



**DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO RECURSIVO  
DO GEOPOTENCIAL DE ALTÍSSIMA ORDEM E GRAU PARA APLICAÇÕES  
ESPACIAIS**

**JANEIRO 2013 – JULHO 2013**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Leonardo Morgan (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)

Email: leomorgan\_@hotmail.com

Prof. Dr. Hélio Koiti Kuga (DMEC/INPE, Orientador)

E-mail: hkk@dem.inpe.br

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi (DMA/UNESP, Co-orientadora)

E-mail: cecilia@feg.unesp.br

Julho 2013

## **AGRADECIMENTOS**

Ao prof. Dr. Hélio Koiti Kuga pela orientação, à prof. Maria Cecília Zanardi pelo grande auxílio na co-orientação deste projeto e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento – CNPq pelo apoio financeiro recebido através da bolsa de iniciação científica junto ao INPE e ao PIBIC.

## RESUMO

Iniciado em Janeiro de 2013, em substituição à Natássia Ramos da Silveira, o objetivo deste trabalho é a implementação e análise de precisão de um algoritmo para o cálculo da aceleração do geopotencial baseado na soma de Clenshaw. Os trabalhos foram implementados em linguagem C pela bolsista anterior e estão sendo implementados no software MATLAB pelo atual bolsista, por ser uma linguagem própria e eficiente para os devidos cálculos. Inicialmente o projeto consiste na criação de um algoritmo que calcula, com altíssima precisão, a variação do geopotencial devido a deformidade terrestre em determinado ponto, com o método recursivo de Clenshaw para os polinômios de Legendre e suas normalizações, além da normalização das expressões do seno e cosseno do ângulo da latitude, e os coeficientes harmônicos esféricos da EGM96 (Earth Gravitational Model 1996). Com tais expressões aplicadas a recursividade das mesmas, pôde-se implementar métodos computacionais mais eficientes, com os graus dos polinômios atingindo a ordem de até 360, sem perder a precisão ou a eficiência numérica. Em continuidade, pôde-se obter a aceleração gerada pelo geopotencial, devido ao cálculo, no algoritmo, das derivadas em coordenadas esféricas com respeito aos ângulos de latitude, longitude e raio médio da órbita do satélite artificial, tais derivadas foram calculadas em rotinas com as devidas recursões das derivadas dos polinômios de Legendre segundo o método de Clenshaw. Devido a normalização completa e recursão das expressões, pôde-se manter a mesma ordem no grau dos polinômios, sem perder a precisão numérica. Na implementação do algoritmo desenvolvido utilizou-se os dados do satélite CBERS. Com a comparação dos resultados obtidos com os dados fornecidos pelo Centro de Controle de Satélites do INPE foi possível verificar e validar o programa de cálculo da aceleração do geopotencial baseado na soma de Clenshaw.

## **CALCULATION OF APPEALS GEOPOTENTIAL HIGHEST ORDER AND DEGREE FOR SPACE APPLICATIONS**

### **ABSTRACT**

The main objective of this project is the implementation and analysis of accuracy of a recursive algorithm to calculate the acceleration of the geopotential based on the Clenshaw sum. A material point, for example an artificial satellite, subject to the attraction of a non-central field, where the earth is disturbed due to the non-spherical and non-symmetrical mass distribution of Earth. This uneven distribution of mass is expressed by so-called spherical harmonic coefficients of the potential of Earth. For a faster calculation, the acceleration derived from the potential is obtained through a series development in terms of fully normalized harmonics coefficients and Legendre polynomials, their derivatives, and recursive variants, also completely normalized, associated with longitude, geocentric latitude and altitude of the satellite mass center. The current work deals with the analysis of more detailed aspects of disturbances in artificial satellites, dealing with the modeling of the Earth's gravitational potential and proposing an algorithm to calculate the acceleration of geopotential. In general, we use recursive equations of high degree and order for the calculation of Legendre polynomials, their derivatives, and other recursions in order to obtain faster processing and numerical accuracy. This recursion can provide numerical errors at each step of recursion, so that for high orders and degrees of harmonics, the accumulated error is quite pronounced. The computational implementation of these algorithms is performed in a compiled language C. With the implementation of this algorithm is possible to calculate the acceleration of geopotential based on the Clenshaw sum for several orbits and different situations. Once proven the favorable numerical properties, the algorithm can be applied to solve a practical problem of orbital space mechanics, and the Brazilian Space Mission.

## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1.1 – Fluxograma do Programa para o Cálculo do Geopotencial.....	20
Figura 1.2 – Fluxograma da Função Principal do Calculo da Aceleração do Geopotencial.....	21
Figura 1.3 – Fluxograma Para o Calculo de $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ .....	22
Figura 1.4 – Fluxograma Para o Calculo de $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ .....	23
Figura 1.5 – Fluxograma Para o Calculo de $\frac{\partial V}{\partial r}$ .....	24
Tabela 4.1 - Geopotencial Terrestre Para N = 50.....	26
Tabela 4.2 - Geopotencial Terrestre Para N = 360.....	26
Tabela 4.3 – Diferença Entre os Geopotencial N = 50 e N = 360.....	27
Tabela 4.4 – Diferença Entre os Programas em C e em MatLab para N = 50 para o geopotencial.....	27
Tabela 4.5 – Diferença Entre os Programas em C e em MatLab para N = 360 para o geopotencial.....	27
Figura 2 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à x ( $\frac{\partial V}{\partial x}$ ), tendo como referência N = 360.....	28
Figura 3 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à y ( $\frac{\partial V}{\partial y}$ ), tendo como referência N = 360.....	29
Figura 4 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à z ( $\frac{\partial V}{\partial z}$ ), tendo como referência N = 360.....	29

## LISTA DE SÍMBOLOS

$V$ e $U$	– potencial do centro de massa
$G$	– constante gravitacional universal
$M$	– massa da Terra
$r$	– distância do CM ao centro da Terra
$a$	– raio equatorial terrestre
$\lambda$	– longitude leste do CM relativo a Greenwich
$\varphi$	– latitude geocêntrica do CM
$x_b, y_b$ e $z_b$	– coordenadas do CM
$x_g, y_g$ e $z_g$	– componentes do sistema terrestre
$\bar{P}_n^m$	– polinômio de Legendre normalizado
$\bar{C}_{nm}$ e $\bar{S}_{nm}$	– coeficientes dos harmônicos esféricos normalizados
$\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ , $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial V}{\partial r}$	– derivadas parciais de primeira ordem

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

UNESP - Universidade Estadual Paulista

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

CM - Centro de Massa

## SUMÁRIO

1 Introdução.....	9
2 Desenvolvimento.....	10
2.1 Método de Clenshaw.....	10
2.1.1 Derivadas Parciais de Primeira Ordem.....	13
2.2 Cálculo Recursivo de $\cos m\lambda$ e $\sin m\lambda$ .....	14
2.3 Sistema de Coordenadas.....	14
2.4 Matrizes $P_{nm}$ pelo Método das Colunas (Holmes e Featherstone ,2002).....	15
2.4.1 Sistema de Coordenadas Para Cálculo do Geopotencial.....	16
3 Materiais e Métodos.....	17
3.1 Cálculo do Geopotencial.....	17
3.2 Cálculo da Aceleração do Geopotencial.....	18
4 Resultados Obtidos.....	25
5 Conclusão.....	31
6 Referências Bibliográficas.....	32



# 1 INTRODUÇÃO

A representação matemática da aceleração do geopotencial é simples para corpos com distribuição igual de massa e forma geométrica perfeita. No entanto, para corpos que não contêm tais propriedades bem definidas, utilizam-se métodos para o cálculo de tal aceleração, esses métodos geralmente envolvem séries, e o grau ao qual quer se atingir tal somatório expressa a precisão que se quer obter.

