



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

# **ESTUDO DE MANOBRAS CLÁSSICAS E RENDEZVOUS**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Bolsista – Nathalia Raquel Domingues Pereira (ETEP Faculdades, Bolsista  
PIBIC/CNPq)

E-mail – [nathy\\_raquel@yahoo.com.br](mailto:nathy_raquel@yahoo.com.br)

Orientador – Denilson Paulo Souza dos Santos (DMC/INPE)

E-mail – [denilson@dem.inpe.br](mailto:denilson@dem.inpe.br)

INPE  
São José dos Campos  
2012-07-18

## **Agradecimentos**

A Deus, por tudo.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo apoio financeiro recebido por meio da bolsa de Iniciação Científica, junto ao programa PIBIC/INPE.

Ao orientador Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos pela dedicação, apoio e interesse no processo de ensino.

Aos familiares e amigos pelo incentivo e pela contribuição, direta ou indiretamente, para a conclusão deste trabalho.

## Resumo

Estudar manobras orbitais é de suma importância para o desenvolvimento espacial. Definir qual a melhor trajetória e o menor gasto de combustível é uma das questões a serem estudadas neste tipo de assunto. O objetivo deste trabalho é estudar Manobras Espaciais Clássicas, em particular, manobras orbitais que envolvem órbitas de múltiplos encontros e que visem o menor consumo de combustível, complementando assim os estudos teóricos já existentes, através da análise de resultados, trajetórias, e comparando algoritmos de resolução suas vantagens e desvantagens. Serão analisados modelos para a dinâmica do problema de órbitas de múltiplos encontros e estratégias para encontrar estas manobras. Para a dinâmica do problema, é assumido que os três corpos envolvidos são pontos de massa e não sofrem perturbações externas ao sistema. . Utilizou-se o *software* MATLAB para modelagem e simulação do problema em questão. Em princípio, as transferências analisadas neste trabalho foram as do tipo *Hohmann*, *Problema Lambert*, *Runge-Kutta*, *Leis de Kepler* e *Elementos Keplerianos*.

## Lista de Figuras

FIGURA 2.1 - TRANSFERÊNCIA DO TIPO HOHMANN ENTRE DUAS ÓRBITAS CIRCULARES E COPLANARES. ....	11
FIGURA 2.2 - TRANSFERÊNCIA DO TIPO HOHMANN ENTRE UMA ÓRBITA CIRCULAR E UMA ÓRBITA ELÍPTICA, COPLANARES E COAXIAIS. ....	13
FIGURA 2.3- TRANSFERÊNCIA DO TIPO HOHMANN ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS, COPLANARES E COAXIAIS. ....	14
FIGURA 4.1- ORBITA DE TRANSFERÊNCIA ROTINA 14 MATLAB. ....	17
FIGURA 4.2- VARIAÇÃO DE TEMPO NA TRAJETÓRIA ROTINA 14 MATLAB. ....	17
FIGURA 4.3- ORBITA DE TRANSFERÊNCIA ROTINA 16 MATLAB. ....	19
FIGURA 4.4- VARIAÇÃO DE TEMPO NA TRAJETÓRIA ROTINA 16 MATLAB. ....	19
FIGURA 4.5- ORBITA DE TRANSFERÊNCIA ROTINA 17 MATLAB. ....	21
FIGURA 4.6- VARIAÇÃO DE TEMPO NA TRAJETÓRIA ROTINA 17 MATLAB. ....	21

## LISTA DE SÍMBOLOS

$c$  - velocidade de ejeção dos gases propelentes do motor

$m_0$  - massa inicial do veículo espacial

$m_f$  - massa final do veículo espacial

$r_0$  - raio da órbita inicial

$r_a$  - raio do apogeu

$r_f$  - raio da órbita final

$r_p$  - raio do perigeu

$T_0$  - período da órbita inicial

$T$  - período da órbita

$t$  - órbita elíptica de transferência

$V_0$  - velocidade do veículo na órbita inicial

$\Delta V$  - impulso total de velocidade

$\Delta V_0$  - impulso inicial de velocidade

$\Delta V_f$  - impulso final de velocidade

$\mu$  - constante geo-gravitacional

$a$  - semi eixo maior

## Sumário

Agradecimentos .....	2
Resumo .....	3
Lista de Figuras .....	4
LISTA DE SÍMBOLOS .....	5
1. Introdução.....	7
1.1 Objetivo .....	7
1.2 Motivação .....	8
2. Fundamentação Teórica .....	9
2.1 Manobras .....	9
2.1.1 Leis de Kepler e Elementos Keplerianos.....	9
2.1.2 Transferência de Hohmann .....	10
2.1.3 Problema Restrito de 3 Corpos .....	14
3. Método .....	15
4. Resultados .....	16
4.1 Experimento I .....	16
4.1.1 Semi Eixos Maiores.....	16
4.1.2 Excentricidades.....	16
4.1.3 Parâmetro de Parada.....	16
4.1.4 Plotagem .....	16
4.2 Experimento II .....	18
4.2.1 Semi Eixos Maiores.....	18
4.2.2 Excentricidades.....	18
4.2.3 Parâmetro de Parada.....	18
4.2.4 Plotagem.....	18
4.3 Experimento III .....	20
4.3.1 Semi Eixos Maiores.....	20
4.3.2 Excentricidades.....	20
4.3.3 Parâmetro de Parada.....	20
4.3.4 Plotagem.....	20
5. Discussão dos Resultados .....	22
6. Conclusão .....	23
7. Referências Bibliográficas .....	24

