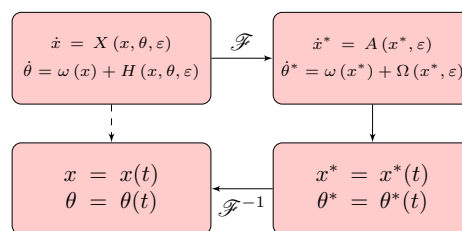


Figura 5 – Esquema prático do Método de Krylov-Bogolyubov.

A transformação \mathcal{F} , mostrada na Figura 5, é definida pelas equações

$$x = x^* + F(x^*, \theta^*, \varepsilon), \quad (2.17)$$

$$\theta = \theta^* + \Phi(x^*, \theta^*, \varepsilon), \quad (2.18)$$

e deve reduzir-se a uma identidade para $\varepsilon = 0$, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x^*, \theta^*, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x^*, \theta^*, \varepsilon) = 0. \quad (2.19)$$

Note que as Equações (2.9)-(2.14) tem a forma do sistema definido pela Equação (2.16), logo, o Método de Krylov-Bogolyubov pode ser aplicado às Equações Planetárias de Lagrange com o propósito de encontrarmos soluções analíticas aproximadas para o sistema. Na construção desta solução são feitos diversos desenvolvimentos em série de Taylor nas vizinhanças de $\varepsilon = 0$ e, posteriormente, separados em termos seculares e periódicos. Estes desenvolvimentos são extremamente longos e não serão apresentados neste trabalho, entretanto, podem ser encontrados em (NAYFEH, 2008).

2.7.2 Métodos de Runge-Kutta

Uma outra possibilidade para encontrarmos a solução das Equações (2.9)-(2.14) é aplicando métodos numéricos clássicos para integração de sistemas de equações diferenciais. Apresentamos, agora, um método extremamente utilizado, em geral, para este finalidade: Métodos de Runge-Kutta.

Em análise numérica, os Métodos de Runge-Kutta formam um família importante de métodos implícitos e explícitos para a resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias. Sem maiores detalhes e rigor, vamos apenas mostrar as equações de ordem quatro, pois tratam-se de resultados consagrados da literatura (FRANCO, 2006). Logo,

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \quad (2.20)$$

em que,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

3 Metodologia

A partir da teoria apresentada no Capítulo 2, temos condições de introduzir a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados deste trabalho, os quais serão mostrados no Capítulo 4. Lembre-se que no Capítulo 2 foram apresentadas algumas maneiras de se obter soluções para as Equações Planetárias de Lagrange. Entretanto, nós optamos por trabalhar com apenas uma delas, a integração numérica do sistema.

3.1 Obtenção da Função Perturbadora

Note que a Equação (2.15) não está em função dos elementos orbitais. Logo, nosso primeiro passo é expressá-la em função de tais elementos. Isto é possível através de alguns desenvolvimentos explicitados em (KAULA, 2000). Através das expansões feitas na Equação (2.15), já em função dos parâmetros orbitais, aparecem, então, elementos seculares e angulares (periódicos). E, também, aparecem perturbações que, segundo Prado (2001), são subdivididas em seculares e periódicas. As seculares são aquelas cujos desvios são proporcionais ao tempo. As periódicas são aquelas cujos os desvios da órbita nominal se repetem a dados intervalos de tempo. O último tipo, por sua vez, se divide em:

- **Periódicas de curto período:** período menor do que um período orbital.
- **Periódicas de longo período:** período maior do que um período orbital.

Expandindo a Equação (2.15) até o grau e a ordem desejados, aqui vamos analisar os efeitos de J_2 e C_{22} , e eliminando os termos de curto período, obtemos (CARVALHO; VILHENA DE MORAES; PRADO, 2009):

$$\begin{aligned}
 R = \frac{1}{8} \frac{\mu}{a^3} a_e^2 [& 6J_2 \cos(i)^2 - 3J_2 e^2 - 2J_2 - 18C_{22} \cos(2\Omega) e^2 \\
 & + 18C_{22} \cos(2\Omega) \cos(i)^2 e^2 - 12C_{22} \cos(2\Omega) \\
 & + 12C_{22} \cos(2\Omega) \cos(i)^2 + 9J_2 \cos(i)^2 e^2].
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Logo, a Equação (3.1) é a função perturbadora com a qual vamos trabalhar. Em outras palavras, vamos avaliar o que o achatamento J_2 e a elipticidade equatorial C_{22} de Ganimedes, Calisto e Europa provocam no movimento orbital dos satélites artificiais que orbitam estes respectivos corpos.

3.2 Obtenção das Equações de Movimento

Observe que a Equação (3.1) depende apenas de a , e , i e Ω . Logo, $\frac{\partial R}{\partial \omega}$ e $\frac{\partial R}{\partial M}$ são zero. E

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{3}{8} \frac{\mu}{a^4} a_e^2 (3e^2 + 2) [-J_2 + 3J_2 \cos(i)^2 - 6C_{22} \cos(2\Omega) \sin(i)^2], \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{3}{4} \frac{\mu}{a^3} a_e^2 e [2J_2 - 3J_2 \sin(i)^2 - 6C_{22} \cos(2\Omega) \sin(i)^2], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = -\frac{3}{4} \frac{\mu}{a^3} a_e^2 (3e^2 + 2) [J_2 + 2C_{22} \cos(2\Omega)] \cos(i) \sin(i), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{a^3} a_e^2 C_{22} (3e^2 + 2) \sin(i)^2 \sin(2\Omega). \quad (3.5)$$

Substituindo as Equações (3.2)-(3.5) nas Equações Planetárias de Lagrange, Equações (2.9)-(2.14), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{de}{dt} &= 0, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{(3e^2 + 2)}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} n \sin(i) C_{22} \sin(2\Omega), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 n \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} [(3e^2 + 2) [J_2 + 2C_{22} \cos(2\Omega)] \cos(i)^2 + (3e^2 - 3) [J_2 + 2C_{22} \cos(2\Omega)] \sin(i)^2 + (2 - 2e^2) J_2], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{(3e^2 + 2)}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} n \cos(i) [J_2 + 2C_{22} \cos(2\Omega)], \\ \frac{dM}{dt} &= n + n \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 [4e^2 + 1] [2J_2 - 3J_2 \sin(i)^2 - 6C_{22} \cos(2\Omega) \sin(i)^2]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto, o Sistema (3.6), combinado com determinadas condições iniciais, formam os problemas de valor inicial os quais serão integrados numericamente e analisados.