Há vários efeitos que podem influenciar a órbita de um satélite artificial, que é expressa, segundo o resultado das equações diferenciais de Kepler, em um movimento elíptico em um plano fixo. Entre tais fatores, um dos principais é o causado pela não homogeneidade da massa da Terra, além de sua forma geométrica imperfeita (contando os achatamentos nos pólos). Também pode ser citados o arrasto atmosférico e as perturbações gravitacionais do Sol e da Lua.

O objetivo geral deste projeto é elaborar um algoritmo computacional capaz de calcular, com altíssima precisão e através de métodos envolvendo a normalização e recursão de polinômios, a aceleração do geopotencial terrestre sobre um satélite artificial. Todos os algoritmos estão baseados no programa numérico desenvolvido com Linguagem C por Silveira (2010, 2011 e 2012).

Neste algoritmo, são utilizados os coeficientes harmônicos esféricos da EGM96, além disso, faz-se a recursão para cálculos computacionais mais rápidos, e a normalização para se obter resultados mais precisos, pois assim evita fatorial ou números com Algarismos significativos muito grandes.

A primeiras fases do projeto consistiram no aprendizado da teoria da dinâmica orbital, leis de Kepler, estudo das perturbações da órbita de um satélite artificial, além do estudo de programação computacional e base no software MatLab.

A segunda fase consiste no estudo e implementação do programa do cálculo recursivo do geopotencial de altíssima ordem e grau em linguagem C para o software MatLab.

A terceira fase consiste na comparação de resultados dos programas e avaliação quanto à validade do software para o projeto do programa, com isso, foram gerados tabelas e gráficos com os resultados obtidos pela bolsista anterior Natássia Ramos Silveira (Silveira, 2010, 2011, 2012), e comparados com os resultados do atual bolsista.

Nos tópicos deste relatório encontram-se a teoria envolvida no projeto e as comparações em relação aos resultados a bolsista anterior.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 Método de Clenshaw

Utilizou-se, para os cálculos das acelerações geradas pelo potencial terrestre, o método de Clenshaw, que, de uma forma geral, pode ser representado da seguinte maneira (Fantino e Casotto, 2009)

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^N (v_m^{(1)} \cos m\lambda + v_m^{(2)} \sin m\lambda), \quad (2.1)$$

onde  $N$  é o grau máximo de expansão harmônica esférica, e com  $v_m^{(1)}$  e  $v_m^{(2)}$  sendo calculados da seguinte forma

$$v_m^{(i)} = \sum_{n=\mu}^N c_n^{(i)} \bar{P}_n, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

se  $m$  for maior que 2, então este será o valor de  $\mu$ , porém, se for menor, então assume-se  $\mu = 2$ ; e onde:

$$\bar{P}_n = \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{P}_n^m(\varphi) \quad (2.3)$$

e

$$c_n^{(i)} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} & \rightarrow i = 1, \\ \bar{S}_{nm} & \rightarrow i = 2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Como  $m$  tem ordem fixa, o mesmo pode ser oculto nas representações de  $\bar{p}_n$  e  $\bar{c}_n^{(i)}$ , a fim de simplificar as mesmas.

A fórmula de recursão dos polinômios de Legendre, completamente normalizados, pode ser dada como:

$$\bar{P}_n^m(u) = ug_{nm}\bar{P}_{n-1}^m(u) - h_{nm}\bar{P}_{n-2}^m(u), \quad (2.5)$$

sendo  $m$  variando de  $0$  à  $n-1$ , e  $n$  de  $1$  à  $N$ , então:

$$u = \sin \varphi.$$

$$g_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}} \quad (2.6)$$

$$h_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m-1)(n+m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}} \quad (2.7)$$

Chamando-se  $q$  de

$$q = \frac{a}{r}, \quad (2.9)$$

e multiplicando ambos os lados da equação (2.5) por  $q^n$ , obtém-se:

$$\bar{p}_n - \alpha_{nm}\bar{p}_{n-1} + \beta_{nm}\bar{p}_{n-2} = 0 \quad (2.10)$$

que tem como dados iniciais  $\bar{p}_1 = \alpha_1$  e  $\bar{p}_0 = 1$ , e os coeficientes  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  podem ser definidos como:

$$\alpha_n = uqg_{nm} \quad \text{e} \quad \beta_n = q^2h_{nm}, \quad (2.11)$$

ocultado novamente a dependência de  $m$ . Desta forma, tem-se que a equação (2.10) é a aplicação do *Somatório de Clenshaw* para a equação (2.2), onde dá-se essa relação de recorrência, e para cada  $i = 1, 2$  existe um conjunto de coeficientes  $y_n^{(i)}$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned}
y_{N+2}^{(i)} &= 0 \\
y_{N+1}^{(i)} &= 0 \\
y_N^{(i)} &= c_N^{(i)} \\
y_{N-1}^{(i)} &= c_{N-1}^{(i)} + \alpha_N y_N^{(i)} \\
&\dots \\
y_k^{(i)} &= c_k^{(i)} + \alpha_{k+1} y_{k+1}^{(i)} - \beta_{k+2} y_{k+2}^{(i)} \\
y_{k-1}^{(i)} &= c_{k-1}^{(i)} + \alpha_k y_k^{(i)} - \beta_{k+1} y_{k+1}^{(i)} \\
&\dots \\
y_m^{(i)} &= c_m^{(i)} + \alpha_{m+1} y_{m+1}^{(i)} - \beta_{m+2} y_{m+2}^{(i)}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde  $m \leq n \leq N+2$  são os graus em que se cobre a equação.

Aplicando a Fórmula Recursiva de Clenchaw, tem-se (Fantino e Casotto, 2009):

$$v_m^{(i)} = y_m^{(i)} \bar{p}_m + y_{m+1}^{(i)} (\bar{p}_{m+1} - \alpha_{m+1} \bar{p}_m) \tag{2.13}$$

substituindo em (2.10):

$$v_m^{(i)} = y_m^{(i)} \bar{p}_m - \beta_{m+1} y_{m+1}^{(i)} \bar{p}_{m-1}. \tag{2.14}$$

tendo-se  $\bar{p}_{m-1} = \bar{P}_{m-1}^m \equiv 0$ , obtém-se

$$v_m^{(i)} = y_m^{(i)} \bar{p}_m, \quad i = 1, 2. \tag{2.15}$$

substituindo-se assim na equação (2.1)

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{m=0}^N (y_m^{(1)} \cos m\lambda + y_m^{(2)} \sin m\lambda) \bar{p}_m. \quad (2.16)$$

Com a equação (2.16), vê-se que apenas os termos  $\bar{p}_m$  precisam ser calculados. Para  $n = m$ :

$$\bar{p}_m = f_m \sqrt{1-u^2} q \bar{p}_{m-1}, \quad (2.17)$$

Os coeficientes  $f_m$  são definidos por (Holmes e Featherstone, 2002):

$$f_m = \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}, \quad m > 1 \quad (2.18)$$

onde os valores iniciais de recursão são:  $f_1 = \sqrt{3}$  e  $\bar{p}_0 = 1$ .

