



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



## **ESTUDO DE MANOBRAS ORBITAIS UTILIZANDO ALGORÍTMO GENÉTICO**

Bolsista – Wagner Frederico Cesar Mahler (ETEP Faculdades, Bolsista  
PIBIC/CNPq)  
e-mail: [wagner.mahler@dem.inpe.br](mailto:wagner.mahler@dem.inpe.br)

Orientador – Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos (DMC/INPE)  
e-mail: [denilson@dem.inpe.br](mailto:denilson@dem.inpe.br)

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE  
INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)

INPE  
São José dos Campos  
Fevereiro de 2012



*“A coisa principal da vida não é o conhecimento, mas o uso que dele se faz.”*

*Talmud*

*“O livro é um mestre que fala, mas que não responde.”*

*Platão*

*"E se um dia nossas ideias tivessem vida própria? E se um dia nossos sonhos não precisassem mais de nós? Quando isso for verdade, o tempo estará acima de nós. O tempo dos anjos."*

*Doctor Who*

## **AGRADECIMENTOS**

Baruch H' por me capacitar e tornar o impossível em possível. A minha mãe Heloisa por todo incentivo. Ao meu orientador professor Pós Doutor Denilson Paulo Souza dos Santos, oo PIBIC, em especial a Egídia pela força e apoio durante todo o ano, aos meus familiares, amigos, professores e todos os demais que fazem parte direta e indiretamente de minha vida!

MUITO OBRIGADO

תודה רבה

THANK YOU VERY MUCH

شكرا جزيلا

σας ευχαριστώ πολύ

большое спасибо

MUCHAS GRACIAS

VIELEN DANK

## ABSTRACT

This work premise is to study the CBERS 2 orbit behavior and any of a spacecraft due to perturbative effects caused by Earth's gravitational action, the lunar gravitational action and the effect of direct solar radiation pressure. First will be investigate the effects caused by the problem of two bodies and dissipative forces in the environment of orbital maneuvers with the main effects the gravitational attraction of the planet and solar radiation pressure. We analyzed the effects and changes caused by this perturbation in their orbits and their possible consequences and changes in the time. Will be considering the restricted problem of three bodies (Moon, Earth and satellite). Simulations were used in MATLAB ® and Runge-Kutta 4th order (RK4) for orbit integrating, presenting their results using graphs resulting from numerical simulation. The effects will be computed as a result of the integration of the motion equations and effect analysis that cause perturbations in the orbit vehicle path. It is hoped to obtain as a result the relevance of the perturbative model considering the importance of this treatment due to the precision of the results by this modeling. As parameters were used data from CBERS 2 and random values for any other vehicle. Initially, the work was performed by adopting the problem in planar, so it was initially dismissed the inclination of the orbit of CBERS and the effect of torques caused by external agents, do not answer the relevance of the attitude motion only the orbital motion. As future works it is intended to simulate the problem considering the inclination of the satellite orbit, the torque caused by external agents and the simulation method using genetic algorithms.

## RESUMO

A premissa deste trabalho é estudar o comportamento da órbita do CBERS 2 e de um veículo espacial qualquer devido os efeitos perturbativos causados pela ação gravitacional terrestre, pela ação gravitacional lunar e o efeito da pressão de radiação solar direta. A princípio serão investigados os efeitos causados pelo problema de dois corpos e de forças dissipativas no ambiente de manobras orbitais, tendo como efeitos principais a atração gravitacional do Planeta e força de pressão de radiação solar. São analisados os efeitos e variações causados por esta perturbação nas órbitas e suas possíveis consequências e variações no decorrer do tempo. Será considerando o problema restrito de três corpos (Lua, Terra e satélite). Nas Simulações foram utilizados o MATLAB® e o método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> ordem (RK4) para integração da órbita, apresentando seus resultados através de gráficos decorrentes desta simulação numérica. Os efeitos serão computados como resultado da integração das equações do movimento e a análise dos efeitos que as perturbações provocam na trajetória da órbita dos veículos. Espera-se obter como resultado a relevância do modelo perturbativo diante da importância deste tratamento devido à precisão dos resultados mediante a este modelamento. Como parâmetros de análise foram utilizados dados do CBERS 2 e valores aleatórios para um outro veículo qualquer. Inicialmente, o trabalho foi realizado adotando o problema de forma planar, portanto desconsiderou-se inicialmente a inclinação da órbita do CBERS e o efeito de torques causados por agentes externos, não atendo a relevância do movimento de atitude somente o movimento orbital. A posteriori pretendem-se simular o problema considerando a inclinação de órbita do satélite, os torques causados por agentes externos e a simulação utilizando o método de algoritmos genéticos.

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pag.</u>
Figura 1 – Localização das Plataformas Hidrológicas, Meteorológicas, Qualidade d'água e Química da Atmosfera. ....	4
Figura 2 – Plataforma de Coleta de Dados (PCDs).....	5
Figura 3 – Órbita heliocêntrica com 778 km de altitude, uma velocidade de 7459,44 <i>ms</i> , período orbital de 100,254 minutos e inclinação de 98,504°. ....	5
Figura 4 – Modelo comparativo entre sistema natural e AG. ....	7
Figura 5 – Estrutura de um AG básico. ....	9
Figura 6 – Problema de dois corpos.....	13
Figura 7 – Movimento dos corpos sob a ação da força gravitacional.....	14
Figura 8 – Sistema de <i>N</i> corpos.....	16
Figura 9 – Caso particular do problema de <i>N</i> corpos ( <i>N</i> = 3) e sua construção também não possui uma solução analítica fechada. ....	20
Figura 10 – Os cinco pontos Langrangianos. ....	22
Figura 11 – Problema restrito de três corpos. ....	23
Figura 12 – Transferência de Hohmann.....	31
Figura 13 – Transferência bi-elíptica tri-impulsiva.....	33
Figura 14 – Sistema Terra satélite com órbita equatorial. ....	37
Figura 15 – Posição do satélite relativa ao centro da Terra. ....	39
Figura 16 – Comportamento da órbita do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta, onde $x_1$ é a posição em <i>X</i> , $x_2$ é a posição em <i>y</i> e $x_3$ é a posição em <i>Z</i> . ....	41
Figura 17 – Velocidade do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta, onde $\frac{dx_1}{dt}$ é a velocidade em <i>X</i> , $\frac{dx_2}{dt}$ é a velocidade em <i>y</i> e $\frac{dx_3}{dt}$ é a velocidade em <i>Z</i> . ....	42
Figura 18 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada <i>x</i> . ....	42
Figura 19 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada <i>y</i> . ....	43
Figura 20 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada <i>Z</i> . ....	43
Figura 21 – Órbita equatorial do satélite ao redor de uma volta na Terra. ....	44
Figura 22 – Velocidade angular do satélite ao longo de uma volta. ....	44
Figura 23 – Aceleração angular do satélite ao longo de uma volta. ....	45
Figura 24 – Velocidade do satélite ao longo de uma volta. ....	45
Figura 25 – Aceleração do satélite ao longo de uma volta.....	46

Figura 26 – Comportamento da órbita do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta sendo perturbada pela pressão de radiação solar, onde $x_1$ é a posição em $x$ , $y_1$ é a posição em $y$ e $z_1$ é a posição em $z$ .....	47
Figura 27 – Velocidade do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta sendo perturbada pela pressão de radiação solar, onde $\frac{dx_1}{dt}$ é a velocidade em $x$ , $\frac{dy_1}{dt}$ é a velocidade em $y$ e $\frac{dz_1}{dt}$ é a velocidade em $z$ . ....	47
Figura 28 – Órbita do satélite sendo perturbada pela pressão de radiação solar. ....	48
Figura 29 – Velocidade angular do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.....	48
Figura 30 – Aceleração angular do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.....	49
Figura 31 – Velocidade do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta. .	49
Figura 32 – Aceleração do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta. .	50
Figura 33 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada $x$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar. ....	50
Figura 34 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada $y$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar. ....	51
Figura 35 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada $z$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar. ....	51
Figura 36 – Órbita do satélite sendo perturbada pela pressão de radiação solar ao longo de dez voltas. ....	52
Figura 37 – Decaimento da órbita do satélite devido a pressão de radiação solar ao longo de dez voltas.....	53
Figura 38 – $\Delta x_2 = x_{2p} - x_2$ .....	53
Figura 39 – Ação da aceleração de pressão de radiação solar sobre o satélite .....	54
Figura 40 – Problema restrito de três corpos Terra, Lua e satélite.....	55
Figura 41 – Trajetória de um veículo qualquer em torno da Terra, sendo perturbada pela ação gravitacional lunar. ....	57
Figura 42 – Trajetória de um veículo qualquer em torno da Terra, sendo perturbada pela ação gravitacional lunar. ....	58
Figura 43 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um $V_0$ , chega até a Lua e retorna a Terra.....	59
Figura 44 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um $V_0$ , insuficiente para que a mesma chegue até a Lua, sendo assim capturada novamente pela força da gravitacional terrestre.....	60

Figura 45 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um $V_0$ elevado, para estas condições, tendo sua trajetória perdida devido a isso. ....	61
Figura 46 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um $V_0$ , chega até a Lua e retorna a Terra. Todavia, agora o movimento está sofrendo com a ação da pressão de radiação solar.....	62
Figura 47 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um $V_0$ , insuficiente para que a mesma chegue até a Lua. Além disso, a mesma sofre ação da pressão de radiação solar.....	63
Figura 48 – Órbita de uma espaçonave que leva um impulso inicial $V_0$ e que está sob a ação da perturbação causada pela ação gravitacional lunar e pela pressão de radiação solar. ....	64
Figura 49 – Órbita de uma espaçonave que leva um impulso inicial $V_0$ e que está sob a ação da perturbação causada pela ação gravitacional lunar e pela pressão de radiação solar. ....	65
Figura 50 – Trajetória de uma espaçonave em meio ao problema restrito de três corpos mais pressão de radiação solar.....	66

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pag.</u>
Tabela 1 – Dados e características do CBERS.....	6
Tabela 2 – Dados utilizados na simulação 1.....	41
Tabela 3 – Dados utilizados na simulação 2.....	46
Tabela 4 – Dados utilizados na simulação 3.....	50
Tabela 5 – Dados utilizados na simulação 4.....	57
Tabela 6 – Dados utilizados na simulação 5.....	58
Tabela 7 – Dados utilizados na simulação 6.....	59
Tabela 8 – Dados utilizados na simulação 7.....	60
Tabela 9 – Dados utilizados na simulação 8.....	61
Tabela 10 – Dados utilizados na simulação 9.....	62
Tabela 11 – Dados utilizados na simulação 10.....	63
Tabela 12 – Dados utilizados na simulação 11.....	64
Tabela 13 – Dados utilizados na simulação 12.....	65

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_1$  - Massa do corpo maior

$m_2$  - Massa do corpo menor

$r_{12}$  - Distância entre os centros dos corpos

$r_1$  - Distância de  $m_1$  até o C.M.

$r_2$  - Distância de  $m_2$  até o C.M.

$G$  - Constante da Gravitação Universal

$\mu$  - Parâmetro gravitacional

$a_{cp}$  - Aceleração centrípeta

$\Omega$  - Velocidade angular

$T$  - Período

$\vec{F}_i$  - Força exercida pela  $i$  ézima partícula

$m_i$  - Massa da  $i$  ézima partícula

$m_j$  - Massa da  $j$  ézima partícula

$r_{ij}$  - Distância entre

$\vec{\alpha}$  - Constante de integração

$\vec{\beta}$  - Constante de integração

$\vec{r}$  - Raio vetor do C.M.

$\vec{H}$  - Momento angular

$\vec{L}_i$  - Quantidade de movimento da  $i$  ézima partícula

$\pi$  - Pi

$x_1$  - Distância de  $m_1$  até o C.M.

$x_2$  - Distância de  $m_2$  até o C.M.

$x$ ,  $y$  e  $z$  - Coordenadas do satélite

$v_G$  - Velocidade do C.M.

$v_{rel}$  - Velocidade relativa

$a_{rel}$  - Aceleração relativa

$\vec{F}_1$  - Força referente ao corpo de massa  $m_1$

$\vec{F}_2$  - Força referente ao corpo de massa  $m_2$

$E$  - Energia de um fóton  
 $h$  - Constante de Planck  
 $f$  - Frequência  
 $\mu$  - Quantidade de movimento do fóton  
 $c$  - Velocidade da luz  
 $P$  - Pressão  
 $F$  - Força  
 $S$  - Área do satélite  
 $m$  - Massa do satélite  
 $v$  - Velocidade  
 $t$  - Tempo  
 $I$  - Intensidade  
 $S_0$  - intensidade do fluxo da radiação solar à distância de  $r_0$   
 $r$  - Distância do veículo ao Sol  
 $r_0$  - Raio médio da órbita da Terra  
 $r_f$  - Raio final  
 $\vec{p}$  - Aceleração de pressão de radiação solar  
 $\nu$  - Fator de eclipse  
 $C_r$  - Coeficiente de reflexão da luz  
 $\vec{a}_t$  - Aceleração tangencial  
 $\vec{a}_r$  - Aceleração radial  
 $H$  - Altitude do satélite referente a superfície da Terra  
 $R$  - Raio da Terra  
 $\Delta V_0$  - Impulso inicial  
 $\Delta V_1$  - Impulso intermediário  
 $\Delta V_f$  - Impulso final  
 $a$  - semi eixo maior  
 $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_f$  - fornece o sinal de positivo e negativo da função  
 $V_0$  - velocidade inicial da espaçonave relativa à rotação do sistema Terra/Lua  
 $V_x$  e  $V_y$  - componentes da espaçonave relativa à rotação do sistema Terra/Lua  
 $\chi$  - ângulo inicial da trajetória de vôo (graus)

$\varphi$  - coordenadas do azimute da espaçonave (graus)

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. PROJETO CBERS .....	3
3. ALGORITMO GENÉTICO (AG).....	7
4. SIMULADOR .....	11
5. MECÂNICA CELESTE .....	12
6. PROBLEMA DE DOIS CORPOS .....	13
6.1. PROBLEMA DE N CORPOS .....	15
6.2. PROBLEMA DE TRÊS CORPOS .....	20
7. PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS.....	23
8. PERTURBAÇÕES.....	27
9. PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR .....	28
10. MANOBRAS ORBITAIS .....	30
10.1. TRANSFERÊNCIA ORBITAL .....	30
10.2. TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN .....	30
10.3. TRANSFERÊNCIA BI-ELÍPTICA TRI-IMPULSIVA .....	33
11. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RAIDAÇÃO SOLAR DIRETA .....	36
11.1. EQUACIONAMENTO.....	36
12. RESULTADOS DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA .....	41
13. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA .....	55
14. RESULTADOS DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA .....	57
15. CONCLUSÃO.....	67

## 1. INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade a observação do céu tem sido motivo de fascínio e estudo entre os povos. Os sumérios (5000 a.C.), considerados os inventores da astronomia, foram os primeiros a observar o movimento dos astros. O modelo de seu sistema solar era composto de 12 planetas, contando o sol e a lua. Entretanto, para eles, haveria um décimo planeta chamado Nibiro de órbita muito extensa e esta estaria além da órbita de Plutão (Sitchin, The Encyclopedia of Extraterrestrial Encounters, 2001) e (Sitchin, The 12th Planet, 1976).

Foram os gregos que revolucionaram o estudo do movimento dos astros (Astronews, 2010). Cláudio Ptolomeu, um grego que vivia em Alexandria, fazendo uso da geometria, a ferramenta de matemática da época, criou o famoso sistema ptolomaico que explicava o movimento dos corpos e previa com perfeição suas posições no céu. Este sistema era composto de deferentes e epiciclos. Em outras palavras, seu modelo era baseado no Geocentrismo e durou por volta de 1500 anos.

Ao contrário do que muitos pensam o sistema Heliocêntrico não foi desenvolvido por Nikolaj Kopernik (Nicolau Copérnico). O tema já era discutido por volta de 300 anos A.c. por astrônomos como Aristarco de Samos (G. Winter). Totalmente encoberto e esquecido, por mera questão dogmática, o sistema Heliocêntrico ficou escurecido até que Nikolaj Kopernik decidiu reavivar anotações gregas que antecediam estudos de Ptolomeu estudando-as e confirmou o que já suspeitava. Supôs ainda que as órbitas dos planetas eram circulares e que esta nova ideia era mais coerente que a do Geocentrismo.

Baseado nas anotações de Kopernik, Tycho Brahe observa que o modelo Geocêntrico não explica consistentemente o movimento dos astros. Este fato pode ser observado com o deslocamento do planeta Marte em meio de sua órbita.

Johannes Kepler, pai do movimento orbital, foi aluno de Tycho Brahe. Através de sua demonstração matemática baseada nos estudos de Brahe, comprovou

empiricamente o que seu professor afirmava a respeito do movimento das órbitas planetárias. Este brilhantismo matemático rendeu-lhe três leis fundamentais do movimento orbital.

Somente mais tarde Newton em seu trabalho, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, compila o estudo da mecânica celeste utilizando o conceito de força que até então não era conhecido, sendo este aceito até os dias de hoje.

## **2. PROJETO CBERS**

O projeto CBERS (Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestres) surgiu através da parceria entre Brasil e China, possibilitando a integração deste dentro do seleto grupo de países detentores da tecnologia de sensoriamento remoto. A principal finalidade desta missão é o monitoramento do vasto território brasileiro através da utilização de satélites e plataformas de coleta de dados (PCDs) distribuídas pelo território nacional, incluindo o controle do desmatamento e queimadas na Amazônia, de recursos hídricos, áreas agrícolas, crescimento urbano, ocupação do solo, divulgação científica e em inúmeras outras aplicações (INPE, 2007).

As plataformas de coletas de dados são pequenas estações automáticas, instaladas, geralmente, em locais remotos do território nacional com a finalidade de adquirir dados e enviá-los ao satélite. Este, por sua vez, os retransmite para as estações terrenas do INPE, em Cuiabá e Alcântara. O Centro de Missões, em Cachoeira Paulista, são os responsáveis em fazer o tratamento dos dados, assim que os recebem, e distribuem imediatamente aos usuários do sistema.

Para que haja confiabilidade nos dados, ou seja, baixa interferência de ruído, falta de precisão etc, deve-se estudar o comportamento dos satélites no Espaço, obtendo um modelo satisfatório que torne confiável os dados emitidos para a Terra. Ajustar o problema pode trazer certas facilidades diante de seus equacionamentos, mas por outro lado, dependendo dos tipos destas considerações, os resultados tornam-se imprecisos e ineficientes. Por isso, tratando-se de precisão, o modelamento do sistema deve aproximar-se de uma situação real.

As plataformas de coleta de dados são distribuídas em território brasileiro conforme mostra a Figura 1.

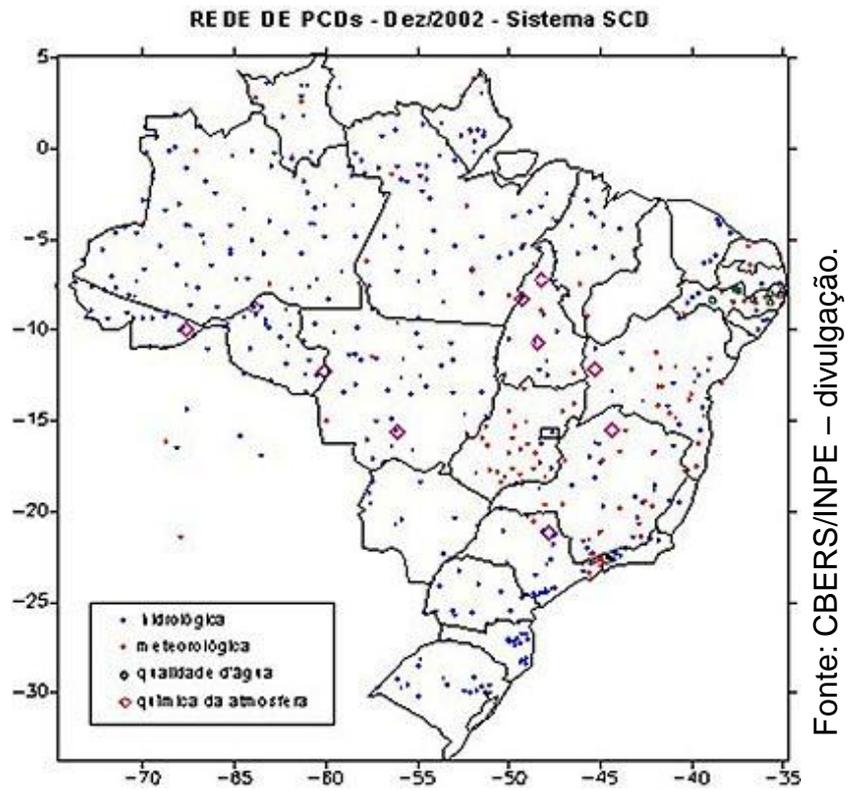


Figura 1 – Localização das Plataformas Hidrológicas, Meteorológicas, Qualidade d'água e Química da Atmosfera.

O formato físico e a instalação de uma dessas plataformas podem ser conferidos na figura 2.



Fonte: CBERS/INPE – divulgação.

Figura 2 – Plataforma de Coleta de Dados (PCDs).

A órbita do satélite CBERS pode ser representada como mostra a figura 3. Suas características, tal como as características de sua órbita são apresentadas na Tabela 1.

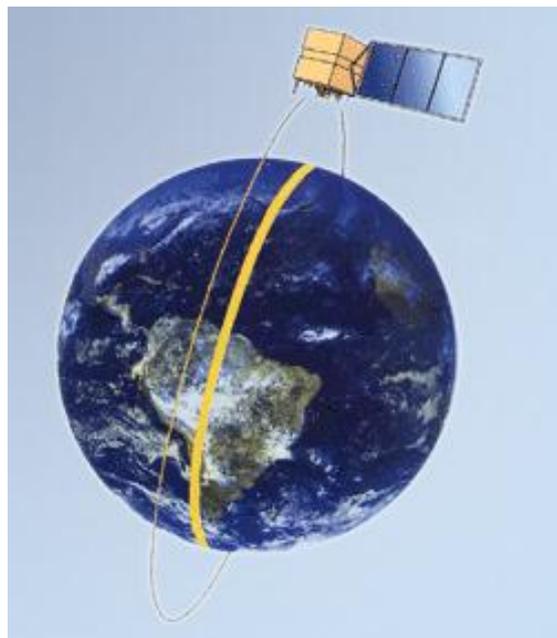


Figura 3 – Órbita heliocêntrica com 778 km de altitude, uma velocidade de  $7459,44 \text{ m/s}$ , período orbital de 100,254 minutos e inclinação de  $98,504^\circ$ .

Tabela 1 – Dados e características do CBERS.