3.3 Dados Utilizados e Condições Iniciais

Apresentamos, agora, os dados utilizados em nossos desenvolvimentos e as condições iniciais usadas para a propagação das órbitas analisadas. A Tabela 1 mostra as constantes associadas a cada corpo central considerado.

Dados das Luas				
	Raio (a_e)	μ	J_2	C_{22}
Ganimedes	2631.2 km	9886.997 km ³ /s ²	6.1436994.10 ⁻⁵	6.3943452.10 ⁻⁵
Calisto	2410.3 km	7180.998 km ³ /s ²	1.5456884.10 ⁻⁵	1.6808453.10 ⁻⁵
Europa	1565 km	3201.0 km ³ /s ²	1.904852.10 ⁻⁴	1.993307.10 ⁻⁴

Tabela 1 – Constantes utilizadas na resolução do problema (AIELLO, 2005).

Sejam h a altitude do satélite em relação à superfície do corpo central e $a = a_e + h$. Tomados (a, e) , para encontrar condições iniciais coerentes ao problema, realizamos os seguintes testes:

- $r_p = a(1 - e) > a_e$,
- $b = [a^2(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} > a_e$,
- $p = a(1 - e^2) > a_e$.

As Tabelas 2, 3 e 4 mostram as condições iniciais utilizadas para compor um problema de valor inicial, juntamente com o Sistema (3.6), para posterior integração numérica, referentes a cada caso:

Condições Iniciais - Ganímedes					
$a_0 = a(0) = a_e + h$	$e_0 = e(0)$	$i_0 = i(0)$	$\omega_0 = \omega(0)$	$\Omega_0 = \Omega(0)$	$M_0 = M(0)$
2631.2 + 300 km	0.01	60°	90°	30°	0°
2631.2 + 350 km	0.01				
2631.2 + 400 km	0.06				
2631.2 + 450 km	0.06				
2631.2 + 500 km	0.06				

Tabela 2 – **Caso 1:** satélite artificial orbitando Ganímedes. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.

Condições Iniciais - Calisto					
$a_0 = a(0) = a_e + h$	$e_0 = e(0)$	$i_0 = i(0)$	$\omega_0 = \omega(0)$	$\Omega_0 = \Omega(0)$	$M_0 = M(0)$
2410.3 + 300 km	0.01	60°	90°	30°	0°
2410.3 + 350 km	0.01				
2410.3 + 400 km	0.06				
2410.3 + 450 km	0.06				
2410.3 + 500 km	0.06				

Tabela 3 – **Caso 2:** satélite artificial orbitando Calisto. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.

Condições Iniciais - Europa					
$a_0 = a(0) = a_e + h$	$e_0 = e(0)$	$i_0 = i(0)$	$\omega_0 = \omega(0)$	$\Omega_0 = \Omega(0)$	$M_0 = M(0)$
1565 + 300 km	0.01	60°	90°	30°	0°
1565 + 350 km	0.01				
1565 + 400 km	0.06				
1565 + 450 km	0.06				
1565 + 500 km	0.06				

Tabela 4 – **Caso 3:** satélite artificial orbitando Europa. Condições iniciais utilizadas para integração numérica do sistema.

3.4 Integração Numérica do Sistema

Com as condições iniciais apresentadas nas Tabelas 2, 3 e 4, temos então um problema de valor inicial com o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = f_1(a, e, i, \Omega) = 0, \\ \dot{e}(t) = f_2(a, e, i, \Omega) = 0, \\ \dot{i}(t) = f_3(a, e, i, \Omega), \\ \dot{\omega}(t) = f_4(a, e, i, \Omega), \\ \dot{\Omega}(t) = f_5(a, e, i, \Omega), \\ \dot{M}(t) = f_6(a, e, i, \Omega), \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} a(0) = a_0, \\ e(0) = e_0, \\ i(0) = i_0, \\ \omega(0) = \omega_0, \\ \Omega(0) = \Omega_0, \\ M(0) = M_0. \end{cases}$$

Vamos integrar o Sistema (3.7) utilizando os Métodos de Runge-Kutta de ordem quatro, Equação (2.20), tal que a variável independente é o tempo t , $t \in [0, +\infty)$ e o tamanho do passo é dado em dias, com o propósito de facilitar a análise das variações dos elementos orbitais. Para cada caso, propagamos as órbitas com um intervalo de tempo diferente, como é mostrado na Tabela 5.

Tempo (em dias)			
	Teste 1	Teste 2	Teste 3
Ganimedes	$t \in [0, 5]$	$t \in [0, 50]$	-
Calisto	$t \in [0, 30]$	$t \in [0, 200]$	-
Europa	$t \in [0, 5]$	$t \in [0, 30]$	$t \in [0, 90]$

Tabela 5 – Quantidade de dias que cada órbita é propagada para cada sistema.