### 2.1.1 Derivadas Parciais de Primeira Ordem (Fantino e Casotto, 2009)

Calcula-se inicialmente as derivadas parciais com relação ao sistema de coordenadas esféricas, onde, o termo da longitude ( $\lambda$ ) é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = -\frac{GM}{r} \sum_{m=0}^N m (v_m^{(1)} \sin m\lambda - v_m^{(2)} \cos m\lambda) \quad (2.19)$$

e

$$v_m^{(i)} = y_m^{(i)} p_m, \quad i = 1, 2. \quad (2.20)$$

e os termos  $y_m^{(i)}$  e  $p_m$  já foram definidos pelas equações (2.12) e (2.17).

O termo da longitude ( $\varphi$ ) é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{GM \cos \varphi}{r} \sum_{m=0}^N (v_{m,u}^{(1)} \cos m\lambda + v_{m,u}^{(2)} \sin m\lambda) \quad (2.21)$$

onde

$$v_{m,u}^{(i)} = y_m^{(i)} \frac{dp_m}{du} + y_{m,u}^{(i)} p_m, \quad i = 1, 2. \quad (2.22)$$

e

$$\frac{dp_m}{du} = \left[ (1-u^2) \frac{dp_{m-1}}{du} - up_{m-1} \right] \frac{qf_m}{(1-u^2)^{1/2}} \quad (2.23)$$

$$y_{m,u}^{(i)} = uqg_{n+1,m}y_{m+1,u} + qg_{n+1,m}y_{m+1}^{(i)} - q^2h_{n+2,m}y_{m+2,u}^{(i)}, \quad i = 1,2. \quad (2.24)$$

onde  $u$ ,  $q$ ,  $f_m$ ,  $g_{n,m}$  e  $h_{n,m}$  são calculados, respectivamente, pelas equações (2.6), (2.9), (2.18), (2.7) e (2.8) e os valores iniciais da recursão são  $y_{N+2,u}^{(i)} = y_{N+1,u}^{(i)} = 0$  e  $y_{N+1}^{(i)} = 0$ .

O termo vetor posição ( $r$ ), que liga o *CM* até o centro da Terra é dado por:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \sum_{m=0}^N (v_{m,r}^{(1)} \cos m\lambda + v_{m,r}^{(2)} \sin m\lambda) \quad (2.25)$$

onde

$$v_{m,r}^{(i)} = y_{m,r}^{(i)} p_m, \quad i = 1,2. \quad (2.26)$$

e

$$y_{m,r}^{(i)} = c_m^{(i)}(m+1) + uqg_{n+1,m}y_{m+1,r} - q^2h_{n+2,m}y_{m+2,r}^{(i)}, \quad i = 1,2. \quad (2.27)$$

Inicialmente, na recursão, tem-se  $y_{N+2,r}^{(i)} = y_{N+2,r}^{(i)} = 0$ .

## 2.2 Cálculo Recursivo de $\cos m\lambda$ e $\sin m\lambda$

É necessário aplicar a fórmula recursiva das funções trigonométricas  $\cos(m\lambda)$

e  $\sin(m\lambda)$ , para não ocorrer avaliação das séries. As mesmas são dadas por (Kuga et al, 2000):

$$\cos(m\lambda) = \cos(m-1)\lambda \cos \lambda - \sin(m-1)\lambda \sin \lambda \quad (2.28)$$

$$\sin(m\lambda) = \sin(m-1)\lambda \cos \lambda + \cos(m-1)\lambda \sin \lambda \quad (2.29)$$

### 2.3 Sistema de coordenadas

Como dito anteriormente, as derivadas parciais, pelo Método de Clenshaw, são dadas em coordenadas esféricas, porém, as acelerações devidas ao geopotencial são geralmente trabalhadas no sistema de coordenadas cartesianas ortonormal  $(x_b, y_b, z_b)$ .

Assim, a conversão é dada por:

$$a_{x_b} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) x_b - \left( \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) y_b \quad (2.30)$$

$$a_{y_b} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) y_b + \left( \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) x_b \quad (2.31)$$

$$a_{z_b} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) z_b + \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (2.32)$$

### 2.4 Matrizes $P_{nm}$ pelo Método das Colunas (Holmes e Featherstone ,2002)

Para o calculo do geopotencial considera-se polinômios de Legendre completamente normalizados, partindo do calculo do potencial, tem-se: (Kuga, Medeiros e Carrara, 1983):

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_n^m(\sin \theta) \quad (2.33)$$

Para normalizar os polinômios de Legendre, utilizou-se o Método das Colunas descrito no artigo de Holmes e Featherstone (2002). Esta recursão é a mais utilizada para a computação de  $\bar{P}_{nm}(\theta)$  e está descrita abaixo:

$$\bar{P}_{nm}(\theta) = a_{nm}t\bar{P}_{n-1,m}(\theta) - b_{nm}\bar{P}_{n-2,m}(\theta), \quad \forall n > m \quad (2.34)$$

$$\text{onde} \quad t = \cos \theta \quad (2.35)$$

$$a_{nm} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}} \quad (2.36)$$

e

$$b_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}} \quad (2.37)$$

Quando  $n = m$ , a recursão descrita pela equação (2.34) é utilizada. Os valores iniciais são  $\bar{P}_{0,0}(\theta) = 1$ ,  $\bar{P}_{1,0}(\theta) = \sqrt{3}t$  e  $\bar{P}_{1,1}(\theta) = \sqrt{3}u$ , onde  $u = \sin \theta$ .

$$\bar{P}_{mm}(\theta) = u\sqrt{\frac{2m+1}{2m}}\bar{P}_{m-1,m-1}(\theta), \quad \forall m > 1 \quad (2.38)$$

Em termos computacionais esta transformação produz melhor precisão numérica já que, após a normalização,  $\bar{C}$ ,  $\bar{S}$  e  $\bar{P}$  possuem valores mais condicionados para efetuar os cálculos e não introduzem fatoriais, cujo cálculo pode produzir valores muito grandes e, portanto, suscetíveis de erros numéricos.

#### 2.4.1 Sistema de Coordenadas Para Cálculo do Geopotencial

Como o potencial  $U$  em geral é calculado no eixo fixo na espaçonave, é necessário transformar o sistema de coordenadas Terrestres  $x_g$ ,  $y_g$  e  $z_g$  no sistema de coordenadas local (fixo na espaçonave). Assim (Kuga, Medeiros e Carrara, 1983):



$$r_g = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} \quad (2.39)$$

$$\sin \theta = \frac{Z_g}{r_g}$$

$$\cos \theta = \frac{(X_g^2 + Y_g^2)^{1/2}}{r_g} \quad (2.40)$$

$$\sin \lambda = \frac{Y_g}{(X_g^2 + Y_g^2)^{1/2}} \quad (2.41)$$

$$\cos \lambda = \frac{X_g}{(X_g^2 + Y_g^2)^{1/2}} \quad (2.42)$$

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Como no software MatLab contém diferenças da linguagem C, principalmente na parte que consiste em declarar variáveis e gerar vetores e matrizes, são introduzidos nessa secção as principais diferenças que foram necessárias para o programa que calcula, tanto o geopotencial quanto a aceleração a ser implementado no software. Saliente-se que tais diferenças consistem principalmente nos somatórios.

#### 3.1 Cálculo do Geopotencial

Este algoritmo está baseado no programa numérico desenvolvido em linguagem C por Silveira (2010).

O programa inicia com apenas uma função geopotencial, nesta função é calculado todos os resultados desejados, dentro de loops, como mostra o fluxograma da Figura 1.1.