Missão China-Brazil Satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestres			
Instituições Responsáveis	INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) e CAST (Academia Chinesa de Tecnologia Espacial)		
País/Região	Brasil e China		
Satélite	CBERS-1	CBERS-2	CBERS-2B
Lançamento	14/10/1999	21/10/2003	19/09/2007
Local de Lançamento	Centro de Lançamento de Taiyuan	Centro de Lançamento de Taiyuan	Centro de Lançamento de Taiyuan
Veículo Lançador	Longa Marcha 4B	Longa Marcha 4B	Longa Marcha 4B
Situação Atual	inativo (agosto/2003)	ativo	ativo
Órbita	heliossíncrona	heliossíncrona	heliossíncrona
Altitude	778 Km	778 Km	778 Km
Inclinação	98,5°	98,5°	98,5°
Tempo de Duração da Órbita	100,26 min	100,26 min	100,26 min
Horário de Passagem	10h30	10h30	10h30
Período de Revisita	26 dias	26 dias	26 dias
Tempo de Vida Projetado	2 anos	2 anos	2 anos
Instrumentos Sensores	CCD, IRMSS e WFI	CCD, IRMSS e WFI	CCD, HRC e WFI
Movimento médio (n)		$1.0445 \cdot 10^{-3} m$	
Semieixo maior (a)		$7.1488 \cdot 10^6 m$	
Excentricidade (e)		$1.021 \cdot 10^{-3}$	
Parâmetro orbital (p)		$7.1488 \cdot 10^6$	
Raio do periapsis ( $r_p$ )		$7.1415 \cdot 10^6 m$	
Raio do apoapsis ( $r_a$ )		$7.1561 \cdot 10^6 m$	
Anomalia excêntrica (E)		1.8508	
Ângulo de voo ( $\gamma$ )		$9.8202 \cdot 10^{-4} rad$	
Velocidade (v)		$7.4594 \cdot 10^3 m/s$	
Anomalia verdadeira (f)		1.0391	
Velocidade no periapsis ( $v_p$ )		$7.4747 \cdot 10^3 m/s$	
Velocidade no apoapsis ( $v_a$ )		$7.4594 \cdot 10^3 m/s$	

### 3. ALGORITMO GENÉTICO (AG)

A sobrevivência na natureza faz com que indivíduos disputem entre si por requisitos básicos como água, abrigo, comida e reprodução. A quantidade de descendentes e conseqüentemente a existência de uma espécie está relacionada ao êxito nestas disputas. A combinação entre os genes dos indivíduos que perduram na espécie, podem produzir um novo indivíduo muito melhor adaptado às características de seu meio ambiente (Whitley, D.). Analogamente, os AG utilizam deste princípio evolutivo na natureza, onde cada indivíduo representa uma possível solução para um problema dado. Algoritmos genéticos é uma família de modelos computacionais inspirados no princípio da evolução das espécies de Darwin e da genética (Goldberg, 1989).

O modelo comparativo pode ser observado na Figura 4:



Figura 4 – Modelo comparativo entre sistema natural e AG.

São algoritmos probabilísticos que modelam de forma computacional uma solução para um problema específico em uma estrutura de dados como a de um cromossomo através de um mecanismo de busca paralela de sobrevivência dos mais aptos e na reprodução destes indivíduos aplicando operadores que

recombinam estas estruturas preservando informações críticas. Os processos que mais contribuem para a evolução são o crossover, a adaptação baseada na seleção/reprodução e a mutação.

As técnicas de busca e otimização, geralmente apresentam (de Lacerda & de Carvalho):

Um espaço de busca, onde estão todas as possíveis soluções do problema;

Uma função objetivo (algumas vezes chamada de função de aptidão na literatura de AGs), que é utilizada para avaliar as soluções produzidas, associando a cada uma delas uma nota.

A Figura 5 apresenta um diagrama do modelo de um algoritmo genético.

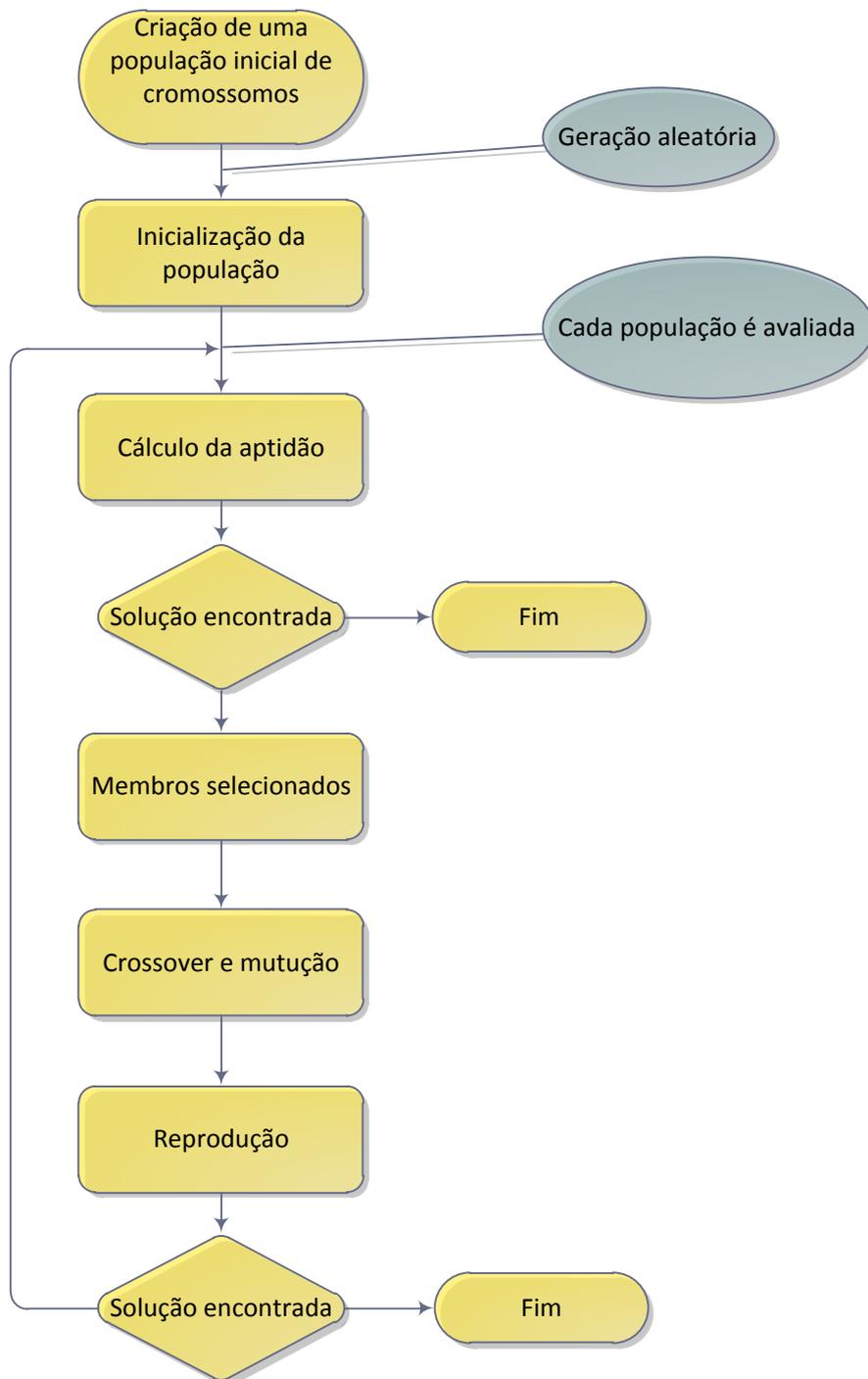


Figura 5 – Estrutura de um AG básico.

Os AGs têm sido utilizados para otimizar Funções Matemáticas, Otimização Combinatorial, Otimização de Layout de Circuitos, Problema do Caixeiro Viajante, Problema de Otimização de Rota de Veículos Otimização de Planejamento dentre outros de forma a convergir a solução de dados ao ponto de máximo ou mínimo da função. Apesar de parecer trivial, muitas vezes determinar o máximo e o mínimo de uma função não se mostra nada simples.

Dentro de um espaço de busca, uma função pode conter muitos máximos e mínimos locais não sendo necessariamente o máximo ou o mínimo global desta função. A solução ótima encontra-se no ponto global da função.

#### **4. SIMULADOR**

Foi desenvolvido um integrador numérico no software MATLAB® capaz de simular o movimento orbital. O programa resume-se em um Runge Kutta de quarta ordem (RK4). Este integrador consiste em integrar no tempo todas as posições referentes aos instantes da trajetória, plotando como resultado final a órbita completa do corpo tal como a trajetória descrita por ele caso o mesmo execute algum tipo de manobra orbital de aproximação ou transferência.

## 5. MECÂNICA CELESTE

A Mecânica Celeste estuda o movimento relativo dos corpos assim como as forças a qual estão submetidos, determinando as posições relativas dos astros e suas variações com o tempo. De forma geral pode-se dizer que a Mecânica Celeste estuda os movimentos relativos dos astros, aplicando as leis da Mecânica Newtoniana. Alguns dos problemas que podem ser estudados em mecânica celeste são:

- O problema de um corpo de massa infinitesimal sujeito à atração gravitacional de outro corpo. Mesmo em três dimensões, este problema possui solução fechada, todavia essa solução depende da resolução de uma equação transcendental conhecida como: a equação de Kepler;
- O problema dos dois corpos: calcular as órbitas de dois corpos, podendo considerá-los como pontos de massa ou corpos de raio pequeno com simetria esférica, sujeitos à ação gravitacional. Este problema é redutível ao problema de um corpo;
- O problema de três corpos: calcular as órbitas de três corpos sujeitos às ações gravitacionais. Este problema, exceto em casos muito especiais, não possui uma solução analítica;
- Campos gravitacionais sem simetria esférica: calcular a órbita de um corpo de massa infinitesimal em um campo gravitacional assimétrico (por exemplo, um satélite orbitando um corpo achatado).

Primeiramente, estudou-se a dinâmica da partícula de forma que os corpos assumam distribuição homogênea de massa. Em outras palavras, estes são perfeitamente esféricos e a dimensão de seus raios são irrelevantes quando comparados a distância entre eles.

## 6. PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Supõem-se um sistema isolado por dois corpos primários de massas  $m_1$  e  $m_2$  ambos sob a ação da força gravitacional, movendo-se em órbita circular ao redor do centro de massa do sistema, como mostra a Figura 6.

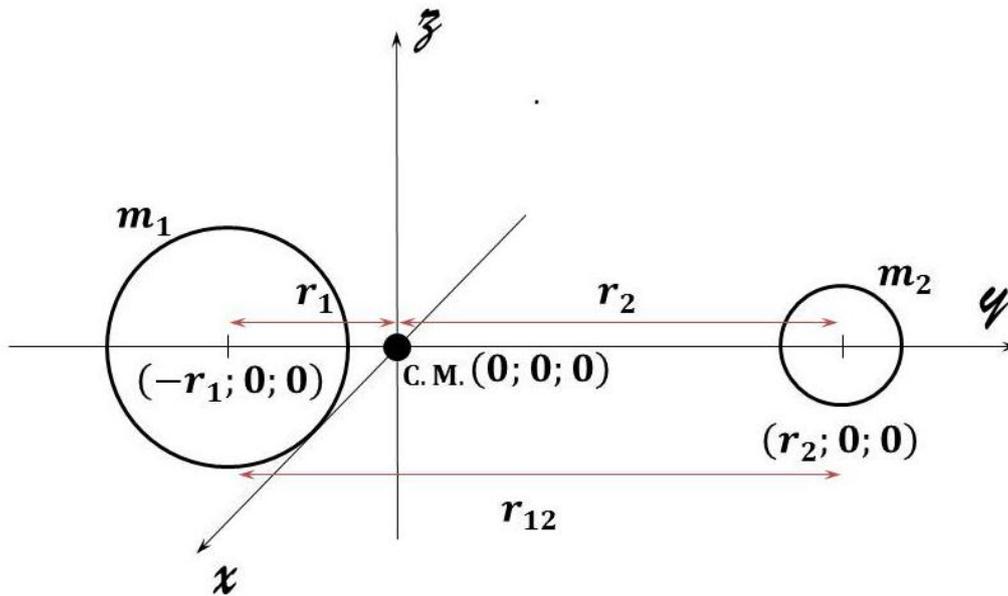


Figura 6 – Problema de dois corpos.

Com o referencial sobre o centro de massa (C.M.), escreveu-se:

$$r_{12} = -r_1 + r_2 \quad (6.1)$$

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad (6.2)$$

$$M = m_1 + m_2 \quad (6.3)$$

$$\mu = GM \quad (6.4)$$

O sistema pode ser reduzido ao de um corpo de massa  $M$ , sob a interação mútua da força gravitacional  $\vec{F}$  entre duas massas separadas de uma distância  $r_{12}$ , como mostrado na Figura 7.

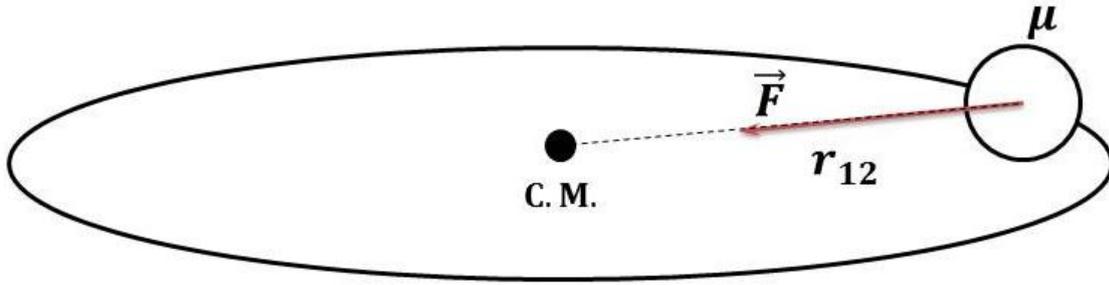


Figura 7 – Movimento dos corpos sob a ação da força gravitacional.

Como o movimento é circular de raio  $r_{12}$ , a aceleração centrípeta pode ser calculada como sendo:

$$a_{cp} = \Omega^2 r_{12} \quad (6.5)$$

Aplicando a segunda Lei de Newton ao sistema, tem-se:

$$\mu \Omega^2 r_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (6.6)$$

$$\Omega^2 r_{12}^3 = G \frac{m_1 m_2}{\mu} \quad (6.7)$$

Como a quantidade  $\omega^2 r_{12}^3 = cte$ , isso implica que o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio  $r$  como descreve a terceira Lei de Kepler para órbitas circulares.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_{12}^3}{\mu} \quad (6.8)$$

Isolando  $r_2$  na Equação (6.1) tem-se:

$$r_2 = r_{12} + r_1 \quad (6.9)$$

Substituindo a Equação (6.9) em (6.2), chegou-se em:

$$m_1 r_1 + m_2 (r_{12} + r_1) = 0 \quad (6.10)$$

Isolando  $r_1$  na Equação (6.10) determina-se a posição do corpo  $m_1$  em relação ao C.M., logo:

$$r_1 = -\frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (6.11)$$

A posição do corpo  $m_2$  em relação ao C.M. pode ser determinada da mesma forma que a de  $r_1$ , logo:

$$r_2 = \frac{m_1 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (6.12)$$

Determinando-se o movimento relativo do corpo de massa  $M$  e raio  $r_{12}$ , logo o movimento de cada uma das estrelas será:

- A estrela de massa  $m_1$  descreve um movimento circular de raio

$$r_1 = -\frac{m_2 r_{12}}{(m_1 + m_2)} \text{ ao redor do C.M. de período } T.$$

- A estrela de massa  $m_2$  descreve um movimento circular de raio

$$r_2 = \frac{m_1 r_{12}}{(m_1 + m_2)} \text{ ao redor do C.M. e de mesmo período } T.$$

Se em um sistema formado por duas massas  $m_i$  e  $m_j$  onde  $m_i \gg m_j$ , o centro de massas coincide aproximadamente com o centro do corpo de massa  $m_i$  podendo supor que o corpo de massa  $m_j$  move-se ao redor de um centro fixo de forças. Isto pode ser observado no caso de um satélite artificial que descreve uma órbita ao redor da Terra.

## 6.1. PROBLEMA DE N CORPOS

Isaac Newton foi a primeira pessoa a equacionar o problema de  $N$  corpos. Todavia, para realizar este trabalho, ele considerou cada massa referente a cada corpo concentrada em um único ponto e este, por sinal, se localizava nos

centros de cada um destes corpos (Prado, 2001). Em outras palavras, as dimensões destes corpos não eram levadas em consideração.

Como fator de conhecimento foi estudado de forma superficial este tipo de problema.

A Figura 6 apresenta o sistema constituído de  $N$  corpos tal como usado por Newton de forma que todos os corpos possuam simetria esférica de forma que toda a massa de seus corpos esteja concentrada em um único ponto, em seu centro e seus raios são pequenos quando comparados as distâncias entre eles.

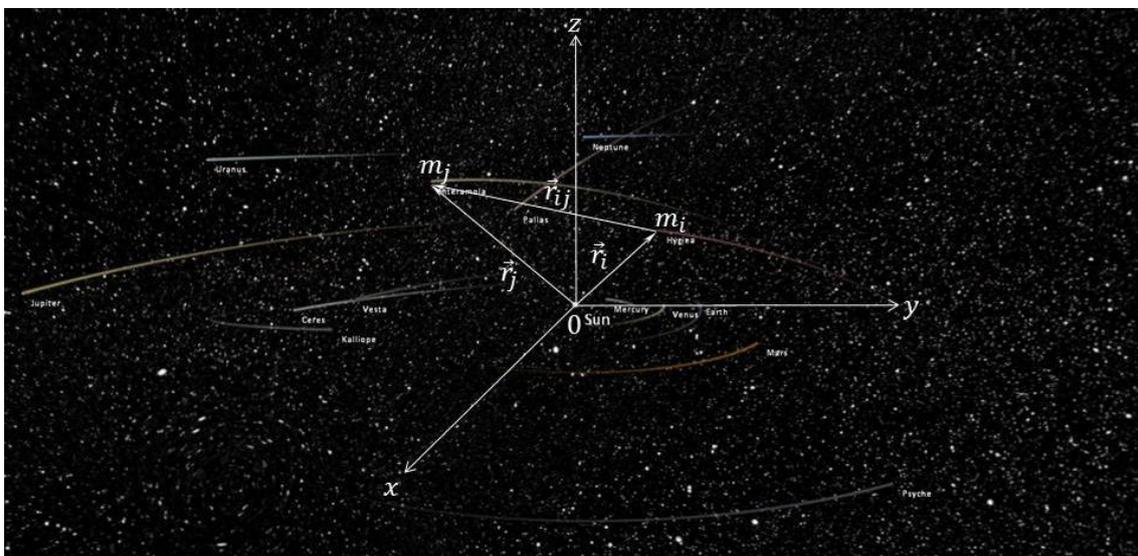


Figura 8 – Sistema de  $N$  corpos.

Foi definido o Sol como sendo o sistema referencial inercial e, portanto  $\vec{r}_i$  é o raio vetor que conecta a massa  $m_i$  a este referencial inercial. Logo,  $\vec{r}_j$  é o raio vetor que une a massa pontual  $m_j$  ao mesmo referencial inercial.

A interação entre os corpos de massa  $m_i$  e  $m_j$  dá-se devido uma força que atua na mesma direção de  $\vec{r}_{ij}$ . Portanto, de forma análoga todos os corpos se atraem mutuamente e o módulo desta força é:

$$\sum \vec{F}_i = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (6.13)$$

Da segunda Lei de Newton tem-se:

$$\sum F_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \quad (6.14)$$

Substituindo a Equação (6.14) em (6.13):

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (6.15)$$

Sabendo que  $\vec{r}_{ij} + \vec{r}_{ji} = 0$  então:

$$\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji} \quad (6.16)$$

Utilizando a Equação (6.16) em (6.15) e aplicando o somatório sobre todos os corpos chega-se a:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = 0 \quad (6.17)$$

Integrando esta equação uma primeira vez chega-se em:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \alpha \quad (6.18)$$

Integrando uma vez (6.18) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{\alpha} t + \vec{\beta} \quad (6.19)$$

Da definição de centro de massa sabe-se:

$$M\vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (6.20)$$

Substituindo a Equação (6.20) em (6.19):

$$M\vec{r} = \vec{\alpha} t + \vec{\beta} \quad (6.21)$$

$$\vec{r} = \frac{(\vec{\alpha} t + \vec{\beta})}{M} \quad (6.22)$$

Derivando a Equação (6.22) no tempo:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\vec{\alpha}}{M} \quad (6.23)$$

A equação anterior resulta na velocidade do centro de massa do sistema formado por  $N$  corpos. Esta variação ocorre de forma constante, ou seja, o centro de massa se movimenta com velocidade constante (Prado, 2001).

Como o movimento do sistema de  $N$  corpos é conservativo pode-se dizer que:

$$\vec{H} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{L}_i \quad (6.24)$$

Onde:

$$\vec{L}_i = m \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (6.25)$$

Substituindo a Equação (6.25) em (6.24) e derivando no tempo obteve-se:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{dm}{dt} \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i \vec{r}_i \times m \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 0 \quad (6.26)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \frac{dm}{dt} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = 0 \quad (6.27)$$

Sabendo que:

$$m \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i} \quad (6.28)$$

A equação (6.28) implica que o movimento de  $N$  corpos relativo a um referencial inercial é devido a uma força central e esta é a resultante de todas as demais forças do movimento.

Este resultado, da equação (6.27), provém da afirmação de que o movimento do sistema é conservativo e o vetor resultante aponta na direção do centro de

massa do sistema. Pode-se demonstrar que o momento angular do sistema é conservativo.

Multiplicando (6.15) por  $\vec{r}_i$ :

$$m_i \vec{r}_i \times \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_i \times \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (6.29)$$

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad (6.30)$$

Sabendo que:

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{r}_j \quad (6.31)$$

e

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{ji} = -\vec{r}_i \times \vec{r}_j \quad (6.32)$$

Substituindo (6.31) e (6.32) em (6.29) e aplicando o somatório duplo chega-se em:

$$\vec{H} = \sum_i \vec{r}_i \times m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \quad (6.33)$$

Ao integrar (6.33) tem-se:

$$\vec{H} = \sum_i \vec{r}_i \times m \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (6.34)$$

Aplicando o operador  $\frac{d}{dt}$  em ambos os lados de (6.34):

$$\frac{d}{dt} \vec{H} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \times m \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = 0 \quad (6.35)$$

Como foi dito o momento angular de  $N$  corpos varia constantemente no espaço.

Estas equações podem ser reduzidas para  $N$  igual quantidade de corpos do sistema. Neste caso,  $N$  é uma quantidade indefinida de massas, e estas, por sinal, são consideradas massas pontuais, possibilitando que as equações fossem escritas de forma genérica. Como a finalidade deste estudo é o problema restrito de 3 corpos, neste caso,  $N=3$  e as equações serão escritas nestas condições.

## 6.2. PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

O problema dos três corpos estuda o comportamento das órbitas de três corpos com distribuição simétrica esféricamente de massa, sujeitos apenas às atrações gravitacionais entre eles. As massas dos corpos são consideráveis, ou seja, três potenciais gravitacionais interagindo mutuamente de tal forma que um afete a órbita do outro. Diferentemente do problema de dois corpos, o problema de três corpos não possui solução analítica fechada.