## **1.Introdução**

Este projeto de pesquisa teve início com um levantamento bibliográfico dos principais tópicos de mecânica celeste aplicados aos problemas envolvendo manobras de veículos espaciais. Iniciou-se o estudo por meio da compreensão das três Leis de Newton, além da Lei da Gravitação Universal, teorias estas que explicam as mais significativas propriedades do movimento planetário e de satélites artificiais. Foram estudadas também as propriedades e a equação da elipse, além das três Leis de Kepler e o Problema de Lambert.

Em seguida estudou-se o problema em que um veículo espacial seria transferido para outra órbita utilizando o método Runge-Kutta de 4ª Ordem, tornando possível encontrar o valor da energia para órbitas elípticas e a equação da “vis-viva”, que permite o cálculo imediato da velocidade orbital.

Todos os conceitos citados anteriormente foram estudados por meio da leitura da apostila “Introdução à Mecânica Orbital” (Carrara, 2008). Para complementação do conhecimento, estudou-se também o capítulo 5 do livro *Orbital Mechanics for Engineering Students*. (Curtis, 2010)

### **1.1 Objetivo**

O objetivo deste trabalho é estudar Manobras Espaciais, em particular, manobras orbitais que envolvem órbitas de múltiplos encontros e que visem o menor consumo de combustível possível.

Serão analisados modelos para dinâmica do problema de órbitas de múltiplos encontros e estratégias para encontrar estas manobras

O problema estudado será a transferência de um veículo espacial de um corpo de volta ao mesmo corpo com o menor consumo de combustível possível.

O *software* utilizado para a simulação das transferências será o MATLAB.

## **1.2 Motivação**

Estudar manobras orbitais é de suma importância para o desenvolvimento espacial. Se faz necessário definir qual a melhor trajetória e o menor gasto de combustível para diminuir os custos de uma missão espacial. O estudo e a exploração de ambientes espaciais são prioridades para os países que querem dominar e aprimorar tecnologias espaciais.

Com esta motivação, o presente trabalho está concentrado no estudo dessas trajetórias, e em sua otimização, buscando encontrar soluções que possibilitem o menor consumo de combustível.



## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1 Manobras

A realização de transferências orbitais por meio de sistemas propulsivos em um campo de força central Newtoniano consiste em um problema de fundamental importância em astronáutica, tendo sido tema de diversos estudos. A transferência torna-se necessária quando ocorrem desvios nos parâmetros orbitais do satélite, fazendo com que ele se encontre em uma órbita diferente da nominal, podendo ainda estar prevista na própria missão (Kuga e Rao, 2001).

De acordo com Prado (2011) quanto ao tipo de manobra envolvida, existem duas categorias principais:

a) Transferências de órbita: manobras de grande amplitude. Têm por objetivo alterar significativamente a órbita do satélite. Como exemplo, temos a transferência de um veículo espacial de uma órbita baixa para uma órbita mais alta (como a geoestacionária).

b) Correções de órbita: manobras de pequena amplitude. Destinam-se a manter o satélite em determinada órbita, compensando efeitos perturbadores que tendem a alterar a órbita nominal do veículo espacial.

O problema da transferência ótima de um veículo espacial entre dois pontos teve em R. H. Goddard (1919) um de seus primeiros estudiosos. No seu trabalho foram propostas soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes. A seguir veio o trabalho de Hohmann (1925), que obteve solução ótima para o problema de transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre em um campo de força central Newtoniano (Santos, 2005).

#### 2.1.1 Leis de Kepler e Elementos Keplerianos

O astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) deu uma grande contribuição quando montou um gigantesco catálogo de observações dos planetas. A

característica mais importante de tais observações era a precisão. A precisão era suficiente para discriminar entre hipóteses verdadeiras ou falsas sobre as várias teorias especulativas existentes na época. (Carrara, 2008)

Kepler (1571-1630) pegou as observações de Tycho Brahe e após anos de tentativas de ajuste, conseguiu conceituar o movimento de Marte. Seu tratado "Astronomia Nova" discute o movimento de Marte, bem como formula as famosas leis de Kepler. (Carrara, 2008)

### **Leis de Kepler:**

**1a lei:** "Lei das órbitas elípticas". As órbitas dos planetas são elipses com o Sol como foco. Generalizando, a órbita de um corpo num campo de força central é uma cônica (elipse, hipérbole, parábola) com o foco no centro de atração.

