



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

ESTUDO DA DINÂMICA E DO SISTEMA DE CONTROLE DE UMA VIGA RÍGIDO-FLEXÍVEL

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(CNPq/INPE)**

Cedéia Vieira de Araújo (UFABC, Bolsista CNPq)
E-mail: cedeia.araujo@ufabc.edu.br

Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza (DMC/INPE, Orientador)
E-mail: gadelha@dem.inpe.br

Dr. André Fenili (CECS/UFABC, Co-orientador)
E-mail: andré.fenili@ufabc.edu.br

Junho de 2010

SUMÁRIO

RESUMO	04
1. INTRODUCAO	05
2. BASE TEÓRICA	03
2.1 Métodos dos Modos Assumidos	07
2.2 Regualdor Linear Quadrático (LQR)	08
3. MODELAGEM.....	11
3.1 Modelo Massa Mola	11
3.2 Modelo dos Modos Assumidos	12
4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	20
4.1 Projeto com o LQR para o modelo massa mola	20
4.1.1 Estudo da variação dos parâmetros Q e R	20
4.2 Projeto com o LQR para o modelo dos modos assumidos	27
4.2.1 Resposta ao aumento no número de modos de vibração	27
4.2.2 Localização dos pólos e a variação da frequência dos modos de vibração com o aumento do numero de modos	29
4.2.3. Resposta dinâmica a variação no tamanho da viga	32
4.2.4 Resposta dinâmica ao aumento na massa da viga	39

4.3 Comparação entre o método LQR aplicado ao modelo massa mola e o aplicado ao modelo obtido através do método dos modos assumidos	43
4. CONCLUSÃO	46
5. BIBLIOGRAFIA	47

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o estudo da dinâmica e do sistema de controle de uma viga rígido-flexível. Utiliza-se, como modelo experimental o equipamento FlexGage fabricado pela empresa Quanser, o qual representa um satélite artificial com uma estrutura rígida central ligada a um apêndice flexível. Utilizou-se a formulação Lagrangiana para desenvolver dois modelos matemáticos para o sistema. O primeiro possui uma configuração do tipo massa-mola (MM) e o segundo, faz uso do método dos modos assumidos (MMA) para representar os vários modos de vibração do modelo. A partir destes dois modelos, aplicou-se a técnica de controle, conhecida como Regulador Linear Quadrático (LQR). No projeto do sistema de controle são especificados matrizes pesos dados por Q e R , responsáveis por ponderar a ação do controlador sobre os estados e a entrada de controle, respectivamente. No projeto do controlador LQR no modelo MM, observou-se através das simulações a dualidade existente entre os parâmetros Q e R (aumentar Q corresponde a diminuir R) e que o fator relevante no LQR é a razão entre Q e R . No projeto do controlador LQR, para o modelo do MMA, investigou-se a localização dos pólos e a influencia sobre a ação de controle quando aumenta-se o numero de modos de vibração. Com o aumento do numero de modos, observa-se maiores oscilações tanto na velocidade angular como na velocidade do deslocamento flexível e os pólos se deslocam para a esquerda do eixo imaginário. No estudo da variação dos parâmetros do sistema, observou-se que ao aumentar o comprimento da viga e também o número de modos do sistema, este se torna não controlado. O critério de desempenho do controlador utilizado para cada um dos modelos consistiu em fazer com que o sistema seguisse uma referência imposta e ao mesmo tempo amortecesse rapidamente as vibrações remanescentes, oriundas dos deslocamentos flexíveis do apêndice. Comparativamente, observou-se que o controlador LQR aplicado ao modelo MMA tem melhor desempenho quando o mesmo controlador é aplicado ao modelo MM. Acredita-se que este melhor desempenho esta relacionado ao fato do modelo MMA representar com mais fidelidade à dinâmica do sistema. Confirmando, que uma dinâmica mais realista, resulta em controlares mais robustos. Espera-se que nas investigações experimentais futuras, o controlador baseado no MMA tenha também melhor desempenho.

1. INTRODUÇÃO

Satélites artificiais com múltiplas missões têm sido cada vez mais utilizados em missões espaciais. Com isso, a variedade de tarefas a cumprir aumenta e como consequência imediata, aumenta-se o número de instrumentos utilizados para o propósito da missão. O número de instrumentos está relacionado à potência elétrica consumida pelo satélite, portanto, cada vez mais os painéis solares têm aumentado o seu tamanho para suprir energia suficiente à requisitada pelos instrumentos de forma que os requisitos da missão sejam cumpridos. Como consequência, o aumento da área dos painéis solares acarreta em uma maior influência do efeito da flexibilidade sobre a dinâmica do satélite. Outro fator relevante está associado à limitação de peso da carga útil dos lançadores, que impõe a utilização de materiais mais leves, o que leva ao emprego de estruturas mais finas e flexíveis na construção do satélite. Devido à menor espessura, estas estruturas são mais suscetíveis à vibração.

Existem ainda estruturas espaciais com níveis de complexidade estrutural maiores que a de satélites artificiais, como é o caso de estações espaciais que, compostas de diversos links e até mesmo manipuladores robóticos, estão fortemente sujeitas à influência da flexibilidade em sua dinâmica. Este aumento na complexidade estrutural resulta em um aumento na complexidade do modelo matemático da dinâmica destas estruturas, o que leva muitas vezes à necessidade da simplificação destes modelos por parte do projetista.

No entanto, para satélites dotados de componentes flexíveis, o desprezo das vibrações induzidas pelos mesmos pode provocar uma degradação do desempenho do Sistema de Controle de Atitude e Órbita (SCAO), o que torna o estudo da influência da flexibilidade na dinâmica destes sistemas de suma importância.