Inicialmente, o programa carrega os dados  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  do modelo EGM96, e armazena em suas respectivas matrizes. Após carregá-los, o programa pede ao usuário valores de  $x, y, z$

e  $N$ , onde  $x, y, z$  são as coordenadas em que se deseja saber o geopotencial e  $N$  é o grau do polinômio de Legendre, lembrando que  $N$  chega ao máximo de 360 e as coordenadas formam um raio  $r$ , onde seu módulo é igual ao raio da Terra.

Após isso,  $\theta$ ,  $\lambda$  e  $r$  são calculados segundo as equações (2.39, 2.40, 2.41 e 2.42) e então é calculado a matriz  $P_{nm}$  em quatro loops. Dois para os valores quando  $n = m$  e dois para  $n$  diferente de  $m$ .

Para  $n = m$ , o primeiro loop varia  $n$  de 3 até  $(N+1)$ , dentro dele varia o segundo loop em  $m$  de 3 até  $(N+1)$ , e são calculados  $P_{nm}$  segundo a equação (2.38) porém subtraindo-se 1 de cada valor de  $m$ .

Para  $n$  diferente de  $m$ , o loop  $n$  também varia de 3 até  $(N+1)$  e  $m$  varia 1 até  $n$ , então são calculados  $a_{nm}$  e  $b_{nm}$  segundo as equações (2.36 e 2.37), porém, subtraindo-se 1 de cada valor calculado de  $n$  e  $m$ , também calcula-se  $P_{nm}$  segundo a equação (2.34 e 2.35).

Então, calcula-se o  $\cos(m\lambda)$  e  $\sin(m\lambda)$  em um loop que varia de 1 até  $(N+1)$ , e novamente calcula-se as equações (2.28 e 2.29), subtraindo-se 1 do valor de  $m$ .

Com tais matrizes e vetores gerados calcula-se então o geopotencial no ponto dado segundo a equação (2.33) em dois loops,  $n$  variando de 3 a  $(N+1)$  e  $m$  variando de 1 à  $n$ .

Ao final de todos os cálculos, o programa pergunta ao usuário se o mesmo deseja imprimir a tabela de geopotencial, caso afirmativo, o programa imprime os resultados calculados do geopotencial em uma tabela, caso a resposta seja não, o programa se encerra.

### 3.2 Cálculo da Aceleração do Geopotencial

Este algoritmo está baseado no programa numérico desenvolvido em linguagem C por Silveira (2011).

Como no cálculo do geopotencial, o programa conta apenas com uma função principal, cujo fluxograma está ilustrado na Figura 1.2, inicialmente carrega os dados de  $\bar{C}_{nm}$  e  $\bar{S}_{nm}$  do modelo gravitacional, e.g. JEM2\_50, sendo o valor máximo de  $N$  neste modelo igual a 50. Após carregar os dados, o programa pede ao usuário para que entre com os valores da latitude ( $\varphi$ ), da longitude ( $\lambda$ ) e de  $N$ . Após armazenar estes dados, o programa

calcula  $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$  e  $\frac{\partial V}{\partial r}$ . Com estes valores calculados, a função principal calcula as coordenadas cartesianas, que transforma as acelerações que estão em coordenadas esféricas, em coordenadas cartesianas,  $a_{x_b}$ ,  $a_{y_b}$  e  $a_{z_b}$ .

O cálculo de  $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ , cujo fluxograma está ilustrado na Figura 1.3, é o cálculo da derivada parcial de primeira ordem em relação à longitude ( $\lambda$ ). Primeiramente calcula-se, dentro de dois loops, os valores de  $y_m^{(1)}$  e  $y_m^{(2)}$  através das equações (2.12), (2.11), (2.9), (2.8), (2.7), (2.6) e (2.4). Uma importante observação é que um destes loops, que varia  $n$  de  $N$  a  $0$  é invertido, pois inicialmente temos que  $y_{N+2}^{(1)} = y_{N+2}^{(2)} = 0$  e  $y_{N+1}^{(1)} = y_{N+1}^{(2)} = 0$ . Dentro do loop que varia  $m$  de  $0$  a  $N$ , há o cálculo dos termos  $p_m$  pelas equações (2.17), (2.9) e (2.18) quando  $n = m$ . Com os valores de  $y_m^{(1)}$ ,  $y_m^{(2)}$  e  $p_m$ , calcula-se  $v_m^{(1)}$  e  $v_m^{(2)}$ , através da equação (2.20) e  $\cos m\lambda$  e  $\sin m\lambda$ , através das equações (2.28) e (2.29), para cada valor de  $m$ .

No cálculo de  $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ , cujo fluxograma está ilustrado na Figura 1.4, calcula a derivada parcial de primeira ordem em relação à latitude ( $\varphi$ ). Primeiramente calcula-se, dentro de dois loops, os valores de  $y_m^{(1)}$  e  $y_m^{(2)}$  também através das equações (2.12), (2.11), (2.9), (2.8), (2.7), (2.6) e (2.4). Da mesma forma, um dos loops, que varia  $n$  de  $N$  a  $0$  é invertido, pois novamente temos  $y_{N+2}^{(1)} = y_{N+2}^{(2)} = 0$  e  $y_{N+1}^{(1)} = y_{N+1}^{(2)} = 0$ . Também é calculado os valores de  $y_{m,u}^{(1)}$  e  $y_{m,u}^{(2)}$  através das equações (2.24), (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), sendo as condições iniciais dadas por  $y_{N+2,u}^{(1)} = y_{N+2,u}^{(2)} = 0$  e  $y_{N+1,u}^{(1)} = y_{N+1,u}^{(2)} = 0$ . Dentro do loop que varia  $m$  de  $0$  a  $N$ , há o cálculo dos termos  $\frac{dp_m}{du}$  através das equações (2.23), (2.6), (2.9) e (2.18) e os termos  $p_m$  também são calculados pelas equações (2.17), (2.9) e (2.18) quando  $n = m$ . Com os valores de  $y_m^{(1)}$ ,  $y_m^{(2)}$ ,  $y_{m,u}^{(1)}$ ,  $y_{m,u}^{(2)}$ ,  $\frac{dp_m}{du}$  e  $p_m$ , calcula-se  $v_{m,u}^{(1)}$  e  $v_{m,u}^{(2)}$ , através da equação (2.22) e  $\cos m\lambda$  e  $\sin m\lambda$ , através das equações (2.28) e (2.29), para cada valor de  $m$ . Ao final, quando  $m = N$ , é calculada  $\partial_\varphi V$  com a equação (2.21).

No cálculo de  $\frac{\partial V}{\partial r}$ , cujo fluxograma está ilustrado na Figura 1.5, calcula-se a derivada parcial de primeira ordem em relação à distância entre CM e o centro da Terra ( $r$ ). Primeiramente calcula-se, dentro de dois loops, os valores de  $y_{m,r}^{(1)}$  e  $y_{m,r}^{(2)}$  através das equações (2.27), (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9). Novamente, um destes loops, que varia  $n$  de  $N$  a  $0$  é invertido, pois inicialmente temos que  $y_{N+2,r}^{(i)} = y_{N+2,r}^{(i)} = 0$ . Dentro do loop que varia  $m$  de  $0$  a  $N$ , há o cálculo dos termos  $p_m$  pelas equações (2.17), (2.9) e (2.18) quando  $n = m$ . Com os valores de  $y_{m,r}^{(1)}$ ,  $y_{m,r}^{(2)}$  e  $p_m$ , calcula-se  $v_{m,r}^{(1)}$  e  $v_{m,r}^{(2)}$ , através da equação (2.26) e  $\cos m\lambda$  e  $\sin m\lambda$ , através das equações (2.28) e (2.29), para cada valor de  $m$ . Ao final, quando  $m = N$ , é calculada  $\frac{\partial V}{\partial r}$  com a equação (2.25).