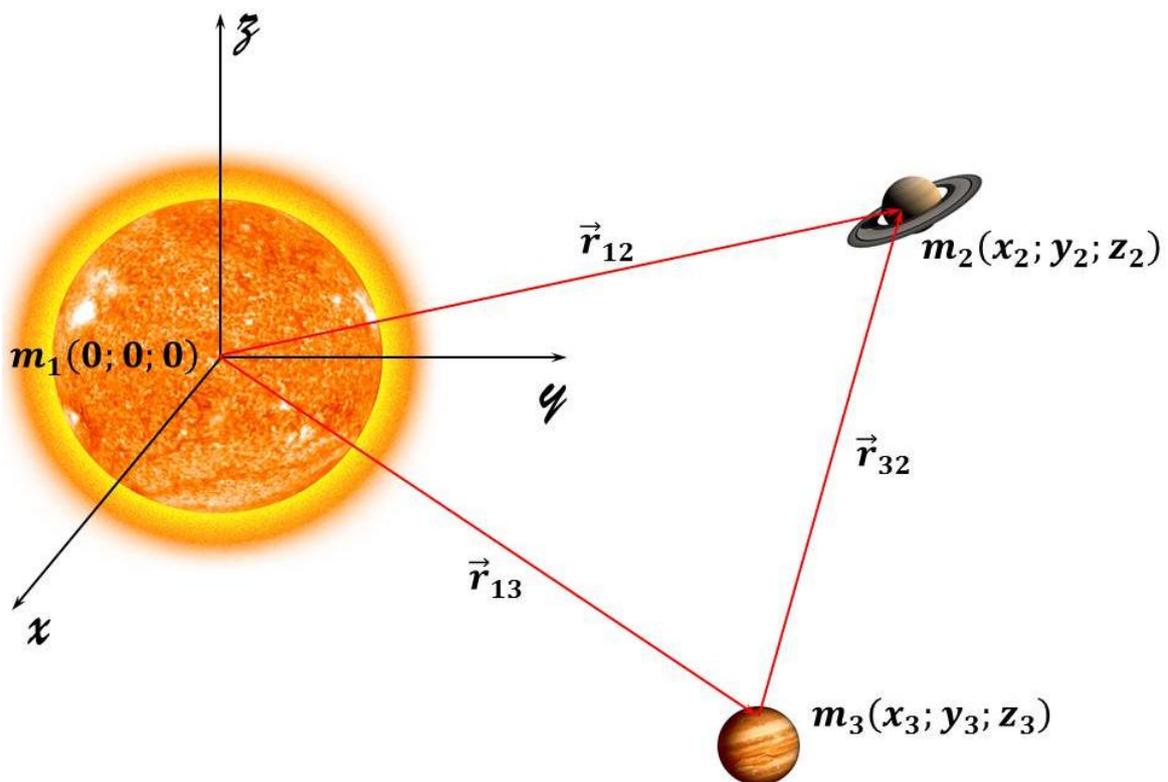


Figura 9 – Caso particular do problema de  $N$  corpos ( $N=3$ ) e sua construção também não possui uma solução analítica fechada.

Dentre as soluções conhecidas, a de Lagrange é comumente usada para este problema e sua formulação esta baseada na configuração geométrica dos corpos sendo estas:

- As três partículas ocupando os vértices de um triângulo equilátero;
- As três partículas ocupando posições colineares.

Porém, para que isso ocorra outras três condições devem ser satisfeitas simultaneamente, como mostrou Lagrange em 1772:

- A força resultante em cada corpo passa através do centro de massa do sistema;
- A força resultante é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa do sistema;
- As velocidades iniciais têm magnitude proporcional às distâncias das partículas ao centro de massa e fazem ângulos iguais com os raios-vetores partícula-centro de massa.

Estas condições criam regiões de estabilidade, regiões de mínimos de energia e estas regiões são chamadas de pontos Lagrangianos.

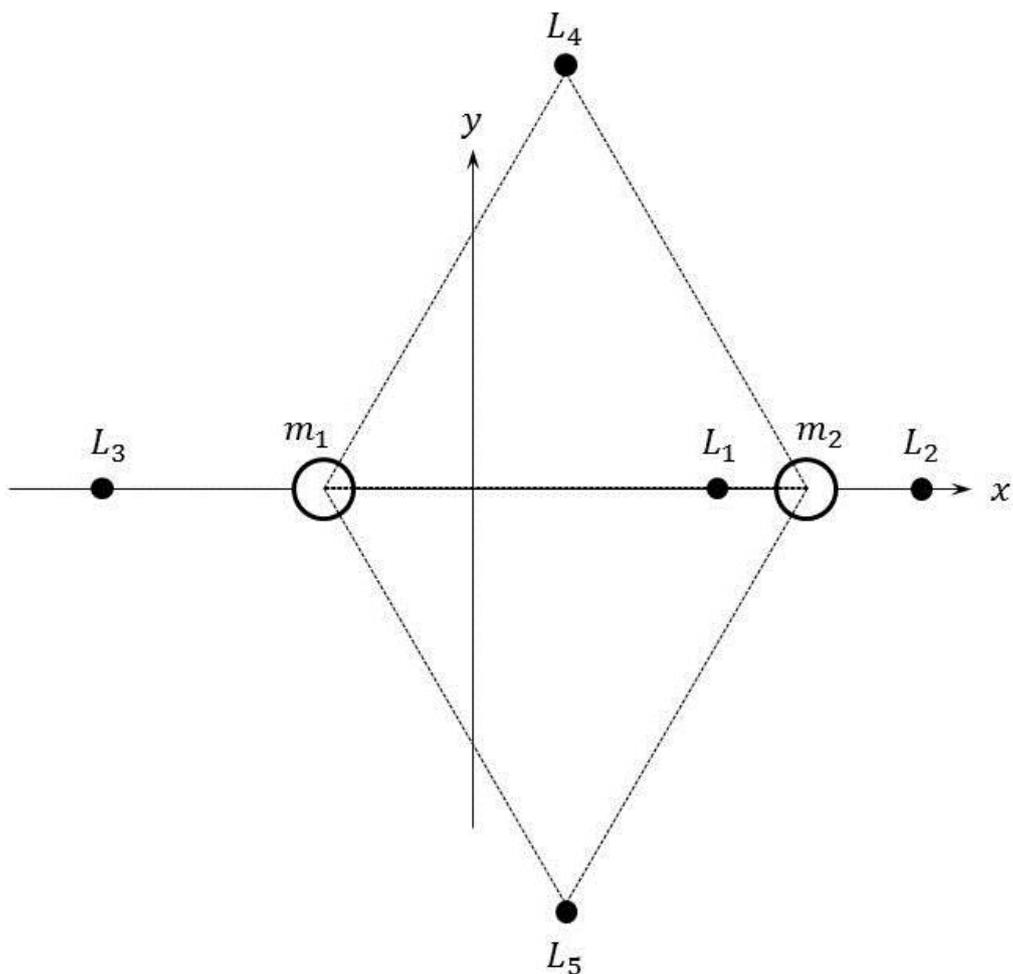


Figura 10 – Os cinco pontos Langrangianos.

As condições de equilíbrio podem ser definidas pelas equações:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 \quad (6.36)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0 \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y \left[ 1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0 \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -z \left[ \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0 \quad (6.40)$$

## 7. PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

O problema restrito de três corpos é um caso particular do problema de três corpos onde a massa do terceiro corpo é desprezível, mediante as massas dos outros dois corpos (Meirovitch, 1970).

Os corpos se movem sob a ação mutua do campo gravitacional ambos relativos ao centro de massa do sistema. O terceiro corpo por sua vez move-se também devido as forças gravitacionais dos demais corpos, todavia sua massa desprezível não interfere de forma efetiva no movimento dos corpos de maiores massa, porém estes, por sua vez, interferem gradativamente no movimento do terceiro corpo.

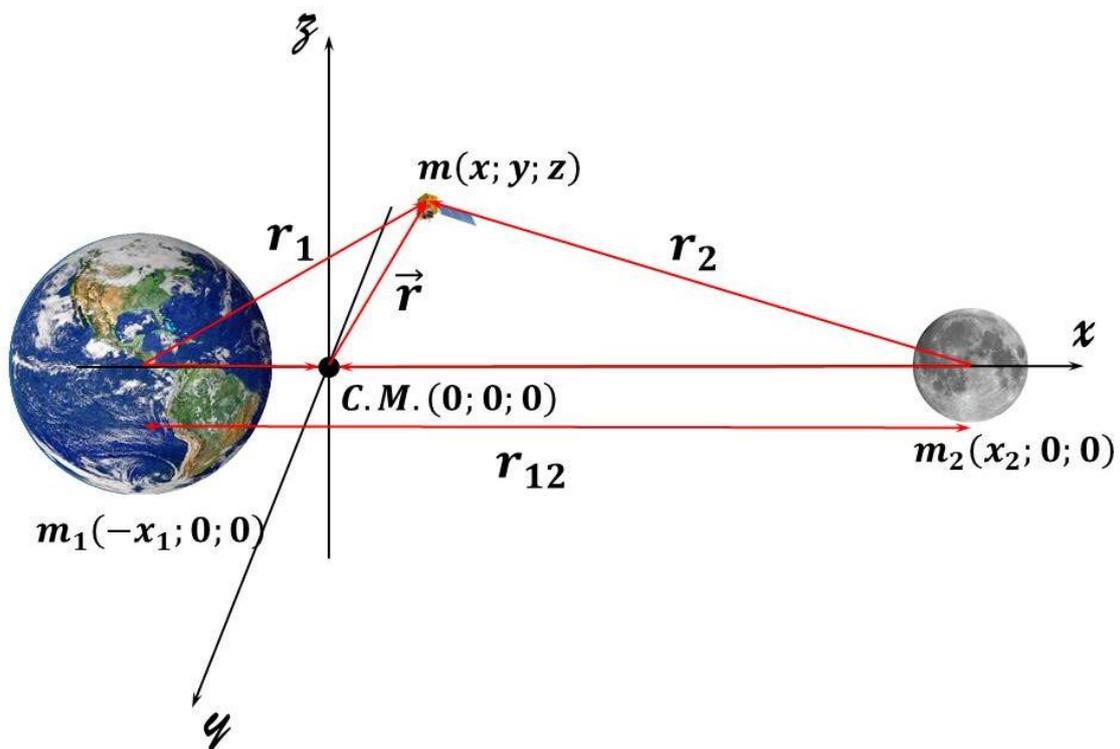


Figura 11 – Problema restrito de três corpos.

Com as Equações (6.11) e (6.12) pode-se calcular as posições de  $m_1$  e  $m_2$  relativas ao C.M. do sistema, logo:

$$x_1 = -\frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (7.1)$$

$$x_2 = \frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (7.2)$$

A posição de  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, relativa à massa  $m$ :

$$\vec{r}_1 = (x - x_1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (7.3)$$

$$\vec{r}_2 = (x + x_2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (7.4)$$

A posição de  $m$  relativa ao centro de massa pode ser calculada através da equação:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (7.5)$$

Derivando a Equação (7.5) no tempo obtém-se a velocidade de  $m$ , logo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel} \quad (7.6)$$

A velocidade  $v_G$  do centro de massa é constante. Derivando a Equação (7.6) no tempo obtém-se a aceleração de  $m$ , logo:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \quad (7.7)$$

A velocidade angular de uma órbita circular é  $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$ , ou seja, constante. Logo a Equação (7.7) pode ser reduzida:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \quad (7.8)$$

Os termos  $\vec{v}_{rel}$  e  $\vec{a}_{rel}$  podem ser escritos como sendo:

$$\vec{v}_{rel} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (7.9)$$

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \quad (7.10)$$

Substituindo as Equações (7.5), (7.9) e (7.10) em (7.8) tem-se:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \Omega\hat{k} \times \left[ \Omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right] + 2\Omega\hat{k} \times \left( \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \right) + \left( \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \right) \quad (7.11)$$

Trabalhando os termos da Equação (7.11):

$$\Omega\hat{k} \times \left[ \Omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right] = -\Omega^2 (x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (7.12)$$

$$2\Omega\hat{k} \times \left( \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \right) = 2\Omega \frac{dx}{dt}\hat{j} - \frac{dy}{dt}\hat{i} \quad (7.13)$$

Substituindo as Equações (7.12) e (7.13) em (7.11):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\Omega^2 (x\hat{i} + y\hat{j}) + 2\Omega \left( \frac{dx}{dt}\hat{j} - \frac{dy}{dt}\hat{i} \right) + \left( \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \right) \quad (7.14)$$

Reagrupando os termos e reescrevendo a Equação (7.14), chegou-se em:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - \Omega^2 x \right) \hat{i} + \left( \frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx}{dt} - \Omega^2 y \right) \hat{j} + \left( \frac{d^2z}{dt^2} \right) \hat{k} \quad (7.15)$$

Aplicando a segunda Lei de Newton para a massa  $m$ :

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (7.16)$$

Onde:

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_1 m}{r_1^3} \hat{r}_1 \quad (7.17)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_2 m}{r_2^2} \hat{r}_2 \quad (7.18)$$

Substituindo as Equações (7.17) e (7.18) em (7.16), tem-se:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} \quad (7.19)$$

Substituindo a Equação (7.15), (7.3) e (7.4) em (7.19) obtém-se:

$$\left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - \Omega^2 x \right) \hat{i} + \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx}{dt} - \Omega^2 y \right) \hat{j} + \left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \hat{k} = -\frac{\mu_1}{r_1^3} [(x - x_1) \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}] - \frac{\mu_2}{r_2^2} [(x + x_2) \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}] \quad (7.20)$$

Transformando a Equação (7.20) em três equações escalares obteve-se:

$$\left( \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - \Omega^2 x \right) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} (x - x_1) - \frac{\mu_2}{r_2^2} (x + x_2) \quad (7.21)$$

$$\left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx}{dt} - \Omega^2 y \right) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} y - \frac{\mu_2}{r_2^2} y \quad (7.22)$$

$$\left( \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} z - \frac{\mu_2}{r_2^2} z \quad (7.23)$$

As Equações (7.21), (7.22) e (7.23) definem o movimento de um satélite e para determinar sua órbita basta integrá-las no tempo.

## 8. PERTURBAÇÕES

Considera-se um sistema perturbado aquele que sofre variações adversas em sua trajetória devido à ação de qualquer outro fator externo pertencente a sua órbita nominal. Um satélite em órbita terrestre, por exemplo, sofre constantemente com a ação de forças perturbadoras sendo estas (Kuga, Rao, & Carrara, 2000):

- A força gravitacional devida ao potencial do corpo,
- A atração gravitacional do Sol e da Lua;
- A força de arrasto;
- A força de marés devida à Lua e ao Sol;
- A força de pressão de radiação Solar;
- O albedo.

A ação destas perturbações pode ser significativa ou não na órbita de um satélite. Todavia, o mínimo de ação externa a órbita destes corpos geram imprecisões nas informações de dados coletados, de acordo com cada missão e que deverão ser transmitidos a receptores terrestres. Para evitar este tipo de problema um satélite precisa corrigir sua órbita constantemente devido a essas perturbações inerentes ao sistema.

## 9. PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR

A luz possui comportamento dual, ora como onda, e, por sua vez, ora como partícula. Quando a luz se comporta de forma corpuscular esta se denomina por fóton. Um fóton não possui matéria, somente energia podendo ser calculada por:

$$E = hf \quad (8.1)$$

A luz ao passar diante de grandes corpos massivos curva-se e esta curvatura deve-se a quantidade de movimento associada à partícula da luz. Esta quantidade de movimento está associada somente a energia de um fóton, como pode ser observado na Equação (8.2):

$$\mu = \frac{E}{c} \quad (8.2)$$

Esta quantidade de movimento, por sua vez, interage com o satélite através de suas superfícies externas.

A pressão de radiação é causada pela troca de quantidade de movimento dos fótons solares com a superfície externa do satélite (Kuga, Rao, & Carrara, 2000).

Cada partícula da luz possui quantidade de movimento e esta por si só interage de forma insignificante com o satélite. Porém, como as emissões provindas do Sol possuem grandes quantidades de partículas, a soma da quantidade de movimento particular de cada fóton pode resultar em uma quantidade de movimento relevante atuante sobre a superfície do satélite. Na órbita da Terra a energia irradiada pelo Sol não varia e esta vale aproximadamente  $1350 \text{ W/m}^2$  (Kuga, Rao, & Carrara, 2000).

Sabendo que:

$$P = \frac{F}{S} \quad (8.3)$$

$$F = m \frac{v}{t} \quad (8.4)$$

Substituindo a Equação (8.4) em (8.3), tem-se:

$$P = \frac{mv}{St} = \frac{L}{St} \quad (8.5)$$

$$I = \frac{mv^2}{St} \quad (8.6)$$

Dividindo a Equação (8.5) por (8.6), obteve-se:

$$P = \frac{I}{v} \quad (8.7)$$

Substituindo a Equação (8.1) em (8.2) e reescrevendo a Equação da pressão chegou-se em:

$$P = \frac{\mu}{St} \quad (8.8)$$

A única fonte de energia radiante para veículos espaciais dentro do sistema solar é o Sol. O fluxo por unidade de superfície pode ser escrito como:

$$S = S_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (8.9)$$

A aceleração causada pela pressão de radiação no sentido oposto ao versor Terra/Sol  $\hat{r}$  pode ser calculada como sendo:

$$\vec{\rho} = -\nu C_r \frac{S}{m} P \hat{r} \quad (8.10)$$

Podem-se considerar dois casos de pressão de radiação, a direta o qual as partículas vindas do Sol interagem diretamente com a superfície do satélite e a indireta onde as partículas refletem na superfície dos astros e retornam, incidindo-se nos satélites. Para este estudo será considerado apenas a pressão de radiação direta.

## **10.MANOBRAS ORBITAIS**

O estudo de manobras orbitais caracteriza-se pelo desafio em tentar definir o menor custo e a melhor trajetória durante uma missão. Casos clássicos de manobras são aplicados buscando a melhor maneira de se customizar uma missão.

Não existe uma manobra ideal para todos os casos. Cada caso possui uma condição adequada para aquela situação a se analisar.

Ressalta-se a importância do problema de múltiplos corpos já que estes influenciam o movimento do veículo. Definir o modelo inicialmente, tal como os corpos e os agentes perturbadores envolvidos durante a análise são de suma importância para a confiabilidade dos dados gerados através da simulação.

### **10.1. TRANSFERÊNCIA ORBITAL**

A ideia principal consiste em fazer uma manobra de transferência de uma órbita a outra com o menor gasto de combustível possível. Entretanto, as condições iniciais serão relevantes, pois o tipo de transferência (elíptica, circular, parabólica etc.) influi no problema.

### **10.2. TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN**

A transferência de Hohmann trata de uma manobra bi impulsiva em um campo gravitacional Newtoniano entre órbitas coplanares e circulares com o tempo livre (MAREC, 1979).

A Figura 12 ilustra a proposta da transferência de Hohmann.

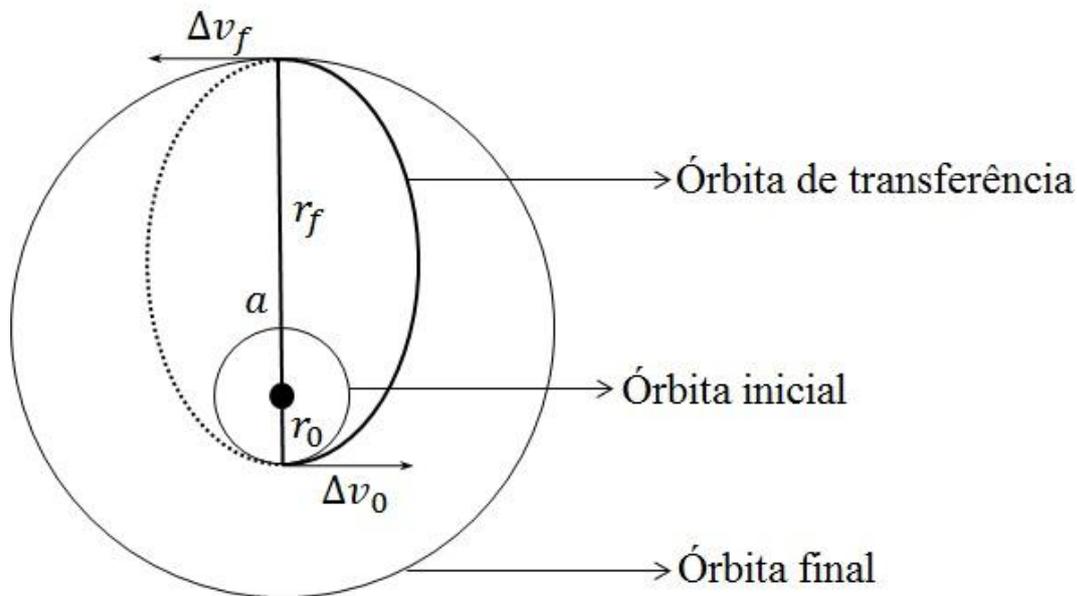


Figura 12 – Transferência de Hohmann.

Esta transferência possui resultado ótimo somente quando a razão entre os raios do perigeu  $r_0$  e apogeu  $r_f$  é menor que 11.93876. Neste caso o gasto de combustível será mínimo devido o menor  $\Delta v$ . Para se efetuar a transferência aplica-se um impulso inicial  $\Delta v_0$  na órbita de origem (circular) de raio  $r_0$  fazendo com que o veículo passe por uma órbita de transferência (órbita elíptica) até chegar ao apogeu de raio  $r_f$  onde o segundo impulso  $\Delta v_f$  será dado colocando então o veículo sobre sua nova órbita, órbita final (circular) (SANTOS, Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontro., 2006).

O cálculo desta transferência é mostrado abaixo (CHOBOTOV, 1996):

Considerando a vis-viva:

$$v^2 = \mu \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (10.1)$$

Aplicando-se no problema:

$$2a = r_0 + r_f \quad (10.2)$$

Substituindo a Equação (10.2) em (10.1):

$$v_0^2 = \mu \left[ \frac{2}{r_0} - \frac{2}{r_0 + r_f} \right] \quad (10.3)$$

Desta forma:

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right] \quad (10.4)$$

Como  $v_{c0}^2 = \frac{\mu}{r_0}$ , então:

$$\left( \frac{v_0}{v_{c0}} \right)^2 = \left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right] \quad (10.5)$$

$$\frac{v_0}{v_{c0}} = \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right]} \quad (10.6)$$

$$\Delta v = v_{c0} \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} - 1 \right]} \quad (10.7)$$

Então:

$$\Delta v_0 = v_0 \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} - 1 \right]} \quad (10.8)$$

### 10.3. TRANSFERÊNCIA BI-ELÍPTICA TRI-IMPULSIVA

Como dito a transferência de Hohmann é ótima apenas quando  $\frac{r_f}{r_0} < 11.93876$ .

Isso foi demonstrado no trabalho de Hoelker e Silber (HOELKER & SILBER, 1959). O trabalho diz que quando essa razão é maior que 11.93876 a transferência de Hohmann deixa de ser ótima e então a viabilidade passa a ser a transferência bi-elíptica e tri-impulsiva.

A Figura 13 ilustra uma transferência bi-elíptica e tri-impulsiva.

