



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



ESTUDO DE MANOBRAS PRÓXIMAS POR UM CORPO CELESTE

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Gabriela Martins Cruz (Fatec SJC, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail- gabrielamartinscruz@hotmail.com

Prof. Dr. Jorge Kennety Silva Formiga (DMC/INPE, Orientador)

E-mail- jkennety@yahoo.com.br

INPE
São José dos Campos
Julho 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço, ao Prof. Dr. Jorge Kennety Silva Formiga, orientador que dedicou conhecimento, tempo, esforço e acima de tudo paciência para o sucesso desse trabalho.

Agradeço ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade oferecida e por dispor suas instalações.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo apoio financeiro recebido por meio da bolsa de Iniciação Científica, junto ao programa PIBIC/INPE.

A Deus, agradeço pro tudo.

RESUMO

O presente trabalho analisa as características orbitais de um satélite, levando em consideração as manobras de *swing-by* de uma partícula em três sistemas, sendo eles: sistema Terra- Lua, sistema Sol-Júpiter e o sistema Sol-Saturno. O objetivo deste trabalho é encontrar a variação da energia através dos valores do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (e) antes e depois de cada manobra realizada, verificando assim, a distância de aproximação que um veículo deve ter para se obter o menor consumo de combustível possível. Na realização de múltiplas manobras de *swing-by*, será possível analisar também o número de manobras suficientes para o veículo escapar ou colidir com o planeta secundário sendo para o primeiro caso a Lua, no segundo caso Júpiter e no terceiro caso, Saturno.

Palavras-Chave: “Manobras assistidas; Manobras de *Swing-by*; Semi-eixo maior; Excentricidade; Energia; Momento angular; *Patched conic*”.

ABSTRACT

That monograph analyses the orbital characteristics of a satellite, taking into consideration the *swing-by* maneuver of a particle in the systems, being Earth-Moon, Sun-Jupiter and Sun-Saturn systems. The purpose of this work is to find energy range as well as angular momentum, through the semi-major axis value and eccentricity after and before of each performed maneuver, examining the approaching distance that a vehicle should have to obtain the least possible consumption of fuel. At the multi *swing-by* maneuver performance it will also be possible to analyse the number of sufficient maneuvers for the vehicle to scape or collide with to the secondary planet being Moon the first, Jupiter the second and Saturn third.

Keywords: “Assisted maneuvers; *Swing-by* maneuvers; Semi-major axis; Eccentricity; Energy; Angular maneuvers; Patched conic”.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- ÓRBITAS ENVOLVIDAS NA MANOBRA.....	9
FIGURA 2- 1ª LEI DE KEPLER.....	12
FIGURA 3- 2ª LEI DE KEPLER.....	12
FIGURA 4- SISTEMA DE CORPOS PARA A DETERMINAÇÃO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA.....	13
FIGURA 5- ÓRBITA CIRCULAR.....	14
FIGURA 6- MANOBRA DE <i>SWING-BY</i> E ALGUMAS VARIÁVEIS.....	15
FIGURA 7- MANOBRA DE <i>SWING-BY</i>	16
FIGURA 8- ÓRBITA ELÍPTICA.....	18
FIGURA 9- ÓRBITA PARABÓLICA.....	19
FIGURA 10- ÓRBITA HIPERBÓLICA.....	19
FIGURA 11- <i>SWING-BY</i> NO PLANO.....	21
FIGURA 12- SOMA VETORIAL ENVOLVIDA NO <i>SWING-BY</i>	23
FIGURA 13- POSSIBILIDADES DE DIREÇÃO DE DEFLEXÃO DO VETOR VELOCIDADE.....	23
FIGURA 14- FLUXOGRAMA DO PROGRAMA.....	25
FIGURA 15- OBTENÇÃO DO ÂNGULO Ψ	26

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS.....	17
TABELA 2- TIPOS DE ÓRBITAS	18
TABELA 3- ELEMENTO FÍSICO DO PLANETA- LUA	26
TABELA 4- NÚMERO DE MANOBRAS E ENERGIA PARA O SISTEMA TERRA-LUA	27
TABELA 5- ELEMENTOS FÍSICO DO PLANETA- JÚPITER.....	31
TABELA 6- CONDIÇÕES INICIAIS: SISTEMA SOL-JÚPITER.....	32
TABELA 7- NÚMERO DE MANOBRAS E ENERGIA PARA O SISTEMA SOL- JÚPITER.....	32
TABELA 8- ELEMENTO FÍSICO DO PLANETA- SATURNO.....	37
TABELA 9- NÚMERO DE MANOBRAS E ENERGIA PARA O SISTEMA SOL- SATURNO.	38
TABELA 10- VALORES DA MANOBRA REALIZADA.....	38

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	8
1.1- Objetivos do Trabalho	9
1.2- Motivação	10
1.3- Propostas Metodológicas	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1- História.....	11
2.2- Problema restrito de três corpos.....	13
2.3- Patched conics.....	14
2.4- A Manobra de <i>Swing-by</i>	15
3. MEODOLOGIA	21
3.1- Modelo Matemático	21
4. RESULTADOS	26
4.1- Resultados para o sistema Terra-Lua.....	26
4.2- Resultados para o sistema Sol- Júpiter.	31
4.3- Resultados para o sistema Sol – Saturno.	37
5. CONCLUSÃO.....	43
6. TRABALHOS FUTROS.....	44
7. REFERÊNCIAS	45

1. INTRODUÇÃO

Em manobras espaciais assistidas por gravidade, um veículo espacial faz uma passagem próxima de um corpo celeste para ganhar ou perder energia, velocidade e momento angular, diminuindo assim gastos de combustíveis em missões interplanetárias. Estas manobras assistidas por gravidade são denominadas manobras de *swing-by*. O tema desse trabalho consiste em estudar os efeitos característicos das órbitas de um veículo espacial após realizar manobras de *swing-by* de uma partícula em três sistemas, sendo eles: sistema Terra Lua, sistema Sol-Júpiter e o sistema Sol-Saturno.

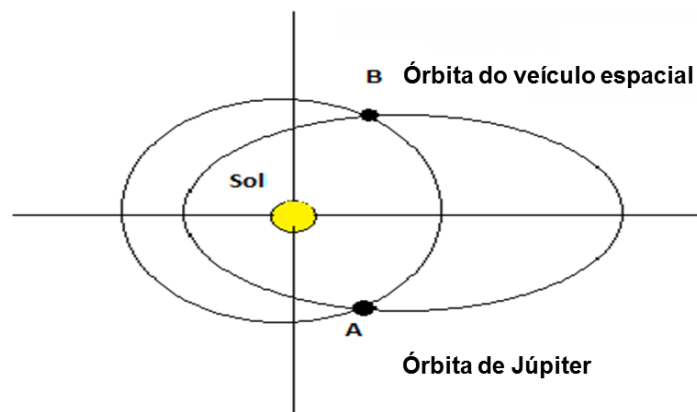
Segundo Prado (1993), um veículo espacial é controlado por diversas forças físicas tais como: força gravitacional exercida pelos planetas e/ou pelo Sol, força atmosférica, força eletromagnética, pressão de radiação solar, além de seus próprios propulsores. As forças físicas tais como a distância e a duração da manobra podem ser decisivas para determinar a trajetória destes veículos espaciais em suas missões interplanetárias. Visando a economia de combustível e considerando as circunstâncias que as diversas forças podem aplicar, utilizam-se diferentes modelos para a determinação das órbitas destes veículos em questão. A determinação das trajetórias em veículos do sistema solar é de extrema importância para a análise das missões e deve levar em consideração o efeito gravitacional de diversos corpos que pode ser resolvido através de métodos já existentes, como visto na literatura de Prado (2001).

Em diversas missões interplanetárias utilizam-se técnicas para a determinação de trajetórias, como descrito na literatura de Prussing (1993). Neste estudo, enfatizamos as trajetórias assistidas por gravidade, onde o método utilizado é conhecido por *patched conic*. O método *patched conic* apresentado por Broucke (1988) e Prado (1993), auxilia a análise para missões espaciais envolvendo corpos celestes, um veículo espacial (descrito por uma partícula), corpos celestes ou uma nuvem de partículas.

O método *patched conic* tem como ideia básica um problema que estudado pode assumir um sistema formado por três corpos, sendo eles: um primário de maior massa, um secundário de massa finita e uma órbita com o corpo primário de uma partícula (veículo espacial) de massa infinitesimal. A partícula permanece orbitando o corpo primário e faz uma

passagem próxima do secundário. De acordo com Formiga (2011), a descrição matemática das manobras espaciais em estudo consiste na mudança de trajetória que um veículo espacial de massa infinitesimal (M_3) executa quando passa próximo a um corpo de massa M_2 ($M_2 \gg M_3$), com órbita em torno de um corpo de maior massa ($M_1 > M_2$). Devido à manobra de *swing-by* no plano, a aproximação do corpo M_3 com o corpo M_2 pode gerar uma perda ou um ganho de energia. Ao passar próximo do corpo secundário, a partícula pode ter sua energia, velocidade e elementos orbitais alterados, em relação ao corpo primário. Essas variações são determinadas com base nos instantes anteriores e posteriores a essa passagem próxima, sempre ocorrendo em uma região conhecida como esfera de influência, isto é, em uma região em torno de um planeta onde se deseja realizar a manobra em que a atração gravitacional dele é predominante sobre os demais planetas (PRADO, 2001), como observado na Figura 1.

Figura 1- Órbitas envolvidas na manobra.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

1.1- Objetivos do Trabalho

O objetivo desse trabalho é investigar a variação de energia, variação de velocidade e a variação dos elementos orbitais antes e depois da realização das manobras para se obter o número de possíveis manobras onde se verifica a distância ótima de aproximação que um veículo deve ter para se obter menor consumo de combustível possível. Na simulação de múltiplas manobras de *swing-by*, será possível analisar também o número de manobras suficientes para que o veículo possa escapar ou colidir com o planeta secundário.

1.2- Motivação

Devido ao grande avanço tecnológico nas atividades aeroespaciais, o estudo das manobras de *swing-by* tem sido de grande importância, pois, assim os veículos podem completar suas missões com maior eficiência, podendo reduzir o gasto de combustível. Essa é a motivação do presente trabalho; Manter o sucesso de uma missão, utilizando as manobras de *swing-by*, utilizando as forças já existentes no sistema, diminuindo o custo da missão.

1.3- Propostas Metodológicas

Para atender os objetivos deste trabalho, a metodologia de pesquisa utilizada foi dividida em 4 etapas de estudos, sendo elas: Realização de pesquisa; Estudo teórico; montagem dos algoritmos e Geração de resultados para simulações em outros sistemas. O estudo de manobras próximas por um corpo celeste já foi desenvolvido e apresentado por Broucke (1988) e Prado (2001) onde apresentam o problema restrito de três corpos. A determinação de parâmetros para uma nova trajetória após a manobra realizada por um corpo celeste é demonstrada por um modelo numérico, avaliando a variação de energia, momento angular e velocidade.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1- História

A fundamentação teórica apresenta definições, aplicações e conceitos empregados para a resolução do problema abordado em nosso estudo. Este projeto se fundamenta no problema para transferir um veículo espacial entre duas órbitas dadas, mapeando a quantidade de *swing-by* necessário para realizar a missão com o máximo de economia de combustível. Para isso, realiza-se uma revisão teórica sobre a evolução do estudo das manobras de *swing-by*, que tem início com o problema restrito de dois corpos e finaliza com manobras realizadas em viagens atuais.

Para que se possa determinar com precisão uma devia órbita, deve-se analisar sua magnitude, forma e orientação (FELIPE, 2000). As manobras orbitais foram estudadas há muito tempo por científicos tais como: Newton, Descartes, Leibnitz, Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange, Laplace, Legendre, Gauss, Poisson, Encke e Hamilto (JACOB, 2009).