3.5 Ferramentas Computacionais Utilizadas

Note que este trabalho contém partes de desenvolvimento analítico/semi-analítico e numérico. Para todas as situações, utilizamos o software *Maple*, que consta de um seguro e eficiente manipulador algébrico e, também, é um excelente ambiente para criar rotinas computacionais para resolução de problemas numéricos. Sub-rotinas computacionais também foram implementadas em *Scilab*, versão aberta e gratuita do *Matlab*, com a finalidade de verificar se as condições iniciais escolhidas para o problema eram válidas.

4 Resultados

Neste capítulo vamos apresentar os resultados mais interessantes obtidos ao aplicarmos os passos descritos no Capítulo 3. Vamos analisar o efeito dos harmônicos de J_2 e C_{22} no movimento orbital de satélites artificiais ao redor de:

- Ganimedes (Figura 6)
- Calisto (Figura 7)
- Europa (Figura 8)

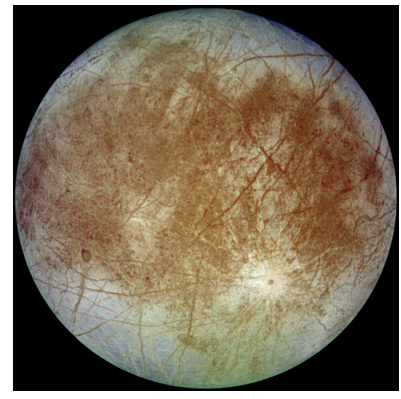
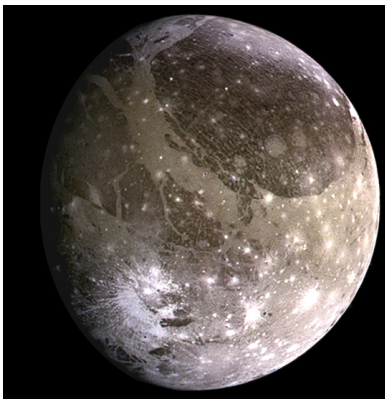


Figura 6 – Ganimedes.

Figura 7 – Calisto.

Figura 8 – Europa.

A Tabela 6 mostra os períodos orbitais dos satélites artificiais ao redor de Ganimedes, Calisto e Europa, em segundos e dias, respectivamente, para cada altitude h considerada. A descrição destes períodos nos auxilia na compreensão da análise das variações dos elementos orbitais ao longo do tempo.

Satélite Artificial - Período Orbital						
h	Ganim. (s)	Ganim. (d)	Calis. (s)	Calis. (d)	Euro. (s)	Euro. (d)
300 km	10028.035	0.11	10461.971	0.12	8944.4839	0.10
500 km	11071.689	0.13	11641.102	0.13	10421.185	0.12

Tabela 6 – Período orbital dos satélites artificiais.

4.1 Satélite Artificial Orbitando Ganimedes

As Figuras 9-11 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Ganimedes, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 5 dias.

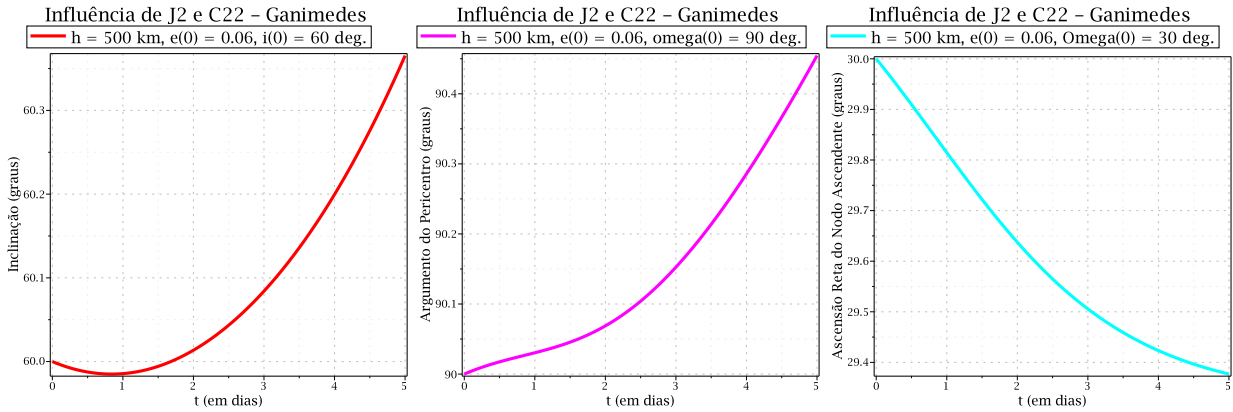


Figura 9 – **Ganim.:** Δi em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 10 – **Ganim.:** $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 11 – **Ganim.:** $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 12-14 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Ganimedes, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 50 dias.