O problema do controle de atitude de satélites artificiais com estruturas flexíveis é tema de diversos trabalhos de variados autores. Hooker (1975) deriva as equações da dinâmica de um sistema rotacional composto por corpos rígidos flexíveis interconectados em uma topologia chamada de árvore, onde as conexões dos corpos do sistema não possuem linhas fechadas. Para isso são utilizados os conceitos de energia cinética e momento angular além do efeito da força gravitacional para se chegar às equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema. Assim, através de variáveis de estados, as forças e os torques são avaliados a partir das grandezas disponíveis.

Meirovitch e Kwak (1990) investigam os efeitos da vibração sobre uma plataforma com um apêndice flexível em movimento, procurando estabilizar sua atitude e amenizar os efeitos da vibração. Uma abordagem Lagrangiana é utilizada para a dedução das equações do movimento, com o uso de quase-coordenadas, ou coordenadas formadas por combinações não integráveis de ângulos e velocidades angulares.

É sabido que uma das maiores dificuldades no controle do movimento de um sistema rígido flexível deve-se ao acoplamento entre o movimento flexível e o movimento rígido do

satélite (JUNKINS 1993). Portanto, devido à sua relevância, vários problemas associados ao estudo da dinâmica e do controle de estruturas espaciais flexíveis têm sido investigados nos últimos anos. Exemplos desses estudos podem ser vistos em Souza e Silva (1999) onde é investigada a questão do desempenho de um SCAO quando este precisa realizar manobras de atitude predefinidas, manter sua posição de apontamento e/ou amortecer as vibrações estruturais remanescentes.

Neste trabalho, pretende-se desenvolver dois modelos matemáticos que representem a dinâmica de um satélite rígido flexível. No primeiro modelo emprega-se uma configuração do tipo massa mola e no segundo utiliza-se o método dos modos assumidos para a modelagem. Ambos para representar a montagem conhecida como FlexGage da Quanser©R (Quanser, 2009), a qual é composta por um apêndice flexível acoplada a um servomotor, que é o atuador do sistema. O apêndice possui liberdade para girar em torno somente do eixo vertical o que implica que o modelo possui somente duas dimensões (movimento em um plano). Ressalta-se o fato de que o equipamento utilizado não é capaz de simular um ambiente livre de torques oriundos do efeito gravitacional, apesar disso, é de grande auxílio na validação principalmente das técnicas de estabilização e amortecimento dos modos de vibração da haste flexível. Emprega-se a técnica de controle LQR para os dois modelos desenvolvidos. O objetivo específico deste trabalho é avaliar a ação do controlador LQR para os dois modelos e compará-los inicialmente através de simulações e posteriormente através de uma implementação “hardware in the loop”.

2. BASE TEÓRICA

2.1 MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

O método dos modos assumidos é um método com a função de modelar as deflexões de estruturas contínuas elásticas através de séries finitas de funções dependentes do espaço que são multiplicadas por funções específicas de amplitude dependentes do tempo. As funções dependentes do tempo são normalmente escolhidas como um conjunto de funções lineares independentes, de modo a satisfazer ao menos as condições de contorno geométricas e de serem diferenciáveis pelo menos a metade das vezes que o número da ordem do sistema. Estas funções são chamadas funções admissíveis. Apesar de terem de satisfazer estas condições mínimas expostas, quando possível, estas funções podem ser selecionadas para satisfazer também as condições de contorno físicas (naturais) e serem diferenciáveis tantas vezes quanto à ordem do sistema, sendo conhecidas, neste caso específico, como funções de comparação. Funções de comparação apresentam, para um mesmo número de funções, um resultado mais aproximado ao sistema real em comparação com funções admissíveis.

O método dos modos assumidos considera uma solução para o problema de valores de contorno associado ao um sistema conservativo contínuo da forma:

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^N q_j(t)\phi_j(x) \quad (2.1)$$

onde $q_j(t)$ é a j-ésima coordenada generalizada, $\phi_j(x)$ a j-ésima função admissível e N representa o número de termos utilizados na aproximação. A equação 2.1 é utilizada então em conjunto com as equações de Lagrange de modo a obter uma aproximação de dimensão finita para as equações diferenciais do movimento que governam a evolução das amplitudes $q_j(t)$ no tempo.

A energia cinética e a energia potencial são escritas na forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K \dot{q} \quad (2.2)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij} q_i(t) q_j(t) = \frac{1}{2} q^T K q \quad (2.3)$$

sendo M_{ij} o (i, j) -ésimo elemento da matriz simétrica de massa M , o qual depende da distribuição de massa do sistema e das funções admissíveis $\phi_j(x)$ escolhidas e K_{ij} representa o (i, j) -ésimo elemento da matriz simétrica de rigidez K , a qual depende da distribuição da rigidez e das funções de admissíveis $\phi_j(x)$.

Como a energia cinética T não depende das coordenadas generalizadas $q_j(t)$ e a energia potencial V não depende das velocidades generalizadas $\dot{q}_j(t)$, ao se aplicar a formulação Lagrangiana, obtêm-se as seguintes equações do movimento:

$$\sum_{j=1}^N M_{rj} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^N K_{rj} q_j(t) = Q_r \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

na qual Q_r representa as forças generalizadas não conservativas. A equação acima pode ser escrita na forma compacta como:

$$M \ddot{q}(t) + K q(t) = Q(t) \quad (2.5)$$

que é a equação do movimento, onde $q(t)$ é o vetor de coordenadas generalizadas que representa a deformação instantânea da estrutura, a qual é aproximada pela expansão dos modos assumidos dada pela equação 2.1.