Segundo Jacob (2009), em 1687, a partir de três observações do corpo, Isaac Newton propôs o primeiro método para a determinação da órbita de um corpo celeste. Aplicando o método de Newton pela primeira vez, Edmund Halley calculou a órbita de 24 cometas e também descobriu o cometa Halley o qual passa próximo da Terra a cada 76 anos.

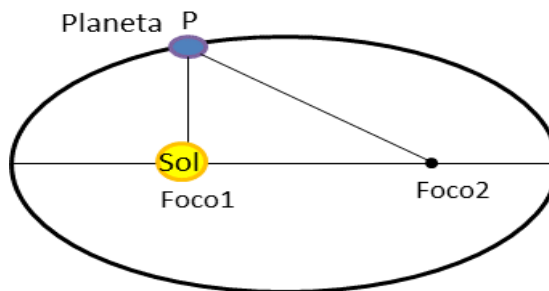
Em 1744, Leonard Euler, modelou o método matemático para a determinação das órbitas e o francês Lambert generalizou o método utilizado onde posteriormente Lagrange fundamentou a teoria de ambos. Mais tarde Laplace desenvolveu um novo método baseado na teoria já apresentada para a determinação das órbitas (JACOB, 2009).

Segundo Marec (1979), o problema da transferência de satélite de uma órbita para outra tendo o mínimo de consumo de combustível é um fator relevante em certas missões por isso altera-se a posição, velocidade e a massa do satélite em um dado instante utilizando valores de um instante posterior, para se obter a economia do combustível.

Os estudos da mecânica celeste foram iniciados em meados do século XIX, em que através de algumas leis apresentadas por Kepler o problema restrito de dois corpos foi formalizado. As leis de Kepler utilizadas para tal estudo são:

A Figura 2 apresenta o modelo da 1ª Lei de 1609, onde a órbita de cada planeta é uma elipse tendo o Sol por um dos focos.

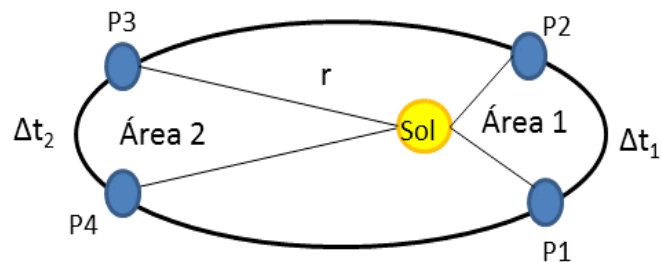
Figura 2- 1ª Lei de Kepler.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Na Figura 3 tem-se o modelo da 2ª Lei, apresentado em 1609 onde, a linha que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Figura 3- 2ª lei de Kepler



Fonte: Adaptado de (2001)

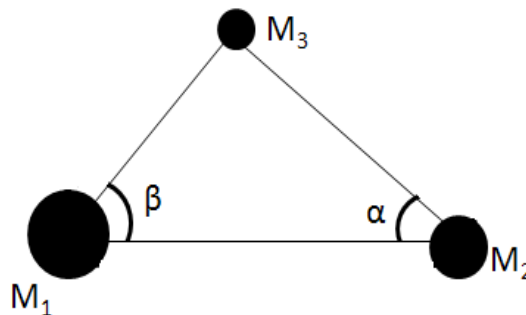
Em 1619, Kepler escreveu a 3ª Lei onde o quadrado do período (T) de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média (a) ao Sol, como pode ser visto na Equação (1).

$$T^2 \propto a^3 \quad (1)$$

2.2- Problema restrito de três corpos

Prado (2001) supõe que existe 3 corpos sendo que M_1 ($M_1 > M_2$) e M_2 ($M_2 \gg M_3$) tem massa finita e o terceiro corpo M_3 , possui massa desprezível e orbita o sistema formado pelos outros dois corpos. Nesse trabalho, temos como exemplo o sistema Terra Lua, onde M_1 é a Terra, M_2 é a Lua e M_3 é uma aeronave espacial. Existem diversas versões do problema restrito de três corpos, a mais simples e por isso a mais utilizada para o estudo das trajetórias lunares e interplanetárias é a versão do problema restrito plano circular de três corpos, onde se deseja conhecer o movimento de M_3 . A princípio, M_3 orbita M_1 dentro da sua esfera de influência, nesse período, o efeito de M_2 é desprezível. Após a manobra realizada, M_3 entra em movimento dentro da esfera de influência de M_2 , fazendo com que o efeito de M_1 seja desprezível. A Figura 4 apresenta o modelo da posição dos corpos para o Problema restrito de três corpos (JACOB, 2009).

Figura 4- Sistema de corpos para a determinação da esfera de influência



Fonte: Adaptado de Jacob (2009)

Existem mais duas modelagens apresentadas por Prado (2001) que são:

Problema restrito plano-elíptico, onde as órbitas de M_1 e M_2 podem ser elípticas.

Problema restrito plano circular fixo, onde M_1 e M_2 são corpos fixos e M_3 orbita o sistema.

2.3- Patched conics

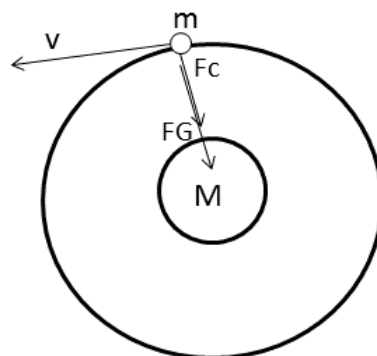
A manobra de *patched conics* pode ser encontrada nas literaturas de Broucke (1988) e Prado (1993), ela pode ser dividida em três partes distintas. Para todos os casos, o modelo simples de dois corpos é utilizado.

De acordo com Felipe (2000), na primeira parte, M_2 deve ser negligenciado e o movimento de M_3 em torno de M_1 é considerado uma órbita Kepleriana;

Na segunda parte, admite-se que M_3 entra na esfera de influência de M_2 , com isso, o efeito de M_1 é negligenciado e como o movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico.

Quando está em órbita hiperbólica, M_3 pode ser “expulso” por M_2 com isso, M_3 cruza novamente a esfera de influência de M_2 retomando a órbita Kepleriana em volta de M_1 . Na última parte, o veículo espacial já está em uma nova órbita Kepleriana em torno de M_1 , assim sendo, o *swing-by* está completo. A Figura 5 apresenta a manobra de *patched conics* em uma órbita circular com suas devidas forças.

Figura 5- Órbita circular.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Onde:

F_c = Força centrípeta

FG = Força gravitacional

M = Massa da Terra

m = massa do satélite

V = velocidade

R = raio da Terra

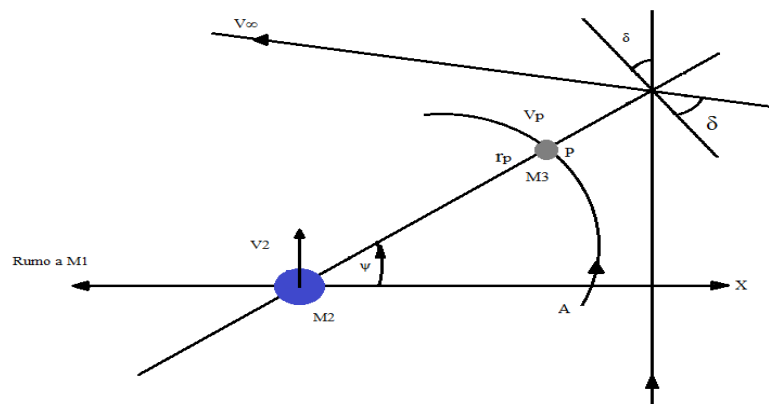
r = distância entre os centros

h = altitude do satélite

2.4- A Manobra de *Swing-by*

A técnica da manobra *swing-by* é considerada muito importante para os custos da missão e por isso é utilizada para diminuir o consumo de combustível nas viagens espaciais. De acordo com Santos (2009), encontra-se informações que para a otimização das missões, o veículo deve partir da Terra com energia suficiente apenas para entrar em uma órbita elíptica e então cruza com a órbita de outro corpo celeste (Lua, Júpiter, Saturno, etc.) e nesse momento, as alterações gravitacionais da energia completam a missão. Em um sistema formado por dois corpos principais, assume-se que ambos estão em órbitas circulares em torno do seu centro de massa e um terceiro corpo de massa desprezível que está se movendo sob a atração gravitacional dos dois primários. Pode-se dizer que a manobra de *swing-by* é executada ao redor do corpo secundário do sistema. Na Figura 6 é mostrado o uso de sucessivos *swing-bys* com a Lua.

Figura 6- Manobra de *swing-by* e algumas variáveis.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Em Prado (2001) e Broucke (1988), encontramos o modelo matemático onde encontramos as seguintes informações:

V_{∞} = é a magnitude da velocidade do veículo espacial quando este atinge infinito referente ao corpo M_2 ;

r_p = é a distância de máxima aproximação com o ponto P entre M_2 e M_3 ;

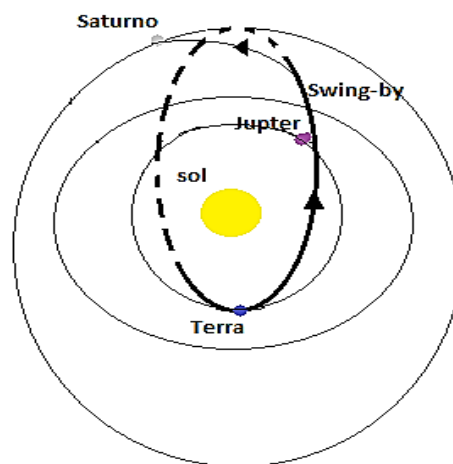
$\psi = \epsilon$ é o ângulo entre a linha que conecta M_2 a P (a linha do periapse) e a linha $M_1 - M_2$.

Com essas observações, consta-se que a conservação de energia do problema de dois corpos pode ser relacionada com a constante de Jacob, que é a velocidade no periapsis ou com a magnitude de velocidade do satélite V_∞ (FELIPE, 2000).

Para grandes valores desse número das três variáveis, as equações do movimento são integradas numericamente sendo tanto para frente como para traz no tempo (PRADO, 2001) até que a aeronave esteja a uma distância, onde o efeito do corpo celeste (M_2) pode ser desconsiderado e o sistema formado pelo Corpo celeste (M_1) e a aeronave pode ser considerada um sistema do problema de dois corpos.

Alguns exemplos citados por Prado (2001) mostram missões que envolvem *swing-bys* e foram bem sucedidas como: a missão *Voyager*, a qual foi para planetas exteriores do sistema solar iniciando sua missão a partir de Júpiter (Figura 7) utilizando a gravidade dos planetas visitados (KOHLHASE e PENZO, 1977).

Figura 7- Manobra de *swing-by*.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Outras missões em que se obteve sucesso utilizando as trajetórias *swing-by*, são encontradas em Prado (2001):

O uso do planeta Vênus para uma viagem da Terra até Marte; (SZEBEHELY, 1965);

O uso do planeta Júpiter para fazer uma forte alteração na inclinação do plano orbital de uma nave espacial, de modo que ela seja transferida para uma órbita que tenha um plano orbital perpendicular à eclíptica. Essa manobra já foi realizada na prática, com a finalidade de observar os polos do Sol na missão Ulysses (CARVELL, 1985);

O uso de *swing-by* com a Terra, ou outro planeta interior, para fornecer energia suficiente ao veículo espacial para que ele atinja o exterior do Sistema Solar (BYMES e D'AMARIO, 1982);

O uso de sucessivos *swing-bys* com a Lua para obter geometrias desejáveis nas órbitas das naves espaciais ao redor da Terra, tais como os satélites que observam fenômenos solares (FARQUHAR e DUNHAM, 1981).

Pode-se dividir a manobra completa em três partes distintas e em todas elas o modelo simples de dois corpos é utilizado. Segundo Prado (2001), as definições são:

Primeiro, considera-se uma órbita Kepleriana, onde, M_2 negligencia o movimento de M_3 ao redor de M_1 ;

Segundo, admite-se que M_3 entra na esfera de influência de M_2 , e o efeito de M_1 é negligenciado. Com isso, o movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico.