**2a lei:** "Lei das áreas". O raio vetor de cada planeta com relação ao Sol como origem varre áreas iguais em tempos iguais. Esta é de fato uma propriedade de seções cônicas, expressa por  $\dot{A} = cte$ , onde  $A$  é a área.

**3a lei:** "Lei harmônica". A relação dos quadrados dos períodos entre 2 planetas é igual à relação do cubo do semi-eixo maior de suas órbitas. Assim, seja o planeta  $p_i$  com período  $T_i$  e semi-eixo maior  $a_i$ . Vale então  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = cte$ . (Carrara, 2008)

### **Elementos Keplerianos:**

Os elementos keplerianos ou clássicos constituem coordenadas que posicionam completamente o satélite e sua órbita. No movimento plano, foram definidos 3 dos elementos keplerianos:

- o semi-eixo maior  $a$ ,
- a excentricidade  $e$ ,
- a anomalia média  $M$

que definem a elipse e localizam o satélite no plano da elipse. (Carrara, 2008)

#### **2.1.2 Transferência de Hohmann**

A manobra do tipo Hohmann consiste em transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares de mesmo sentido, com tempo livre, em um campo de força central, por meio de uma órbita de transferência elíptica bi-impulsiva

(Santos, 2005). Para realizar esta manobra, o raio da órbita inicial e o raio da órbita final devem corresponder, respectivamente, ao periapsis e ao apoapsis da órbita elíptica de transferência, como apresentado na Figura 2.1.

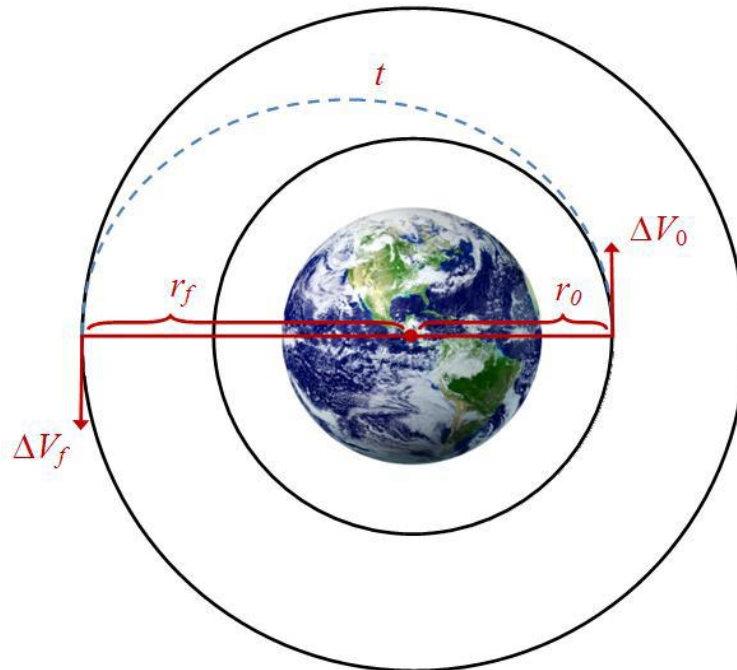


Figura 2.1 - Transferência do tipo Hohmann entre duas órbitas circulares e coplanares.

Dois incrementos de velocidade são necessários para obter a transferência: é aplicado o primeiro impulso na direção do movimento. Após este impulso o veículo entra em uma órbita de transferência elíptica com periapsis  $r_0$  e apoapsis  $r_f$ . Em seguida, o segundo impulso é aplicado, quando o veículo está no apoapsis. Este impulso transfere o veículo da órbita elíptica de transferência  $t$  para a órbita final. O primeiro impulso, aplicado na órbita inicial, tem magnitude dada por (Chobotov, 1996):

$$\Delta V_0 = V_0 \left| \sqrt{\frac{2 \frac{r_f}{r_0}}{\frac{r_f}{r_0} + 1}} - 1 \right| \quad (2.1)$$

Na qual:

$r_0$  = raio da órbita inicial

$r_f$  = raio da órbita final

$V_0$  = velocidade do veículo na órbita inicial

Quando o veículo espacial atinge o apoapsis da órbita de transferência, aplica-se o segundo e último impulso, também na direção do movimento, com magnitude dada por (Chobotov, 1996):

$$\Delta V_f = V_0 \left| 1 - \sqrt{\frac{2}{\frac{r_f}{r_0} + 1}} \right| \sqrt{\frac{r_0}{r_f}} \quad (2.2)$$

Esse impulso circulariza a órbita no raio final desejado. O tempo de transferência corresponde à metade do período orbital da órbita  $t$ , isto é:

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1 + \frac{r_f}{r_0}}{2} \right)^3 T_0} \quad (2.3)$$

Na qual:

$T_0$  = período da órbita inicial

O incremento total de velocidade necessário para realizar a transferência é dado por:

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_f \quad (2.4)$$

O consumo de combustível dessa manobra é dado por (Zanardi, 1990):

$$m = m_0 - m_f \quad (2.5)$$

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}} \quad (2.6)$$

Sendo:

$m_0$  = massa inicial do veículo espacial

$m_f$  = massa final do veículo espacial

$\Delta V$  = incremento total de velocidade

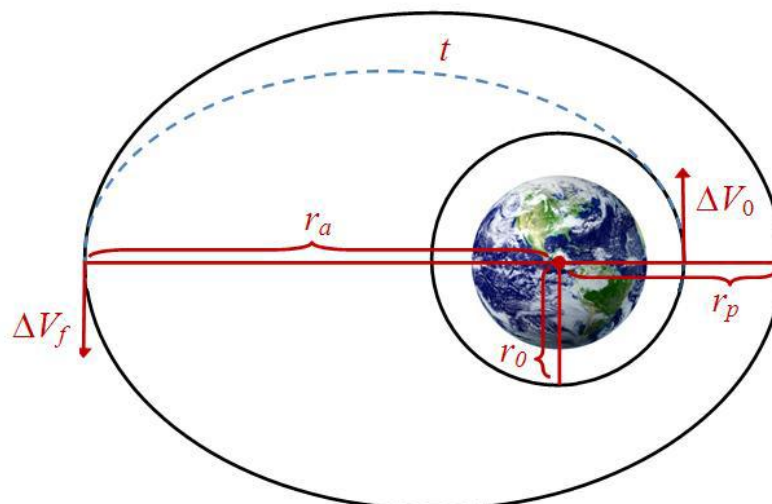
$c$  = velocidade de ejeção dos gases propelentes do motor

Após o trabalho fundamental de Hohmann surgiram várias generalizações para outros casos de transferências coplanares, por exemplo:

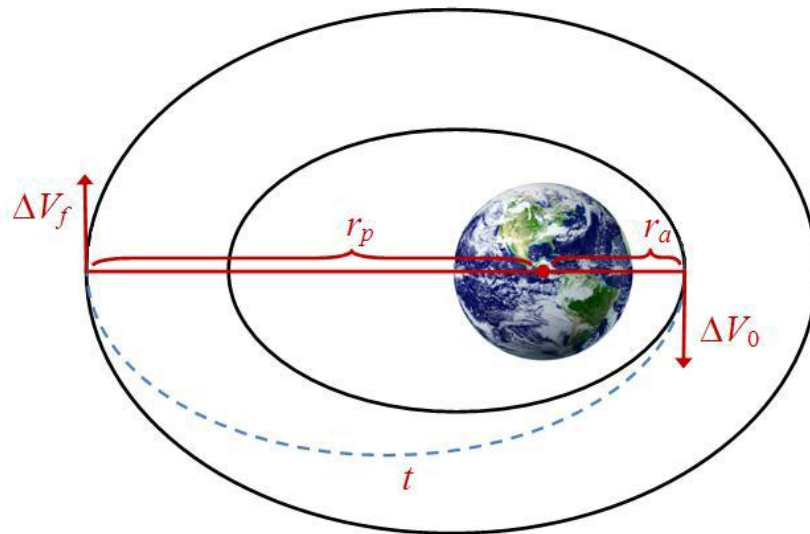
a) Transferência entre uma órbita circular de raio  $r_0$  e uma órbita elíptica externa com periapsis  $r_p$  e apoapsis  $r_a$  ( $r_0 < r_p$ ), ou de órbitas que se interceptam ( $r_p < r_0 < r_a$ ). A solução de menor consumo é a que utiliza do apoapsis da órbita elíptica (Gobet e Doll, 1969 e Marchal, 1965). O primeiro impulso é aplicado na órbita circular e eleva o veículo a uma órbita elíptica de periapsis  $r_0$  e apoapsis  $r_a$ , coincidente com o apoapsis da órbita final desejada, nesse ponto aplica-se o segundo impulso, que aumenta o periapsis para  $r_p$  e completa a transferência, como ilustrado na Figura 2.2 (Santos, 2005).

b) Transferência entre uma órbita elíptica interna à órbita circular ( $r_0 > r_a$ ). É recomendável utilizar a manobra que passa pelo periapsis da órbita elíptica. A regra geral para transferências bi-impulsivas do tipo Hohmann entre órbitas coplanares é que se use a manobra que passa pelo ponto mais distante do corpo central (Santos, 2005).

c) Para transferências entre duas órbitas elípticas co-axiais existem dois casos: órbitas alinhadas (periapsis do mesmo lado) e órbitas opostas (periapsis em lados opostos). Em ambos os casos a solução de menor consumo é a solução do tipo de Hohmann, com impulsos aplicados nos apsides (Santos, 2005), como apresentado na Figura 2.2.