2.2 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

O problema do regulador linear quadrático consiste em manter a saída de um sistema o mais próximo possível de um valor de referência. Para isso o LQR utiliza o problema da otimização dos mínimos quadrados, o que garante um sistema de malha fechada estável, alcançando um nível elevado de estabilidade e robustez.

Sendo a dinâmica do sistema dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.6)$$

Onde: A representa a matriz da dinâmica do sistema e B a matriz das entradas, sua saída é dada por:

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.7)$$

Defini-se então um funcional de custo quadrático dado por:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (2.8)$$

$x(t)$ é ponderado de acordo com a quantidade de ação de controle $u(t)$ através das matrizes de peso Q e R, onde Q é uma matriz semipositiva definida ($Q \geq 0$) que penaliza os estados e R é uma matriz definida positiva ($R > 0$) que penaliza as entradas de controle.

Se as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- O vetor de estados inteiro $x(t)$ está disponível para a realimentação;
- $[A \ B]$ é controlável e $[A \ C]$ é observável (MACIEJOWSKI, 1989);

então existe um controle linear quadrático único e ótimo dado por:

$$u(t) = -K_{LQR}x(t) \quad (2.9)$$

que minimiza o funcional J, sujeito ao vínculo dinâmico imposto pela equação 1.8, onde K_{LQR} é o ganho do controlador, dado por:

$$K_{LQR} = R^{-1}BS \quad (2.10)$$

e S é a matriz de solução única, simétrica e semi-definida positiva, da equação algébrica de Riccati dada por:

$$SA + ATS + CTQC - SBR-1BTS = 0 \quad (2.11)$$

O controle da dinâmica em malha fechada é então dado substituindo-se a equação 2.9 na 2.6, que resulta em:

$$\dot{x}(t) = (A - BK_{LQR})x(t) \quad (2.12)$$

3 MODELAGEM

3.1 MODELO MASSA MOLA

A partir do modelo representativo do experimento deduzido no relatório anterior (2009), o qual faz a aproximação da dinâmica do sistema por um modelo do tipo massa mola, chega-se a equação 3.2 na forma 3.1.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{STIFF}}{J_{eq}} & \frac{-\eta_m \eta_g K_T K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & \frac{-K_{STIFF} (J_{eq} + J_{ARM})}{J_{eq} J_{ARM}} & \frac{\eta_m \eta_g K_T K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g}{J_{eq} R_m} \\ \frac{-\eta_m \eta_g K_T K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} V_m \quad (3.2)$$

Sendo: η_m e η_g a eficiência do motor e das engrenagens, respectivamente; K_T é a constante de torque do motor; K_g é a razão de transmissão da caixa de engrenagens soma a razão transmissão das engrenagens externas; V_m a tensão de alimentação o do motor; K_m a constante de força contra-eletromotriz e R_m a resistência de armadura do Sendo: η_m e η_g a eficiência do motor e das engrenagens, respectivamente; K_T é a constante de torque do motor; K_g é a razão de transmissão da caixa de engrenagens soma a razão de transmissão das engrenagens externas; V_m a tensão de alimentação o do motor; K_m a constante de força contra-eletromotriz e R_m a resistência de armadura do motor.

3.2 MODELO DOS MODOS ASSUMIDOS

Considera-se o apêndice como uma viga do tipo engastada/livre. Onde o deslocamento flexível $y(t,x)$ é dependente tanto do tempo (t) como do espaço (x). O seu comportamento dinâmico é modelado de acordo com o modelo do tipo Euler- Bernoulli (JUNKINS; KIM;1993). Portanto, utilizando o método dos modos assumidos, pode-se tratar a função $y(t,x)$ como o produto de uma função dependente somente do espaço por outra dependente somente do tempo como mostrado na equação 2.1 .

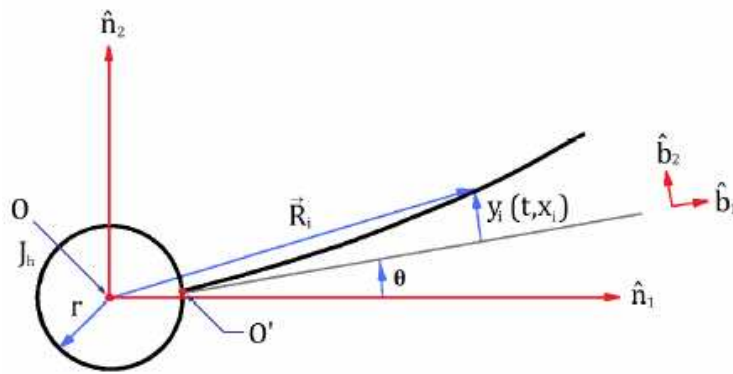


Fig 1 - Representação da vista superior do módulo FlexGage

Através da figura 1, defini-se o vetor posição \vec{R} de um ponto qualquer da haste deformada, relativo ao sistema inercial de referência como:

$$\vec{R} = (r + x)\hat{b}_1 + y\hat{b}_2 \quad (3.3)$$

que vale para pequenos deslocamentos entre o sistema inercial e o fixo no corpo, sendo r o raio do corpo rígido.