Quando o veículo espacial está em uma nova órbita Kepleriana ao redor de M_1 e o *swing-by* está completo.

De acordo com a Tabela 1, podem-se classificar os tipos de órbitas, de acordo com a excentricidade. As órbitas podem ser classificadas em: elíptica, circular, parabólica e hiperbólica, o que determina a forma de cada órbita é o valor da excentricidade dela, sendo:

Tabela 1- Classificação das órbitas

Circular	$e = 0$
Elíptica	$0 < e < 1$
Parabólica	$e = 1$
Hiperbólica	$e > 1$

Fonte: Autor (2012)

Segundo Felipe (2000) pode-se conferir os resultados das órbitas e classifica-las tendo como referencia os valores da energia e momento angular, como pode ser observado na Tabela 2.

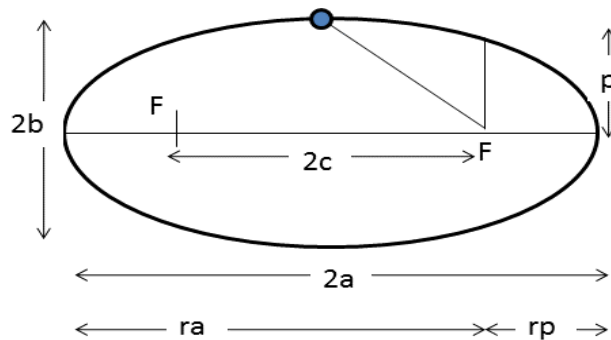
Tabela 2- Tipos de órbitas

Tipo de órbita	Energia	Momento angular
Elíptica direta	Negativa	Positivo
Elíptica retrógrada	Negativa	Negativo
Hiperbólica direta	Positivo	Positivo
Hiperbólica retrógrada	Positivo	Negativo

Fonte: Autor (2012)

De acordo com a Tabela 1, a Figura 8 apresenta uma órbita elíptica, a Figura 9 apresenta uma órbita parabólica e a Figura 10, apresenta uma órbita hiperbólica.

Figura 8- Órbita elíptica



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Onde:

a = semi-eixo maior da elipse

b = semi-eixo menor da elipse

c = distância do centro ao foco

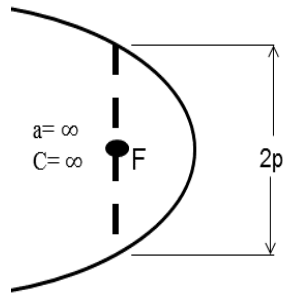
f = foco

p = perímetro da cônica

r_a = distância do apogeu

r_p = distância do perigeu

Figura 9- Órbita Parabólica.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Sendo:

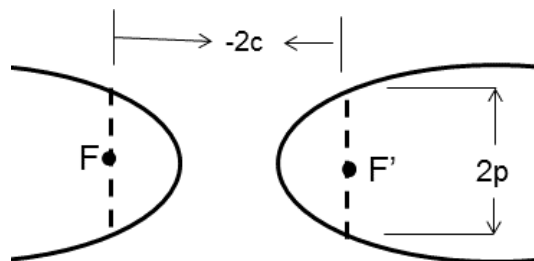
a = semi-eixo maior da elipse

c = distância do centro ao foco

f = foco

p = perímetro da cônica

Figura 10- Órbita Hiperbólica.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Onde:

c = distância do centro ao foco

f = foco

p = perímetro da cônica

Outro conceito sobre a manobra assistida por gravidade citado por Prado (2001), foi originado no JPL (*Jet Propulsion Laboratory*) com uma missão múltiplo-planetária. Nesse caso em particular engloba-se especialmente, a grande viagem entre os planetas, concebida

por Gary Flandro(1996). Abaixo, segue algumas aplicações bem conhecidas encontradas em Prado (2001):

1973- 74: - Mariner 10 para Vênus + Mercúrio + Mercúrio; 1972: - Pioneer 10 para Júpiter + exterior do Sistema Solar;

1973: - Pioneer 11 para Júpiter + Saturno + exterior do Sistema Solar;

1977: - Voyager 2 para Júpiter + Saturno + Urano + Netuno + exterior do Sistema Solar;

1989: - Galileu para Vênus + Terra + Marte + Júpiter + satélites de Júpiter;

1990: - Ulisses para Júpiter + Sol (fora da eclíptica).

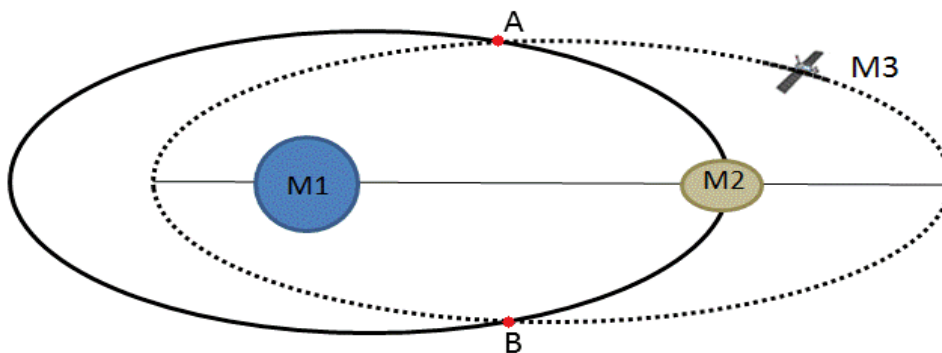
3. MEODOLOGIA

A metodologia utilizada para o estudo de manobras próximas por um corpo celeste inclui uma teoria já apresentada por Broucke (1988) e Prado (2001). Esta teoria se utiliza o problema restrito de três corpos. O modelo numérico será demonstrado para a determinação de parâmetros de uma nova trajetória após a manobra realizada por um corpo celeste, avaliando assim a variação de energia, momento angular e velocidade. Para que a meta desse trabalho seja atingida, fez-se necessário dividi-lo em algumas etapas, onde a análise gradativa dos sistemas estudados será realizada, sendo o primeiro, o sistema Terra-Lua, o segundo o sistema Sol-Júpiter e o terceiro sistema Sol- Saturno.

3.1- Modelo Matemático

De acordo com Prado (2001), a descrição matemática das manobras em estudo consiste na mudança de trajetória que um veículo espacial de massa infinitesimal (M_3) executa quando passa próximo a um corpo de massa M_2 ($M_2 \gg M_3$) com órbita em torno de um corpo de maior massa ($M_1 > M_2$). Após sofrer uma manobra de *swing-by*, o corpo M_3 pode perde ou ganhar energia provocando uma alteração na sua orbita inicial. Na Figura 11, podemos observar o principio de uma manobra de *swing-by* no plano onde os pontos A e B são os pontos onde os encontros acontecem e r_{ap} é a distância em que o veículo se aproxima do corpo M_2 . Estas condições são fundamentais no momento do planejamento de uma manobra otimizada.

Figura 11- *swing-by* no plano.



Fonte: Prado (2001)

Através das equações abaixo, pode-se determinar os elementos orbitais antes do encontro com o planeta. As equações são encontradas em Prado (2001).

$$a = \frac{ra + rp}{2} \quad (12)$$

$$e = 1 - \frac{rp}{a} \quad (13)$$

$$E = -\frac{\mu_s}{2a} \quad (14)$$

$$C = \sqrt{\mu_s \cdot a(1 - e^2)} \quad (15)$$

Onde:

a= semieixo maior

e= excentricidade

E=energia, $\mu_s = GM = 1,33.10^{11}$

C= momento angular

Pode-se obter a magnitude da velocidade do veículo espacial em relação ao Sol no momento que cruza a orbita do planeta através da seguinte equação (PRADO, 2001):

$$v_i = \sqrt{\mu_s \left(\frac{2}{r_{sp}} - \frac{1}{a} \right)} \quad (16)$$

Com isso, encontra-se também a anomalia verdadeira (θ). Com a Equação (17) pode-se encontrar dois valores possíveis para θ relacionados respectivamente com os pontos A e B na Figura 11 (PRADO, 2001).

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{e} \left(\frac{a \cdot (1 - e^2)}{r_{sp}} - 1 \right) \quad (17)$$

A seguir, pode-se determinar a magnitude da velocidade do veículo espacial em relação ao planeta no momento do encontro:

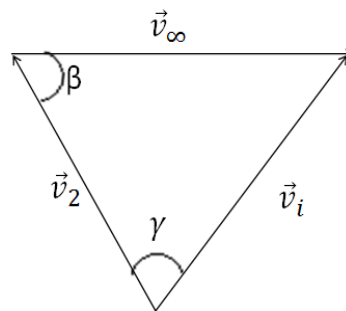
$$V_{\infty} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \gamma} \quad (18)$$

Onde γ é o ângulo entre a velocidade inercial e o vetor velocidade do planeta dado por (PRADO, 2001):

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \quad (19)$$

Na Figura 12, é possível observar a configuração da magnitude das velocidades, e a determinação do ângulo de aproximação ψ . Quando a rotação do vetor velocidade está no sentido horário, tem-se ψ_1 , caso a rotação do vetor esteja no sentido anti-horário, teremos ψ_2 . É sabido que Júpiter é tomado de uma massa puntiforme nessa fase da missão, e com isso, é possível obter duas trajetórias A e B com o resultado obtido de ψ_1 e ψ_2 como visto na Equação (20). Esta escolha de manobra através do ψ , pode ser visto na Figura 13. A trajetória A gera uma rotação no sentido anti-horário do vetor velocidade e a trajetória B gera uma rotação no sentido horário do vetor velocidade

Figura 12- Soma vetorial envolvida no *swing-by*.

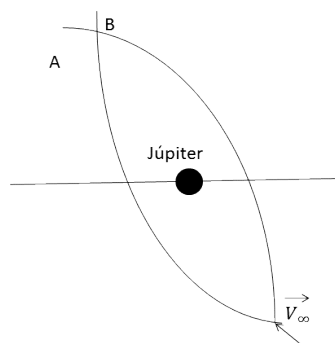


Fonte: Adaptado de Prado (2001)

$$\psi_1 = 180^\circ + \beta + \delta \quad (20)$$

$$\psi_2 = 360^\circ + \beta - \delta$$

Figura 13- Possibilidades de direção de deflexão do vetor velocidade.



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Onde β e δ são:

$$\beta = \cos^{-1} \left(- \frac{v_i^2 - v_2^2 - v_\infty^2}{2 \cdot v_2 \cdot v_\infty} \right) \quad (21)$$

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{1 + \frac{r_{ap} v_\infty}{\mu_p}} \right) \quad (22)$$

μ_p é a constante gravitacional do planeta em que é realizada a manobra. Os respectivos valores de ψ , nos leva as seguintes conclusões sobre a energia após a manobra (PRADO, 2001):

Se a manobra de *swing-by* passa pela frente de M_2 , ($0^\circ < \psi < 180^\circ$), a energia de M_3 decresce e ocorre uma perda máxima quando $\psi=90^\circ$.

Se a manobra de *swing-by* passa por trás de M_2 , ($180^\circ < \psi < 360^\circ$), a energia de M_3 aumenta e isso gera um ganho máximo quando $\psi=270^\circ$.