Por último, transformam-se as acelerações que estão em coordenadas esféricas para as coordenadas cartesianas através das equações (2.30), (2.31) e (2.32), sendo  $x_b$ ,  $y_b$  e  $z_b$  as coordenadas do ponto em que se deseja calcular as acelerações devidas ao geopotencial.

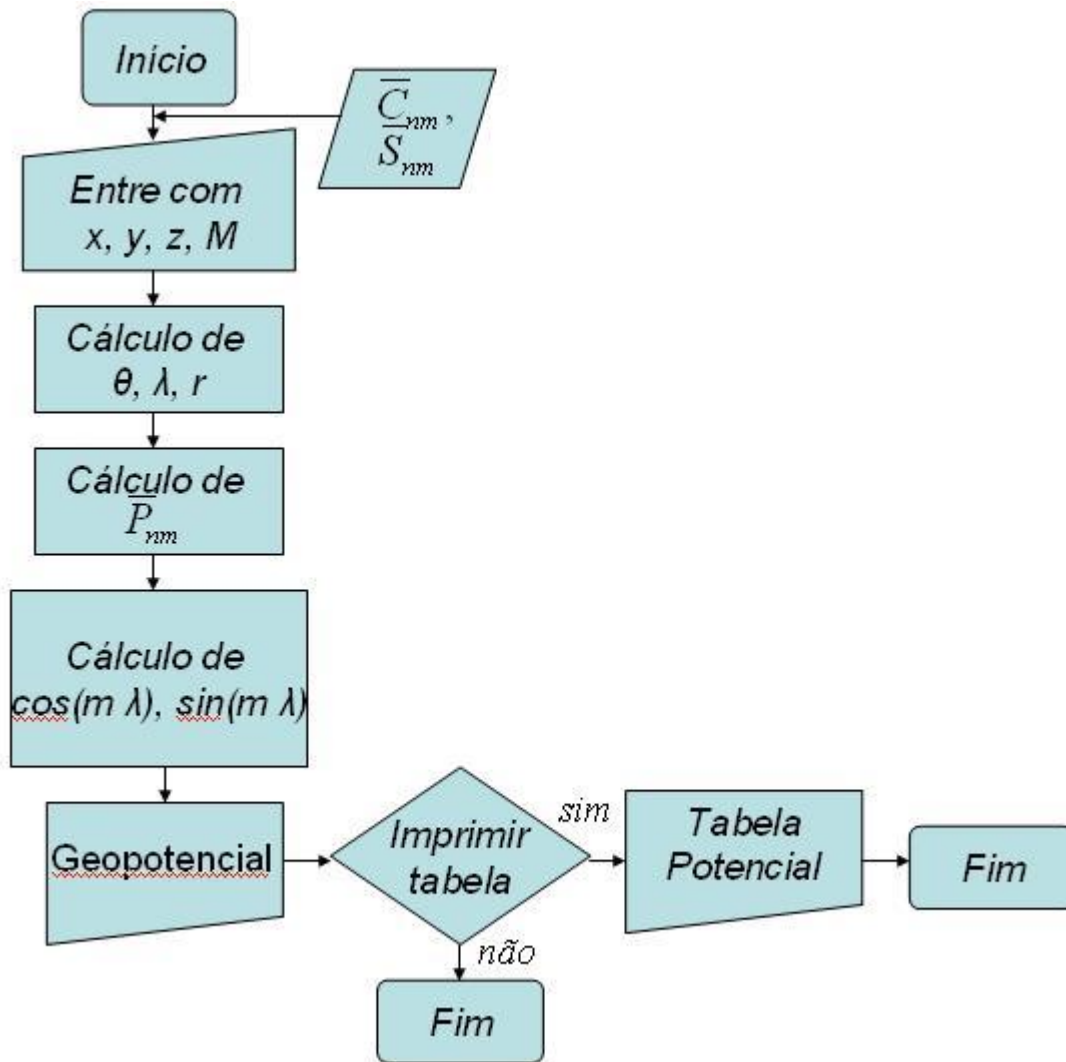


Figura 1.1 – Fluxograma do Programa para o Cálculo do Geopotencial

(adaptado de Silveira (2010)).

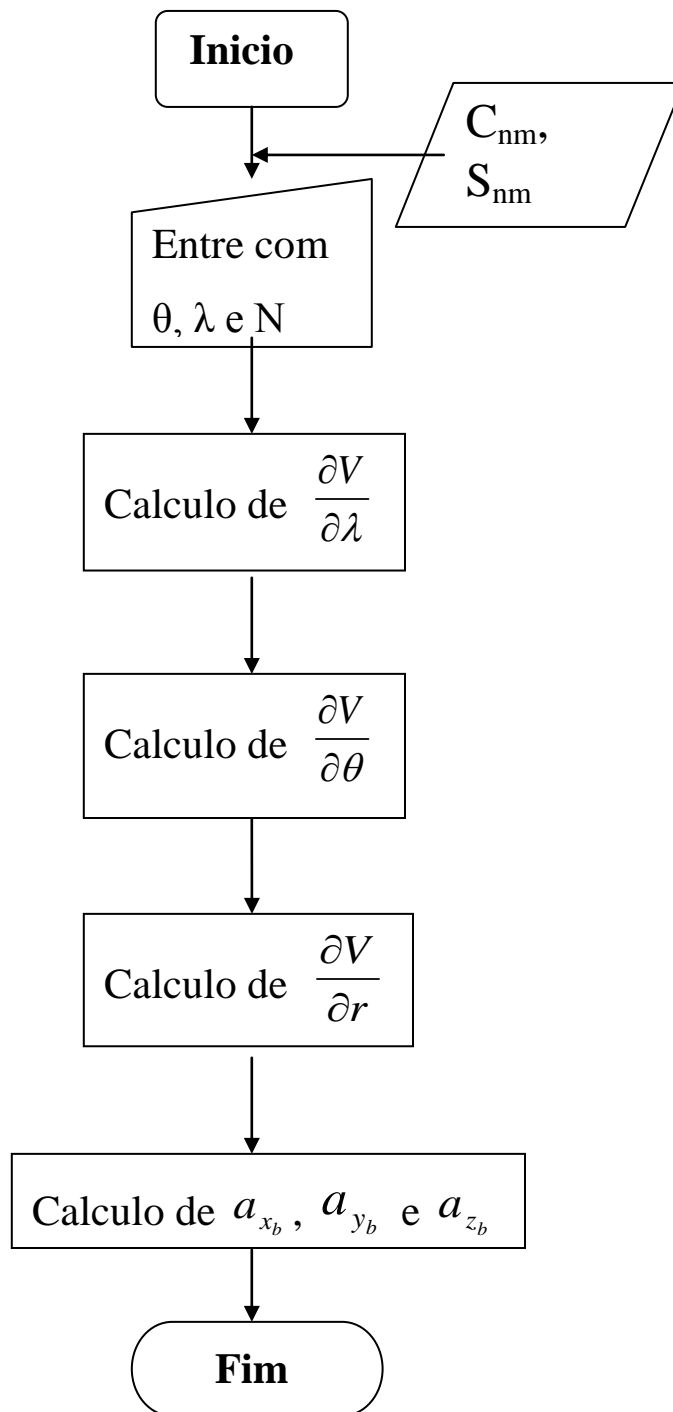


Figura 1.2 – Fluxograma da Função Principal do Cálculo da Aceleração do Geopotencial.  
(adaptado de Silveira (2011)).