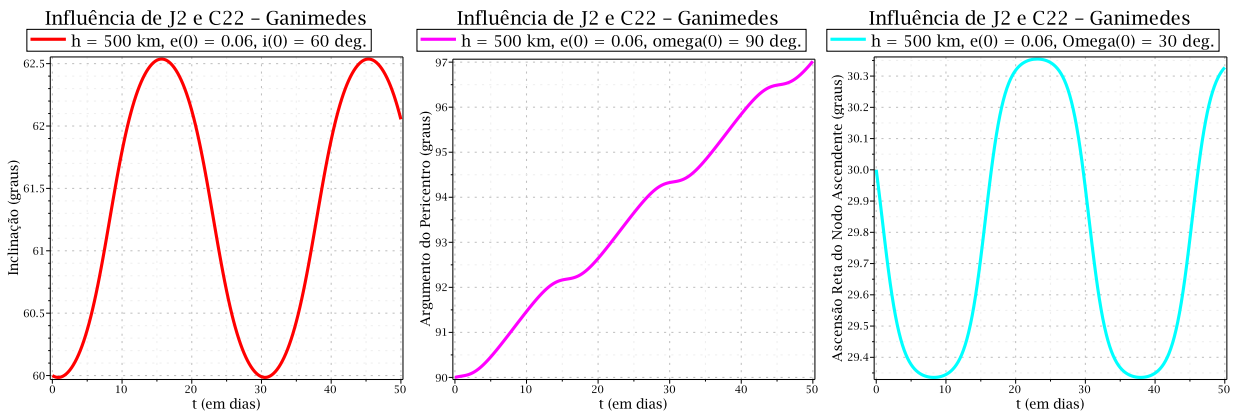


Figura 12 – **Ganim.:** Δi em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 13 – **Ganim.:** $\Delta \omega$ em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 14 – **Ganim.:** $\Delta \Omega$ em 50 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 15-17 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Ganimedes, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 0.01$, ao longo de 5 dias.

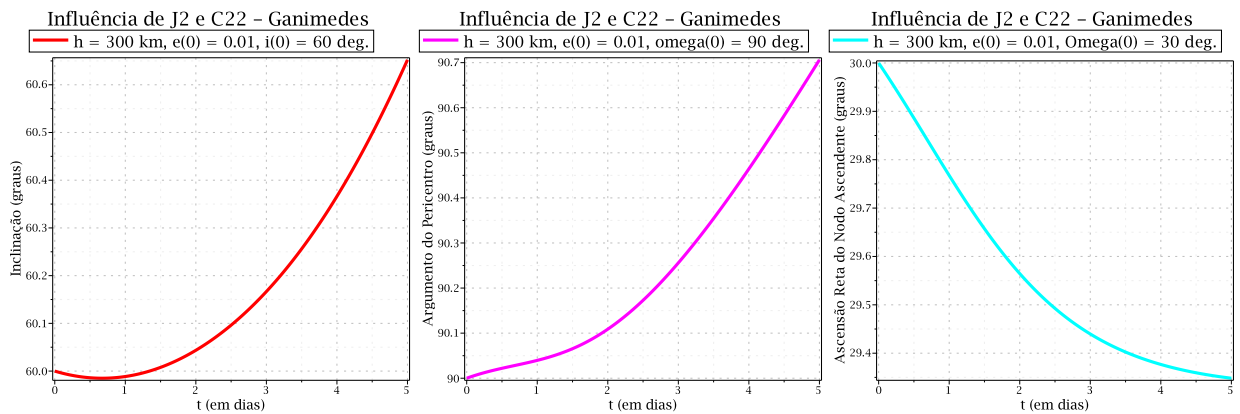


Figura 15 – **Ganim.**: Δi em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 16 – **Ganim.**: $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 17 – **Ganim.**: $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

As Figuras 18-20 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Ganimedes, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 0.01$, ao longo de 50 dias.

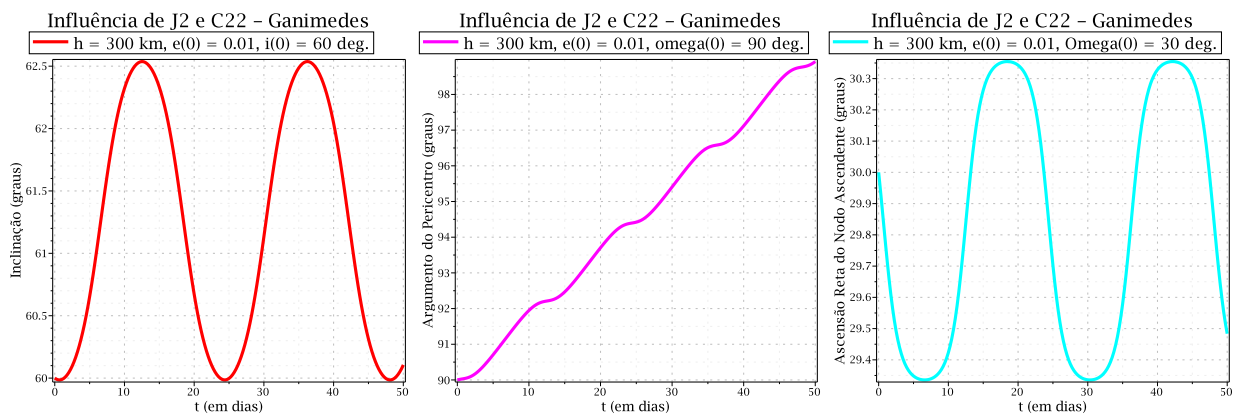


Figura 18 – **Ganim.**: Δi em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 19 – **Ganim.**: $\Delta \omega$ em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 20 – **Ganim.**: $\Delta \Omega$ em 50 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

4.2 Satélite Artificial Orbitando Calisto

As Figuras 21-23 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Calisto, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 30 dias.

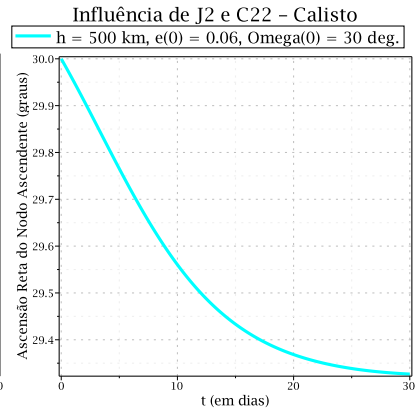
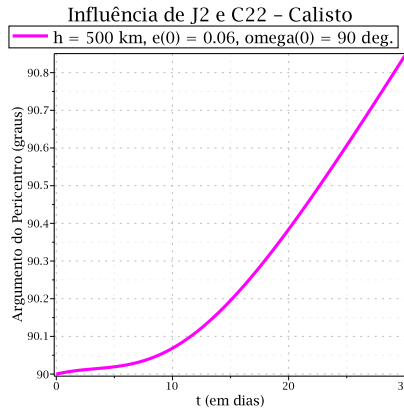
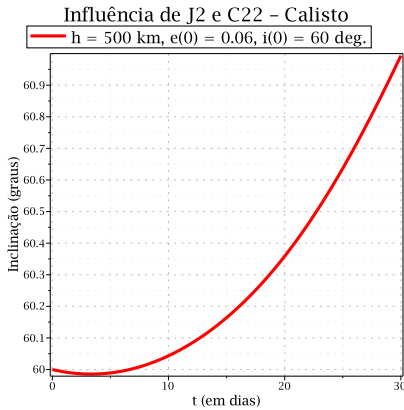