Chegamos assim, a última parte do modelo matemático, que consiste na determinação da variação de energia (ΔE), variação de velocidade (Δv) e momento angular (ΔC) após a manobra.

$$\Delta v = 2|\vec{v}_\infty| \sin \delta \quad (23)$$

$$\Delta E_1 = -2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_\infty \sin \delta \sin \psi_1 \quad (24)$$

$$\Delta E_2 = -2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_\infty \sin \delta \sin \psi_2 \quad (25)$$

$$\Delta C_1 = \frac{\Delta E_1}{\omega} \quad (26)$$

$$\Delta C_2 = \frac{\Delta E_2}{\omega} \quad (27)$$

Em que ω é a velocidade angular entre os corpos primários, δ é o ângulo de deflexão e ΔE_1 é a energia antes do encontro. Por fim, pode-se encontrar o valor de semi-eixo (a) e da excentricidade (e) depois da manobra utilizando o valor da variação da energia e do momento angular.

$$a_{1depois} = - \frac{\mu_{sol}}{2E_{1depois}} \quad (28)$$

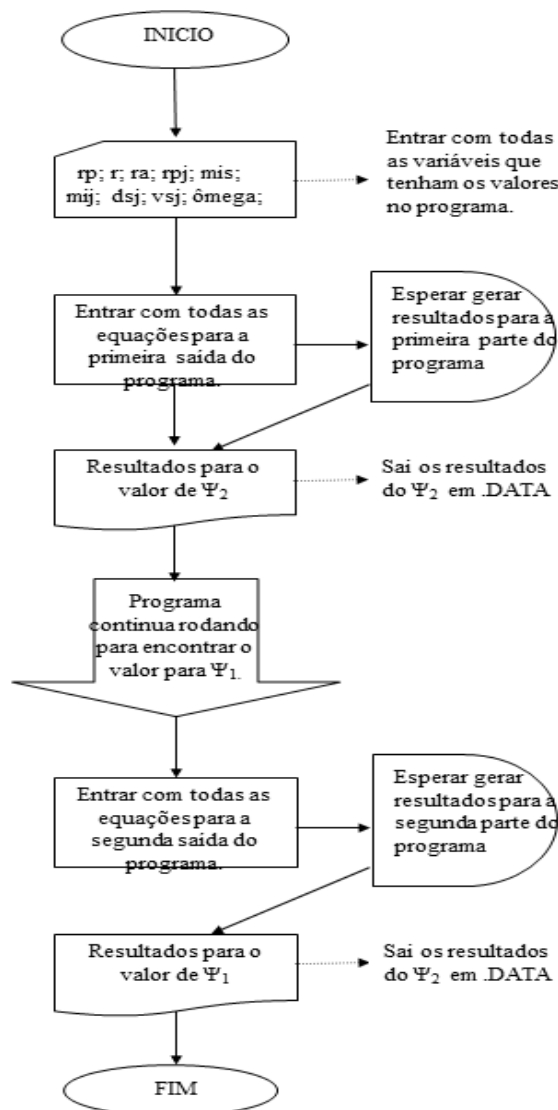
$$a_{2depois} = -\frac{\mu_{sol}}{2E_{2depois}} \quad (29)$$

$$e_{1depois} = \sqrt{1 - \left(\frac{C_{1depois}^2}{\mu_{sol} \cdot a}\right)} \quad (30)$$

$$e_{2depois} = \sqrt{1 - \left(\frac{C_{1depois}^2}{\mu_{sol} \cdot a}\right)} \quad (31)$$

A partir do modelo matemático apresentado, foi desenvolvido no software Fortran, um programa para realizar o cálculo para todas as manobras realizadas. A Figura 14 apresenta um fluxograma do programa desenvolvido para as manobras de *swing-by*.

Figura 14- Fluxograma do programa

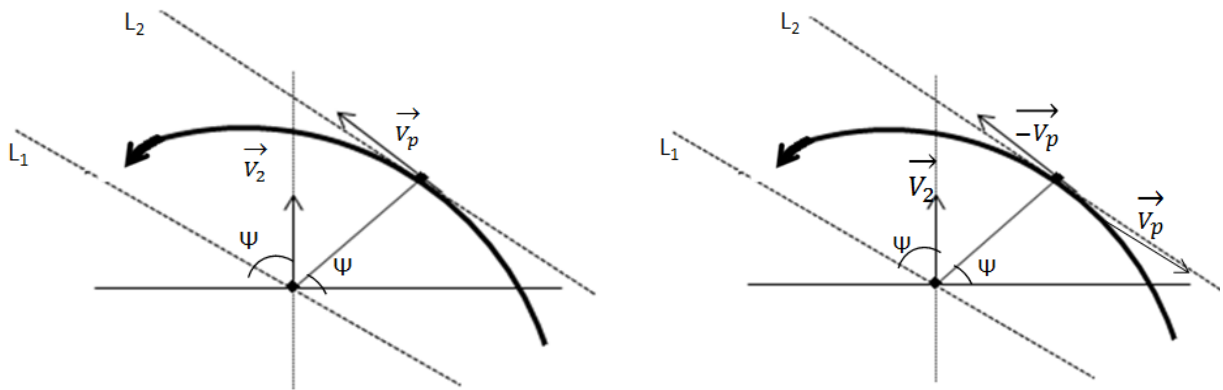


4. RESULTADOS

4.1- Resultados para o sistema Terra-Lua.

É sabido que ψ_1 realiza suas manobras por trás do corpo secundário e ψ_2 realiza as manobras por frente do corpo secundário, nesse caso, a Lua. A figura 15 apresenta a obtenção do ângulo ψ_1 e ψ_2 .

Figura 15- Obtenção do ângulo ψ .



Fonte: Adaptado de Prado (2001)

Nesta seção, pode-se verificar as simulações para o sistema Terra-Lua e analisar as variações orbitais da aeronave espacial na realização de múltiplas manobras. A tabela 3 apresenta os valores utilizados para a realização das manobras desse sistema.

Tabela 3- Elemento Físico do planeta- Lua

Corpo secundário	Diâmetro equatorial (km)	Distância media para a Terra (10^3 km)	Velocidade orbital (km/s)	$\mu_{lua} = Gm$ (10^3 km ³ /s ²)
Lua	3474,8	384,4	1,022	4,91
$\mu_{terra} = 3,98 \cdot 10^5$ km ³ /s ²				

Fonte: Formiga (2011)

A Tabela 4 descreve os dados utilizados para simulações das várias manobras analisadas nesta.

Tabela 4- Número de manobras e Energia para o sistema Terra-Lua

Distância de aproximação (r_{ap}) (km)	Ângulo de aproximação	Número de manobras realizadas	Maxima Energia (km^2/s^2)	Mínima Energia (km^2/s^2)
1,1R_L	ψ_1	29	-0,062	-0,505
	ψ_2	48	-0,505	-1,018
1,4R_L	ψ_1	36	-0,014	-0,505
	ψ_2	61	-0,505	-1,018

R_L = raio da Lua

Fonte: Autor (2012)

Os Gráficos de 1 a 8, comparam os valores de ψ_1 e ψ_2 relacionados a energia e apresentam as possíveis variações que podem ocorrer em cada aproximação calculada. Utiliza-se os valores fixos para a distância do apogeu ($r_a=768,81 \times 10^3 \text{km}$), distância do perigeu ($r_p=19,22 \times 10^3 \text{ km}$) e velocidade ($V_2=1,022 \text{ km/s}$). A distância de aproximação do planeta é de $r_{ap}=1,1R_L$. Os valores apresentados na Tabela 4 mostram a variação dos elementos que foram escolhidos para verificar o ganho de energia na realização de múltiplos *swing-bys*.

Gráfico 1- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_1 .

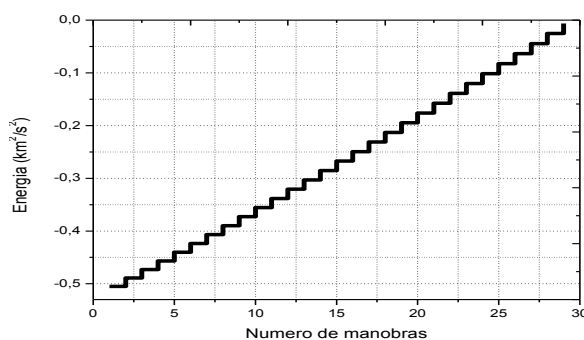
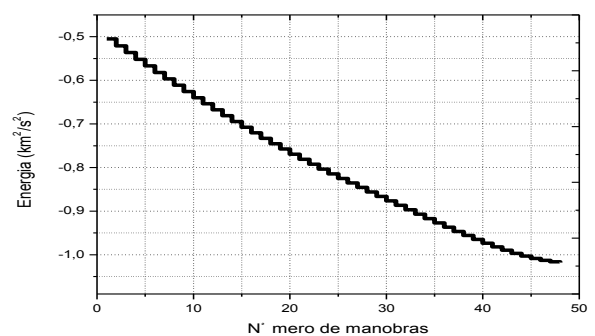


Gráfico 2- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_2 .



No Gráfico 1, nota-se que a energia aumenta para cada manobra realizada. Após realizar 30 manobras, o corpo escapa da órbita. No Gráfico 2, as manobras realizadas perdem energia com o decorrer de 50 manobras, com isso o veículo espacial tende a colidir com o corpo M_2 .

Gráfico 3- Energia x Excentricidade para ψ_1 .

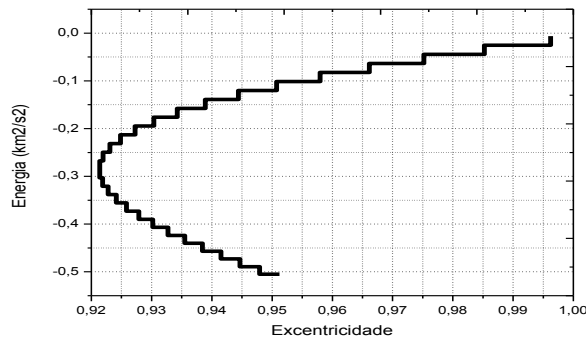
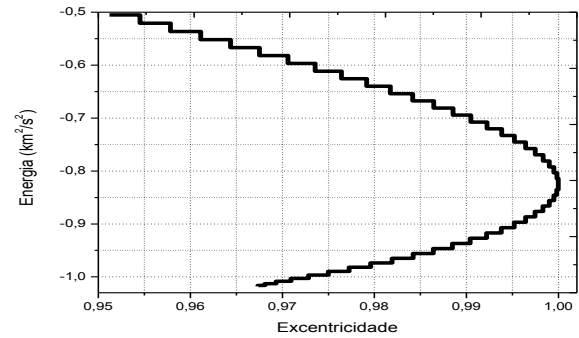


Gráfico 4- Energia x Excentricidade para ψ_2 .



Analisando a variação de excentricidade com relação ao ganho de energia, no Gráfico 3, observa-se que quando a energia fica positiva, a órbita passa a ser aberta. No Gráfico 4, a aeronave quase escapa para uma órbita parabólica, porém a energia diminui fazendo com que ela permaneça na mesma órbita.

Gráfico 5- Energia x semi-eixo maior para

ψ_1 .

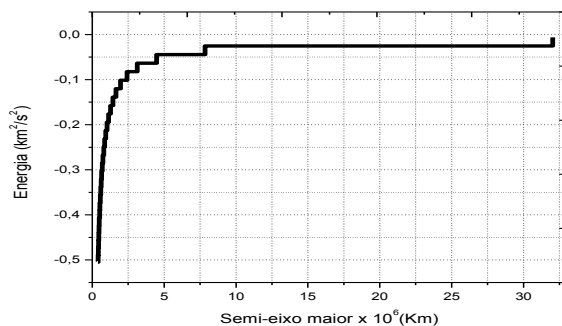
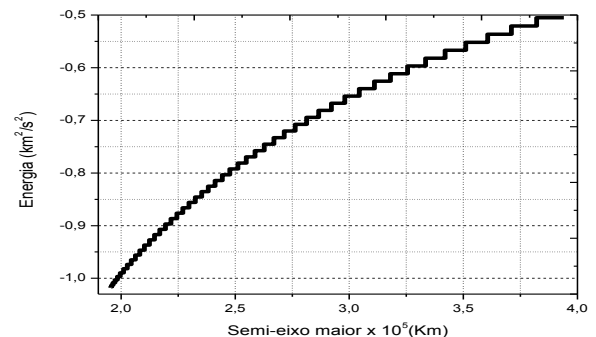


Gráfico 6- Energia x semi-eixo maior para

ψ_2 .