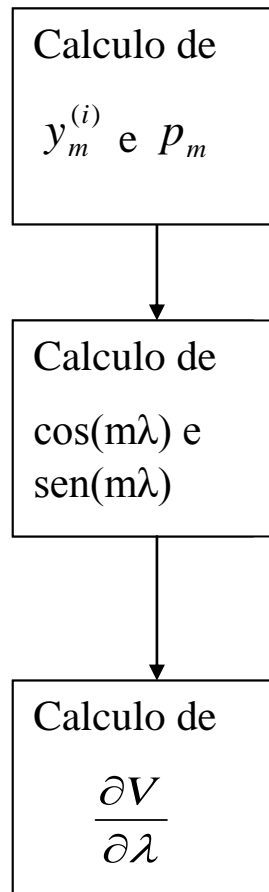


Figura 1.3 – Fluxograma Para o Calculo de  $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ .

(adaptado de Silveira (2011)).

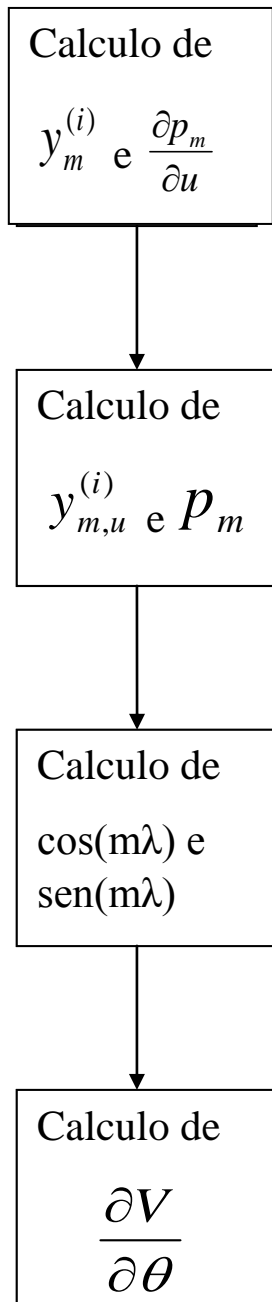


Figura 1.4 – Fluxograma Para o Calculo de  $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ .

(adaptado de Silveira (2011)).



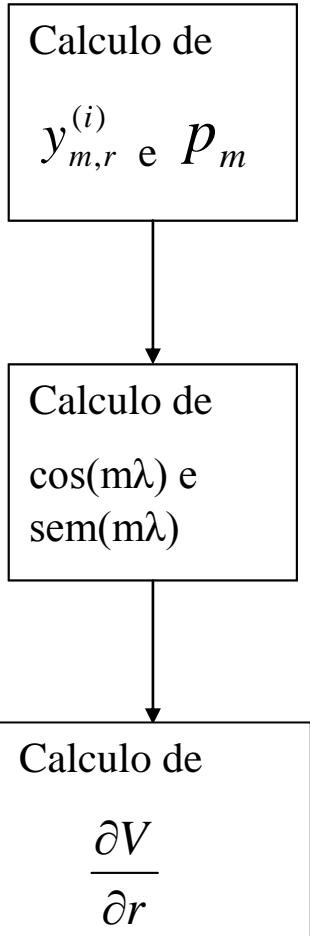


Figura 1.5 – Fluxograma Para o Calculo de  $\frac{\partial V}{\partial r}$ .

(adaptado de Silveira (2011)).

## 4 RESULTADOS OBTIDOS

Como dito anteriormente, comparou-se os resultados obtidos neste projeto com o programa implementado em Matlab, com o programa gerado em linguagem C (Silveira, 2010, 2011), para a análise de resultados. Também são apresentados nesse item os resultados gerados pelo programa em Matlab.

Primeiramente, tem-se nas Tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente, os resultados que foram gerados quando se prende o valor de  $N$  em 50 e 360, variando os valores da latitude ( $\theta$ ) e longitude ( $\lambda$ ), respectivamente, de  $-80^\circ$  à  $80^\circ$  e  $-180^\circ$  à  $180^\circ$ . Com isso tem-se a variação do geopotencial devido a não-esfericidade da Terra nessas coordenadas, sendo  $N$  o valor de sua precisão.

Na Tabela 4.3 tem-se a variação gerada do geopotencial em respeito a diferença quando  $N$  é igual a 360 e  $N$  é igual a 50.

As Tabelas 4.4 e 4.5 estão apresentadas a diferença dos resultados obtidos nos programas implementados em linguagem C e pelo software Matlab da variação do geopotencial devido a não-esfericidade da Terra nos valores de  $N$  igual a 50 e  $N$  igual a 360.

Os gráficos ilustrados nas Figuras 2, 3 e 4 representam as diferenças entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à  $x$  ( $\frac{\partial V}{\partial x}$ ), à  $y$  ( $\frac{\partial V}{\partial y}$ ) e à  $z$  ( $\frac{\partial V}{\partial z}$ ), respectivamente, obtidos da variação de  $N$  de 2 até 32, sendo tomado como referência o valor de  $N = 360$ . Resultados similares foram obtidos pela bolsista anterior Natassia Ramos da Silveira (Silveira,2012).

**Tabela 4.1 - Geopotencial Terrestre Para N = 50**

	$\theta = -180^\circ$	$\theta = -120^\circ$	$\theta = -60^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 180^\circ$
$\lambda = -80^\circ$	0.0310402	0.0302606	3.131422	0.0309442	0.0304270	0.0304310	0.0310402
$\lambda = -40^\circ$	-0.0253048	-0.0259726	-0.0258149	-0.0257747	-0.0259186	-0.0258676	-0.0253048
$\lambda = 0^\circ$	-0.0673673	-0.0673673	-0.0673673	-0.0673673	-0.0673673	-0.0673673	-0.0673673
$\lambda = 40^\circ$	-0.0257747	-0.0259186	-0.0258676	-0.0253048	-0.0259726	-0.0258149	-0.0257747
$\lambda = 80^\circ$	0.0309442	0.0304270	0.0304310	0.0310402	0.0302606	0.0313142	0.0309442

**Tabela 4.2 - Geopotencial Terrestre Para N = 360**

	$\theta = -180^\circ$	$\theta = -120^\circ$	$\theta = -60^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 180^\circ$
$\lambda = -80^\circ$	0.0310340	0.0302533	0.0313218	0.0309408	0.0304282	0.0304389	0.0310340
$\lambda = -40^\circ$	-0.0253096	-0.0259741	-0.0258140	-0.0257917	-0.0259262	-0.0258700	-0.0253096
$\lambda = 0^\circ$	-0.0673737	-0.0673737	-0.0673737	-0.0673737	-0.0673737	-0.0673737	-0.0673737
$\lambda = 40^\circ$	-0.0257917	-0.0259262	-0.0258700	-0.0253096	-0.0259741	-0.02581408	-0.0257917
$\lambda = 80^\circ$	0.0309408	0.0304282	0.0304389	0.0310340	0.0302533	0.0313218	0.0309408

**Tabela 4.3 – Diferença Entre os Geopotencial N = 50 e N = 360**

	$\theta = -180^\circ$	$\theta = -120^\circ$	$\theta = -60^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 180^\circ$
$\lambda = -80^\circ$	-0.0000615	-0.0000726	0.0000762	-0.0000335	0.0000114	0.0000798	-0.0000615
$\lambda = -40^\circ$	-0.0000486	-0.0000141	0.0000088	-0.0001703	-0.0000764	-0.0000236	-0.0000486
$\lambda = 0^\circ$	-0.0000638	-0.0000638	-0.0000638	-0.0000638	-0.0000638	-0.0000638	-0.0000638
$\lambda = 40^\circ$	-0.0001703	-0.0000764	-0.0000236	-0.0000486	-0.0000141	0.0000088	-0.0001703
$\lambda = 80^\circ$	-0.0000335	0.0000114	0.0000798	-0.0000615	-0.0000726	0.0000762	-0.0000335