Figura 21 – Calisto: Δi em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 22 – Calisto: $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 23 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 24-26 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Calisto, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 200 dias.

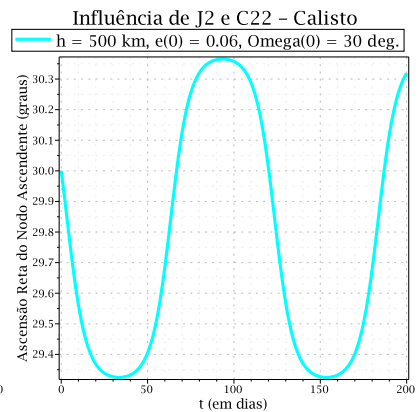
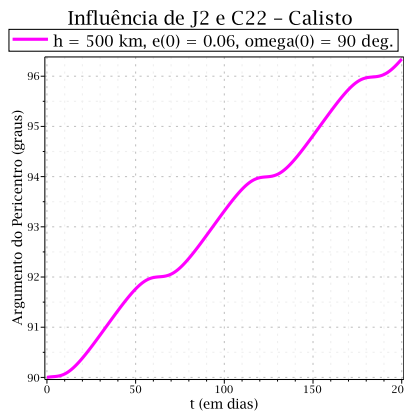
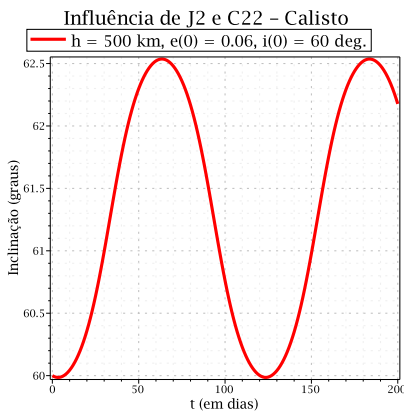


Figura 24 – Calisto: Δi em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 25 – Calisto: $\Delta \omega$ em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 26 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 200 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 27-29 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Calisto, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 001$, ao longo de 30 dias.

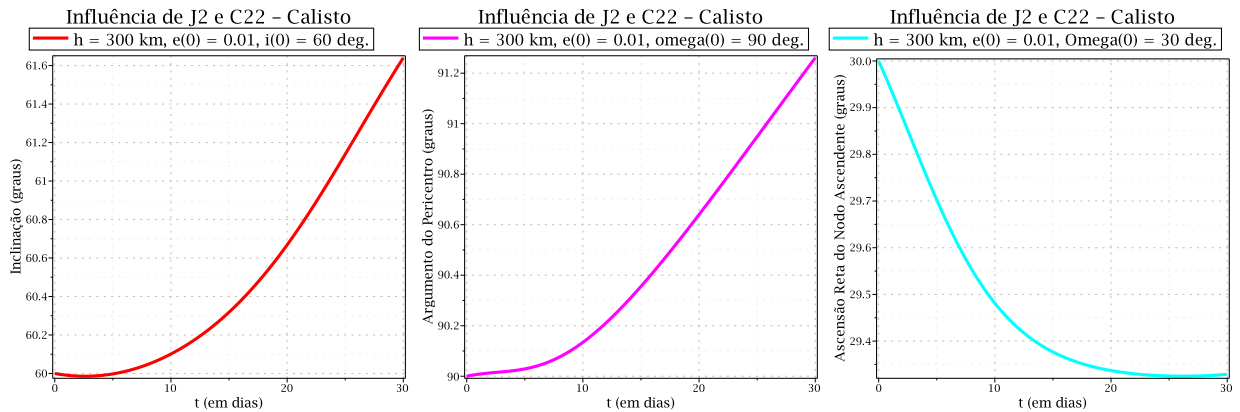


Figura 27 – Calisto: Δi em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 28 – Calisto: $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 29 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

As Figuras 30-32 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Calisto, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 001$, ao longo de 200 dias.