No Gráfico 5, observa-se um aumento na energia, no entanto em um determinado ponto a energia permanece constante durante um intervalo. Isto significa que a manobra de swing-by está estabilizada e o swing-by torna-se irrelevante. Após um intervalo de tempo, nota-se que a energia volta a aumentar tornando-se positiva, passando, assim, para uma órbita aberta (hiperbólica). No Gráfico 6, o semi-eixo maior sofre pouca variação com o aumento da energia.

Gráfico 7- Energia x momento angular
para ψ_1 .

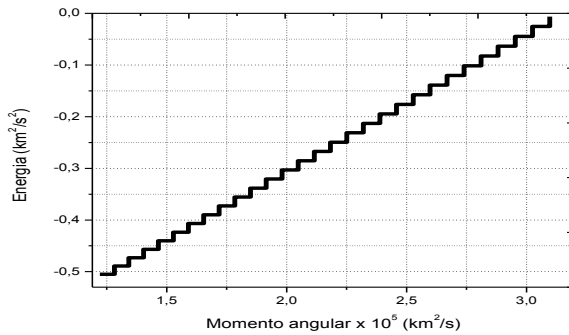
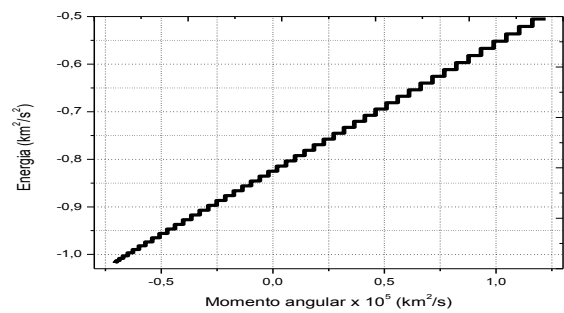


Gráfico 8- Energia x momento angular
para ψ_2 .



Analisando a energia e o momento angular, é possível observar no Gráfico 7, a uma órbita elíptica direta, onde a energia é negativa e o momento angular positivo. A energia aumenta com o momento angular, porém, quando a energia fica positiva ela se torna uma órbita hiperbólica. Já o Gráfico 8, inicia em uma órbita elíptica retrógrada, pois sua energia e momento angular são negativos; porém o momento angular torna-se positivo alterando a órbita para uma órbita elíptica direta.

Para os Gráficos de 9 a 16 utilizam os mesmos valores para distância do apogeu, distância do perigeu e velocidade. Porém a distância de aproximação do planeta variou para $r_{ap} = 1,4R_L$, conforme a Tabela 4, gerando as seguintes variações:

Gráfico 9- Energia x Número de manobras
realizadas para ψ_1 .

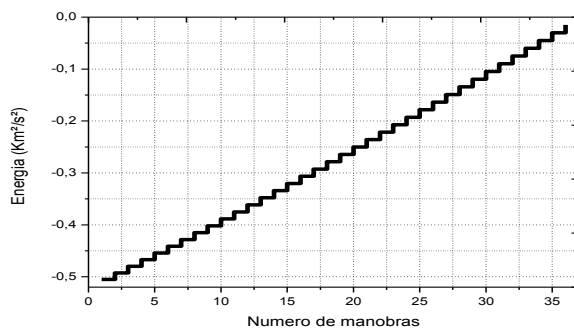
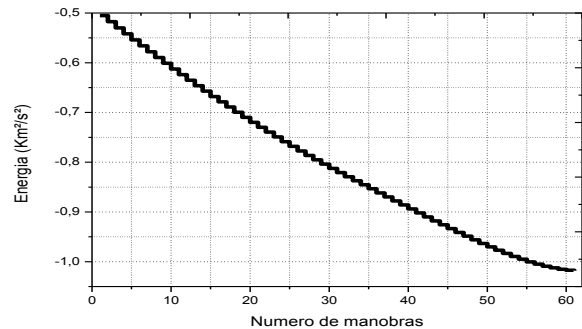


Gráfico 10- Energia x Número de manobras
realizadas para ψ_2 .



Observa-se nos Gráficos 9 e 10, a relação da energia e o numero de manobras realizadas. No Gráfico 9 observa-se que a energia aumenta com cada manobra realizada. Após 36 manobras a energia torna-se positiva e a aeronave espacial tende a escapar, caso não seja

redirecionada. No Gráfico 10, nota-se que a energia vai diminuindo a cada manobra realizada. Após 61 manobras a aeronave espacial tende a colidir com o corpo de M_2 .

Gráfico 11- Energia x Excentricidade para ψ_1 .

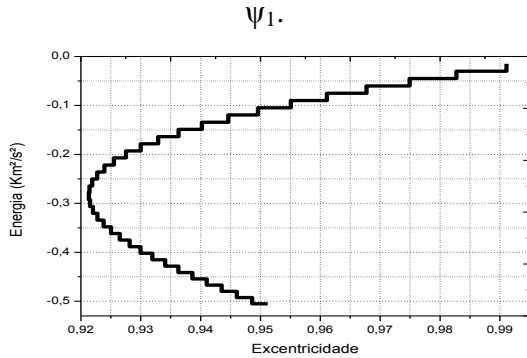
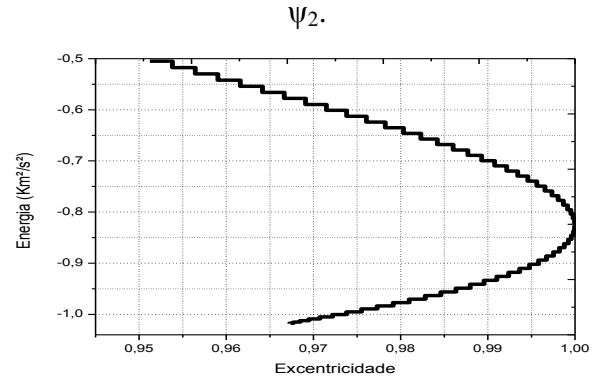


Gráfico 12- Energia x Excentricidade para ψ_2 .



Analisando a energia e a excentricidade nos Gráficos 11 e 12, pode-se observar que no Gráfico 11, a energia aumenta com a excentricidade e quando a energia fica positiva, passa para uma órbita hiperbólica. No Gráfico 12, a aeronave quase escapa para uma órbita parabólica, porém a energia diminui fazendo com que ela permaneça em uma órbita elíptica até colidir com o corpo M_2 .

Gráfico 13- Energia x semi-eixo maior para ψ_1 .

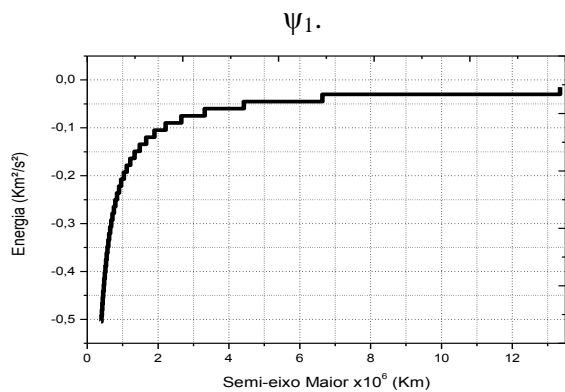
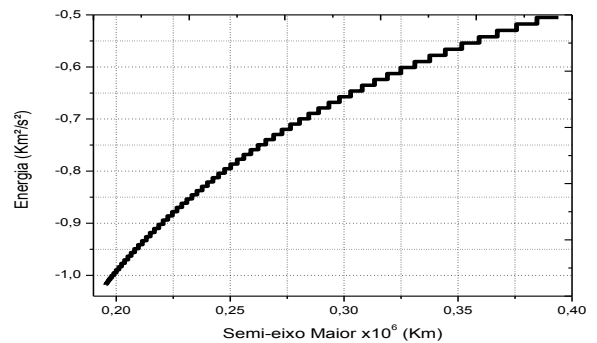


Gráfico 14- Energia x semi-eixo maior para ψ_2 .



É possível analisar no Gráfico 13, um aumento na energia. Quando o semi-eixo maior chega a aproximadamente 7×10^6 km, a energia permanece constante isto significa que a manobra de *swing-by* está estabilizada. Após um intervalo de tempo nota-se que a energia volta a aumentar tornando a órbita positiva, fazendo-a escapar da órbita. Nota-se no Gráfico 14, o aumento da energia junto o semi-eixo maior até que a aeronave colida com o corpo M_2 . É possível verificar que existe uma pequena variação no semi-eixo maior.

Gráfico 15- Energia x momento angular
para ψ_1 .

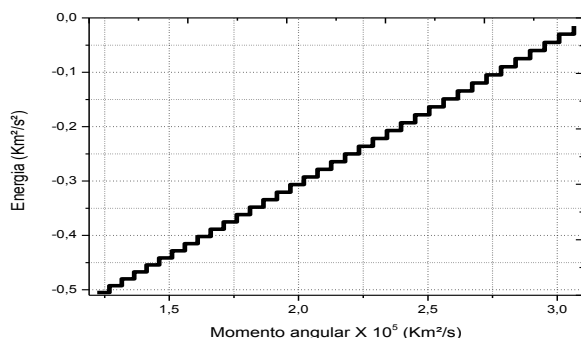
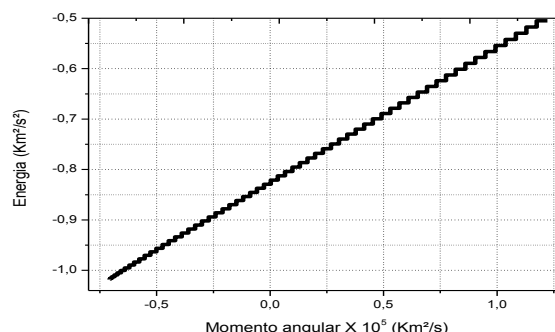


Gráfico 16- Energia x momento angular
para ψ_2 .



Ao analisar a energia e o momento angular dos Gráficos 15 e 16, observa-se que a energia aumenta conforme o momento angular aumenta. O Gráfico 15, apresenta uma órbita elíptica direta onde a energia é negativa e o momento angular positivo. A energia aumenta com o momento angular e quando a energia passa a ser positiva, ela se torna uma órbita hiperbólica. Pode-se observar que a variação do momento angular no Gráfico 16 é pequena e o momento angular inicia a órbita negativa e passa a ser positiva com o aumento da energia, alterando sua rotação.

4.2- Resultados para o sistema Sol- Júpiter.

Nesta seção, podem-se verificar as simulações para o sistema Sol- Júpiter e analisar as variações orbitais da aeronave espacial na realização de múltiplas manobras. A tabela 5 apresenta os valores utilizados para a realização dos cálculos para as manobras desse sistema.

Tabela 5- Elementos Físico do planeta- Júpiter

Planeta	Raio equatorial (km)	Distância media para o Sol (10^6 km)	Velocidade orbital (km/s)	$\mu_{\text{jup}}= Gm$ ($10^6 \text{ km}^3/\text{s}^2$)
Júpiter	71370	778	13,1	139,0
$\mu_{\text{sol}} = 1,33 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$				

Fonte: Formiga (2011)

As condições iniciais da manobra podem ser vistas na Tabela 6. A Tabela 6 é composta pelas seguintes variáveis: distância da apoapsi (r_a), distância do periapsi (r_p), e velocidade (v) que podem ser obtidas através da órbita inicial da aeronave em torno do Sol. O valor da distância de aproximação r_{ap} será a variante para o sistema.

Tabela 6- condições iniciais: Sistema Sol-Júpiter

Simulações	r_a (10^7 km)	r_p (10^8 km)	r_{ap} (Raio de Júpiter)	v (km/s)
1 ^a	15	10	1,1	13,1
2 ^a	15	10	5,0	13,1
3 ^a	15	10	15,0	13,1

Fonte: Autor (2012)

A Tabela 7 apresenta os dados utilizados em duas simulações, com intuito de analisar as manobras descritas e observar as variações sofridas na realização de múltiplos *swing-bys*.