**Tabela 4.4 – Diferença Entre os Programas em C e em MatLab para N = 50 para o geopotencial ( $\times 10^{-8}$ )**

	$\theta = -180^\circ$	$\theta = -120^\circ$	$\theta = -60^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 180^\circ$
$\lambda = 80^\circ$	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.0000000	0.0000000	1.0000000
$\lambda = 40^\circ$	0.0000000	0.0000000	-1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
$\lambda = 0^\circ$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
$\lambda = -40^\circ$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-1.0000000	0.0000000
$\lambda = -80^\circ$	0.0000000	-1.0000000	0.0000000	1.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

**Tabela 4.5 – Diferença Entre os Programas em C e em MatLab para N = 360 para o geopotencial ( $\times 10^{-8}$ )**

	$\theta = -180^\circ$	$\theta = -120^\circ$	$\theta = -60^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\Theta = 60^\circ$	$\theta = 120^\circ$	$\theta = 180^\circ$
$\lambda = 80^\circ$	-0.9999999	0.0000000	0.0000000	-1.0000000	-1.9999999	0.0000000	-0.9999999
$\lambda = 40^\circ$	0.9999999	0.9999999	0.0000000	-1.9999999	0.9999999	1.9999999	0.9999999
$\lambda = 0^\circ$	-5.9999999	-5.9999999	-5.9999999	-5.9999999	-5.9999999	-5.9999999	-5.9999999
$\lambda = -40^\circ$	-1.0000000	0.9999999	1.9999999	0.9999999	0.0000000	0.0000000	-1.0000000
$\lambda = -80^\circ$	-1.0000000	-1.9999999	-0.9999999	0.9999999	0.0000000	0.0000000	-1.9999999

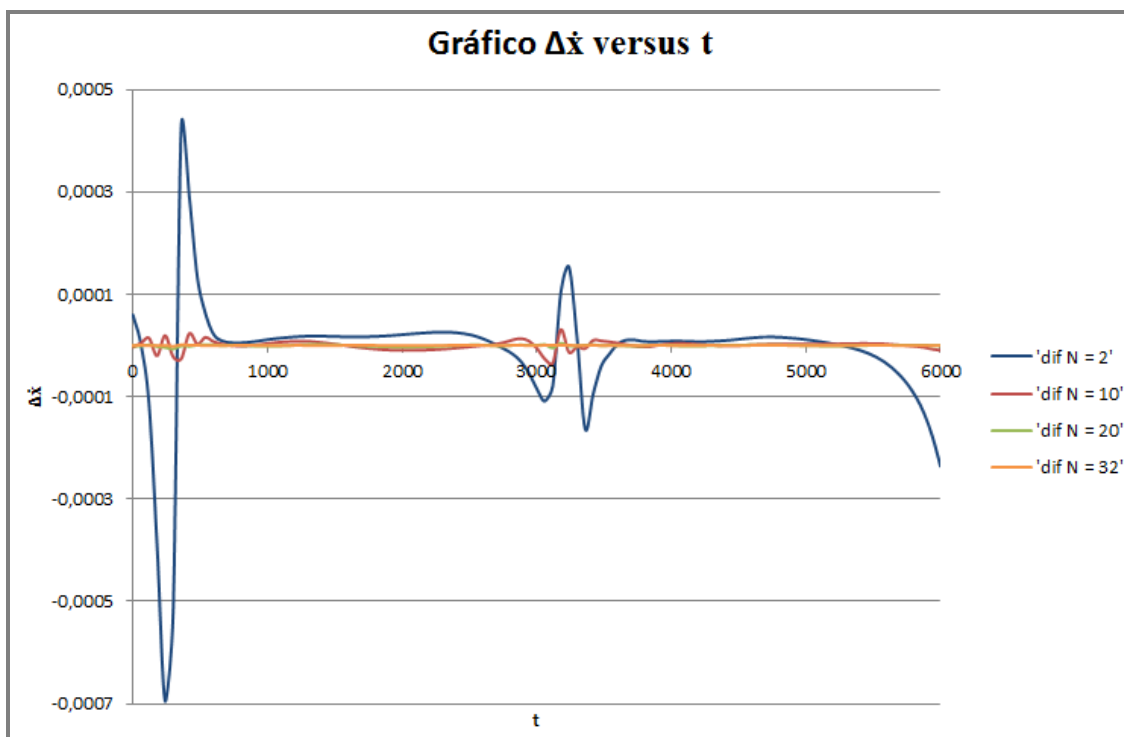


Figura 2 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à x

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right), \text{ tendo como referência } N = 360$$

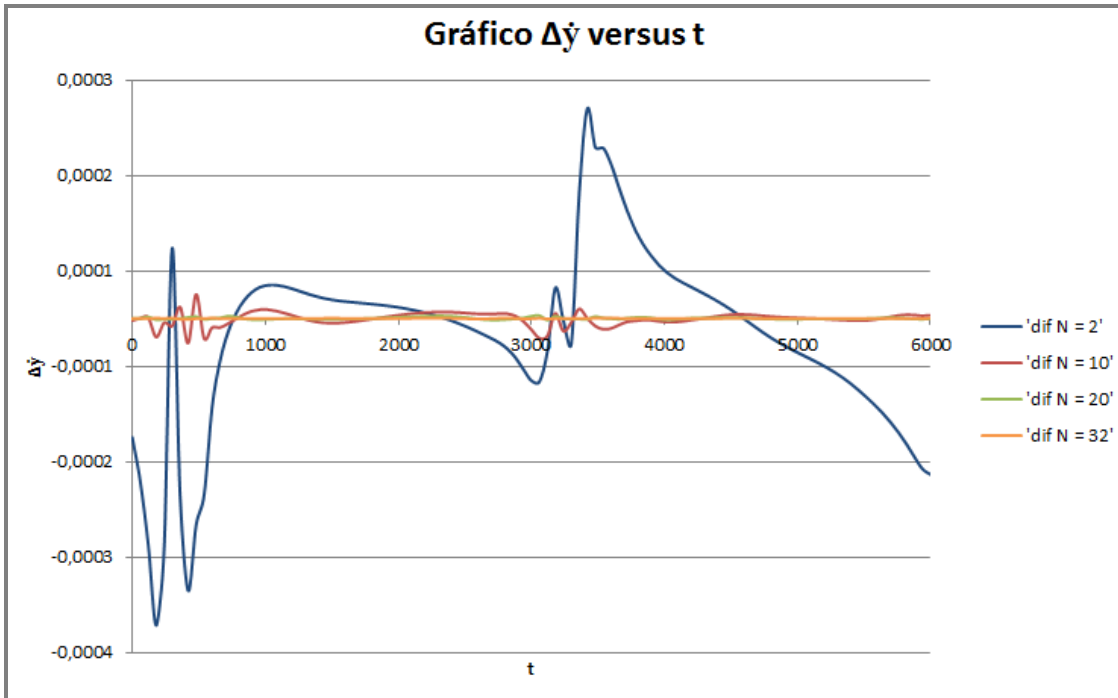


Figura 3 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à  $y$  ( $\frac{\partial V}{\partial y}$ ), tendo como referência  $N = 360$ .