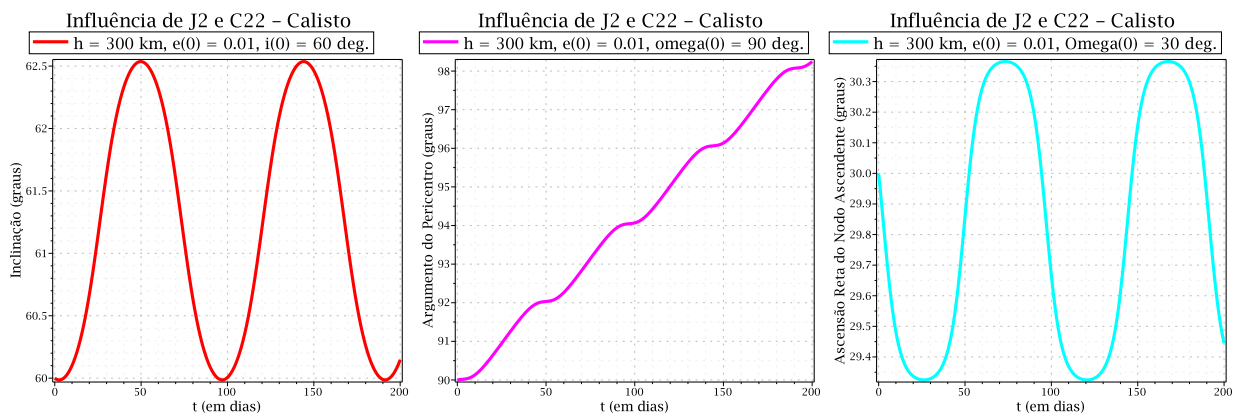


Figura 30 – Calisto: Δi em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 31 – Calisto: $\Delta \omega$ em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 32 – Calisto: $\Delta \Omega$ em 200 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

4.3 Satélite Artificial Orbitando Europa

As Figuras 33-35 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 5 dias.

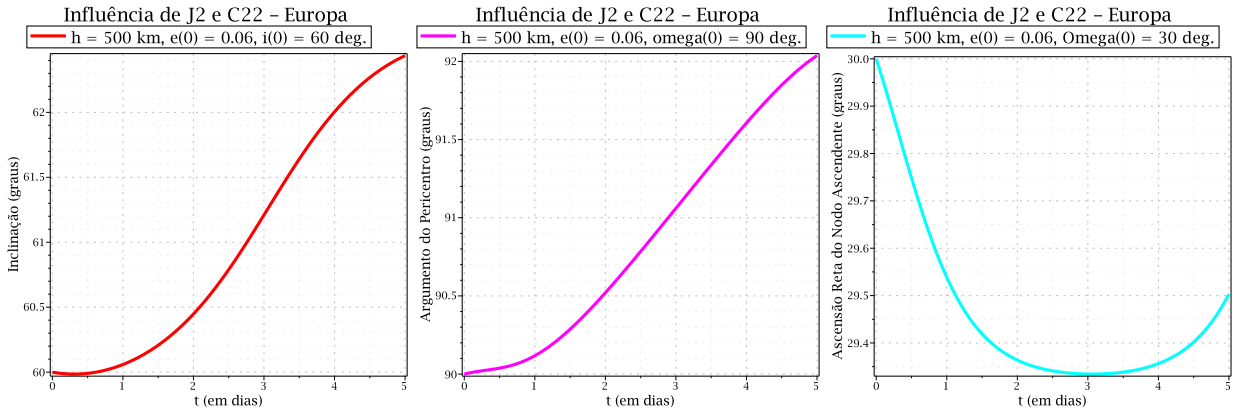


Figura 33 – **Europa:** Δi em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 34 – **Europa:** $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 35 – **Europa:** $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 36-38 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 006$, ao longo de 30 dias.

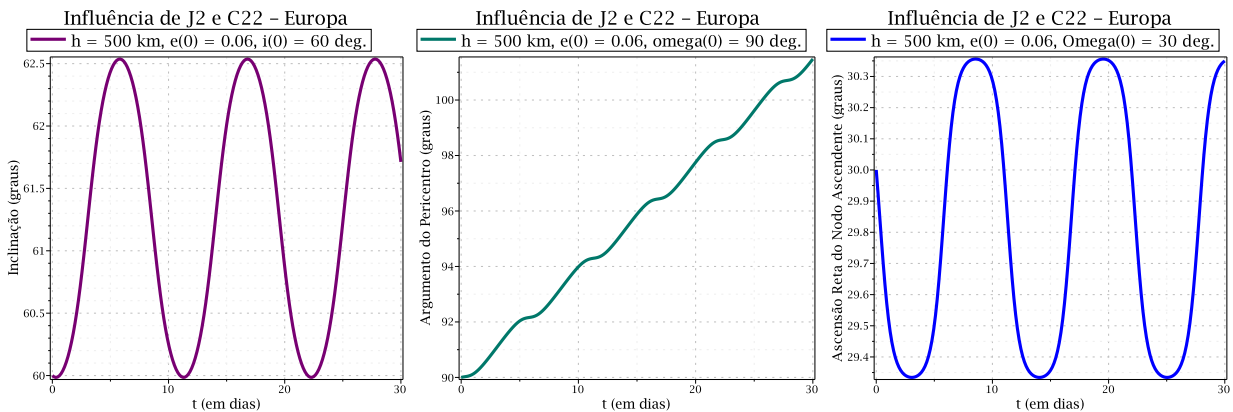


Figura 36 – **Europa:** Δi em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 37 – **Europa:** $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

Figura 38 – **Europa:** $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 006$.

As Figuras 39-41 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 500 \text{ km}$ e $e = 0.06$, ao longo de 90 dias.

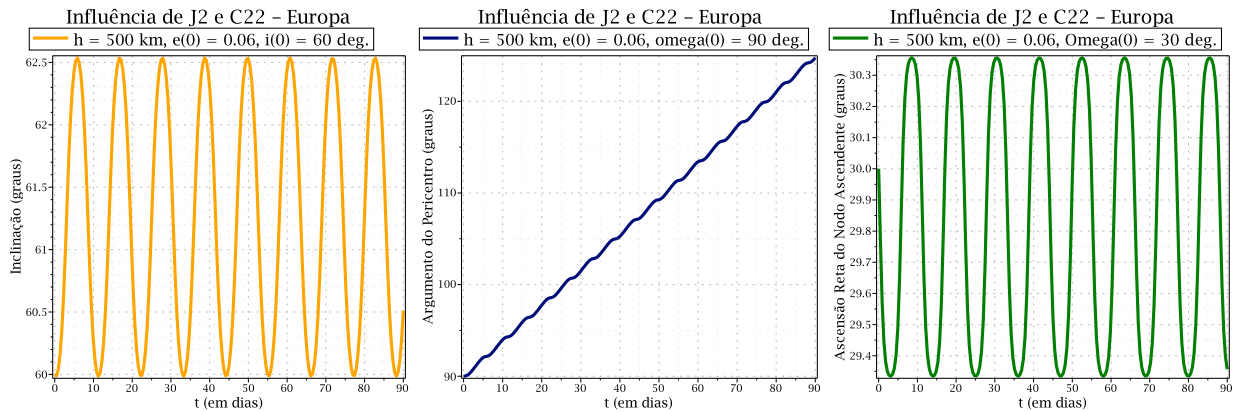


Figura 39 – **Europa**: Δi em 90 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 0.06$.