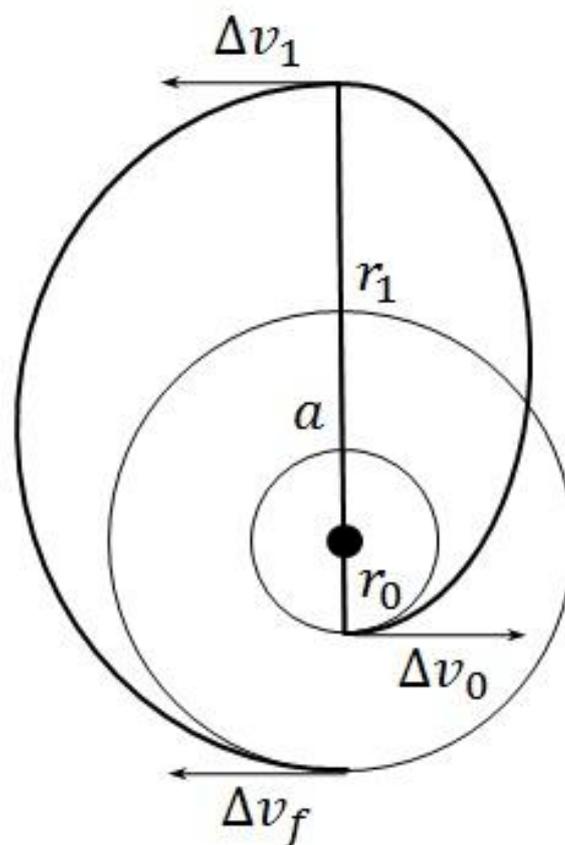


Figura 13 – Transferência bi-elíptica tri-impulsiva

O veículo encontra-se no perigeu dentro de uma órbita circular de raio  $r_0$ , um impulso inicial  $\Delta v_0$  coloca o veículo numa órbita de transferência de raio  $r_1$  tal que  $r_1 > r_0$ . Quando o veículo encontra-se no apogeu, outro impulsivo  $\Delta v_1$  é dado fazendo com que o veículo se mova para outra órbita de transferência (elíptica). Então, já na posição desejada, um impulso  $\Delta v_f$  faz com que o veículo

desacelere e entre em órbita circular novamente, todavia com um raio final maior que o inicial.

Tanto a órbita inicial quanto a final são concêntricas no planeta, porém com raios distintos.

O equacionamento é descrito da seguinte forma:

$$\Delta v_0 = \varepsilon_0 \left[ \sqrt{\left( \frac{2r_1}{1+r_1} - 1 \right)} \right] \quad (10.9)$$

$$\Delta v_1 = \varepsilon_0 \left\{ \sqrt{\left[ \frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)} - \sqrt{\frac{2}{r_1(1+r_1)}} \right]} \right\} \quad (10.10)$$

$$\Delta v_f = \varepsilon_f \left\{ \sqrt{\left[ \frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)} - \sqrt{r_f} \right]} \right\} \quad (10.11)$$

Como visto na dissertação de mestrado de (SANTOS, Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontro., 2006) a transferência de  $\Delta v$  mínimo ocorre com  $r_1 \rightarrow \infty$ , conhecida como transferência bi-parabólica onde as duas órbitas de transferência assumem formatos de parábola. Quanto à razão entre apogeu e perigeu tem-se:

- $\frac{r_f}{r_0} > 15.58178$  transferência bi-elíptica é superior a de transferência de Hohmann ( $r_1 > r_f$ ).
- $11.93876 < \frac{r_f}{r_0} < 15.58178$  dentro desta faixa existe um valor mínimo limite de  $r_1$  que a transferência bi-elíptica deve se utilizar para ser mais eficiente do que a de Hohmann.

A manobra orbital possui agentes perturbadores externos que podem ou não serem considerados durante a análise de um problema, tudo irá depender do

tratamento de um modelo real ou ideal. A quantidade de perturbações irá definir a proximidade do estudo ao modelo real. Portanto, uma missão deve ser considerada de sucesso desde o momento de seu lançamento até sua entrada e permanência na órbita desejada, sempre tentando aproximar-se do modelo real.

De forma evolutiva e gradual, pretende-se compreender, da melhor forma, o movimento do veículo com suas devidas perturbações. Como a intenção é dar continuidade a este trabalho, primeiramente estudou-se um sistema dinâmico terrestre através do modelo de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, para abstrair melhor o conceito do que são forças perturbadoras em sistemas instáveis durante um lançamento e como este sistema pode ser controlado.

## **11. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RAIDAÇÃO SOLAR DIRETA**

Para esta simulação foi desenvolvido um integrador numérico no software MATLAB® capaz de simular o movimento orbital do satélite CBERS. Este programa resume-se em um Runge Kutta de quarta ordem (RK4), responsável em integrar no tempo todas as posições referentes aos instantes da trajetória, plotando como resultado final a órbita completa do satélite. Não foi considerada inicialmente a inclinação da órbita, por isso a mesma encontra-se sobre o plano do Equatorial terrestre. Futuramente, pretende-se fazer a simulação de forma a considerar este parâmetro.

### **11.1. EQUACIONAMENTO**

O problema foi considerado inicialmente como sendo um problema de dois corpos, sendo a Terra o referencial inercial de massa finita e o satélite o segundo corpo com massa puntual. De forma a iniciar as simulações do problema admitiu-se que o corpo em movimento ao redor da Terra encontra-se em uma órbita equatorial, ou seja, a inclinação do satélite não foi considerada como mostra a Figura 14.

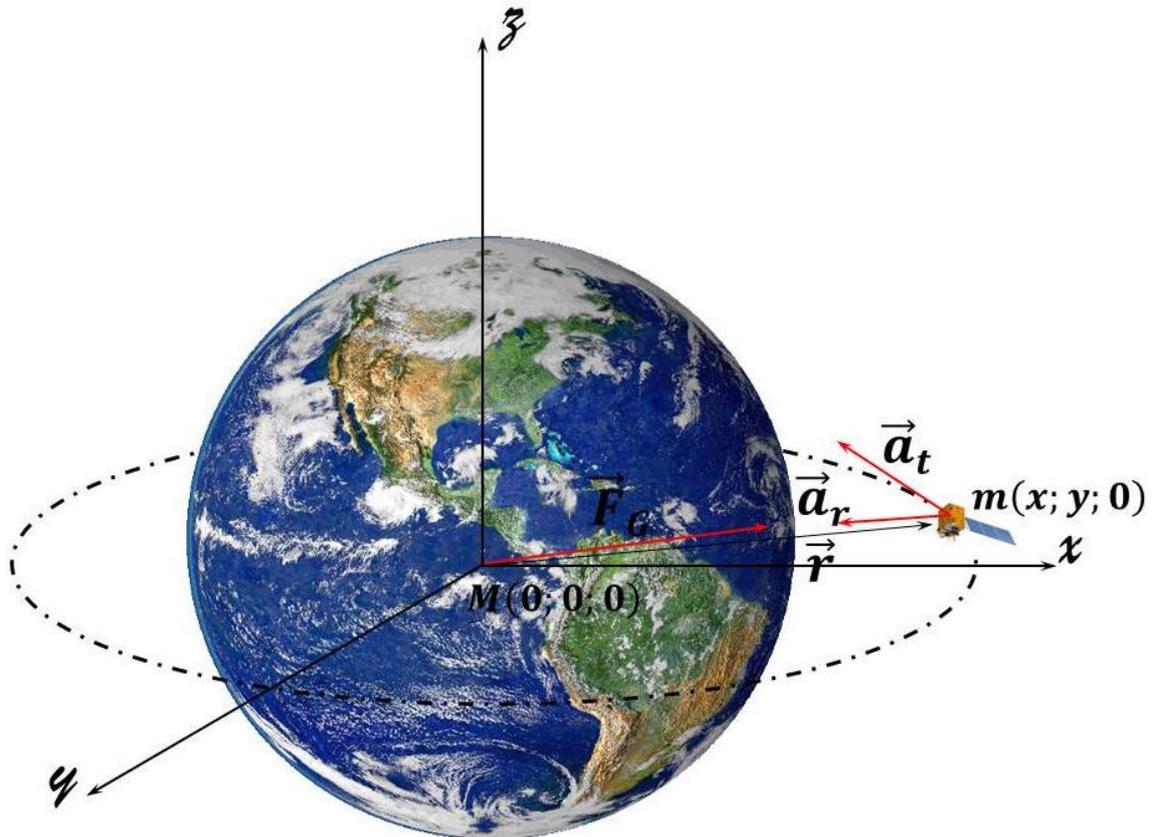


Figura 14 – Sistema Terra satélite com órbita equatorial.

O satélite possui duas componentes de aceleração que são descritas como tangencial e radial, respectivamente:

$$\vec{a}_t = \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\Omega}{dt} + r \frac{d^2\Omega}{dt^2} \right) \hat{e}_t = 0 \quad (10.1)$$

$$\vec{a}_r = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d\Omega^2}{dt} \right) \hat{e}_r \neq 0 \quad (10.2)$$

A resultante das forças atuante no sistema, desconsiderando agentes externos a ação gravitacional é:

$$\vec{F}^R = m\vec{a}_r \quad (10.3)$$

Sendo:

$$\vec{F}^R = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (10.4)$$

Substituindo a Equação (10.1), (10.2) e (10.4) em (10.3):

$$-G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d\Omega^2}{dt} \right) \hat{e}_r \quad (10.5)$$

Rearranjando a Equação (10.5) e escrevendo-a de forma escalar tem-se:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \frac{d\Omega^2}{dt} - G \frac{M}{r^2} \quad (10.6)$$

Sabendo que:

$$\left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\Omega}{dt} + r \frac{d^2 \Omega}{dt^2} \right) = 0 \quad (10.7)$$

$$\frac{d^2 \Omega}{dt^2} = -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\Omega}{dt} \frac{1}{r} \quad (10.8)$$

As equações diferenciais que descrevem o movimento do satélite ao redor da Terra são descritas como:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \frac{d\Omega^2}{dt} - G \frac{M}{r^2} \quad (10.9)$$

$$\frac{d^2 \Omega}{dt^2} = -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\Omega}{dt} \frac{1}{r} \quad (10.10)$$

Por assumir órbita equatorial, a componente  $Z$  do satélite é nula.

A componente  $r$  pode ser calculada como sendo:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (10.11)$$

Como a excentricidade da órbita é próxima de zero  $1.021 \cdot 10^{-3}$ ,  $x \cong y$  o que define uma trajetória circular.

Supõe-se que em um determinado momento os corpos estejam alinhados sobre o eixo  $X$ , ou seja,  $y = 0$  como mostra a Figura 15:

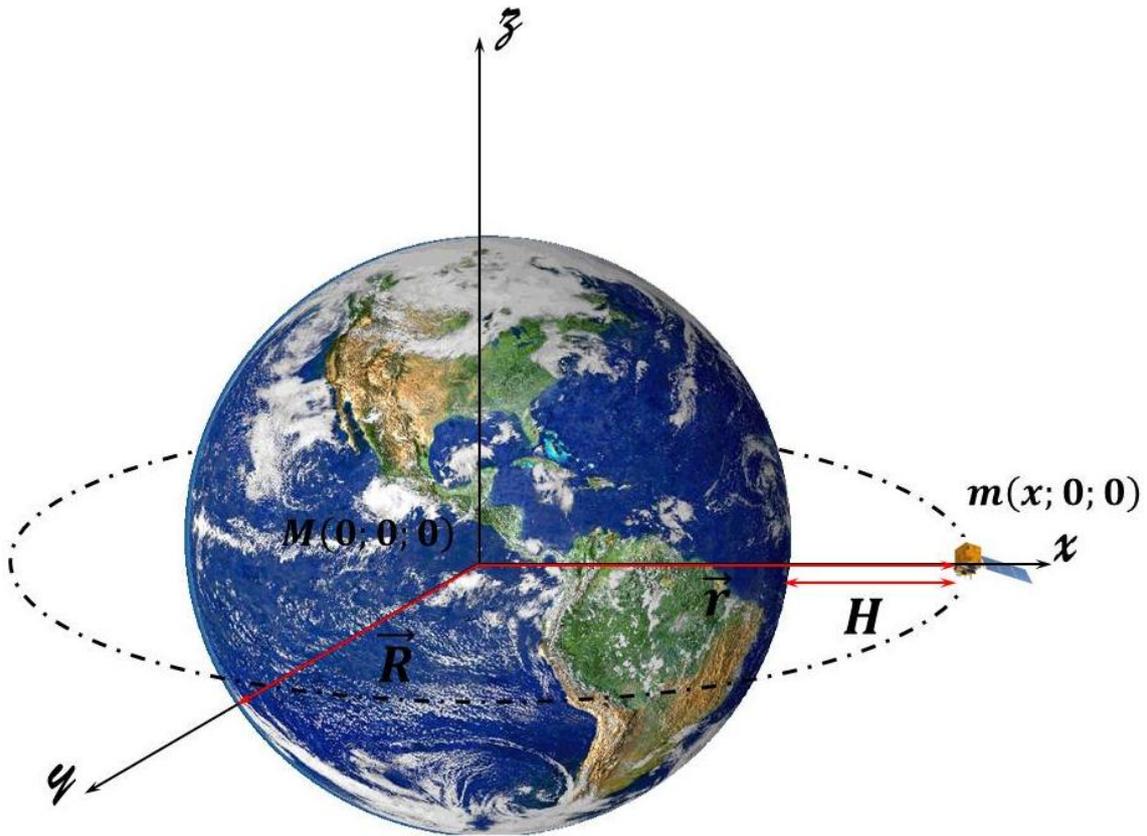


Figura 15 – Posição do satélite relativa ao centro da Terra.

Desta forma, escreveu-se o raio da órbita como sendo:

$$r = \sqrt{(0-x)^2} = x \quad (10.12)$$

Sabendo que a altitude do satélite é definida como sendo a distância relativa ao centro do planeta, logo:

$$r = H + R \quad (10.13)$$

Como as Equações (10.9) e (10.10) são de segunda ordem, para integrá-las reduziu-se o grau das duas equações diferenciais de segunda ordem para quatro equações diferenciais de primeira ordem, logo:

$$\begin{cases} x_1 = \Omega \\ x_2 = \frac{d\Omega}{dt} \\ x_3 = r \\ x_4 = \frac{dr}{dt} \end{cases} \quad (10.14)$$

Derivando  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  no tempo obteve-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_4}{dt} \frac{1}{x_1} \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = x_1 \frac{dx_4^2}{dt} - G \frac{M}{x_1^2} \end{array} \right. \quad (10.15)$$

A distância entre os corpos será definida como sendo:

$$x_3 = r = R + H \quad (10.16)$$

Escrevendo as equações no MATLAB® e utilizando os dados da Tabela 1 realizaram-se as simulações com o integrador. Foram realizadas transformações de coordenadas polares para cartesianas de modo que os gráficos apresentem seus resultados relativos aos eixos  $X$ ,  $y$  e  $Z$ . Como modelo para este trabalho foi desconsiderada a inclinação do satélite e qualquer torque causado por agentes de força externa.

## 12.RESULTADOS DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 2:

Tabela 2 – Dados utilizados na simulação 1.

$H$	778000
$V_0$	7459.44
$t_0$	0
$t$	6018.0
$\rho$	0

Os dados obtidos em simulação podem ser conferidos nas Figuras abaixo:

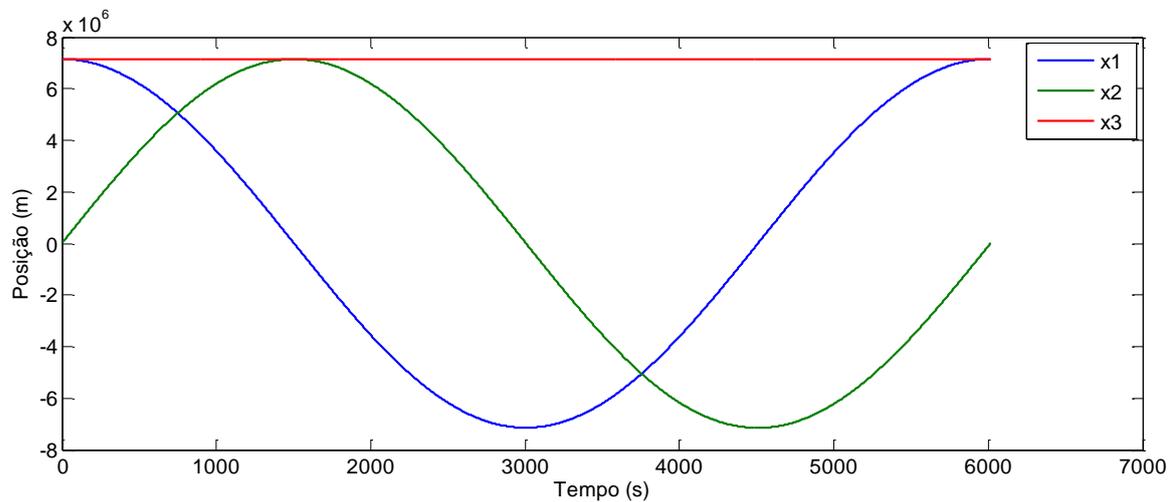


Figura 16 – Comportamento da órbita do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta, onde  $X_1$  é a posição em  $X$ ,  $X_2$  é a posição em  $Y$  e  $X_3$  é a posição em  $Z$ .

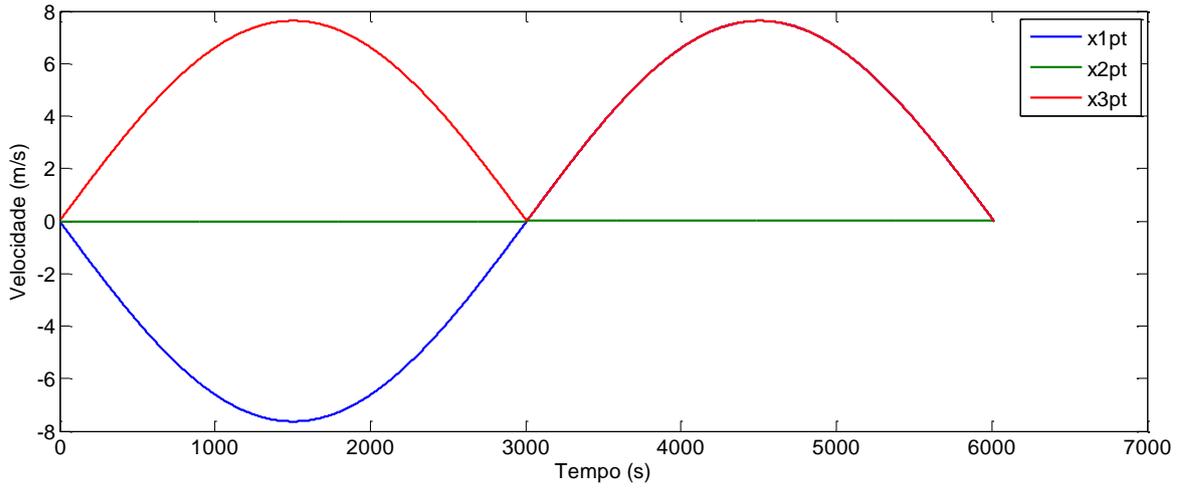


Figura 17 – Velocidade do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta, onde  $\frac{dx_1}{dt}$  é a velocidade em  $X$ ,  $\frac{dx_2}{dt}$  é a velocidade em  $Y$  e  $\frac{dx_3}{dt}$  é a velocidade em  $Z$ .

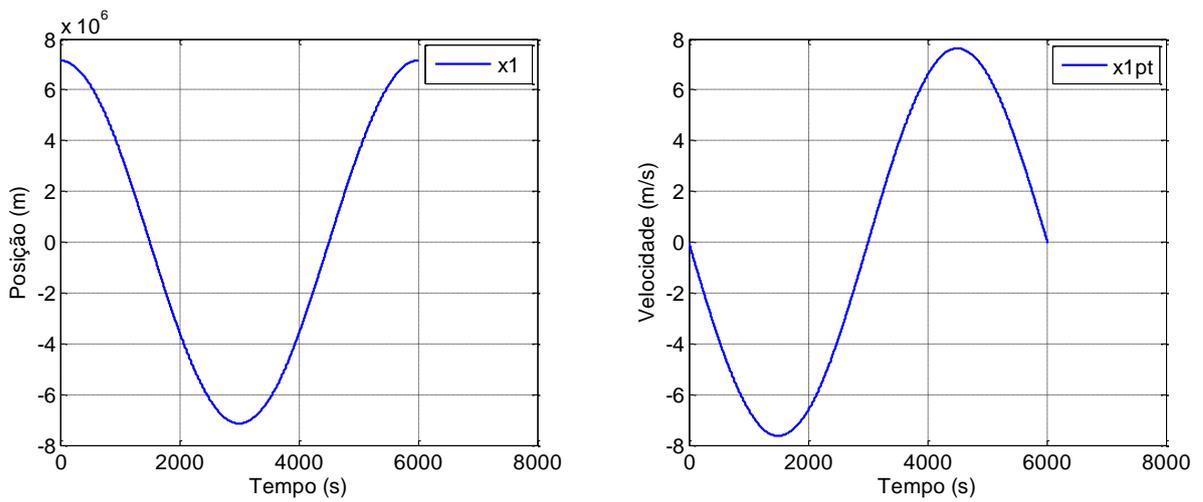


Figura 18 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $X$ .

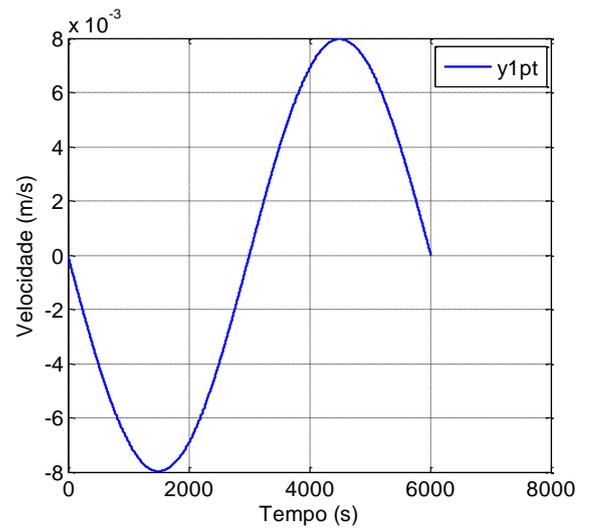
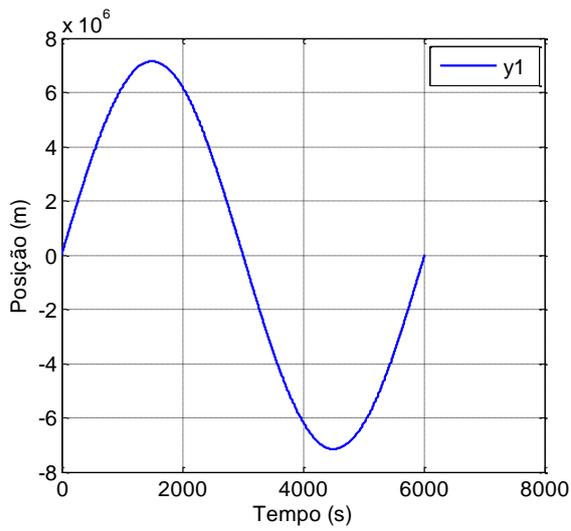


Figura 19 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $y$ .

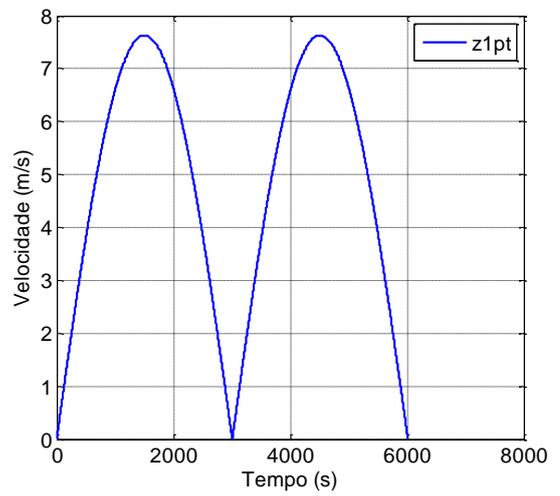
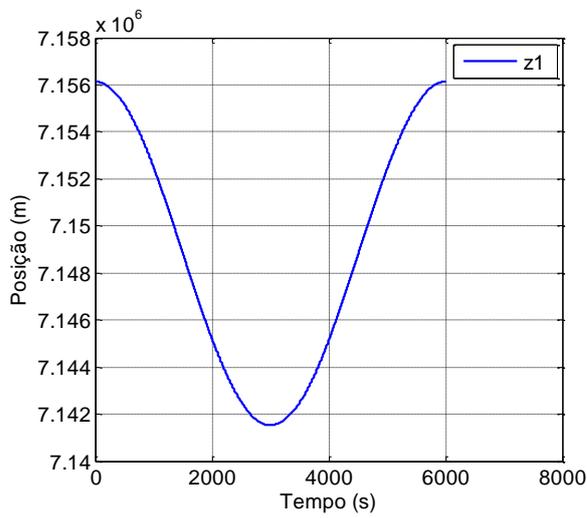


Figura 20 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $Z$ .