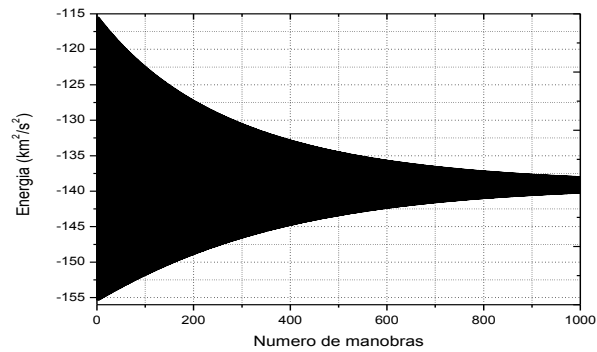
Tabela 7- Número de manobras e Energia para o sistema Sol- Júpiter.

Distância de aproximação (r_{ap}) (km)	Ângulo de aproximação	Número de manobras Realizadas	Maxima Energia (km^2/s^2)	Minima Energia (km^2/s^2)
1,1 R_J	ψ_1	0	0	0
	ψ_2	9990	-115	-153
15,0 R_J	ψ_1	6	0	-120
	ψ_2	9991	-115	-165

Fonte: Autor (2012)

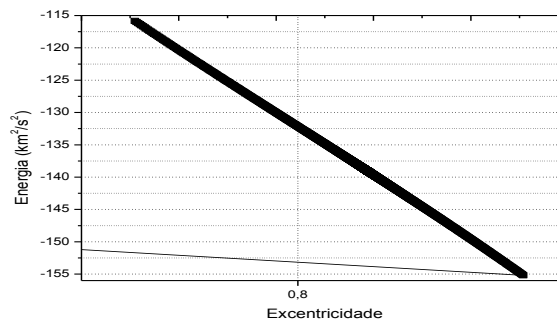
De acordo com a Tabela 7, a primeira simulação com $r_{ap}=1,1R_J$ não realiza manobra para ψ_1 . Isto significa que a energia é positiva e por isso não se forma uma manobra de órbita fechada (elíptica). Os Gráficos de 17 a 21 apresentam as variações sofridas para ψ_2 .

Gráfico 17- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_2 .



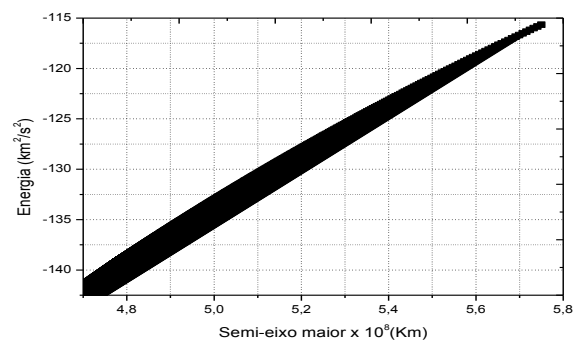
Ao analisar a energia e o momento angular, é possível observar que há uma grande amplitude na variação de energia nas primeiras manobras realizadas como apresentado no Gráfico 17. Após realizar aproximadamente 800 manobras, a energia mantém-se constante o que indica que a órbita está estabilizada e não se realiza mais as manobras de *swing-by*. A aeronave permanece em órbita com o corpo M_2 , porém sem variação de energia.

Gráfico 18- Energia x Excentricidade realizadas para ψ_2 .



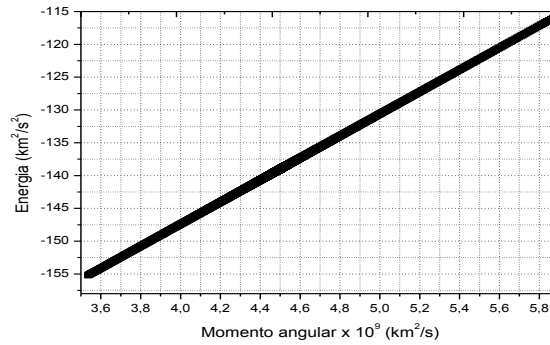
Observa-se que o Gráfico 18 relaciona a energia com a excentricidade. Nota-se que a variação da excentricidade foi baixa e a energia obteve uma grande variação decrescente.

Gráfico 19- Energia x semi-eixo maior realizadas para ψ_2 .



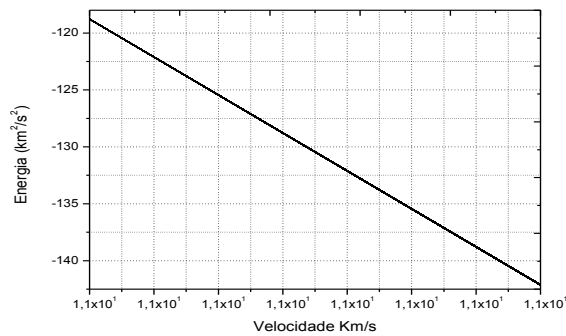
Pode-se observar no Gráfico 19, que a energia cresce de acordo com a distância do semi-eixo maior. Isso ocorre até o veículo espacial escapar da órbita.

Gráfico 20- Energia x Momento angular realizadas para ψ_2 .



Pode-se notar que o Gráfico 20 apresenta uma órbita elíptica direta, pois a energia é negativa e o momento angular positivo.

Gráfico 21- Energia x Velocidade realizadas para ψ_2 .



Tomando como referência a Figura 11 apresentada no capítulo 3 e analisando o Gráfico 21, pode-se dizer que o veículo espacial perde energia conforme vai ganhando velocidade. Isto significa que a aeronave espacial faz à manobra passando pelo ponto A.

Os Gráficos de 22 a 31 referem-se à simulação do sistema Sol- Júpiter a qual tem distância de aproximação de $15R_J$

Gráfico 22- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_1 .

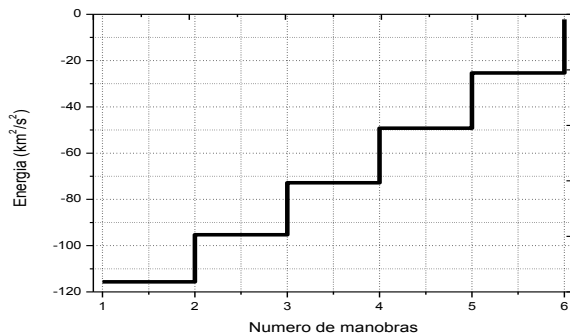
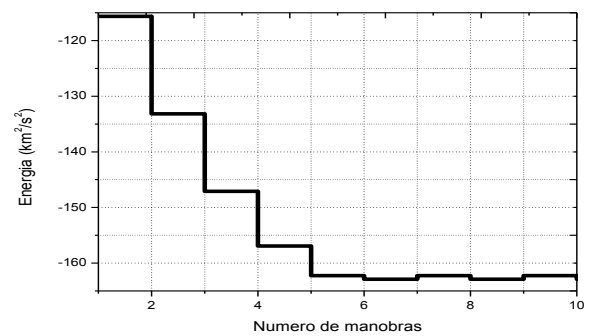


Gráfico 23- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_2 .



O Gráfico 22 apresenta 6 manobras realizadas com ψ_1 . Nota-se que a energia permanece constante no decorrer do percurso e que ao chegar à próxima manobra, sua energia aumenta rapidamente e torna-se constante novamente. As manobras ocorrem até a energia tornar-se positiva e assim alterar para uma órbita hiperbólica. No Gráfico 23, a energia diminui conforme as manobras são realizadas. A partir da 5ª manobra, a energia permanece constante estabilizando a órbita, tornando os efeitos do *swing-by* irrelevantes.

Gráfico 24- Energia x Excentricidade para ψ_1 .

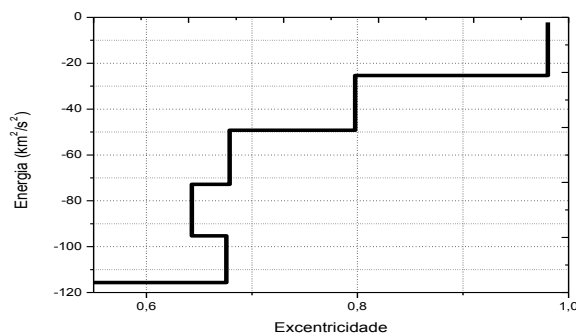
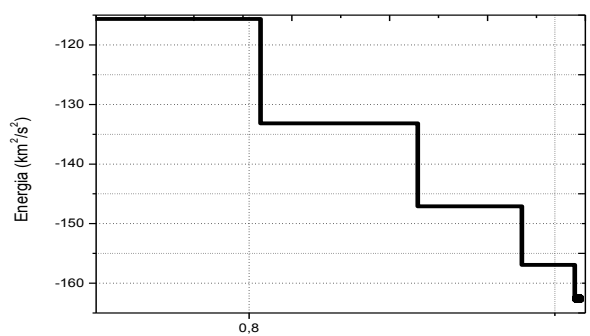


Gráfico 25- Energia x Excentricidade para ψ_2 .



Analisando a energia e a excentricidade, obtém-se um resultado inesperado apresentado no Gráfico 24, onde a energia regride quando a excentricidade se aproxima de (0,7) até voltar a ter um aumento. É possível notar que no Gráfico 25 que a energia inicia constante e vai diminuindo.

Gráfico 26- Energia x semi-eixo maior para

ψ_1 .

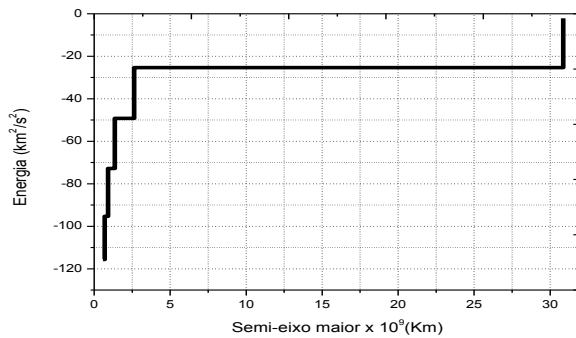
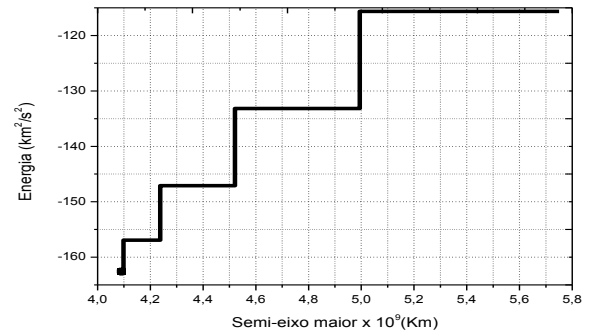


Gráfico 27- Energia x semi-eixo maior

para ψ_2 .



Pode-se observar no Gráfico 26, que a energia aumenta e estabiliza a órbita em aproximadamente 3×10^9 km; porém quando o valor do semi-eixo maior aproxima-se do 30×10^9 km, a energia volta a aumentar até a energia tornar-se positiva e escapar da órbita. No Gráfico 27, a energia aumenta e se mantém constante durante alguns intervalos. Quando a energia chega a $r_a = 5 \times 10^9$ km a manobra se estabiliza.

Gráfico 28- Energia x momento angular

para ψ_1 .

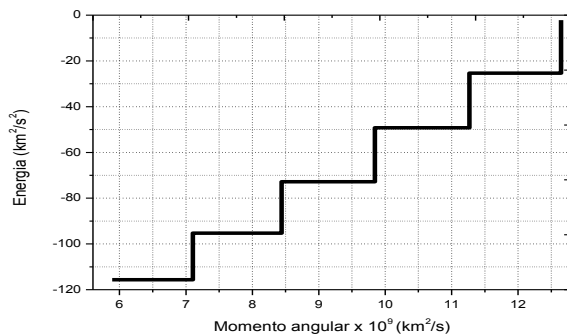
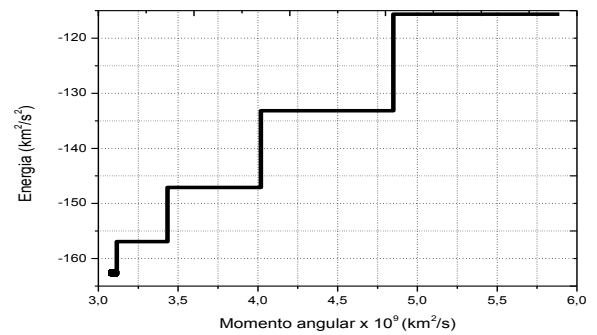


Gráfico 29- Energia x momento angular

para ψ_2 .