Figura 40 – **Europa**: $\Delta \omega$ em 90 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 0.06$.

Figura 41 – **Europa**: $\Delta \Omega$ em 90 dias, $h = 500 \text{ km}$, $e = 0.06$.

As Figuras 42-44 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 0.01$, ao longo de 5 dias.

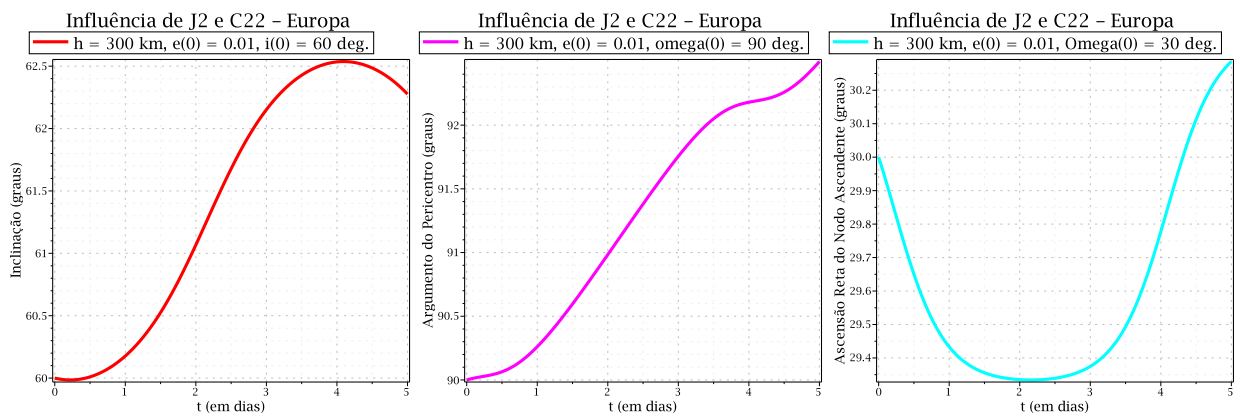


Figura 42 – **Europa**: Δi em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 43 – **Europa**: $\Delta \omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

Figura 44 – **Europa**: $\Delta \Omega$ em 5 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 0.01$.

As Figuras 45-47 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 001$, ao longo de 30 dias.

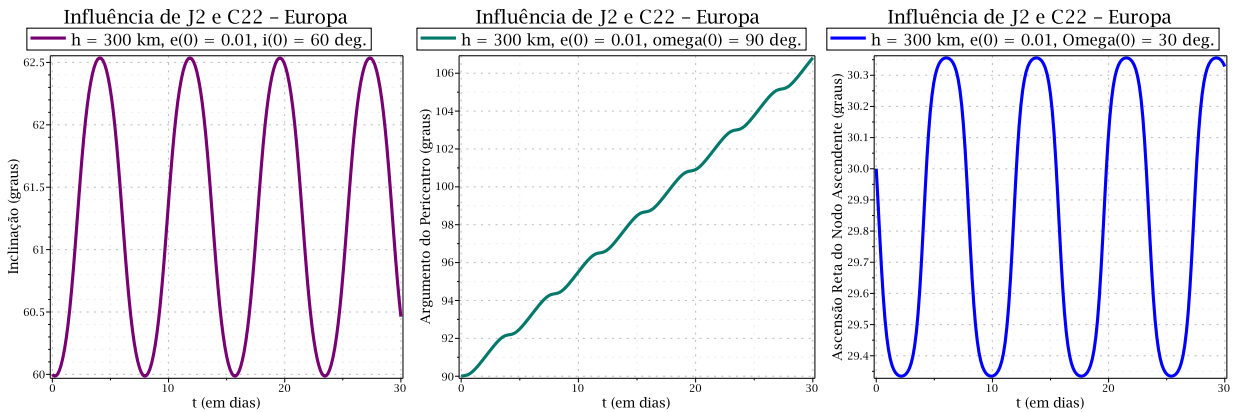


Figura 45 – **Europa**: Δi em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 46 – **Europa**: $\Delta \omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 47 – **Europa**: $\Delta \Omega$ em 30 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

As Figuras 48-50 mostram a variação da inclinação i , do argumento do pericentro ω e da ascensão reta do nodo ascendente Ω , respectivamente, devido à perturbação causada pela distribuição não homogênea de massa de Europa, harmônicos de J_2 e C_{22} , da órbita de um satélite artificial, com $h = 300 \text{ km}$ e $e = 001$, ao longo de 90 dias.