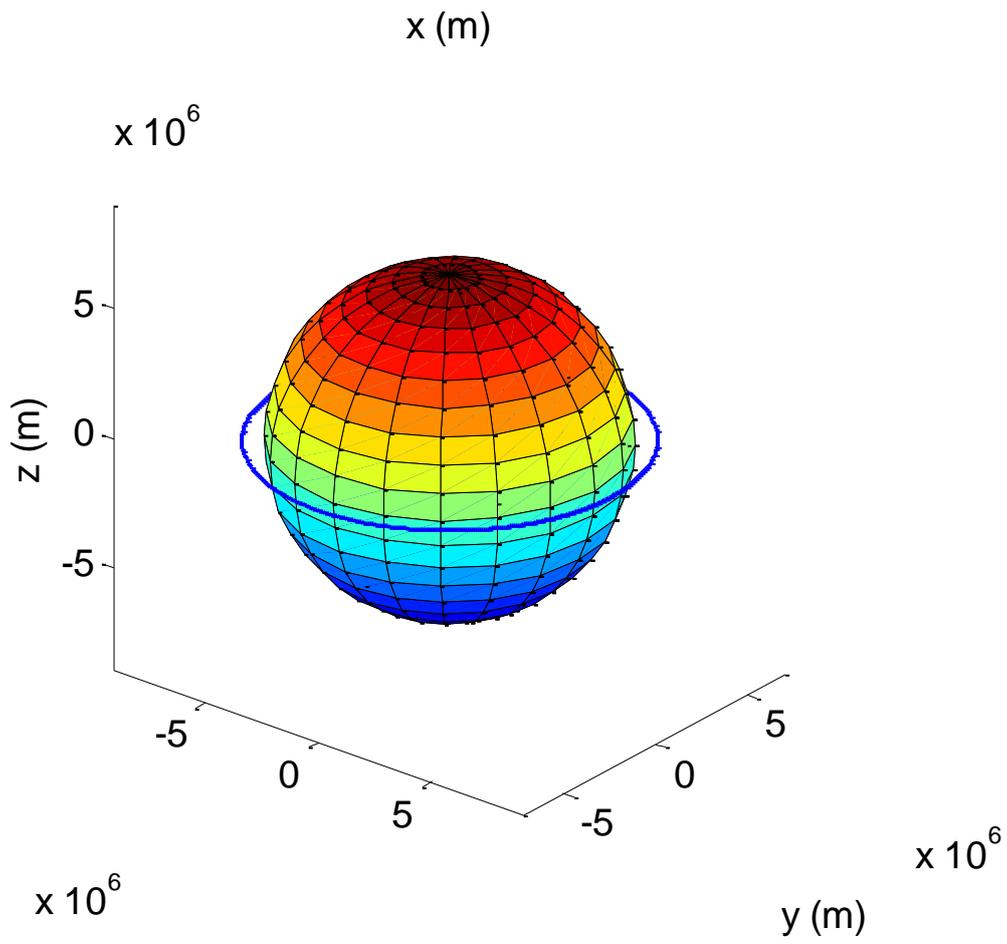


Figura 21 – Órbita equatorial do satélite ao redor de uma volta na Terra.

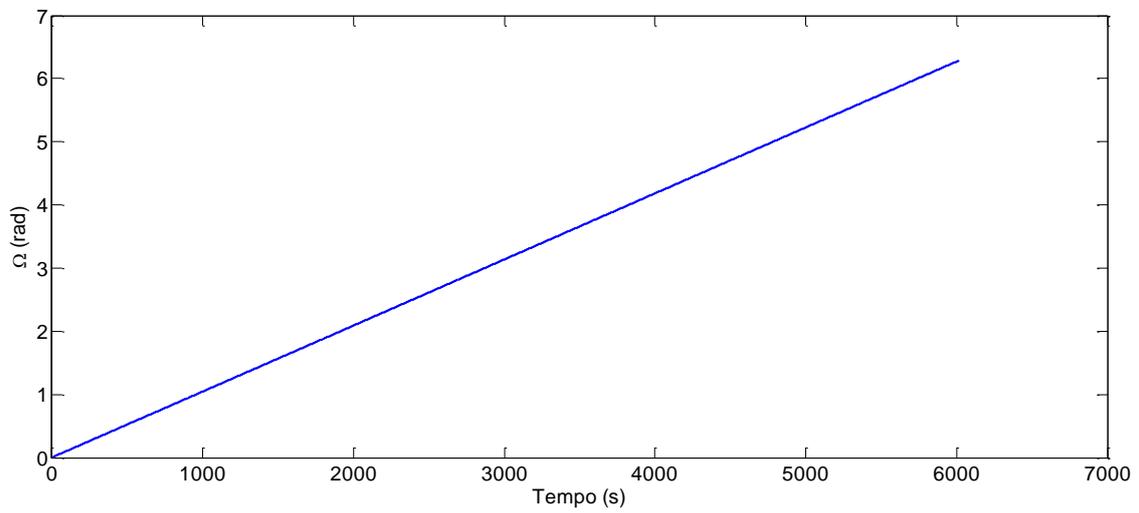


Figura 22 – Velocidade angular do satélite ao longo de uma volta.

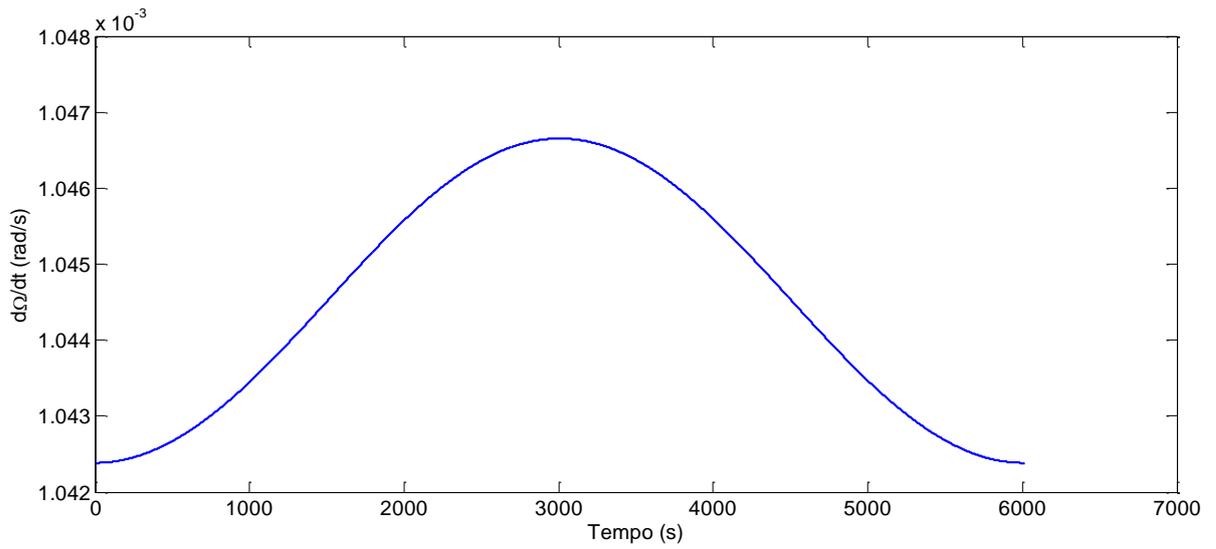


Figura 23 – Aceleração angular do satélite ao longo de uma volta.

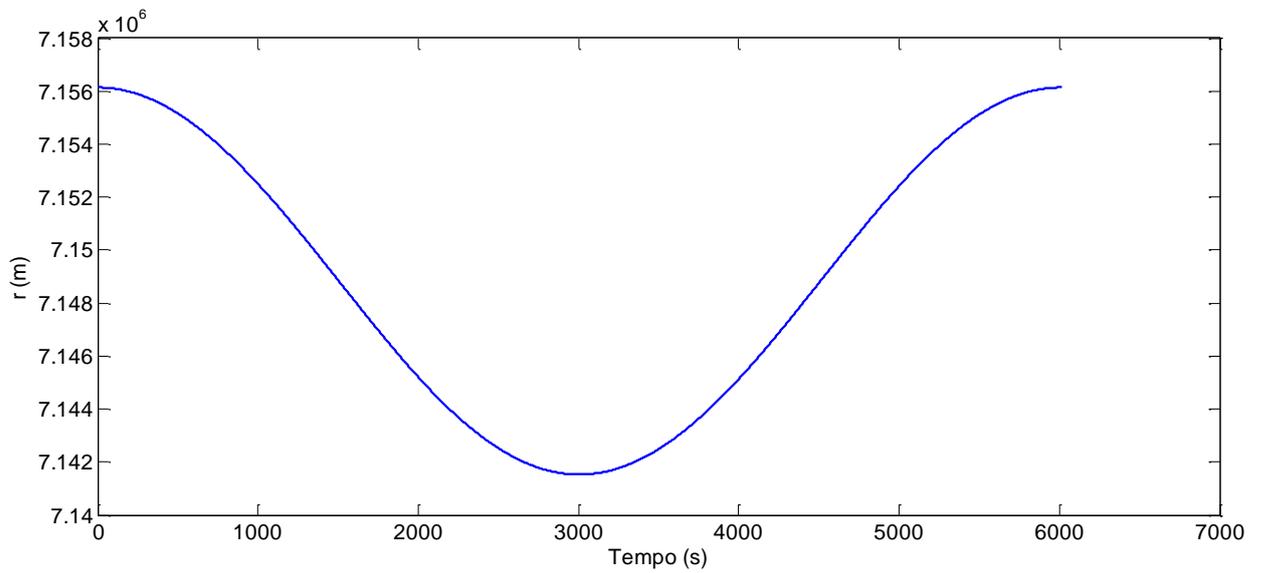


Figura 24 – Velocidade do satélite ao longo de uma volta.

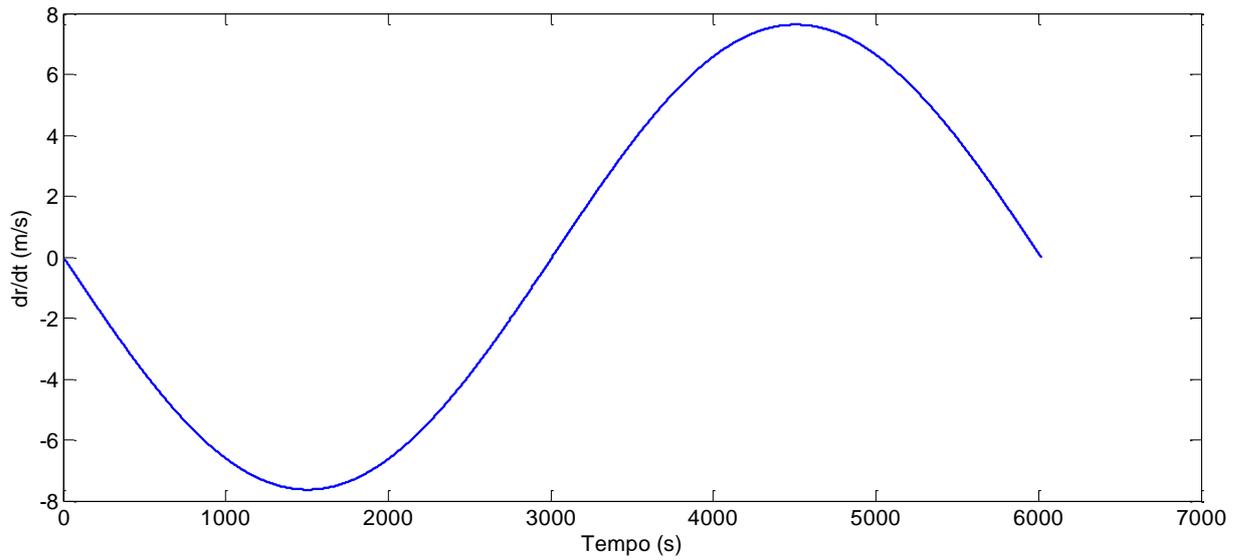


Figura 25 – Aceleração do satélite ao longo de uma volta.

Tabela 3 – Dados utilizados na simulação 2.

$H$	778000
$V_0$	7459.44
$t_0$	0
$t$	60180
$\rho$	1

Os dados obtidos em simulação podem ser conferidos nas Figuras abaixo:

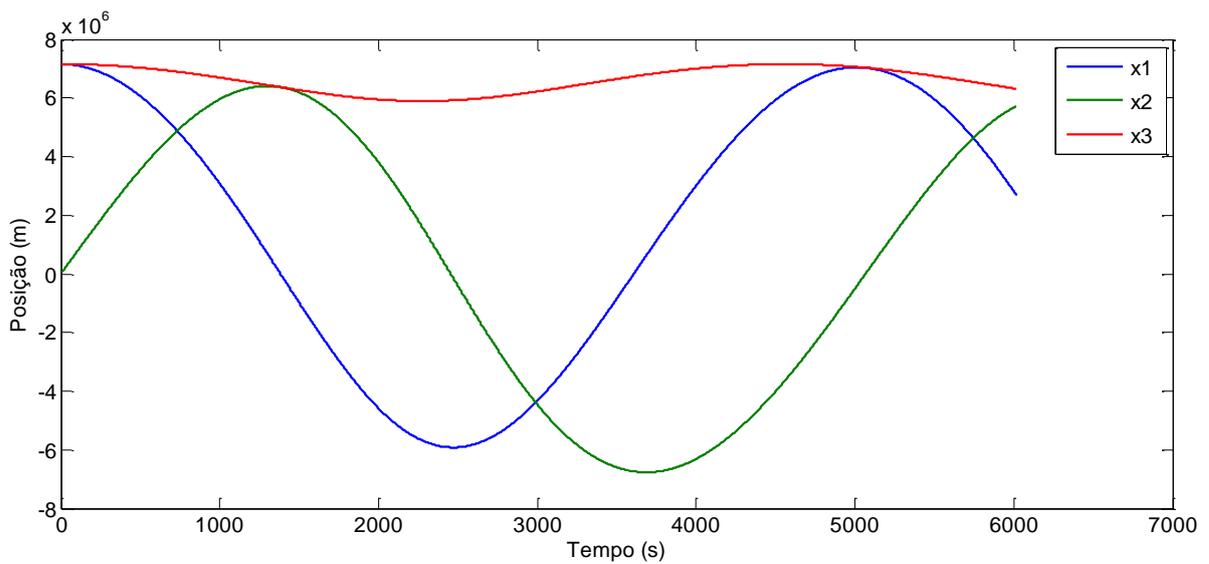


Figura 26 – Comportamento da órbita do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta sendo perturbada pela pressão de radiação solar, onde  $X_1$  é a posição em  $X$ ,  $Y_1$  é a posição em  $Y$  e  $Z_1$  é a posição em  $Z$ .

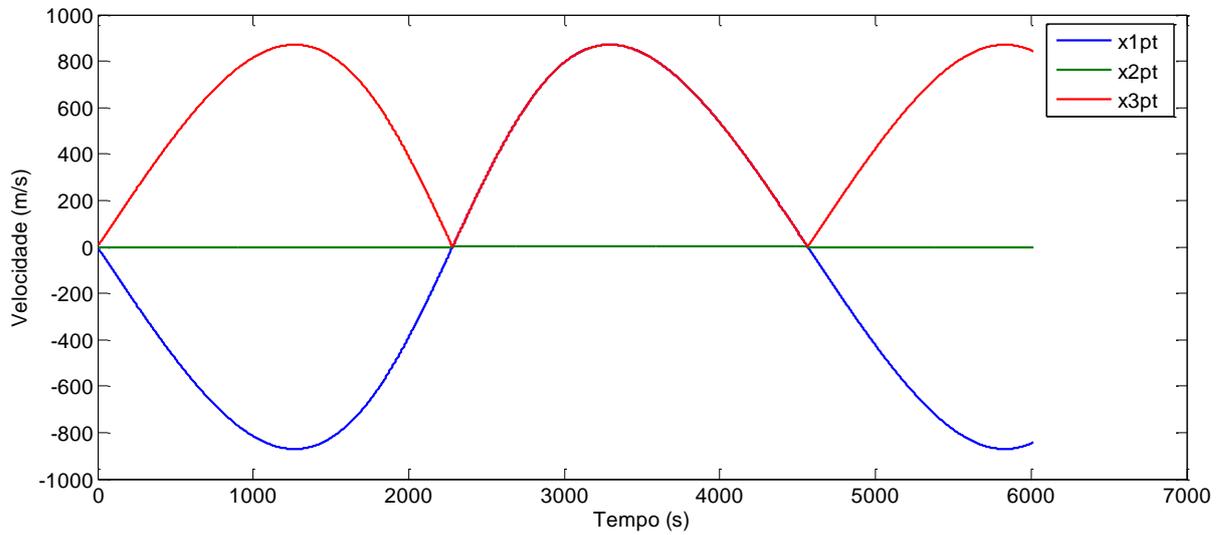


Figura 27 – Velocidade do satélite em coordenadas cartesianas ao longo de uma volta sendo perturbada pela pressão de radiação solar, onde  $\frac{dx_1}{dt}$  é a velocidade em  $X$ ,  $\frac{dy_1}{dt}$  é a velocidade em  $Y$  e  $\frac{dz_1}{dt}$  é a velocidade em  $Z$ .

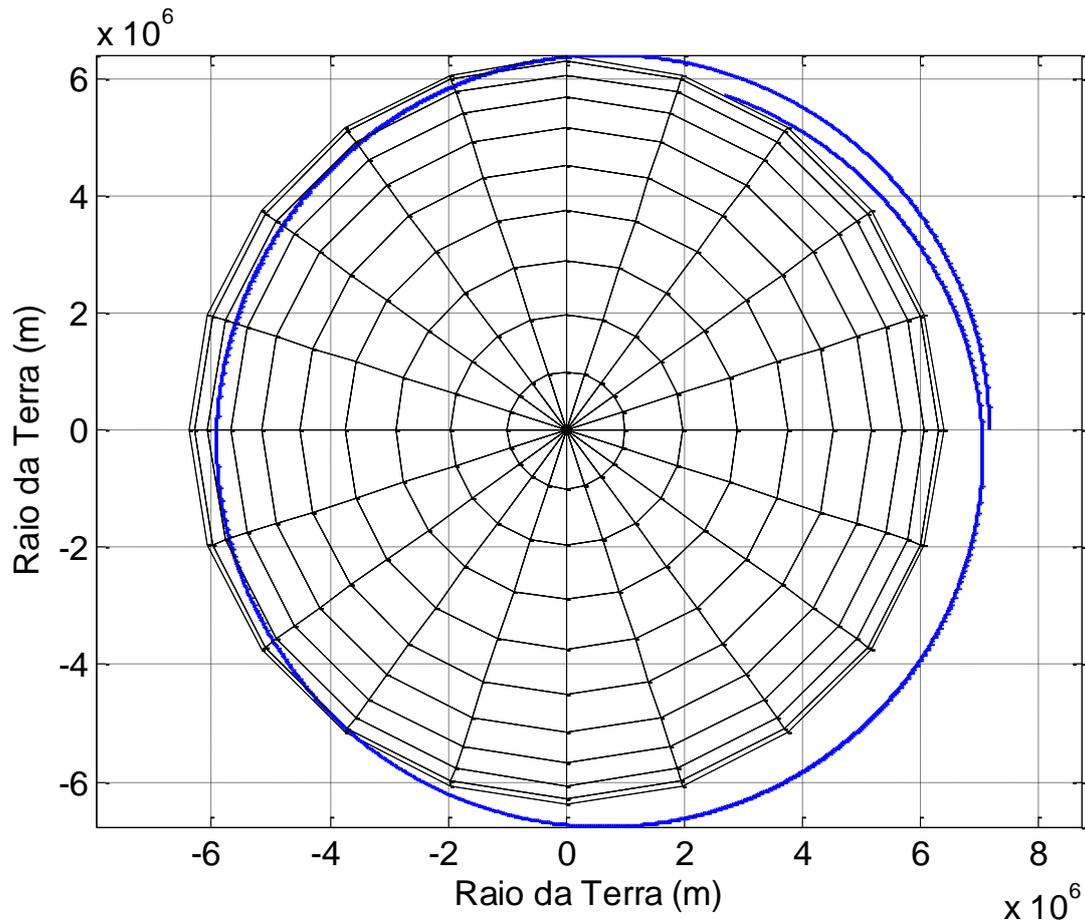


Figura 28 – Órbita do satélite sendo perturbada pela pressão de radiação solar.  
De acordo com a Figura 28, o satélite é derrubado devido o efeito perturbativo.

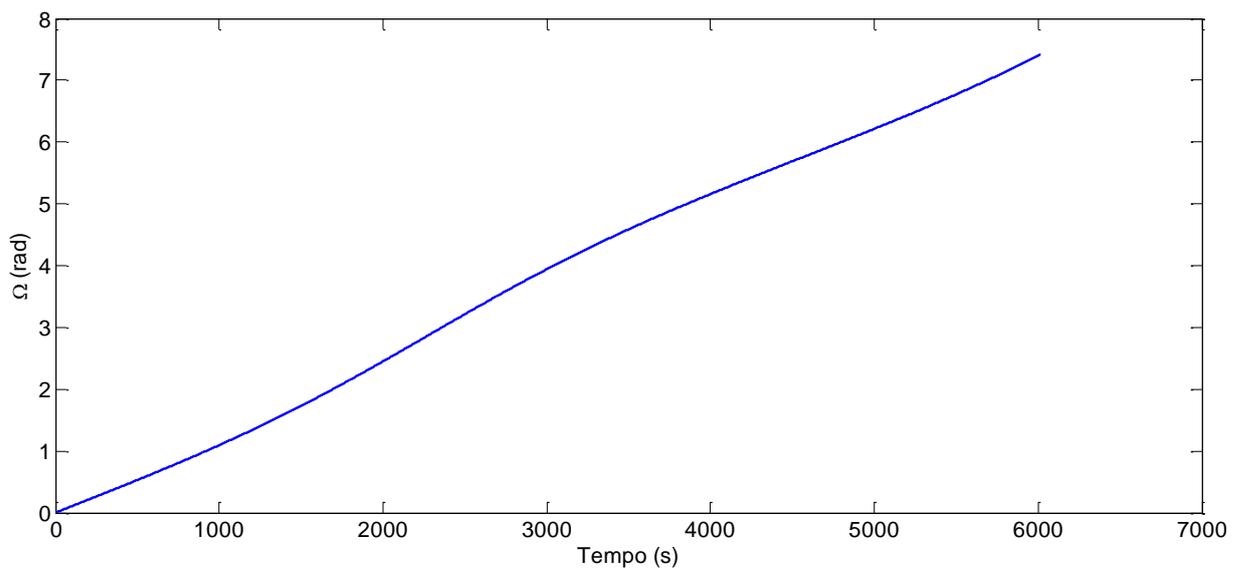


Figura 29 – Velocidade angular do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.