Derivando a Eq 3.3 em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} [(r + x)\hat{b}_1 + y\hat{b}_2] = \left[r + \frac{dx}{dt}\hat{b}_1 + \frac{dy}{dt}\hat{b}_2 + (r + x)\frac{d\hat{b}_1}{dt} + y\frac{d\hat{b}_2}{dt} \right] \quad (3.4)$$

Como:

$$\frac{d\hat{b}_1}{dt} = \bar{\omega} \times \hat{b}_1 \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{b}_2}{dt} = \bar{\omega} \times \hat{b}_2 \quad (3.5)$$

Então:

$$\bar{\omega} \times (r + x) \hat{b}_1 + \bar{\omega} \times y \hat{b}_2 = \bar{\omega} \times \bar{R} \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq 3.4 na 3.2 e simplificando, obtemos a equação para a velocidade \bar{R} de um ponto deformado do apêndice no sistema de coordenadas inerciais onde (\times) indica o produto vetorial. Assim:

$$\dot{\bar{R}} = \frac{d}{dt}(\bar{R})_N = \frac{d}{dt}(\bar{R})_{(B)} + \omega \times \bar{R} \quad (3.7)$$

onde $\frac{d}{dt}(\cdot)_N$ e $\frac{d}{dt}(\cdot)_{(B)}$ denotam a velocidade no sistema de referência inercial e a velocidade no sistema de referência fixo ao corpo rígido, respectivamente. Como o movimento se dá somente na forma de deslocamento angular restrito ao plano horizontal (n_1n_2) , a velocidade ω , que é a velocidade angular do sistema de referência fixa ao corpo em relação ao sistema inercial, é dada por $\omega = \dot{\theta} \hat{n}_3$. Com isso Eq 3.7 desprezando o pequeno movimento radial requerido para garantir alongamento nulo, fica da forma:

$$\dot{\bar{R}} = \frac{d}{dt}[(r+x)\hat{b}_1 + y\hat{b}_2] + \bar{\omega} \times [(r+x)\hat{b}_1 + y\hat{b}_2] \quad (3.8)$$

e como:

$$\bar{\omega} \times [(r+x)\hat{b}_1 + y\hat{b}_2] = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ (r+x) & y & 0 \end{bmatrix} = -\dot{\theta}y\hat{b}_1 + \dot{\theta}(r+x)\hat{b}_2 \quad (3.9)$$

Então:

$$\dot{\vec{R}}(t,x) = \dot{y} \hat{b}_2 - \dot{\theta} y \hat{b}_1 + \dot{\theta}(r+x) \hat{b}_2 = -\dot{\theta} y \hat{b}_1 + [\dot{y} + \dot{\theta}(r+x)] \hat{b}_2 \quad (3.10)$$

Através da equação 3.10, a qual representa a velocidade de um ponto de massa infinitesimal dm pertencente ao apêndice, é possível então calcular a energia cinética total do sistema que é dada por:

$$T = T_{cr} + T_{ap} \quad (3.11)$$

onde:

$$T_{cr} = \frac{1}{2} J_{cr} \dot{\theta}^2 \quad (3.12)$$

$$T_{ap} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \vec{R} \vec{R} dx \quad (3.13)$$

onde J_{cr} é o momento de inércia do corpo rígido e ρ é a densidade linear do apêndice. Sendo que T_{cr} representa a energia cinética devido corpo rígido e T_{ap} a energia cinética do apêndice e L o comprimento do apêndice.

Inserindo a equação 3.10 em 3.13 e o resultado em 3.11, tem-se uma nova expressão para a energia cinética, dada em termos do deslocamento elástico $y(t,x)$.

$$T = \frac{1}{2} \hat{J} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{y}^2 dx + \dot{\theta} \frac{1}{2} \int_0^L \rho y(r+x) dx \quad (3.14)$$

$$\hat{J} = J_{cr} + \int_0^L \rho (r+x)^2 dx \quad (3.15)$$

Uma vez encontrada a expressão para a energia cinética, resta deduzir a energia potencial, para que se possa utilizar a abordagem Lagrangiana. Portanto, de acordo com o modelo Euler- Bernoulli, esta expressão será dada por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(y''(t,x))^2 dx \quad (3.16)$$

Utilizando o método dos modos assumidos, os modos elásticos são modelados como:

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^N q_j(t)\phi_j(x) \quad 0 < x < L \quad (3.17)$$

onde:

$q_j(t)$: j-ésima coordenada generalizada ;

$\phi_j(x)$: função de forma escolhida;

N: números de modos.

Deve-se então assumir uma função de forma que represente o comportamento espacial do apêndice. Por isso adota-se a seguinte função de forma:

$$\phi_j(x) = 1 - \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{j+1}\left(\frac{j\pi x}{L}\right)^2 \quad (3.18)$$

que representa muito bem uma haste flexível como visto em Junkins e Kim (1993).

Esta função além de satisfazer as condições de contorno geométricas, que é um requisito necessário a uma função de forma, satisfaz também as condições de contorno físicas.

Substituindo as equações para os deslocamentos dos modos elásticos, dados pela equação 3.17, nas equações da energia cinética e potencial, equação 3.14 e 3.16, respectivamente tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \dot{q}_j^2(t) \int_0^L \rho \phi_j(x) q_k(x) dx + \dot{\theta} \sum_{j=1}^N \dot{q}_j^2(t) \int_0^L \rho(r+x) \phi_j(x) dx \quad (3.19)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \dot{q}_j^2(t) \int_0^L EI \phi_j''(x) \phi_k''(x) dx \quad (3.20)$$

que fornecem a energia cinética e a energia potencial em função dos modos elásticos para este caso específico.

A equação de Lagrange pode ser escrita para este caso em particular como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{ds_i} \right) - \frac{dT}{ds_i} + \frac{dV}{ds_i} = F_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

onde:

F: força generalizada

s_i: i-ésimo elemento do vetor de estados (**s**).