**Figura 2.2 - Transferência do tipo Hohmann entre uma órbita circular e uma órbita elíptica, coplanares e coaxiais.**



**Figura 2.3- Transferência do tipo Hohmann entre órbitas elípticas, coplanares e coaxiais.**

É possível realizar a transferência de Hohmann de uma órbita baixa para uma órbita alta ou de uma órbita alta para uma órbita baixa.

Esta solução é utilizada até hoje sob certas circunstâncias e até meados de 1959 foi considerada como solução final do problema. Hoelker e Silber (1959) mostraram que a solução proposta por Hohmann é ótima somente quando a razão entre o raio final e o raio inicial é menor que 11,94. Nos outros casos, Hohmann deixa de ser ótima e a transferência bi-elíptica tri-impulsiva passa a ser mais econômica (Santos, 2005).

### 2.1.3 Problema Restrito de 3 Corpos

É uma modelagem muito comum para o estudo de trajetórias lunares e interplanetárias. É assumido a presença de apenas três corpos no sistema, que são tratados como pontos de massa. Nenhuma outra perturbação é considerada. É muito comum o caso particular denominado "Problema restrito de três corpos", bastante detalhado no livro "Theory of Orbits" (Szebehely, 1967), onde o objetivo é descrever o movimento de um ponto de massa desprezível (por exemplo um veículo espacial) influenciado pela atração gravitacional de dois corpos massivos (que são chamados primários, como por exemplo a Terra e a Lua) durante toda a trajetória. Essa modelagem não possui solução analítica e usualmente integrações numéricas são efetuadas. (Prado 1993)

### **3. Método**

O presente trabalho apresenta o modelo tradicional do problema restrito de três corpos, que considera o movimento de um corpo com massa desprezível em torno de dois outros corpos com massas finitas, conforme demonstrado em Prado (2001), e foi assumido que os três corpos envolvidos são massas pontuais e não sofrem perturbações externas ao sistema.

Foi utilizado o método numérico Runge-Kutta de 4ª Ordem, desenvolvido em MATLAB, abordando um sistema de propulsão com velocidade de ejeção constante (CEV), considerando um campo gravitacional Newtoniano para a otimização do consumo de combustível entre as manobras de transferência.

O valor do passo do integrador foi considerado como o tempo que o veículo espacial leva para realizar a trajetória, dado em segundos.

## **4. Resultados**

### **4.1 Experimento I**

Raio da Terra: 6380 Km

#### **4.1.1 Semi Eixos Maiores**

- a) 20000 Km
- b) 50000 Km

#### **4.1.2 Excentricidades**

- a) 0
- b) 0

**4.1.3 Parâmetro de Parada**  
32500s

#### **4.1.4 Plotagem**



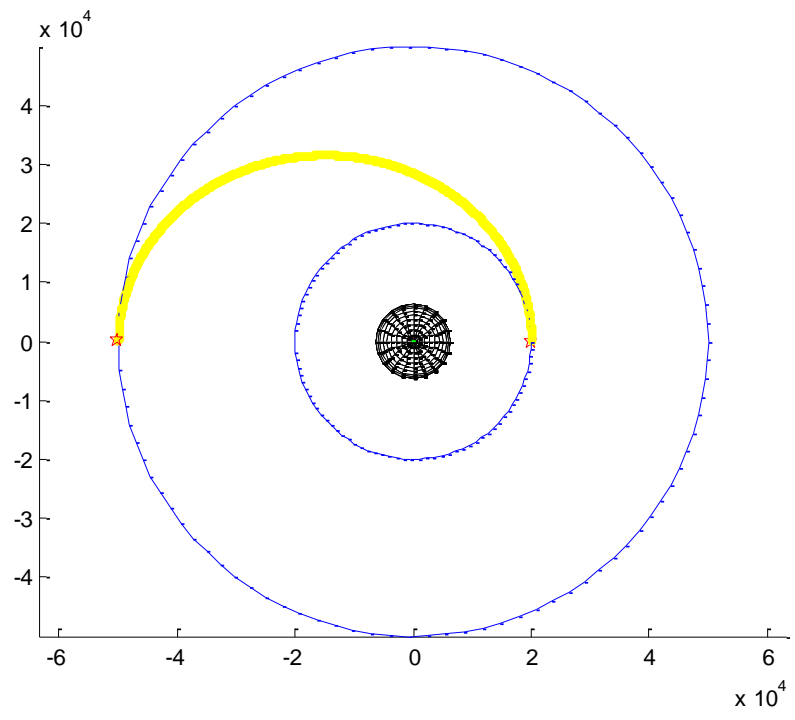


Figura 4.1- Orbita de transferência Rotina 14 MATLAB.