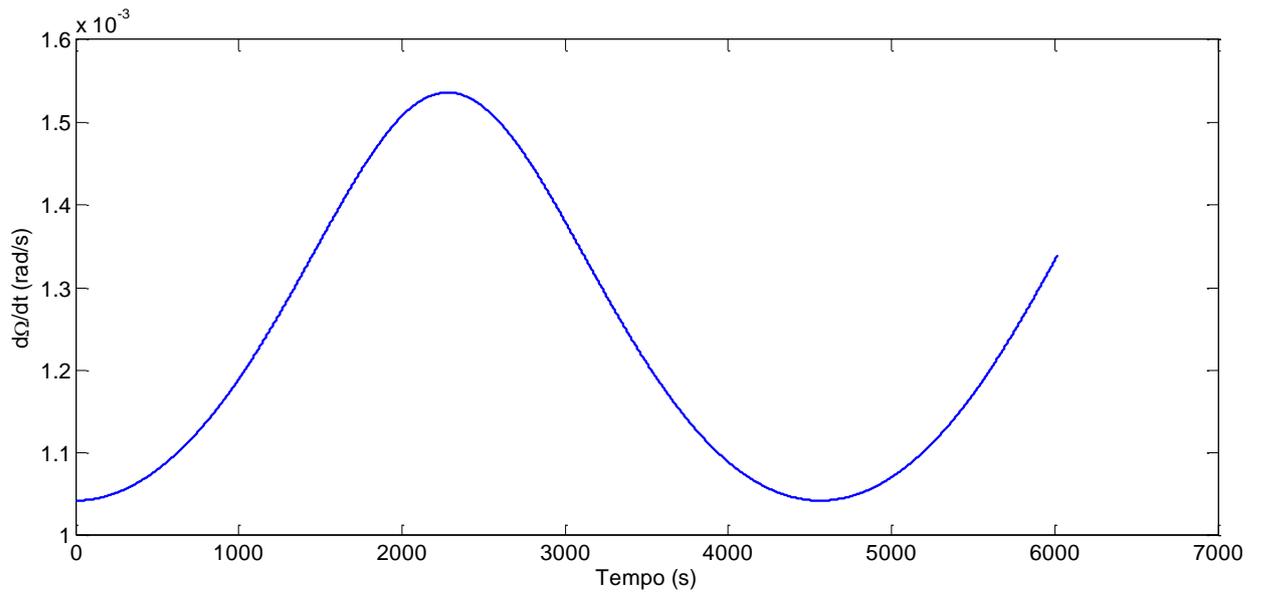


Figura 30 – Aceleração angular do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.

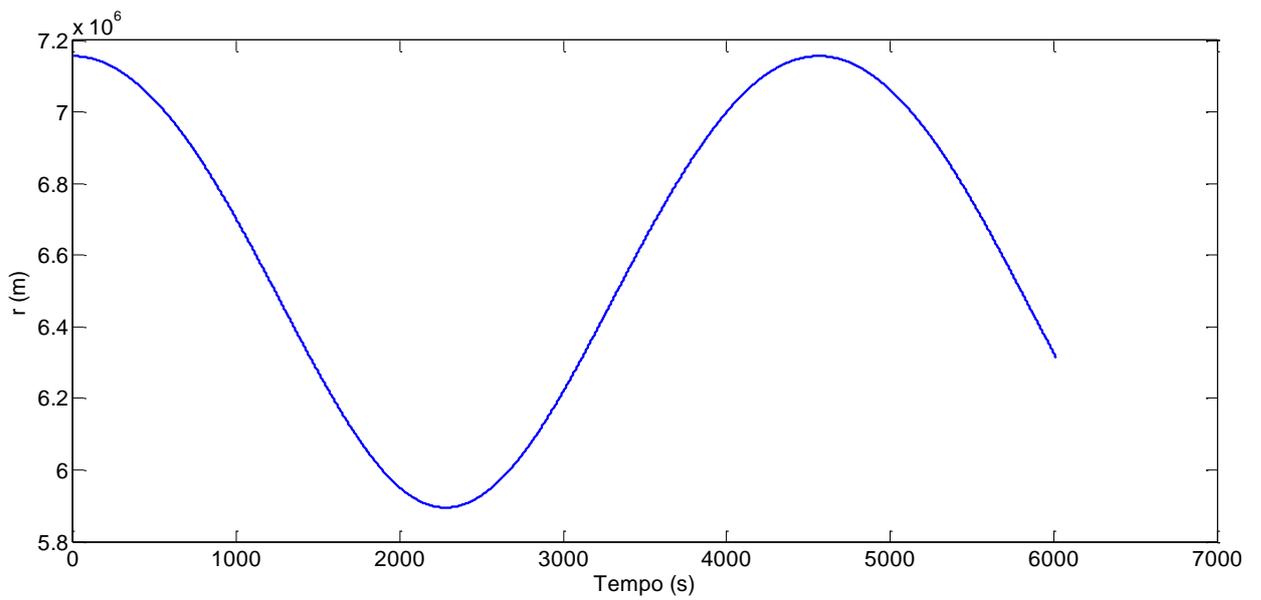


Figura 31 – Velocidade do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.

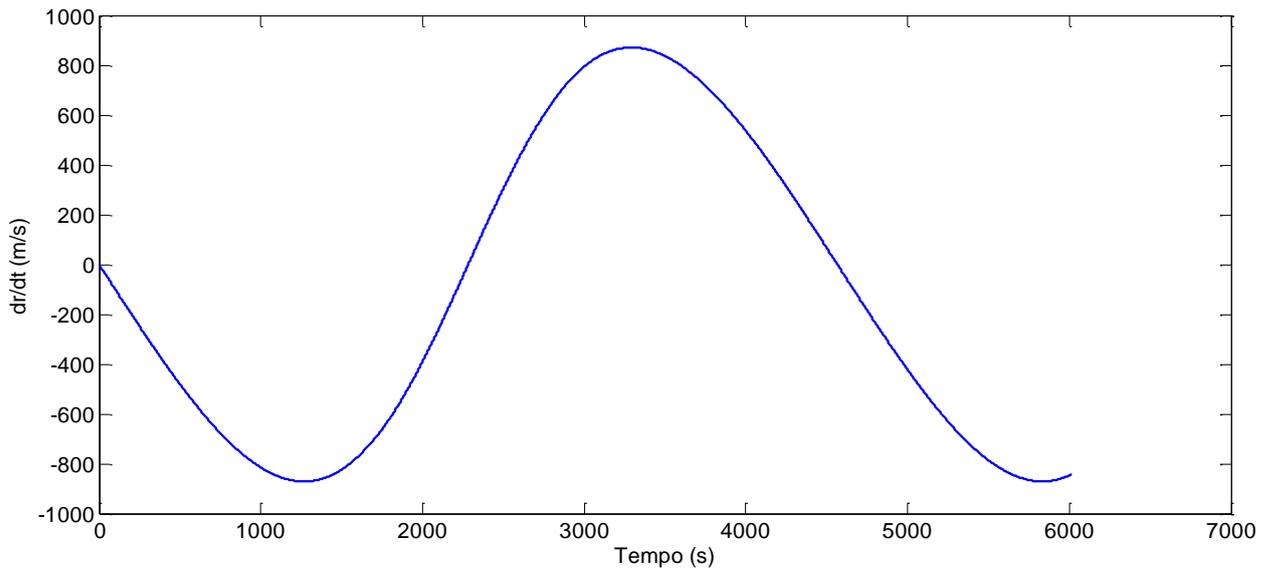


Figura 32 – Aceleração do satélite sendo perturbada ao longo de uma volta.

Tabela 4 – Dados utilizados na simulação 3.

$H$	778000
$V_0$	7459.44
$t_0$	0
$t$	6018
$\rho$	$10^{-7}$

Os dados obtidos em simulação podem ser conferidos nas Figuras abaixo:

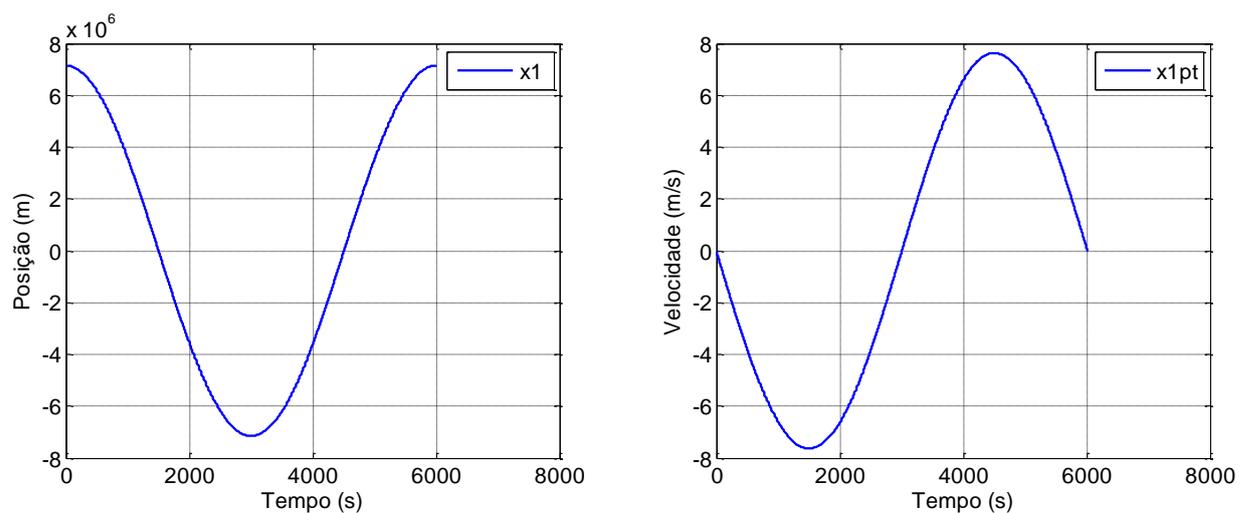


Figura 33 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $X$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar.

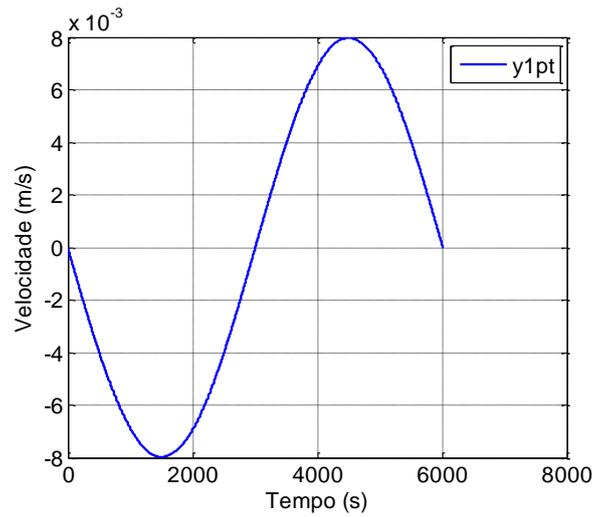
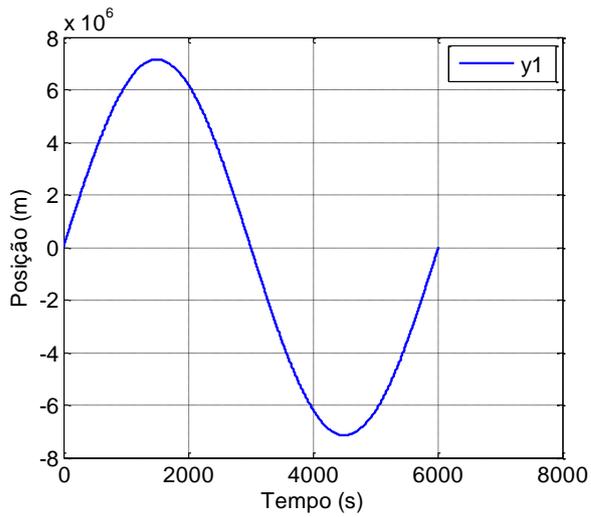


Figura 34 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $y$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar.

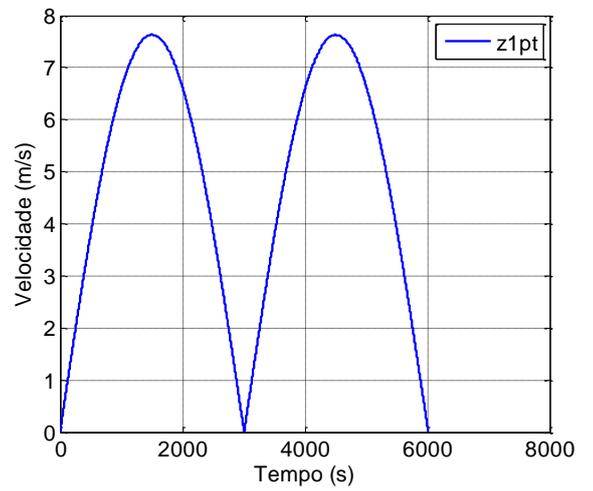
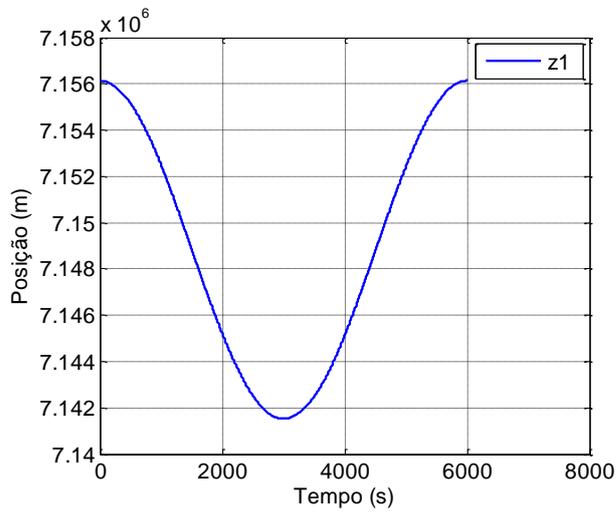


Figura 35 – Posição e velocidade do satélite referente a coordenada  $Z$ , sofrendo perturbação pela pressão de radiação solar.

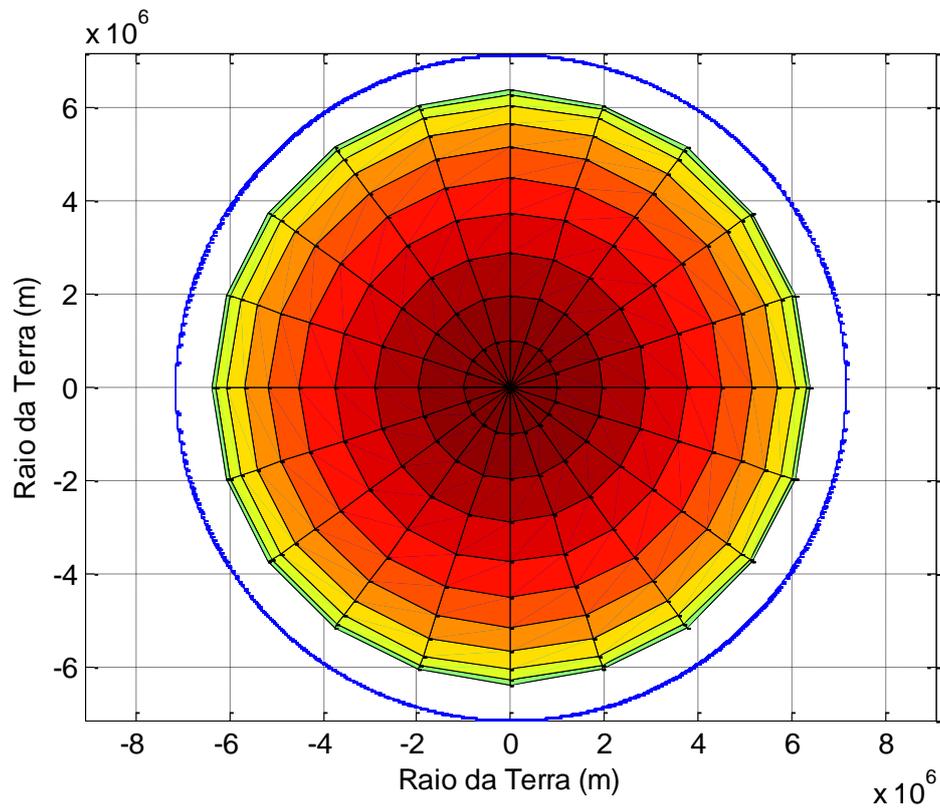


Figura 36 – Órbita do satélite sendo perturbada pela pressão de radiação solar ao longo de dez voltas.

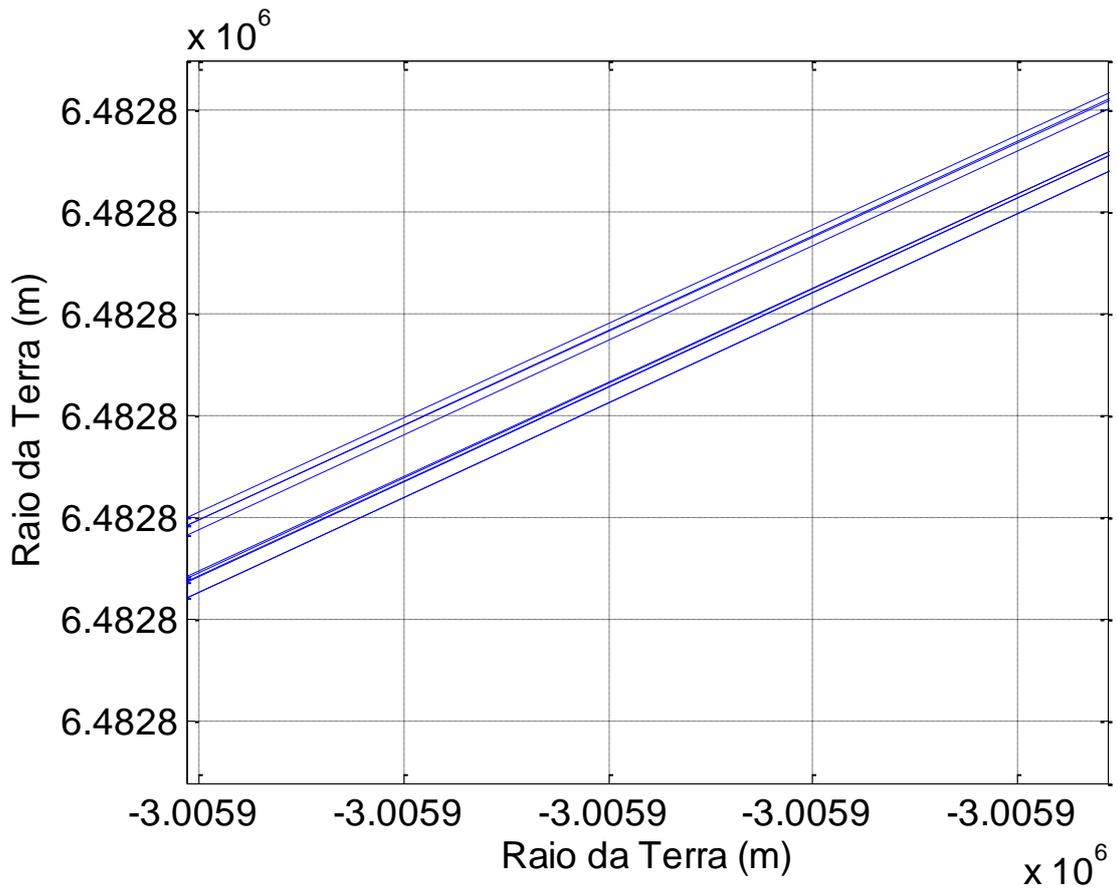


Figura 37 – Decaimento da órbita do satélite devido a pressão de radiação solar ao longo de dez voltas.

Calculando o erro entre os resultados gerados sem pressão de radiação solar e com pressão de radiação solar.

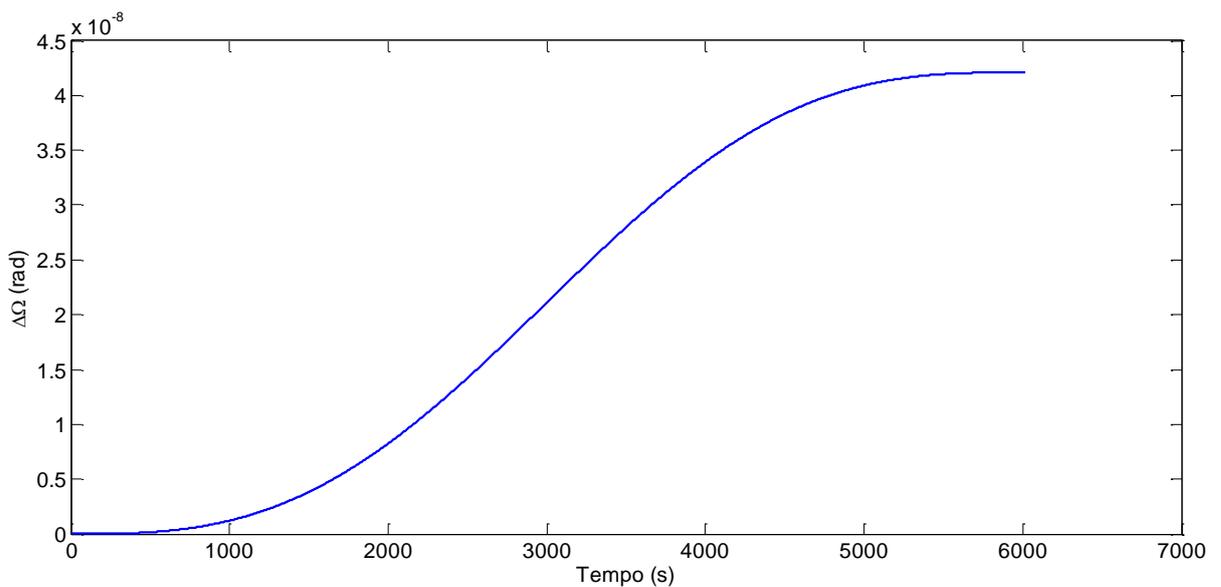


Figura 38 –  $\Delta x_2 = x_{2\rho} - x_2$ .

O gráfico apresentando na Figura 38 mostra a influência da pressão de radiação solar na posição angular de um satélite. O erro medido através da subtração dos resultados entre valores perturbados e não perturbados indica que  $x_{2\rho} > x_2$  o que implica em  $\Delta x_2 > 0$ .