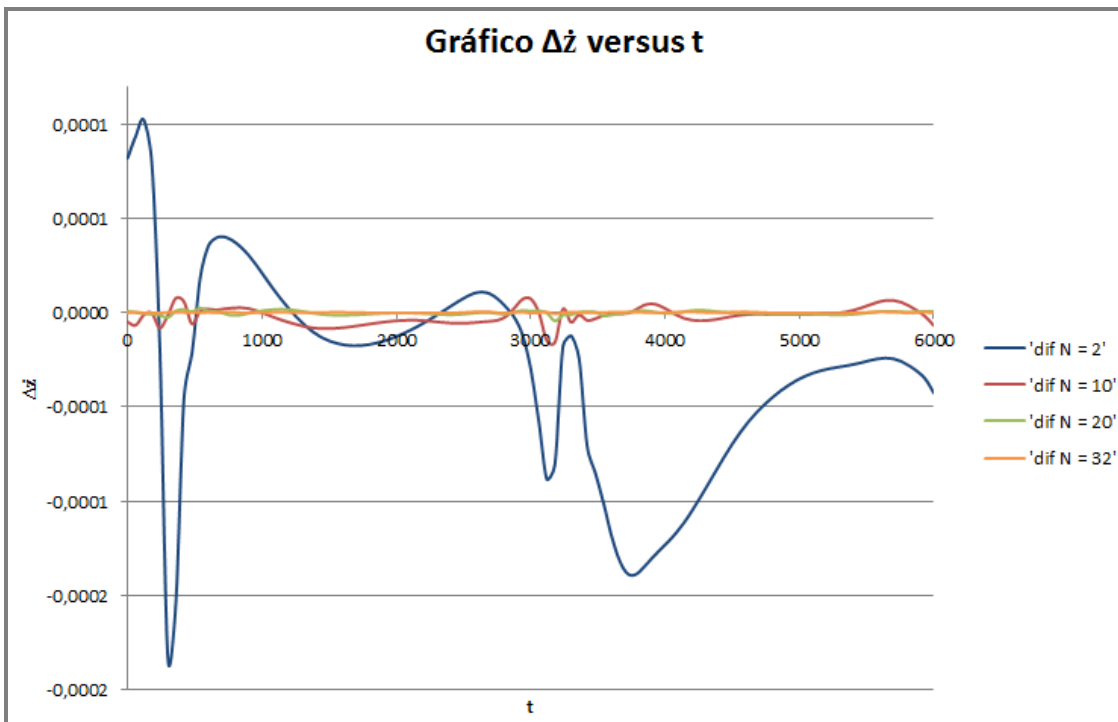


Figura 4 – Gráfico da diferença entre os valores da derivada parcial de primeira ordem em relação à  $z$  ( $\frac{\partial V}{\partial z}$ ), tendo como referência  $N = 360$ .

Através das Tabelas 4.5 e 4.6 é possível observar que as diferenças entre o programa do cálculo recursivo do geopotencial em linguagem C e software MatLab são zero em alguns pontos coordenados, além disso, tais diferenças em outros pontos são na ordem de  $10^{-8}$ , tornando o programa em software MatLab apto para os cálculos do geopotencial.

Além disso, a partir dos dados obtidos pela bolsista anterior, vemos que conforme  $N$  se aproxima de 360, a diferença chega a cerca de  $10^{-17}$ . Assim quanto maior o valor de  $N$ , mais próximo ele será do valor de  $N = 360$ , considerado o valor exato. Com isso, fica comprovado que o programa tende a um único valor, garantindo suas propriedades numéricas.

## CONCLUSÃO

Neste projeto foram criados algoritmos implementados no software MATLAB para o cálculo do geopotencial e das acelerações a eles associadas. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados já obtidos em linguagem C por Silveira (2010, 2011, 2012) com as diferenças entre os resultados sendo da ordem de  $10^{-8}$ .

Deste modo, foi possível verificar e validar o programa de cálculo da aceleração do geopotencial baseado na soma de Clenshaw.

O método para o cálculo da aceleração do geopotencial baseado na soma de Clenshaw possui uma diferença significativa durante o cálculo. Normalmente, nos métodos tradicionais utilizados para este cálculo são considerados os primeiros termos dos coeficientes de harmônicos esféricos ( $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ ), com isso, os últimos termos, que são menores, acabam não sendo considerados, causando uma diferença no resultado final. Já no método utilizado neste projeto, o cálculo é feito primeiramente com os últimos termos dos coeficientes de harmônicos esféricos, garantindo que eles serão considerados corretamente e que o resultado final será mais próximo do valor real.

Através dos resultados favoráveis obtidos neste projeto, será possível verificar a possibilidade de implementação deste novo método baseado na soma de Clenshaw no Centro de Controle de Satélites do INPE.

Durante o período de desenvolvimento deste projeto, o bolsista participou da Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia da UNESP – Campus de Guaratinguetá (fevereiro de 2013), do WORKSHOP de Dinâmica de Satélites Artificiais realizado na UNIFFESP – São José dos Campos em 24 de maio de 2013, e de palestras da área organizadas na UNESP – Campus de Guaratinguetá.



## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fantino, E., Casotto, S.. “Methods of harmonic synthesis for global geopotential models and their first-, second- and third-order gradients”. *Journal of Geodesy*, 83, p.595-619, 2009.

Heiskanen, W.A.; Moritz, H. “Physical geodesy.” Freeman, San Francisco, 1967.

Holmes, S. A.; Featherstone, W.E. "A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions". *Journal of Geodesy*, 76, p. 279-299, 2002.

Holmes, S.A.; Featherstone, W.E. "Extending simplified high-degree synthesis methods to second latitudinal derivatives of geopotential". *Journal of Geodesy*, 76, p. 447-450, 2002.

Kuga, H. K.; Rao, K. R.; Carrara, V. “Satélites Artificiais – Movimento Orbital”, 2000.

Kuga, H. K.; Medeiros, V. M.; Carrara, V. “Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial”. Relatório INPE-2735-RPE/433, 1983.

Lundberg, J.B.; Schutz, B.E, "Recursion formulas of Legendre functions for use with nonsingular geopotential models". *Journal of Guidance*, V. 11(1), Jan.-Feb., 1988, p. 31-38.

Pines, S. "Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives". *AIAA Journal*, V. 11(11), p. 1508-1511, 1973.

Tscherning, C. C.; Poder, K. “Some geodetic applications of Clenshaw summation.” *Boll. Geodesia e Sci. Affini*, Xli, no. 4, 1982.

Silveira, N. R. “Cálculo Recursivo de Geopotencial de Altíssima Ordem e Grau para Aplicações Espaciais”, Relatório Final de Bolsa de Iniciação Científica CNPq/INPE, Biblioteca on-line do INPE, 2010.

Silveira, N. R. “Cálculo Recursivo de Geopotencial de Altíssima Ordem e Grau para Aplicações Espaciais”, Relatório Final de Bolsa de Iniciação Científica CNPq/INPE, Biblioteca on-line do INPE, 2011.

Silveira, N. R. “Desenvolvimento e Implementação do Cálculo Recursivo de Geopotencial de Altíssima Ordem e Grau para Aplicações Espaciais”, Trabalho de Conclusão de Curso, UNESP – Campus de Guaratinguetá, 2012

Silveira, N. R., Kuga, H. K., Zanardi, M. C. “Cálculo Recursivo de Geopotencial de Altíssima Ordem e Grau para Aplicações Espaciais”, Resumos do XV Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, p. 118, 2010.