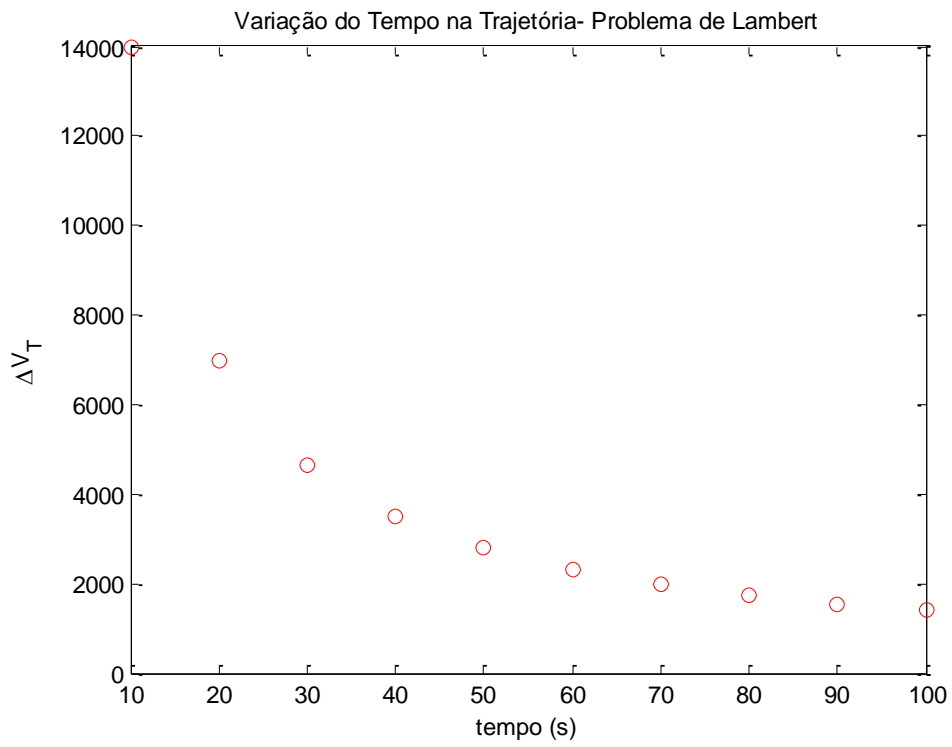


Figura 4.2- Variação de tempo na Trajetória Rotina 14 MATLAB.

## **4.2 Experimento II**

Raio da Terra: 6380 Km

### **4.2.1 Semi Eixos Maiores**

- c) 15000 Km
- d) 35000 Km

### **4.2.2 Excentricidades**

- c) 0,1
- d) 0

### **4.2.3 Parâmetro de Parada**

18800s

### **4.2.4 Plotagem**

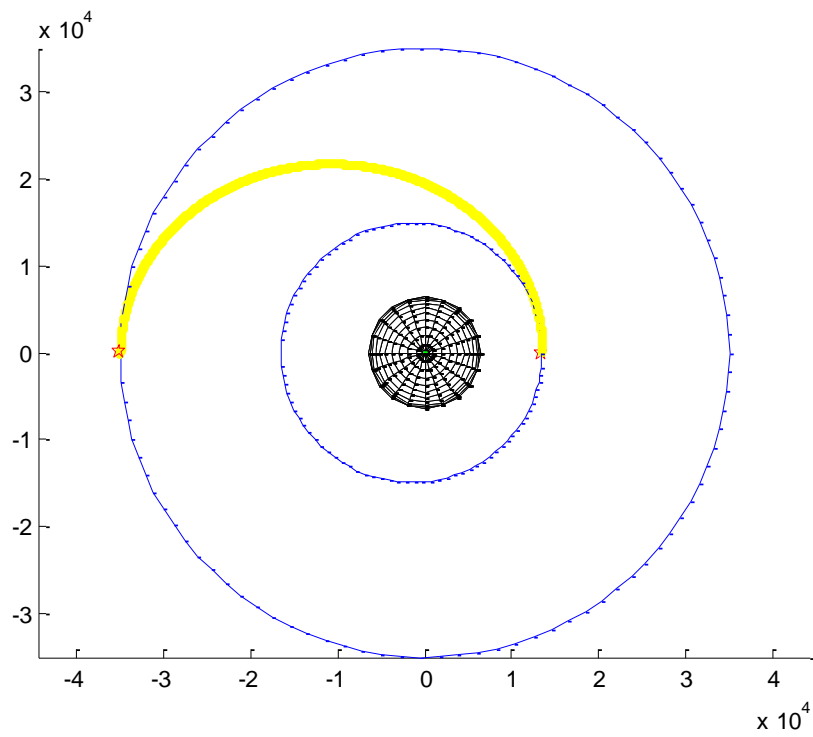


Figura 4.3- Órbita de transferência Rotina 16 MATLAB.