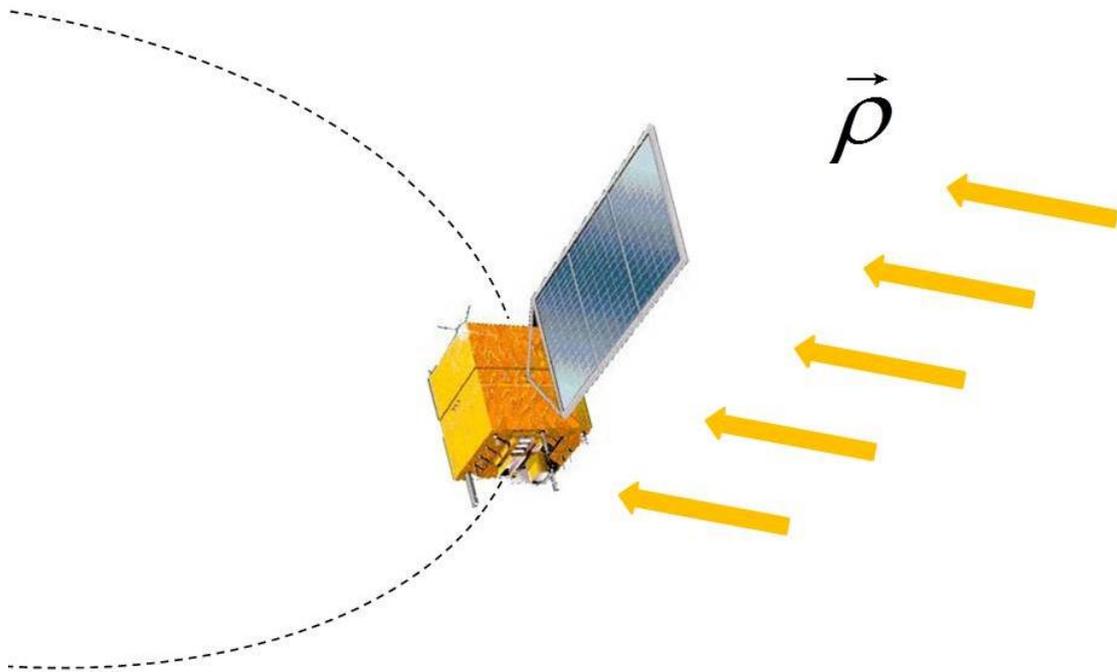


Figura 39 – Ação da aceleração de pressão de radiação solar sobre o satélite

Controladores de atitude e órbita corrigem esta pequena diferença fazendo com que o mesmo permaneça ativo e operante em sua órbita nominal até que o tempo proposto seja cumprido. Caso contrário, este efeito junto dos demais derrubaria o satélite.

### 13.SIMULAÇÃO DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA

Neste caso será considerado o problema restrito de três corpos no plano junto de um efeito perturbativo, que neste caso será a pressão de radiação solar. A simulação levará em conta o caso de um veículo que encontra-se sob órbita circular inicialmente ao redor da Terra e recebe um  $\Delta v$  que fará com que o mesmo saia de sua trajetória aproximando-se do segundo corpo (Lua). Serão simuladas situações diversas o qual este impulso poderá aproximar o veículo do segundo corpo, permanecer o mesmo preso a ação gravitacional ou afastá-lo do sistema.

A Figura 38 apresenta a situação a ser simulada.

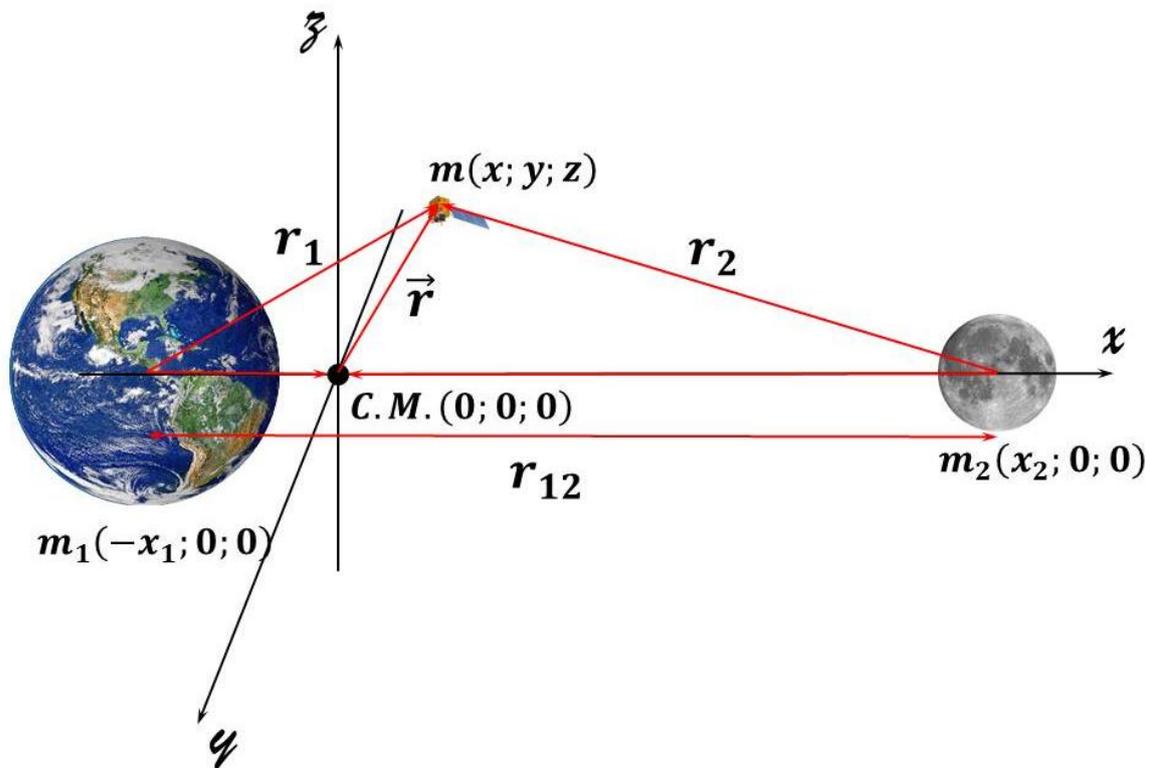


Figura 40 – Problema restrito de três corpos Terra, Lua e satélite.

Para a simulação serão utilizadas as seguintes Equações:

$$\left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - \Omega^2 x \right) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} (x - x_1) - \frac{\mu_2}{r_2^3} (x + x_2) \quad (13.1)$$

$$\left( \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx}{dt} - \Omega^2 y \right) = -\frac{\mu_1}{r_1^3} y - \frac{\mu_2}{r_2^2} y \quad (13.2)$$

De forma que  $x_1$  e  $x_2$  podem ser calculados como sendo:

$$x_1 = -\frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (13.3)$$

$$x_2 = \frac{m_2 r_{12}}{m_1 + m_2} \quad (13.4)$$

Os raios  $r_1$  e  $r_2$  podem ser calculados como sendo:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \quad (13.5)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \quad (13.6)$$

Os parâmetros gravitacionais serão:

$$\mu_1 = Gm_1 \quad (13.7)$$

$$\mu_2 = Gm_2 \quad (13.8)$$

As velocidades do veículo podem ser escritas como sendo:

$$v_x = v_0 [\text{sen}(\chi) \cos(\varphi) - \cos(\chi) \text{sen}(\varphi)] \quad (13.9)$$

$$v_y = v_0 [\text{sen}(\chi) \text{sen}(\varphi) - \cos(\chi) \cos(\varphi)] \quad (13.10)$$

#### 14.RESULTADOS DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS MAIS PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR DIRETA

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 5:

Tabela 5 – Dados utilizados na simulação 4.

$H$	778
$v_0$	9.9148
$t_0$	0
$t$	2606419.296
$\rho$	0

Os dados obtidos em simulação podem ser conferidos nas Figuras abaixo:

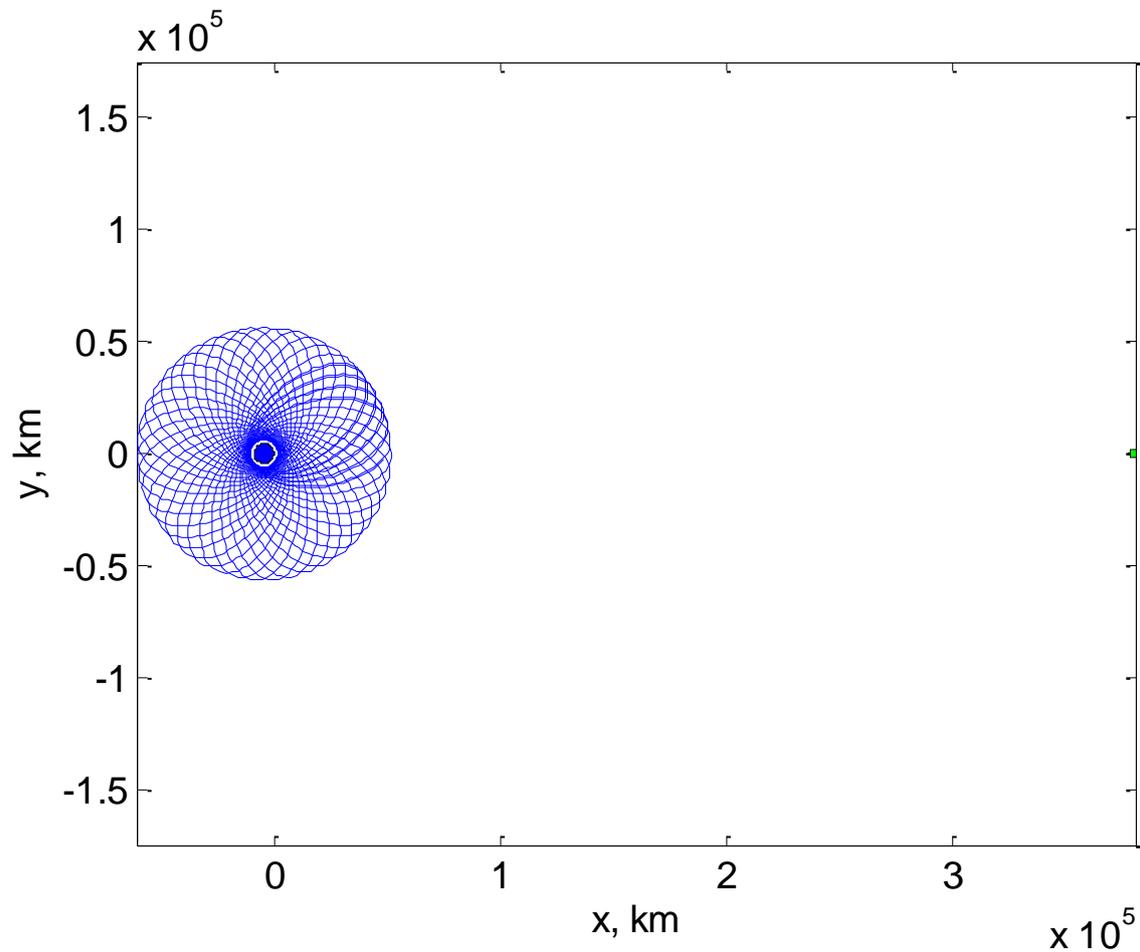


Figura 41 – Trajetória de um veículo qualquer em torno da Terra, sendo perturbada pela ação gravitacional lunar.

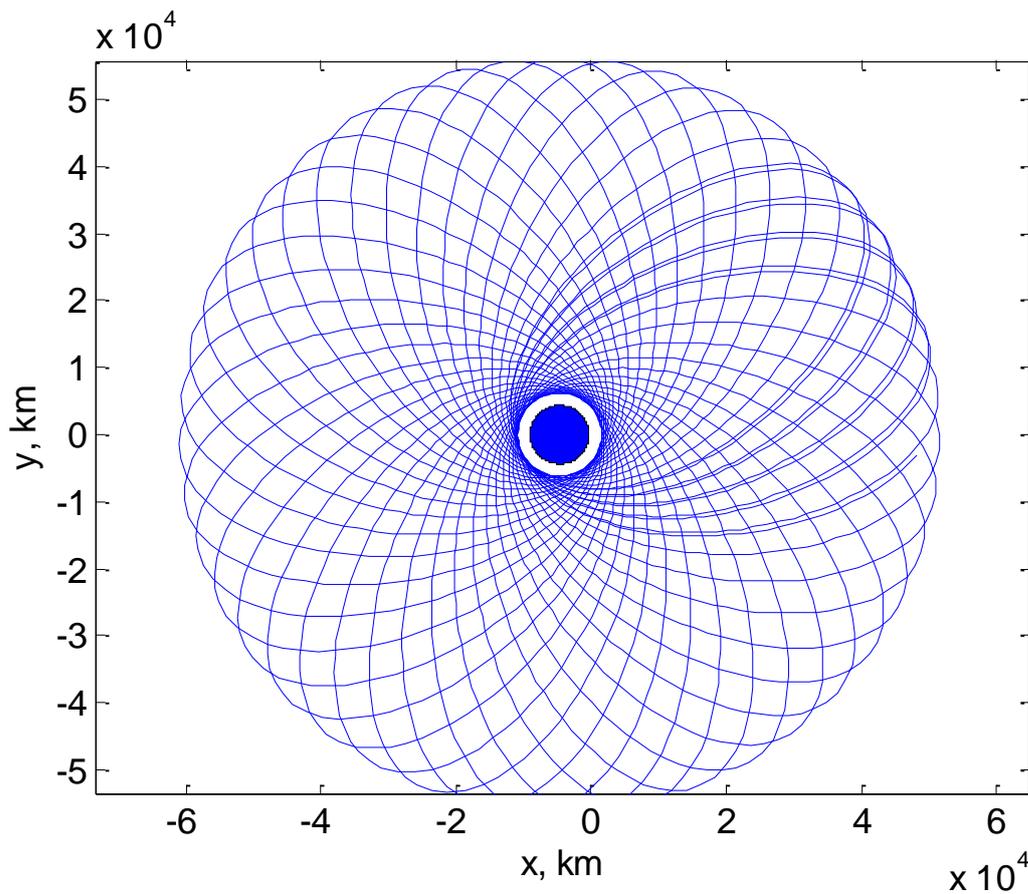


Figura 42 – Trajetória de um veículo qualquer em torno da Terra, sendo perturbada pela ação gravitacional lunar.

O movimento perturbado pela ação gravitacional lunar é mais intenso quando o veículo espacial cruza a linha que une os centros dos corpos (Terra/Lua) como mostra a Figura 42.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 6:

Tabela 6 – Dados utilizados na simulação 5.

$H$	778
$V_0$	10.45915
$t_0$	0
$t$	552096
$\rho$	0

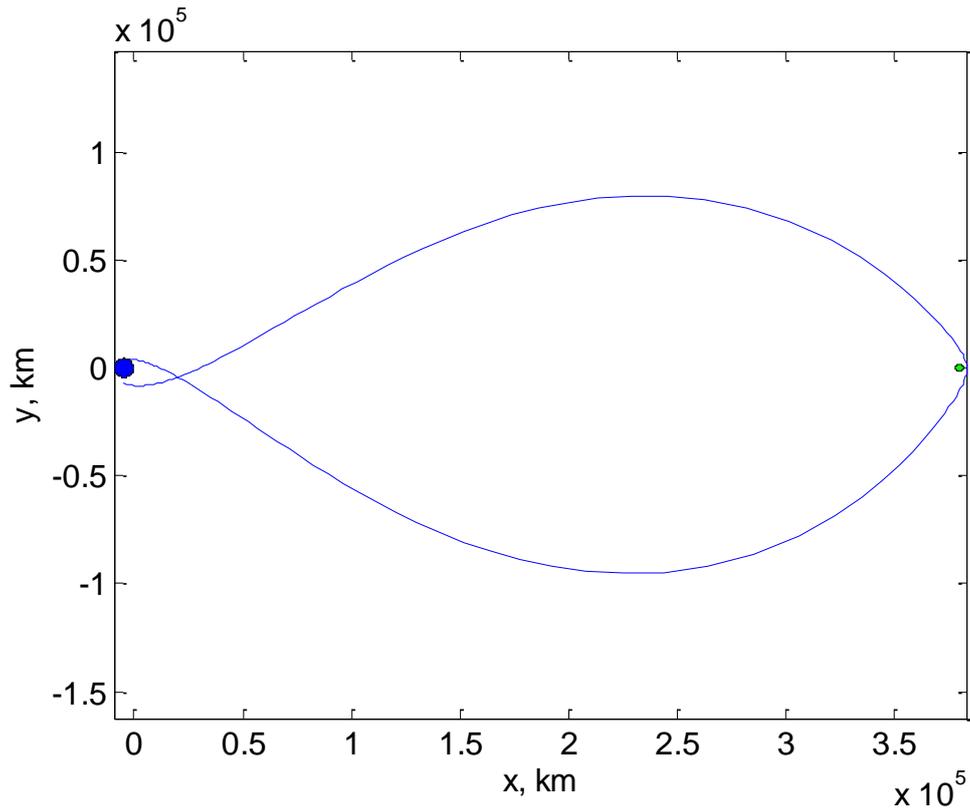


Figura 43 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um  $V_0$ , chega até a Lua e retorna a Terra.

Para realizar esta manobra foi preciso calcular o valor do impulso inicial precisamente, pois caso contrário ele não chegaria, ou escaparia da trajetória, ou seria capturado novamente pela ação gravitacional terrestre como pode ser observado nas simulações a seguir.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 7:

Tabela 7 – Dados utilizados na simulação 6.

$H$	778
$V_0$	10.4
$t_0$	0
$t$	552096
$\rho$	0

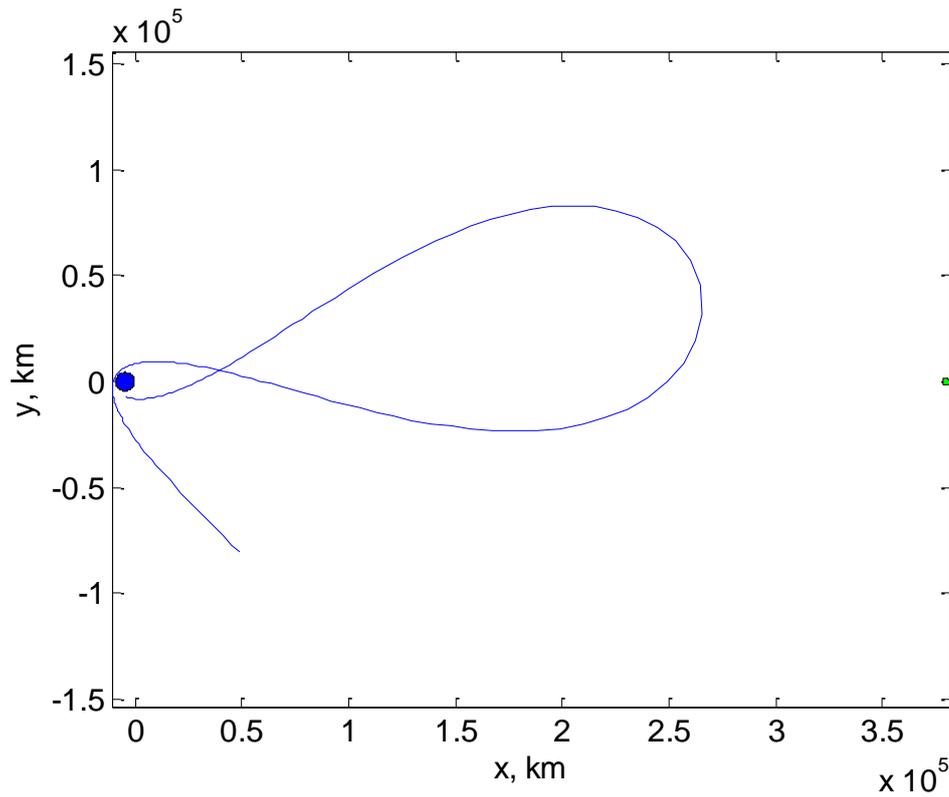


Figura 44 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um  $V_0$ , insuficiente para que a mesma chegue até a Lua, sendo assim capturada novamente pela força da gravitacional terrestre.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 8:

Tabela 8 – Dados utilizados na simulação 7.

$H$	778
$V_0$	10.47
$t_0$	0
$t$	552096
$\rho$	0

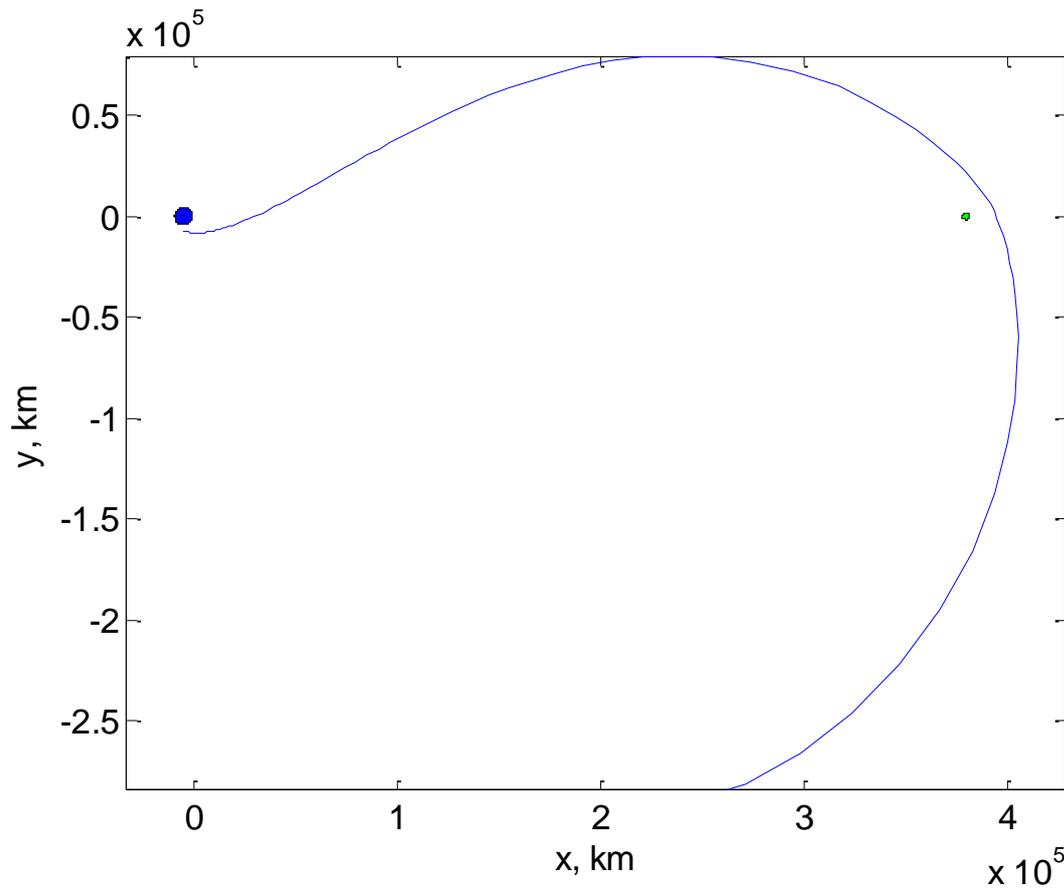


Figura 45 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um  $V_0$  elevado, para estas condições, tendo sua trajetória perdida devido a isso.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 9:

Tabela 9 – Dados utilizados na simulação 8.