A força generalizada é dada através do trabalho virtual. O trabalho é dado por:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} u d\theta \quad (3.22)$$

logo:

$$dW = u d\theta \quad (3.23)$$

Resolvendo a equação de Lagrange para cada coordenada generalizada, resulta em:

$$2\hat{J}\ddot{\theta} + \sum_{j=1}^N \ddot{q}_j \int_0^L \rho(r+x)\phi_j(x)dx = u \quad (3.24)$$

$$\sum_{j=1}^N \ddot{q}_j(t) \int_0^L \rho\phi_j(x)\phi_k(x)dx + \ddot{\theta} \sum_{j=1}^N \int_0^L \rho(r+x) + \sum_{j=1}^N q_j(t) \int_0^L EI\phi_j''(x)\phi_k''(x)dx = 0 \quad (3.25)$$

Que pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \hat{J} & M_{\theta q}^T \\ M_{\theta q} & M_{qq} \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} x = Du \quad (3.26)$$

onde:

$$[M_{\theta q}]_j = \int_0^L \rho(r+x)\phi_j(x)dx \quad (3.27)$$

$$[M_{qq}]_{jk} = \int_0^L \rho\phi_j(x)\phi_k(x)dx \quad (3.28)$$

$$[K_{qq}]_k = \int_0^L EI\phi_j''(x)\phi_k''(x)dx \quad (3.29)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A equação 3.26 pode ser escrita como:

$$M\ddot{x} + Kx = Du \quad (3.31)$$

onde M é conhecida como a matriz massa e K a matriz de rigidez.

A entrada de controle u para o caso do motor DC, é dada por:

$$u = \frac{T_m - B_{eq}\dot{\theta}}{R_m} \quad (3.32)$$

Onde B_{eq} é o amortecimento viscoso e T_m é o torque do motor, dado por:

$$T_m = \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3.33)$$

Definindo a constante C_m :

$$C_m = \frac{\eta_m \eta_g K_T K_g}{R_m} \quad (3.34)$$

Então, podemos escrever o torque u como:

$$u = C_m V - (C_m K_g K_m + B_{eq}) \dot{\theta} \quad (3.35)$$

Substituindo a equação 3.33 em 3.29 e fazendo as devidas simplificações, obtemos a equação diferencial que representa o sistema constituído pelo motor ligado à haste flexível, dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{J} & M_{\theta q}^T \\ M_{\theta q} & M_{qq} \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} -C_m K_g + B_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} C_m \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (3.36)$$

ou, de forma simplificada:

$$M \ddot{x} + N \dot{x} + Kx = Du_v \quad (3.37)$$

Onde \bar{u} é a tensão aplicada diretamente ao motor.

Para realizarmos as simulações numéricas no computador, é desejado que a equação diferencial acima seja escrita na forma de espaço de estados, ou seja na forma:

$$\dot{x} = Ax + B \quad (3.38)$$

$$y = Cx \quad (3.39)$$

Assim faz-se a seguinte transformação de estados:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

que aplicado na equação 3.35, resulta na equação de estados:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}N \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ +M^{-1}D \end{bmatrix} \bar{u} \quad (3.41)$$

Para que a saída y seja dada pelo deslocamento e velocidade angulares do corpo rígido θ , assim como o deslocamento flexível da ponta da haste α , a matriz C é feita como:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \bar{0}_n & 0 & \bar{0}_n \\ 0 & \frac{\Phi(L)}{L} & 0 & \frac{\Phi(L)}{L} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Onde L é o comprimento da haste, $\bar{0}_n$ é um vetor linha nulo com dimensões $(1 \times n)$, sendo n o número de modos considerados e Φ é um vetor com n funções de forma de acordo com a equação 3.18.

Assim, a equação diferencial dada pela equação 3.41, constitui o modelo obtido pelo método dos modos assumidos, que será investigado através de simulações e no experimento.

4. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

Para a aplicação do LQR é necessário que todos os estados do sistema encontrem-se disponíveis para a medição direta. Assim, nesta seção, considera-se que estes estados são medidos e seus valores são realimentados na malha de controle.

No projeto do controlador LQR são especificadas matrizes pesos dadas por Q e R, responsáveis por ponderar a ação do controlador sobre os estados e a entrada de controle (erro), respectivamente (Seção 2.2).

As simulações foram feitas no software MATLAB, com a intenção de estudar o sistema de controle da estrutura rígida-flexível da QUANSER, cuja dinâmica foi estudada no capítulo anterior, e avaliar qual modelo apresenta a melhor resposta dinâmica ao controlador LQR.