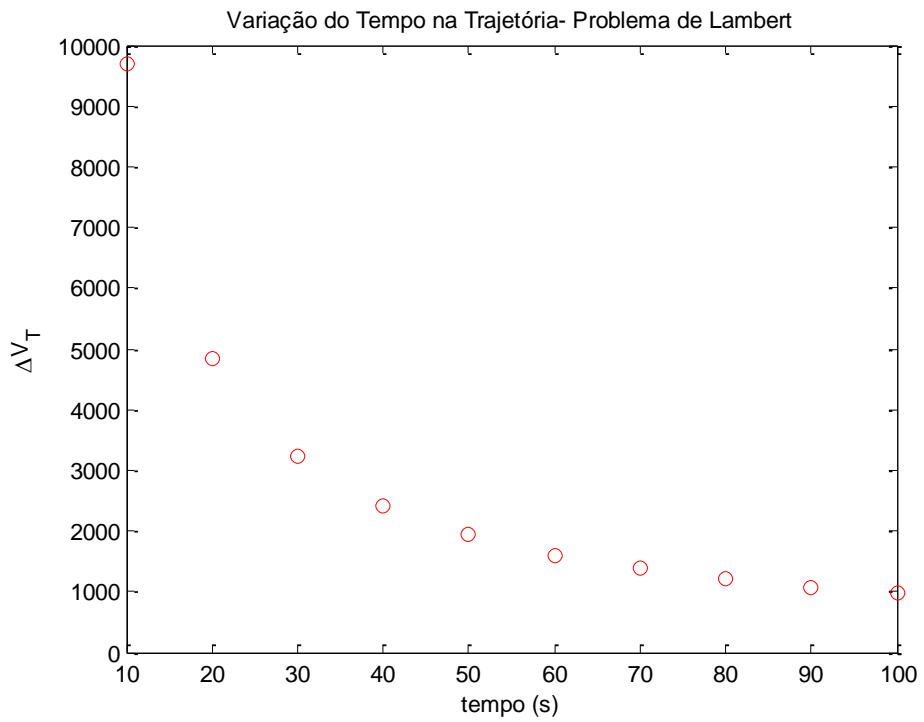


Figura 4.4- Variação de tempo na Trajetória Rotina 16 MATLAB.

## **4.2 Experimento III**

Raio da Terra: 6380 Km

### **4.3.1 Semi Eixos Maiores**

e) 35000 Km

f) 50000 Km

### **4.3.2 Excentricidades**

e) 0,3

f) 0,1

### **4.3.3 Parâmetro de Parada**

7000s

### **4.3.4 Plotagem**

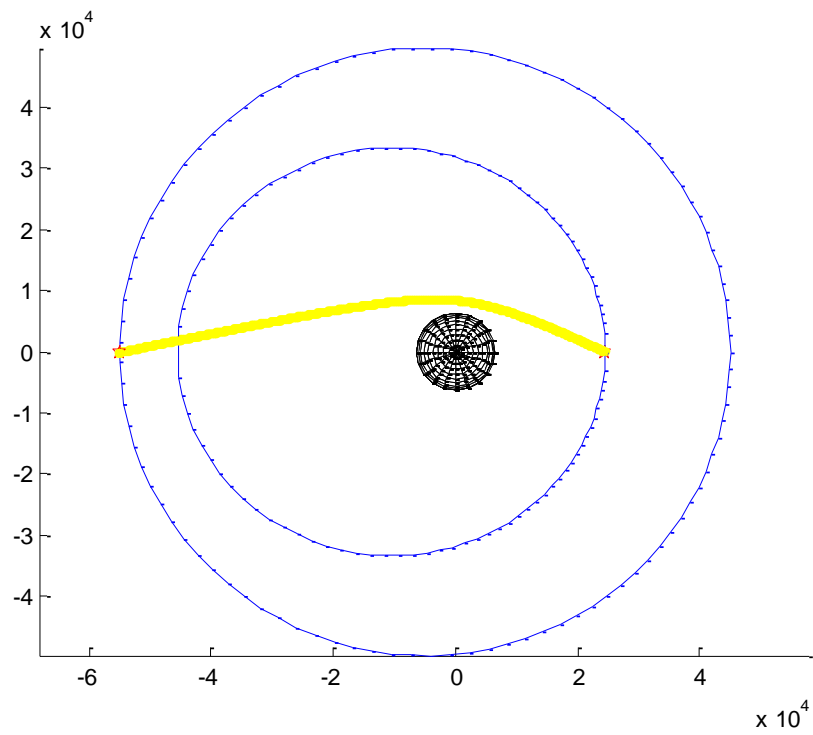


Figura 4.5- Órbita de transferência Rotina 17 MATLAB.