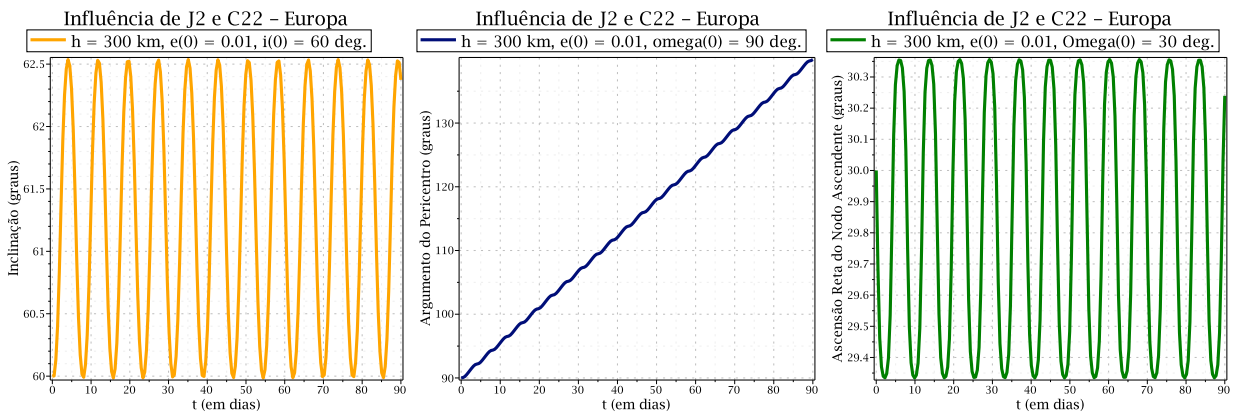


Figura 48 – **Europa**: Δi em 90 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 49 – **Europa**: $\Delta \omega$ em 90 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

Figura 50 – **Europa**: $\Delta \Omega$ em 90 dias, $h = 300 \text{ km}$, $e = 001$.

5 Conclusão

5.1 Análise dos Resultados

Dos trabalhos anteriores (COSTA; PRADO; VILHENA DE MORAES, 2014), sabemos que quando levamos em conta apenas o harmônico de J_2 em R , a variação de i é nula, ou seja, i é constante. Isso também é visível quando observamos $\frac{di}{dt}$ da Equação (3.6), a qual possui apenas C_{22} . Disto, podemos concluir que a variação temporal causada na inclinação, Figuras 9, 12, 15 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, é apenas devido ao harmônico de C_{22} .

Sabemos também de Costa, Prado e Vilhena de Moraes (2014) que, quando consideramos apenas J_2 em R , a variação temporal dos elementos angulares, devido às perturbações seculares, é linear. Mas ao considerarmos a influência de C_{22} , estas variações temporais são periódicas, cujo período é maior do que o período orbital dos satélites em questão. Isto é facilmente verificável comparando o tempo de uma oscilação completa das Figuras 13, 14, 19, 20, 25, 26, 31, 32, 37, 38, 40, 41, 46, 47, 46, 47, com a Tabela 6.

Portanto, concluímos que é extremamente importante considerar a elipticidade equatorial de Ganimedes, Calisto e Europa na expressão do potencial gravitacional para analisar o movimento orbital de satélites artificiais baixos ao redor de tais corpos, dado que a ordem de grandeza de J_2 e C_{22} é a mesma para todos os corpos considerados (vide Tabela 1).

Além destes fatos constatados, é interessante observar que, quanto menor a altitude h do satélite artificial, mais marcante é a influência dos harmônicos na variação temporal de i , ω , Ω . De fato, considerando o mesmo intervalo de tempo Δt , i , ω , Ω variam mais rapidamente na órbita mais baixa, cuja altitude é de 300 km , do que na órbita mais alta, cuja altitude é de 500 km .

5.2 Considerações Finais

O sistema dinâmico que descreve o movimento de satélites artificiais orbitando corpos centrais com distribuição heterogênea de massa é representado por um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias. No caso geral, não sendo possível encontrar solução exata para tal, recorre-se a soluções analíticas ou numéricas aproximadas.

A Teoria de Perturbações oferece vários processos analíticos para solucionar estes tipos de problemas e através destes é possível transformar as equações de movimento, expressando-as em termo de um conjunto de variáveis de conveniente interpretação física e geométrica. Este novo sistema de equações diferenciais é, portanto, conhecido como Equações Planetárias de Lagrange.

Considerando casos particulares para a expressão do potencial perturbador, truncamentos e a eliminação de termos periódicos de curto período, aplicações foram feitas para satélites artificiais orbitando Ganimedes, Calisto e Europa.

Por fim, este tipo de análise mostrada no trabalho, é extremamente importante para o sucesso de missões espaciais lunares. Mensurar os desvios da órbita nominal de um satélite artificial, causados pela ação de forças perturbadoras, é necessário para que sua trajetória seja corrigida, aumentando, assim, sua vida útil e garantindo o cumprimento de seu objetivo no espaço.

Referências

- AIELLO, J. Numerical Investigation of Mapping Orbits about Jupiter's Icy Moons. *Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration*, 2005.
- ARNOLD, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: Springer, 1988.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. New York: Academic Press, 1961.
- CARVALHO, J. P. S.; VILHENA DE MORAES, R.; PRADO, A. F. B. A. Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2009, p. 24, 2009.
- COSTA, M. L. G. T. X.; PRADO, A. F. B. A.; VILHENA DE MORAES. Cálculo da Variação dos Elementos Orbitais de Satélites Lunares Devido à Distribuição Não Uniforme de Massa da Lua. *Relatório Final de Iniciação Científica*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2014.
- FERRAZ-MELLO, S. *Canonical Perturbation Theories: Degenerate Systems and Resonance*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. [S.l.]: Pearson, 2006.
- KAULA, W. M. *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. New York: Dover Publications, 2000.
- MORANDO, B. *Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre*. Paris: Gordon & Breach, 1974.
- NAYFEH, A. H. *Perturbation Methods*. New York: John Wiley & Sons, 2008.
- PRADO, A. F. B. de A. *Trajетórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade*. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001.