4.1 Projeto com o LQR para o modelo massa-mola

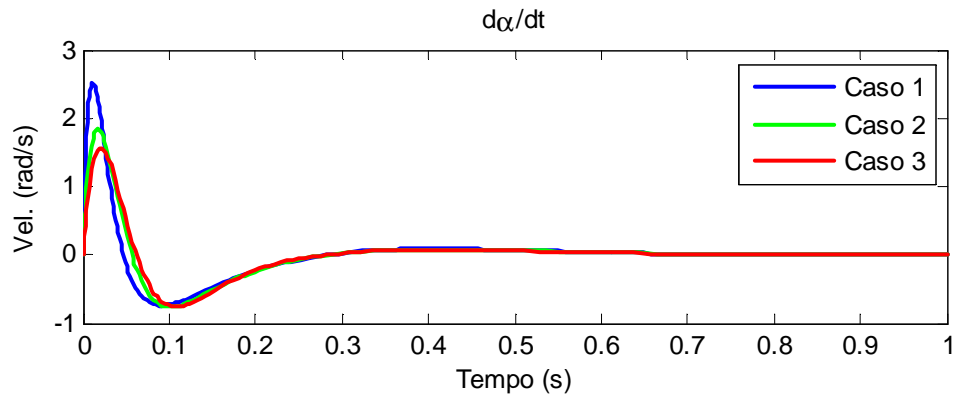
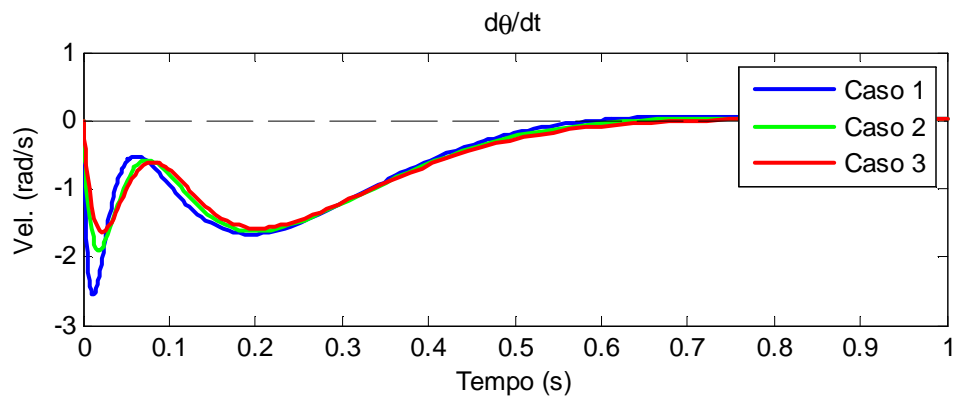
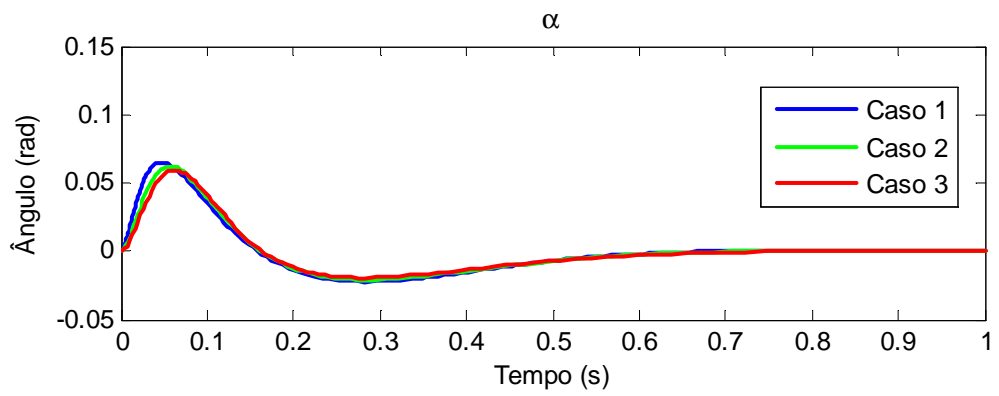
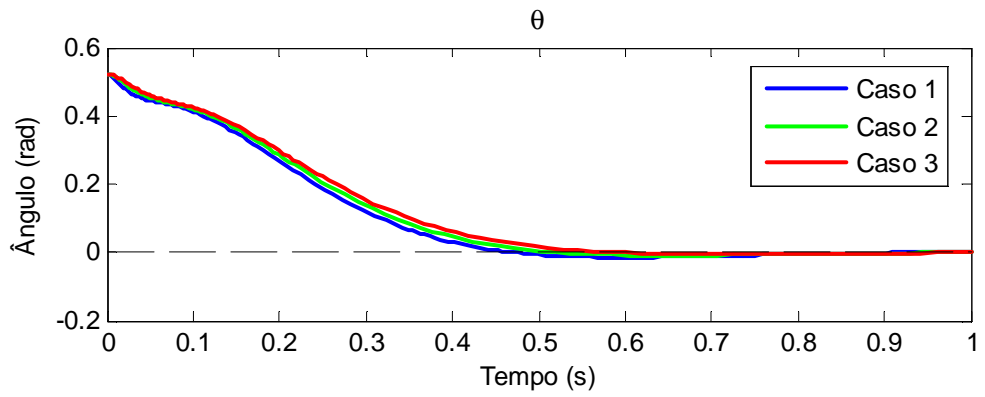
4.1.1 Estudo da variação dos parâmetros Q e R

A partir da matriz de representação de estados 2.14, realizamos diversas simulações, com a finalidade de observar a influência da variação dos pesos dados por Q e R (controlador LQR), na ação de controle do modelo do tipo massa mola.

Inicialmente, mantivemos o valor de Q constante e alternamos os valores de R de acordo com a tabela 1. As simulações realizadas estão ilustradas na fig (2).