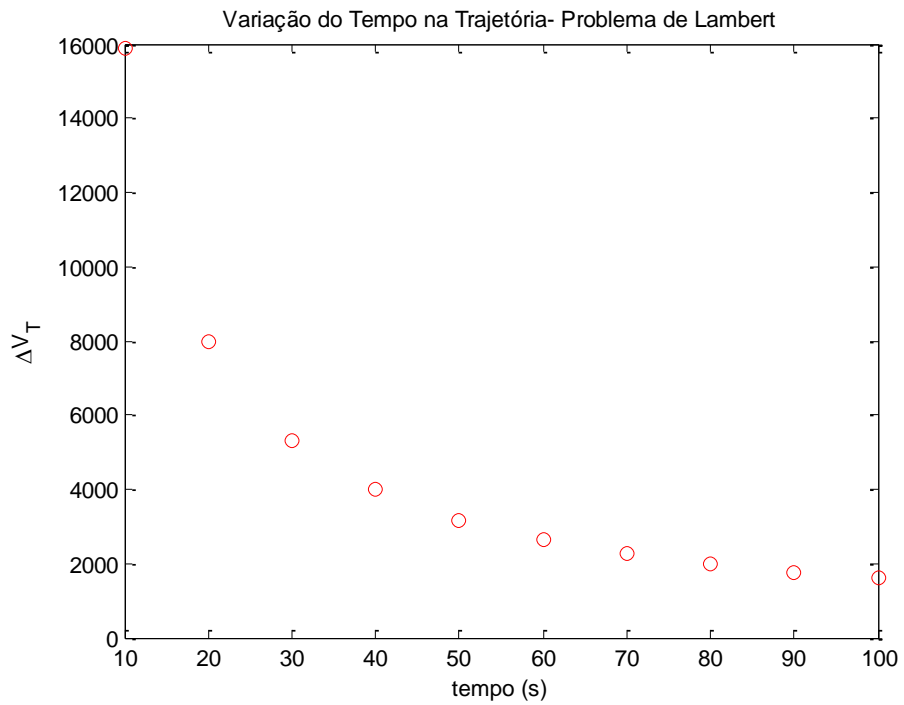


Figura 4.6- Variação de tempo na Trajetória Rotina 17 MATLAB.

## **5. Discussão dos Resultados**

Os resultados apresentados são iniciais, pois trata-se da fase inicial da pesquisa.

## **6. Conclusão**

O presente trabalho não conta com conclusões finais, pois trata-se da parte inicial do trabalho.

## 7. Referências Bibliográficas

- CARRARA, V., KUGA, H. K., RAO, K. R. *Introdução à Mecânica Orbital*, 2ª Edição, INPE, São José dos Campos, 2008.
- CHOBOTOV, V. A. (Editor). *Orbital Mechanics*, 2nd Edition. AIAA Education Series, 1996.
- CURTIS, H. D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier, 2010.
- GOBETZ, F. W.; DOLL, J. R. A survey of impulsive trajectories. *AIAA Journal*, v. 7, p.801-834, 1969.
- GODDARD, R. H. A method of reaching extreme altitudes. *Smithsonian Institute Public Miscelanea Collect*, v. 71, n. 2, 1919.
- HOELKER, R.F.; SILBER, R. The bi-elliptic transfer between circular coplanar orbits. Alabama: Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959. (DA Tech Memo 2-59).
- HOHMANN, W. Die erreichbarkeit der himmelskorper. Oldenbourg, Munique: [s.n.], 1925.
- KUGA, H. K., RAO, K. R. Introducao a determinacao de orbitas e manobras orbitais. In:
- PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. (Eds). *Fundamentos de tecnologia espacial*. Sao Jose dos Campos – SP: INPE, 2001. p. 38-49
- MARCHAL, C., Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifférente), *Astronautica Acta*, v. 11, p. 432-445, 1965.
- PRADO, A. F. B. A Manobras Orbitais. In: *Apostila da 15ª Escola de Verão de Dinâmica Orbital e Planetologia – UNESP, Guaratinguetá - SP, 2011, p. 129 – 152.*
- PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. (Eds). *Fundamentos de Tecnologia Espacial*. Sao Jose dos Campos – SP: INPE, 2001



**PRADO, A.F.B.A. Análise, seleção e implementação de procedimentos que visem manobras ótimas de satélites artificiais, Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, SP, 1989.**

**PRADO, A.F.B.A., RIOS-NETO, A. Um Estudo Bibliográfico sobre o Problema de Transferências de Órbitas. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. XV, No. 1, 1993, pp. 65-78 (INPE-5601-PRE/1816).**

**SANTOS, D. P. S. Aplicações em Manobras espaciais do Problema de Múltiplos Encontros, Dissertação de Mestrado, INPE, S. J. Campos, 2005.**

**SZEBEHELY, V.G., 1967, "Theory of orbits", Academic Press, New York, EUA.**