Considerando a energia e o momento angular, pode-se observar que nos Gráficos 28 e 29, o aumento de energia é de uma órbita elíptica direta. No Gráfico 28, a energia torna-se positiva, alterando de uma órbita elíptica para uma órbita hiperbólica. No Gráfico 29, há um ganho de energia até que a mesma fique constante.

Gráfico 30- Energia x Velocidade para ψ_1 .

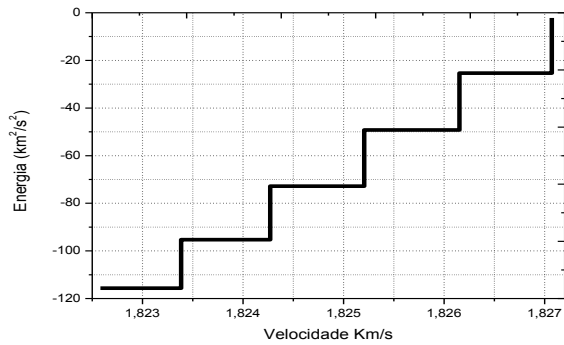
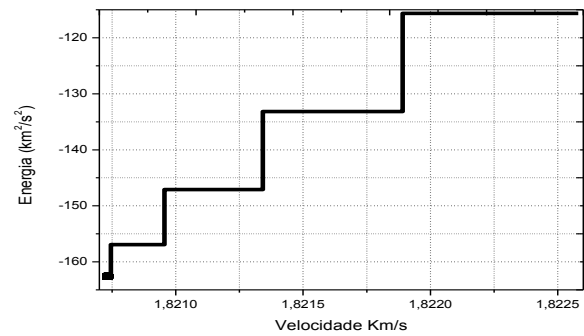


Gráfico 31- Energia x Velocidade para ψ_2 .



Ao relacionar a energia com a velocidade, nota-se que a velocidade não tem grandes alterações. No Gráfico 30 percebe-se que a energia aumenta até que a órbita fique positiva e possa escapar para outra órbita. No Gráfico 31, a energia aumenta junto com a velocidade até estabilizar a órbita.

4.3- Resultados para o sistema Sol – Saturno.

Nesta seção podem-se, verificar as simulações para o sistema Sol- Saturno e analisar as variações orbitais da aeronave espacial na realização de múltiplas manobras. A Tabela 8 apresenta os valores utilizados para a realização dos cálculos para as manobras desse sistema.

Tabela 8- Elemento físico do planeta- Saturno.

Planeta	Raio equatorial (km)	Distância media para o Sol (10^6 km)	Velocidade orbital (km/s)	$\mu_{\text{saturno}} = Gm$ ($10^6 \text{ km}^3/\text{s}^2$)
Saturno	60400	1426	9,67	37,37
$\mu_{\text{sol}} = 1,33 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$				

Fonte: Formiga (2011)

Os Gráficos de 32 a 46 comparam os valores de ψ_1 e ψ_2 relacionados a energia e apresenta as possíveis variações que podem ocorrer em cada aproximação calculada. Utiliza-se os valores da distância da apófise ($r_a = 1,572 \times 10^9$ km), distância do periapsi ($r_p = 150,0 \times 10^6$ km) e velocidade ($v_2 = 9.67$ km/s). O valor de aproximação do planeta calculado foi de $r = 1,1R_S$.

Os valores apresentados na Tabela 9 mostram a variação dos elementos que foram escolhidos para verificar o ganho de energia na realização de múltiplos *swing-bys*.

Tabela 9- Número de manobras e Energia para o sistema Sol- Saturno.

Distância de aproximação (r_{ap})(km)	Ângulo de aproximação	Número de manobras Realizadas	Maxima Energia (km^2/s^2)	Mínima Energia (km^2/s^2)
1,1 R_S	ψ_1	1	-77,220	-77,220
	ψ_2	9990	-55	-77
15.0 R_S	ψ_1	3	0	-80
	ψ_2	9990	-77	-86

Fonte: Autor (2012)

Nota-se que para a primeira simulação, o valor de aproximação do planeta foi de $r=1,1R_S$. O resultado para a simulação de 1,1 R_S da distância de aproximação do ψ_1 , apresenta apenas uma manobra, os valores para essa simulação podem ser encontrados na Tabela 10.

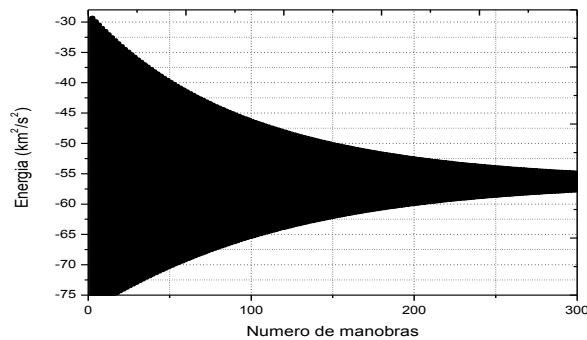
Tabela 10- Valores da manobra realizada

Semi-eixo Maior (10^9km)	Excentricidade	Energia (km^2/s^2)	Momento angular ($10^9 \text{ km}^2/\text{s}$)	Velocidade (km/s)
0,8611700000	0,8258183634	-77,220	0,6035319076	11,42

Fonte: Autor (2012)

Os Gráficos de 32 a 36 apresentam as manobras para ψ_2 , os valores fazem parte da primeira simulação da Tabela 9.

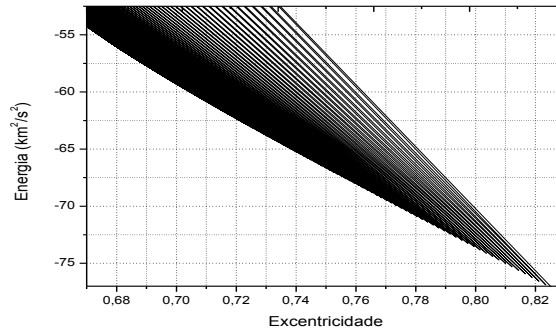
Gráfico 32-Energia x Número de manobras realizadas para ψ_2 .



Analisando a energia e o número de manobras realizadas para ψ_2 , observa-se que no Gráfico 32 que a energia tem uma grande amplitude nas primeiras manobras. Porém após

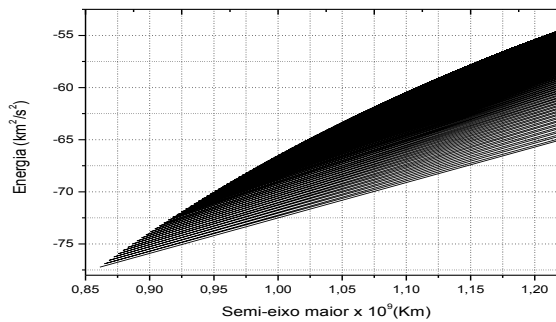
realizar aproximadamente 300 manobras, a energia permanece constante. Isto indica que a órbita está estabilizada. A aeronave permanece em órbita com o corpo M_2 , porém sem variação de energia.

Gráfico 33- Energia x Excentricidade para ψ_2 .



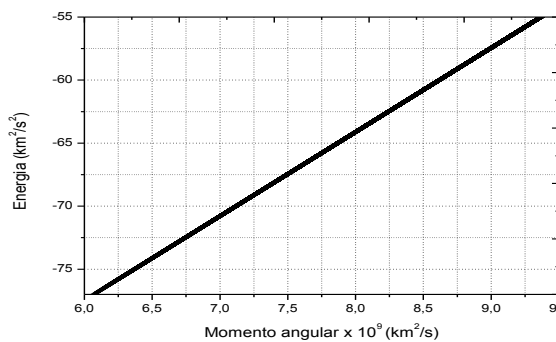
Com os resultados da energia e excentricidade para ψ_2 , observa-se no Gráfico 33 uma grande variação da energia quando a excentricidade é menor (0,68) e uma pequena variação quando a excentricidade aumenta (0,82).

Gráfico 34- Energia x semi-eixo maior para ψ_2 .



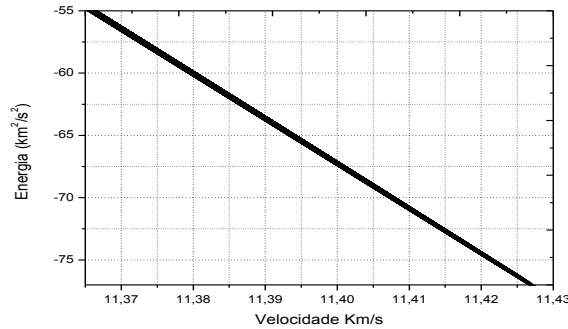
Observando o Gráfico 34, pode-se dizer que a energia aumenta sua amplitude conforme o aumento do semi-eixo maior.

Gráfico 35- Energia x momento angular para ψ_2 .



Sabe-se que uma órbita é elíptica direta quando a energia é negativa e o momento angular negativo como pode ser observado no Gráfico 35.

Gráfico 36- Energia x Velocidade para ψ_2 .



No Gráfico 36 se observa a perda de energia com o aumento da velocidade. A variação de velocidade é de aproximadamente 0,6 km/s.

Os Gráficos de 37 a 46 são para a terceira simulação do sistema Sol- Saturno, onde a distância de aproximação é de 15 R_S .

Gráfico 37- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_1 .

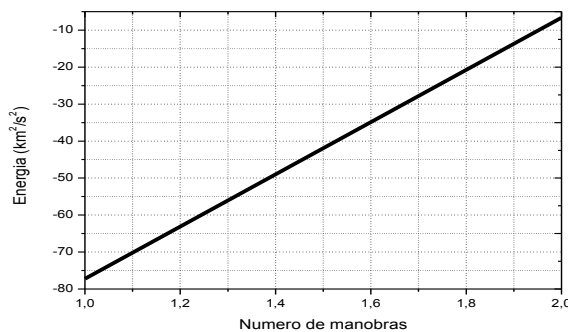
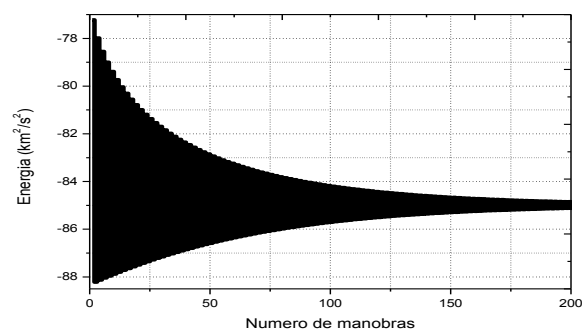


Gráfico 38- Energia x Número de manobras realizadas para ψ_2 .



Duas manobras realizadas para ψ_1 como se pode observar no Gráfico 37. Há um ganho de energia a cada manobra realizada. A amplitude apresentada no Gráfico 38 ocorre apenas no início das manobras, quando se realiza aproximadamente 100 manobras, a energia se estabiliza tornando irrelevante o efeito do *swing-by*.

Gráfico 39- Energia x Excentricidade para

Ψ_1 .