Tabela 1- Pesos atribuídos a R para a simulação da fig 2

Caso 1	R = 1
Caso 2	R = 5
Caso 3	R = 10



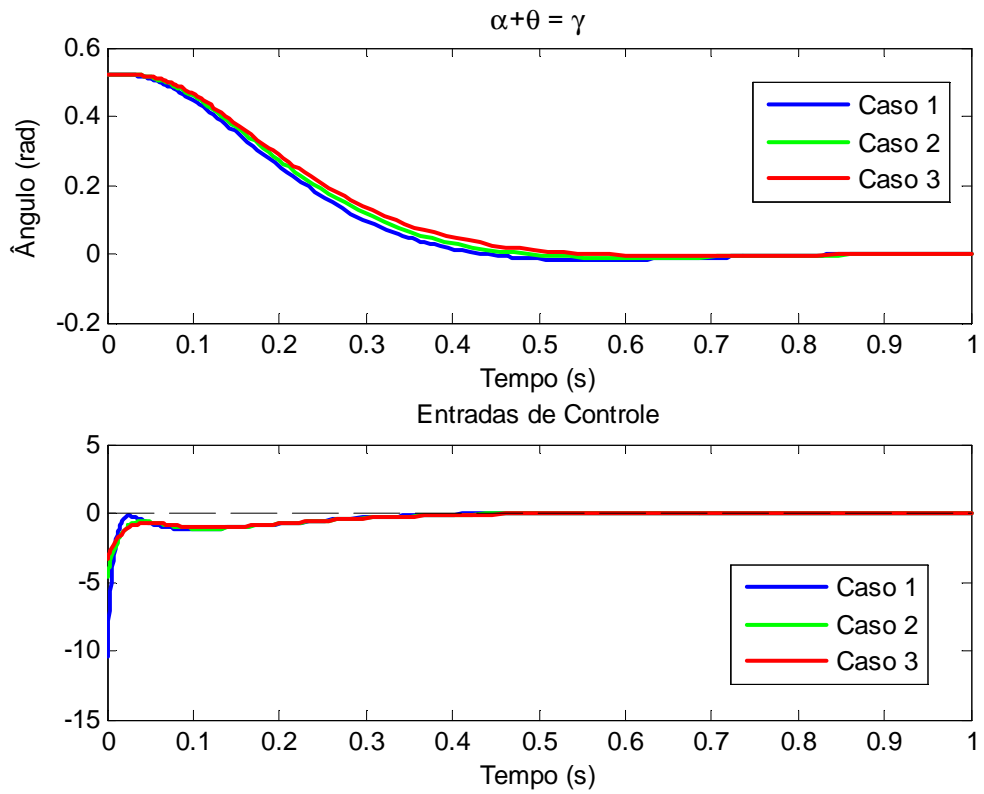


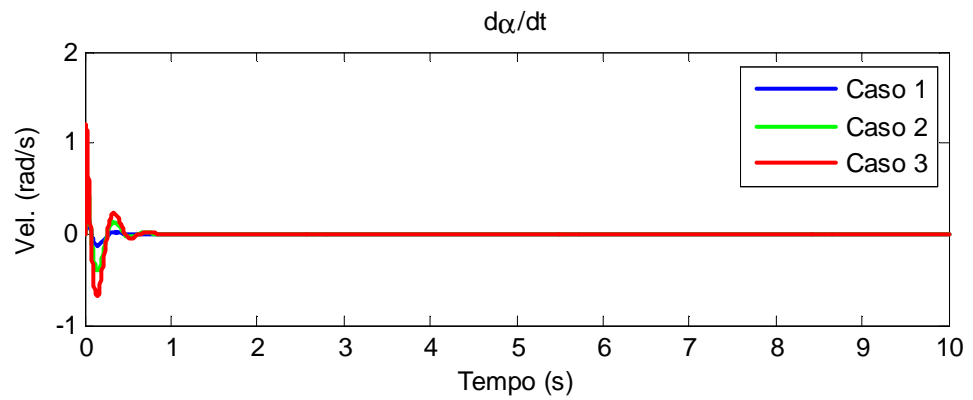
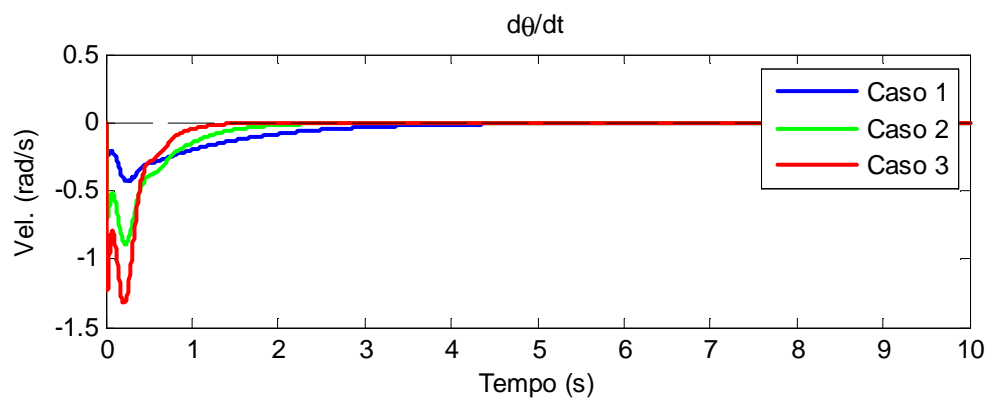
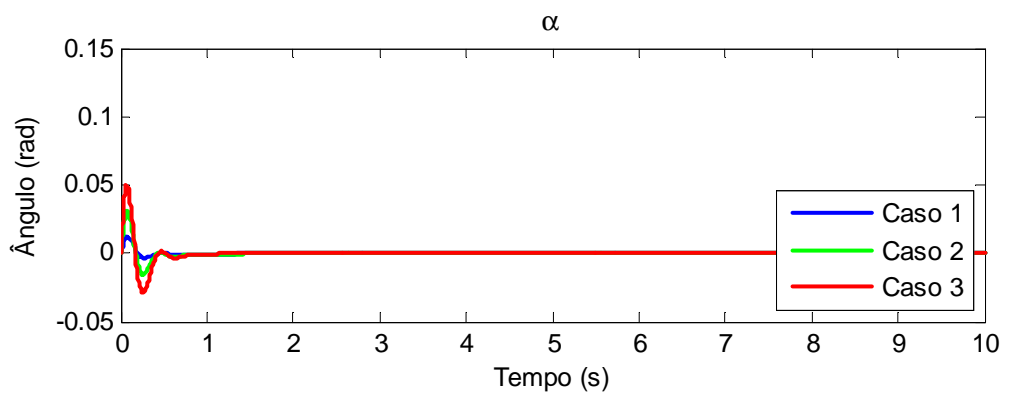
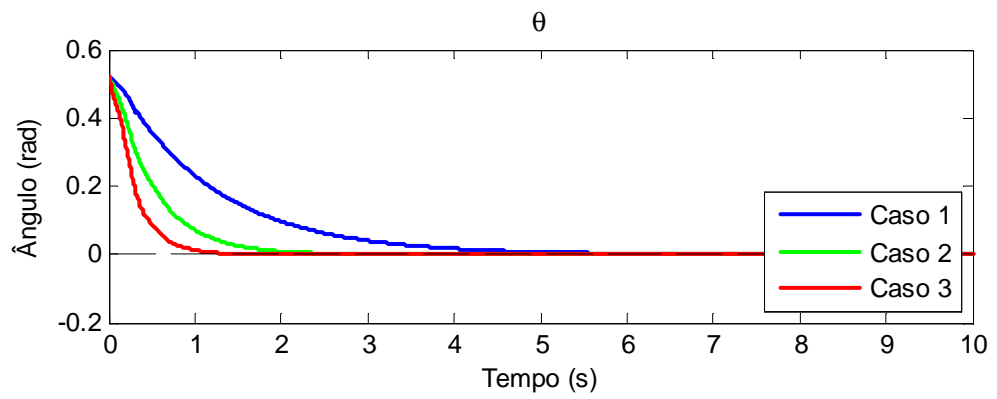
Fig 2 – Resposta dinâmica para os 3 casos mencionados na tabela 1 para atribuição ao parâmetro R quando Q é mantido constante.