$H$	778
$V_0$	10.45915
$t_0$	0
$t$	552096
$\rho$	$10^{-7}$

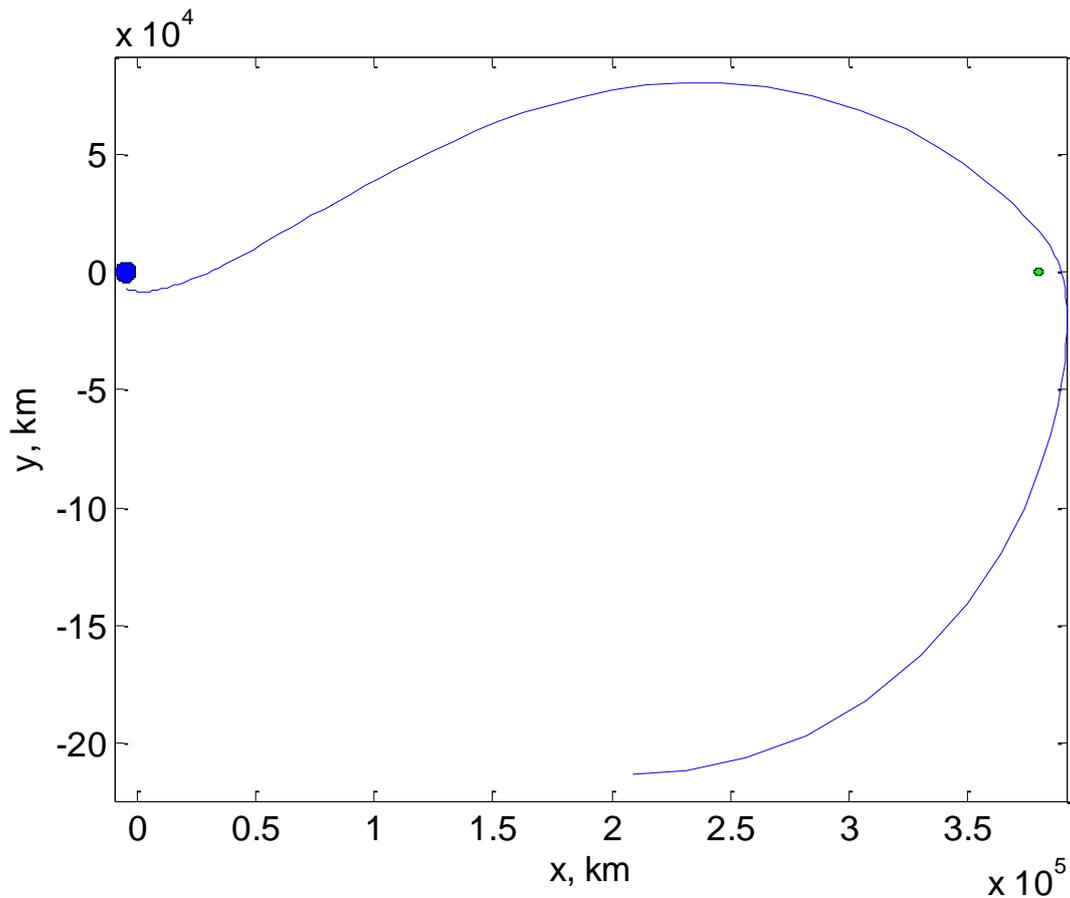


Figura 46 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um  $V_0$ , chega até a Lua e retorna a Terra. Todavia, agora o movimento está sofrendo com a ação da pressão de radiação solar.

A Figura 46 foi simulada nas mesmas condições que a simulação 5, porém neste caso a espaçonave sofre ação da aceleração de radiação solar. Como pode ser visto, o pequeno efeito perturbativo da pressão de radiação foi suficiente para fazer com que o corpo não retornasse a Terra no mesmo tempo previsto pela simulação 5.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 10:

Tabela 10 – Dados utilizados na simulação 9.

$H$	778
$V_0$	10.4
$t_0$	0
$t$	552096
$\rho$	$10^{-7}$

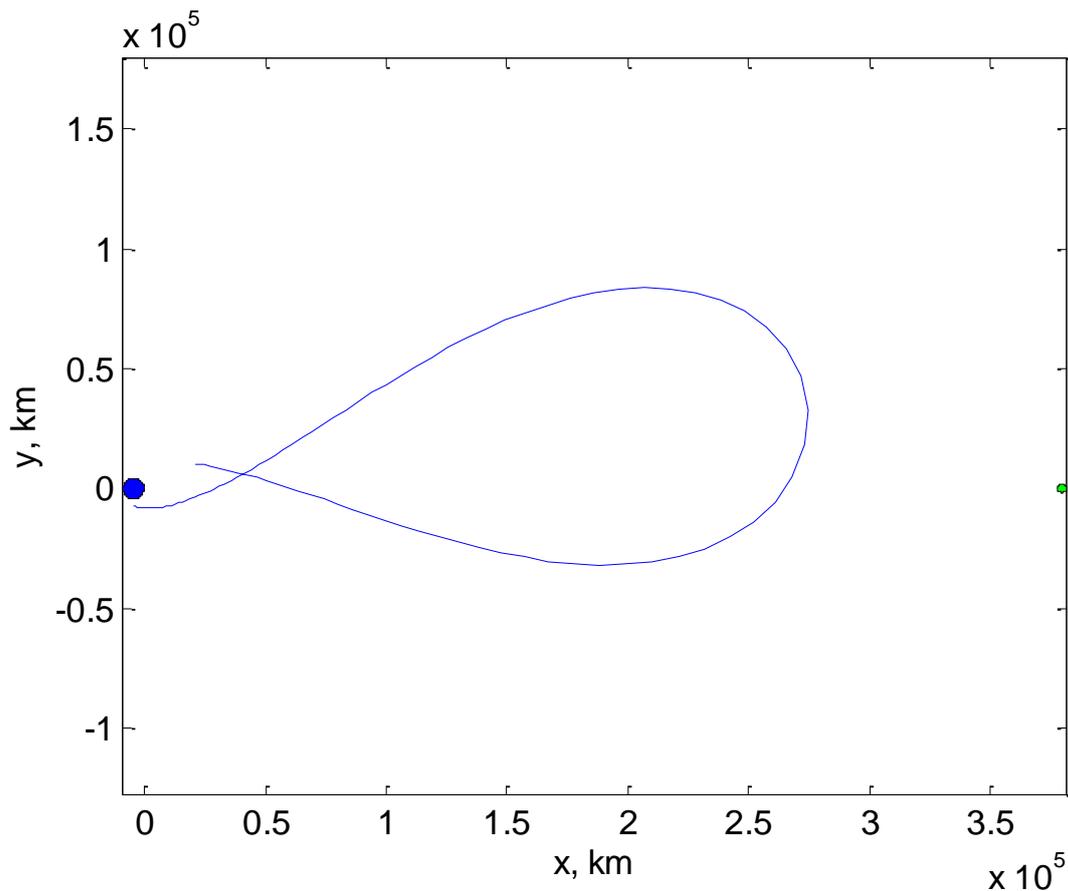


Figura 47 – Trajetória de uma espaçonave que sai de uma órbita terrestre por meio de um  $V_0$ , insuficiente para que a mesma chegue até a Lua. Além disso, a mesma sofre ação da pressão de radiação solar.

A Figura 47 apresenta a simulação de uma espaçonave que sofre um  $V_0$  em sua órbita nominal, fazendo com que a mesma escape em sentido do campo gravitacional lunar. Além da perturbação causada pelo segundo corpo o veículo espacial sofre ação da pressão de radiação solar. Esta simulação foi realizada com os mesmo dados da simulação 6.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 11:

Tabela 11 – Dados utilizados na simulação 10.

$H$	778
$V_0$	10.354567
$t_0$	0
$t$	$7.1856 \cdot 10^6$
$\rho$	$10^{-7}$

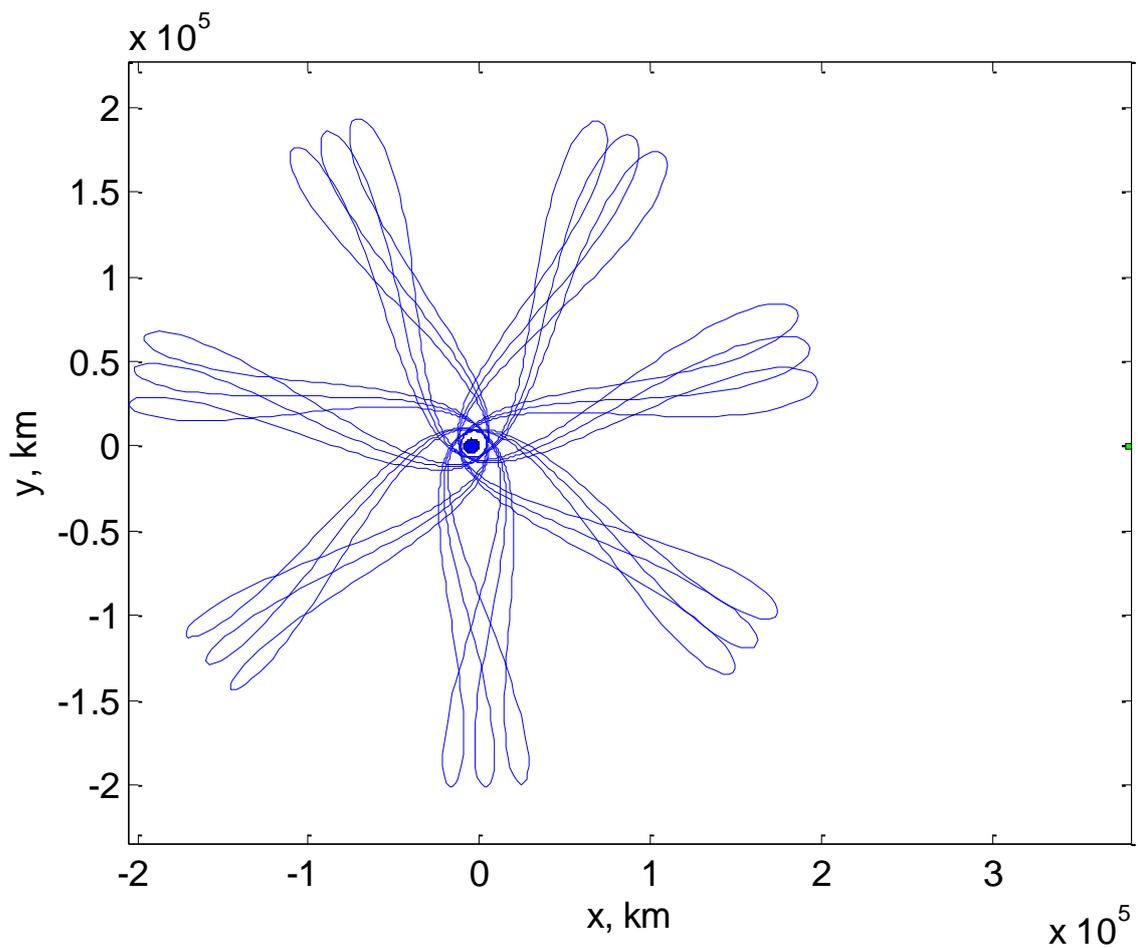


Figura 48 – Órbita de uma espaçonave que leva um impulso inicial  $V_0$  e que está sob a ação da perturbação causada pela ação gravitacional lunar e pela pressão de radiação solar.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 12:

Tabela 12 – Dados utilizados na simulação 11.

$H$	778
$V_0$	10.38967
$t_0$	0
$t$	$2.3576 \cdot 10^6$
$\rho$	$10^{-7}$

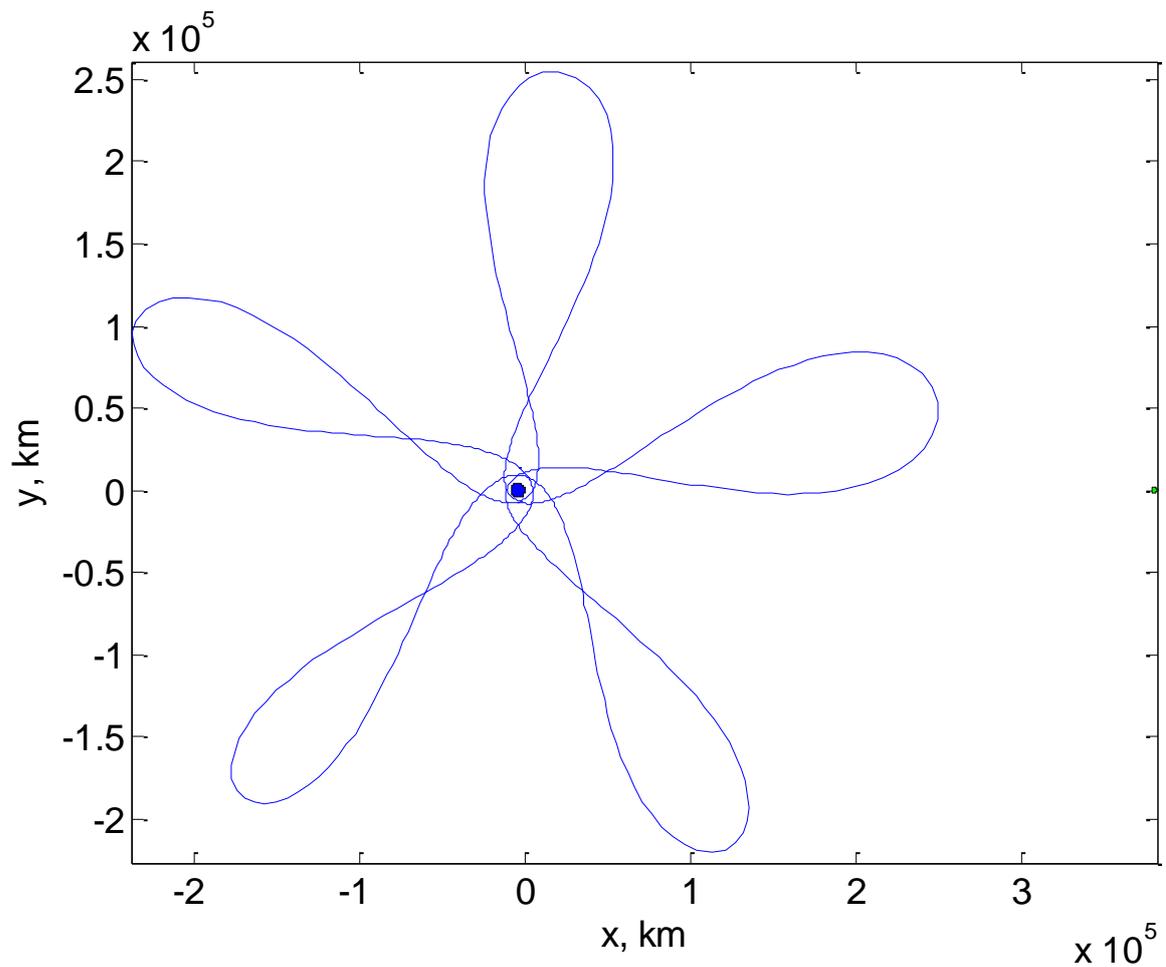


Figura 49 – Órbita de uma espaçonave que leva um impulso inicial  $V_0$  e que está sob a ação da perturbação causada pela ação gravitacional lunar e pela pressão de radiação solar.

Para simulação foram utilizados os dados referentes a Tabela 13:

Tabela 13 – Dados utilizados na simulação 12.

$H$	778
$V_0$	10.424566
$t_0$	0
$t$	$2.617920 \cdot 10^7$
$\rho$	$10^{-7}$

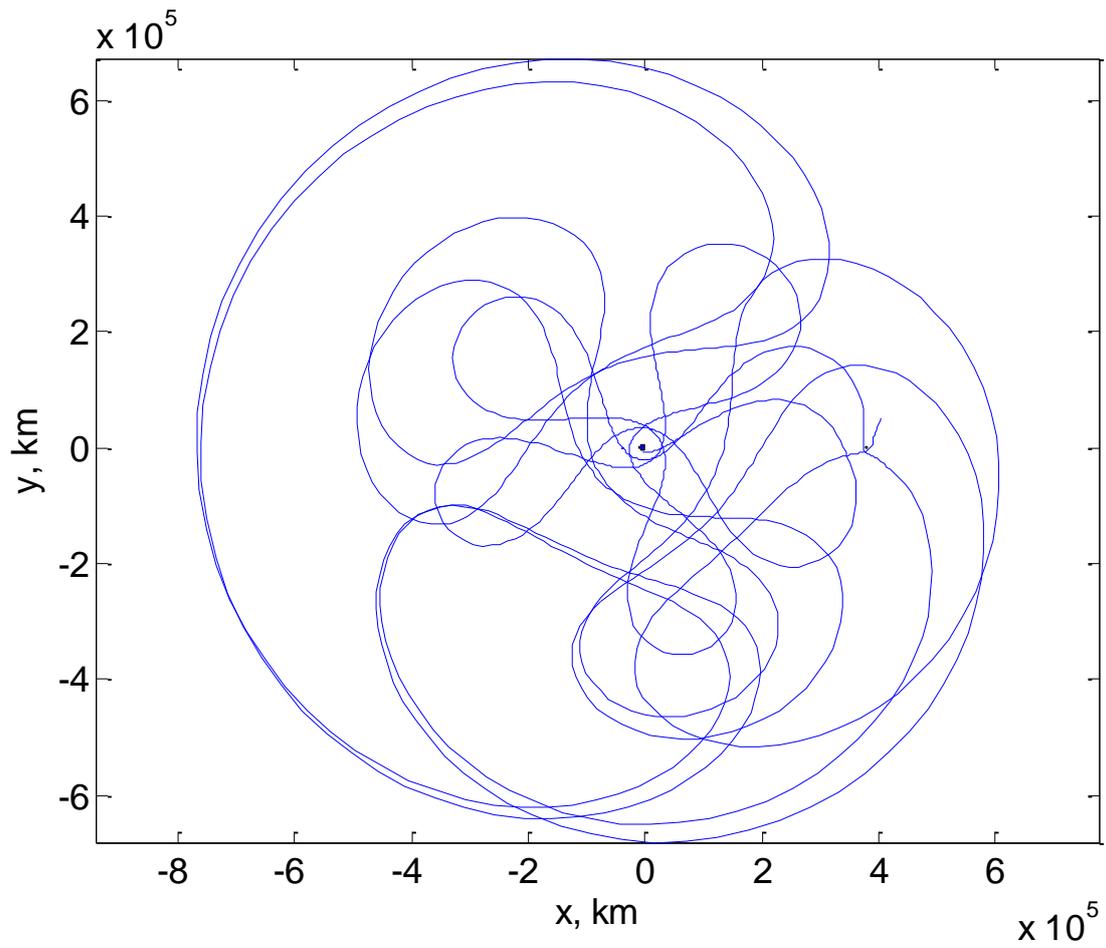


Figura 50 – Trajetória de uma espaçonave em meio ao problema restrito de três corpos mais pressão de radiação solar.

## 15. CONCLUSÃO

O trabalho apresentou um estudo a respeito de manobras orbitais. A primeira instância analisou-se o comportamento de um satélite ao redor da Terra sem efeitos perturbativos. O veículo espacial encontrou-se inicialmente em trajetória circular equatorial ao longo das simulações. Os dados obtidos são referentes aos períodos orbitais, na maioria dos casos foi analisada somente uma volta, isto é, um período orbital. Em seguida foram analisadas órbitas perturbadas pelo efeito de pressão de radiação solar direta. Foram simuladas situações o qual o satélite sofreu perturbações de uma aceleração de pressão num intervalo de  $10^{-7} \leq \rho < 1$ . Constatou-se que para  $\rho = 1$  a órbita ficou bastante alterada em relação à órbita não perturbada, o valor, apesar de pequeno, foi suficiente para derrubar o satélite. Para  $\rho = 10^{-7}$  o efeito foi menor, porém se não houver um sistema de correção de atitude e órbita de forma a corrigir a trajetória do satélite ao longo do tempo este pode se chocar contra a superfície da Terra ou se perder pelo espaço. Para este modelo não foram considerados efeitos recorrentes sobre a atitude do satélite apenas distúrbios orbitais. Futuramente, pode-se estudar o caso mais completo levando em conta a inclinação e os torques gerados pelas superfícies externas do satélite.

Em segunda instância foram estudados os efeitos perturbativos da pressão de radiação solar inerente ao problema restrito de três corpos. A priori foram estudadas condições o qual uma espaçonave sofre perturbação em sua trajetória causada apenas pela ação gravitacional lunar. Realizaram-se manobras de aproximação da superfície da Lua sob três condições de impulso inicial  $v_0$ :

- Primeiro caso: o veículo recebeu um  $v_0 = 10.45915 \text{ km/s}$  aproximando-se da Lua, realizou uma manobra e retornou a Terra em  $t = 552096 \text{ s}$ ;
- Segundo caso: o veículo recebeu um  $v_0 = 10.4 \text{ km/s}$ , porém este impulso não foi suficiente para vencer a ação gravitacional lunar evitando que a espaçonave se aproximasse da superfície lunar. O tempo da manobra foi de  $t = 552096 \text{ s}$ ;

- Terceiro caso: o veículo recebeu um  $v_0 = 10.47 \text{ km/s}$ , neste caso o impulso foi suficiente para fazer com que a espaçonave escapasse da ação gravitacional da Lua e da Terra. O tempo da manobra foi de  $t = 552096 \text{ s}$ .

Em todos os três casos ficaram evidentes que o impulso inicial foi fator culminante para realizar-se uma manobra de sucesso.

A posteriori considerou-se o problema restrito de três corpos mais a pressão de radiação solar. Para essas simulações foram consideradas as mesmas condições dos dois primeiros casos citados acima. Observou-se que para o mesmo instante de tempo, as trajetórias assumiram outras características constatando-se que a órbita sofreu degeneração causada pela aceleração de pressão de radiação solar direta.

Outras simulações foram realizadas de forma a apresentar o comportamento da órbita da espaçonave devido às condições de suas simulações apresentando seus comportamentos diante do problema restrito de três corpos junto da pressão de radiação solar.

## 16.REFRÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Astronews. (2010). Acesso em 08 de Fevereiro de 2012, disponível em Astronews:  
<http://www.astronews.com.br/WebSite/index.php?Page=ArticleDetail&Id=1>
- CHOBOTOV, V. A. (1996). *Orbital Motion 2ed*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- de Lacerda, E. G., & de Carvalho, A. C. (s.d.). *Introdução aos Algoritmos Genéticos*.
- G. Winter, S. M. (s.d.). *Geometria & Astronomia. Geometria & Astronomia*. Guará: UNESP. Acesso em 8 de Fevereiro de 2012, disponível em  
<http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/AulasModulo02-pdf/ApresentacaoSilvia.PDF>
- Goldberg, D. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley.
- HOELKER, R. F., & SILBER, R. (janeiro de 1959). The Bi-elliptic Transfer Betewen Circular Coplanar Orbtis. *DA TechMemo 2-59*. Alabama, EUA: Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal.
- INPE. (2007). Fonte: Programa CBERS: <http://www.cbbers.inpe.br/?content=introducao>
- Kuga, H. K., Rao, K. R., & Carrara, V. (2000). *Satélites Artificiais Movimento Orbital*. São José dos Campos: INPE.
- MAREC, J. P. (1979). *Optimal Space Trajectories*. New York, NY, EUA: Elsevier.
- Meirovitch, L. (1970). *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill Book Company.
- Prado, A. F. (2001). *Trajcetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade*. São José dos Campos: INPE.
- SANTOS, D. P. (agosto de 2005). *Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontro. Dissertação de Mestrado*. São José dos Campos, SP, Brasil: INPE.
- SANTOS, D. P. (agosto de 2006). *Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontro. Dissertação de Mestrado*. São José dos Campos, SP, Brasil: INPE.
- Sitchin, Z. (1976). *The 12th Planet. I(Earth Chronicles)*.
- Sitchin, Z. (2001). *The Encyclopedia of Extraterrestrial Encounters*. 552.
- Whitley, D.:. (s.d.). *Tutorial - Genetic Algorithm*. Colorado: Computer Science Department, Colorado State University.