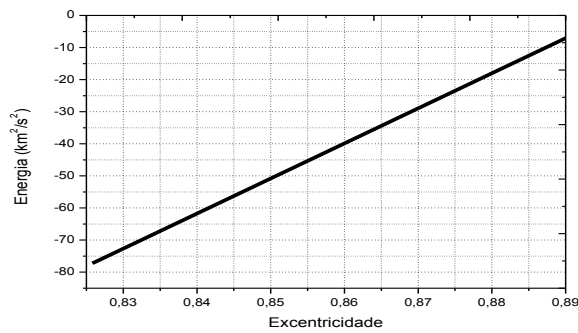
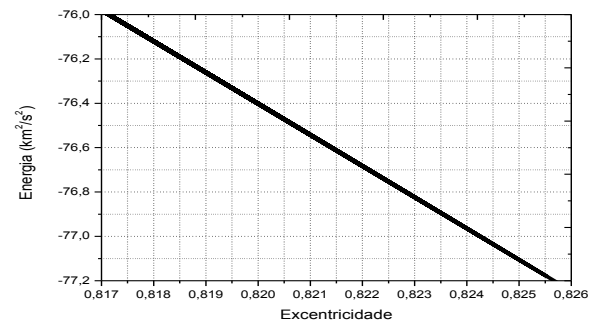


Gráfico 40- Energia x Excentricidade para

Ψ_2 .



Observa-se no Gráfico 39 que a energia aumenta com a excentricidade, a qual tem uma variação maior ao comparar com o Gráfico 40, onde a excentricidade é pequena e a energia diminui com o aumento da excentricidade.

Gráfico 41- Energia x semi-eixo maior para

Ψ_1 .

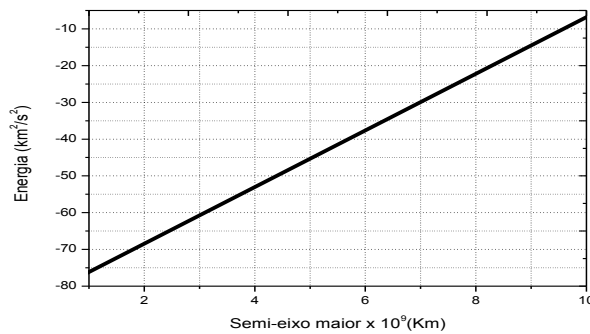
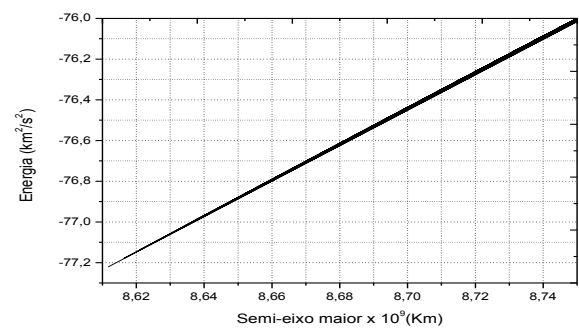


Gráfico 42- Energia x semi-eixo maior

para Ψ_2 .



Ao comparar os Gráficos 41 e 42 nota-se que a energia aumenta de acordo com o semi-eixo maior. Analisando o Gráfico 42 nota-se que há uma pequena variação no valor do semi-eixo maior.

Gráfico 43- Energia x momento angular para ψ_1 .

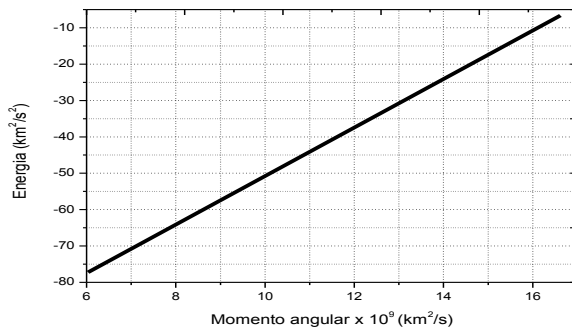
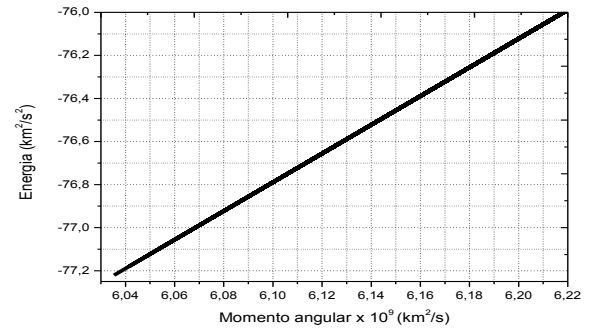


Gráfico 44- Energia x momento angular para ψ_2 .



Analisando a energia e o momento angular nos Gráficos 43 e 44 pode-se dizer que se trata de uma orbita direta, pois a energia é negativa e o momento angular positivo. No Gráfico 44 pode se observar que a variação do momento angular é pequena comparada com a variação do momento angular do Gráfico 43.

Gráfico 45- Energia x Velocidade para ψ_1 .

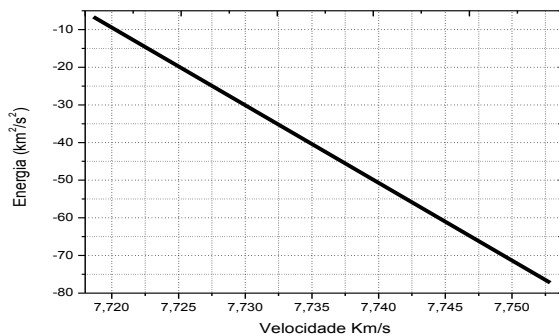
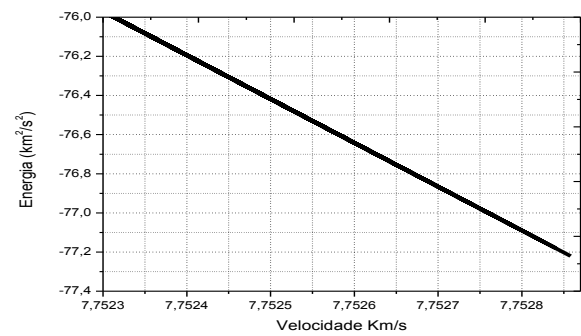


Gráfico 46- Energia x Velocidade para ψ_2 .



Ao relacionar a energia com a velocidade, observa-se nos Gráficos 45 e 46 a energia diminui com o aumento da velocidade. Em ambos os casos a velocidade tem uma variação pequena tendo pouca influência nas manobras de *swing-by*.

5. CONCLUSÃO

O objetivo do *swing-by* é efetuar uma manobra com mínimo consumo de combustível para transferir uma aeronave espacial de um corpo de massa M_1 para um corpo de massa M_2 . Um método para calcular as variações do semi-eixo maior, velocidade, energia e momento angular para o *swing-by* foi desenvolvido com base na manobra de *patched conic*.

Ao usar um conjunto de equações analíticas para descrever o *swing-by* em duas dimensões, pode-se avaliar a variação dos elementos orbitais da órbita da aeronave espacial que está passando o planeta. Logo, torna-se possível comparar duas soluções para fazer uma manobra orbital considerando os dois ângulos de aproximação ψ_1 e ψ_2 .

Através de várias simulações numéricas realizadas para os sistemas em estudo, foi possível observar que, quando as manobras foram realizadas considerando ψ_1 o veículo espacial adquiriu mais energia fazendo com que o veículo escapasse da órbita para a maioria dos casos analisados. Já considerando o ângulo de aproximação ψ_2 , principalmente com baixa altitude, foi possível detectar algumas órbitas de colisão com o planeta secundário (M_2) que ocorre quando se tem uma perda de altitude devido a variação de energia. Porém, em ambos os casos (ψ_1 e ψ_2) que ocorreram a colisão e até mesmo o escape as manobras nessas ocasiões já não tem mais aplicação prática devido ao tempo que isso aconteceu quando levado em conta o período orbital de Júpiter (aproximadamente 10 anos).

Em relação à velocidade, percebe-se que o efeito do *swing-by* tem pouca influência em cada manobra realizada. Para os casos realizados, o ΔV menor que 0,05.

O sistema Sol- Júpiter mostrou-se mais estável em relação à variação dos elementos orbitais após 100 manobras mostrando que o veículo espacial foi colocado em uma nova órbita onde o efeito do *swing-by* é irrelevante.

O programa desenvolvido mostrou-se eficaz quando comparado com os resultados já apresentados na literatura como também da precisão do método utilizado quando há interesse em realizar um estudo das primeiras aproximações, isto é, desconsiderando outras perturbações.

6. TRABALHOS FUTROS

Com o avanço tecnológico na área de mecânica celeste, pode-se fazer uma análise preliminar dos estudos futuros de manobra de *swing-by*. São previstos estudos para:

- 1- Modelar um sistema com órbitas baixas;
- 2- Montar um sistema no plano tridimensional, com o sistema Terra- Lua;
- 3- Verificar o efeito do *swing-by* buscando uma distância ideal a qual coloque a aeronave espacial em uma órbita que esteja em ressonância;
- 4- Realizar manobras de *swing-by* em um sistema com três corpos como, por exemplo, o sistema Sol-Terra-Lua;
- 5- Estudar o arrasto atmosférico para verificar o consumo de combustível.

7. REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, R. A. N. **Encontros próximos: captura gravitacional temporária e esfera de influência**. 2007. 112f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.
- BROUCKE, R. A., 1988, "**The Celestial Mechanics of Gravity Assist**". AIAA paper 88-4220. (In: AIAAAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, MN, 15-17 Aug. 1988).
- BROUCKE, R.A. and PRADO, A.F.B.A., 1993, "**On the scattering of comets by a planet**". **In: Meeting of the ASS**, 181., Phoenix, AZ, Jan. 3-7.
- CARVALHO, J. P. S. **Ação de forças gravitacionais e não gravitacionais sobre o movimento orbital de satélites artificiais**. 2007. 196f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.
- FELIPE, G., 2000 "**Manobras orbitais aplicadas aos problemas de dois e três corpos**" São José dos Campos: INPE, 2000. 170p. – (INPE-7530-TDI/736).
- FORMIGA, J. K. S.; PRADO, A. F. B. A., **A study of the effects of a close approach between a planet and a particle**. In: 22. ND INTERNATIONAL SIMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 2011, São José dos Campos. Proceedings. 2011. p.1-10.
- FORMIGA, J. K. S. ; Vilhena de Moraes, R. **Orbital Characteristics of artificial Satellites in resonance and the correspondent geopotential coefficients**. In: Prado, Gomes. (Org.). *Advances in Space Dynamics 5: Celestial Mechanics and Astronautics*. Cruzeiro: Cruzeiro Editora, 2008, v. 5, p. 110-119.
- JACOB, R. R. **Manobra Orbital Terra-Lua-Terra**. 2009, 117 f. Proposta de dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.
- KUGA, H. K., RAO, K. R. **Introdução a determinação de orbitas e manobras orbitais**. In: PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. (Eds). *Fundamentos de tecnologia espacial*. Sao Jose dos Campos – SP: INPE, 2001. p. 38-49
- MELO, C. F. **Trajetórias Alternativas no Sistema Terra-Lua / Cristiano Fiorilo de Melo**. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005. 259 p.; INPE-14050-TDI/1065).
- PRADO, A. F. B. A. and BROUCKE, R. A., 1995a, "**A Classification of Swing-By Trajectories using the Moon**". *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 48, No. 11, Part 2, pp. 138-142.
- PRADO, A. F. B. A. and BROUCKE, R. A., 1995b, "**Effects of Atmospheric Drag in Swing-By Trajectory**". *Acta Astronáutica*, Vol. 36, No. 6, pp. 285-290.

PRADO, A. F. B. A., 2001, "**Trajatórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade**". São José dos Campos, INPE , pp. 75-113.

PRADO, A. F. B. A. and KUGA, H. K. 2001, "**Fundamentos de Tecnologia Espacial**". São José dos Campos, INPE.

ROCCO, E.M., PRADO, A.F.B.A., SOUZA, M.L.O. **Bi-Impulsive Orbital Transfers Between Non-Coplanar Orbits with Time Limit**. Applied Mechanics in the Americas, Vol. 6, 1999, pp. 259-262. Editores: Djenane Pamplona, Charles Steele, Hans I. Weber, Paulo B. Gonçalves, Iwona Jasiuk, Luiz Bevilacqua. ISBN: 85-900726-1-4.

SANTOS, D. P. S. **Aplicações em Manobras espaciais do Problema de Múltiplos Encontros**, Dissertação de Mestrado, INPE, S. J. Campos, 2005.