Notou-se que quanto maior o valor de R , menor é a velocidade de resposta do sistema e menos energia é utilizada para o controle, realçando que nestas simulações Q foi mantido constante.

Em seguida, mantivemos o valor de R constante e alternamos o valor de Q de acordo com a tabela 2. As simulações realizadas estão ilustradas na fig (3).

Tabela 2 – Pesos atribuídos a Q para a simulação da fig 3

Caso 1	$Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1])$
Caso 2	$Q = \text{diag}([10 \ 10 \ 2 \ 1])$
Caso 3	$Q = \text{diag}([50 \ 100 \ 3 \ 2])$



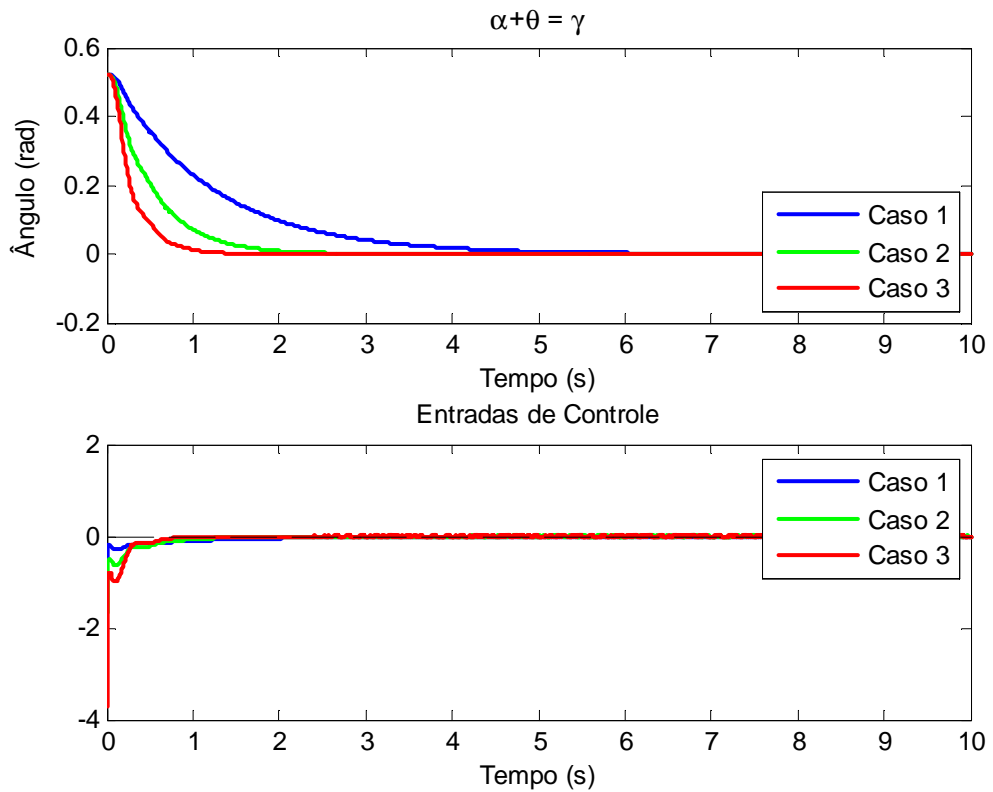


Fig 3 – Resposta dinâmica para os 3 casos mencionados na tabela 2 para atribuição ao parâmetro Q quando R é mantido constante.

Notou-se que quanto maior o valor de Q , mais rápida é a resposta do sistema e conseqüentemente maior a energia utilizada.

Observou-se a dualidade existente entre os parâmetros Q e R (aumentar Q corresponde a diminuir R) e que o fator relevante no LQR é a razão entre Q e R .

Através de simulações comparativas chega-se aos melhores valores para atribuição aos parâmetros Q e R para o projeto do sistema de controle.

Como no modelo utilizado há somente uma entrada de controle versus quatro estados a serem controlados, optou-se por manter o peso R constante enquanto trabalha-se somente com o ajuste de Q . Assim, durante este trabalho, R é assumido como:

$$R = 1 \quad (4.1)$$

Encontra-se como melhor valor avaliado para Q:

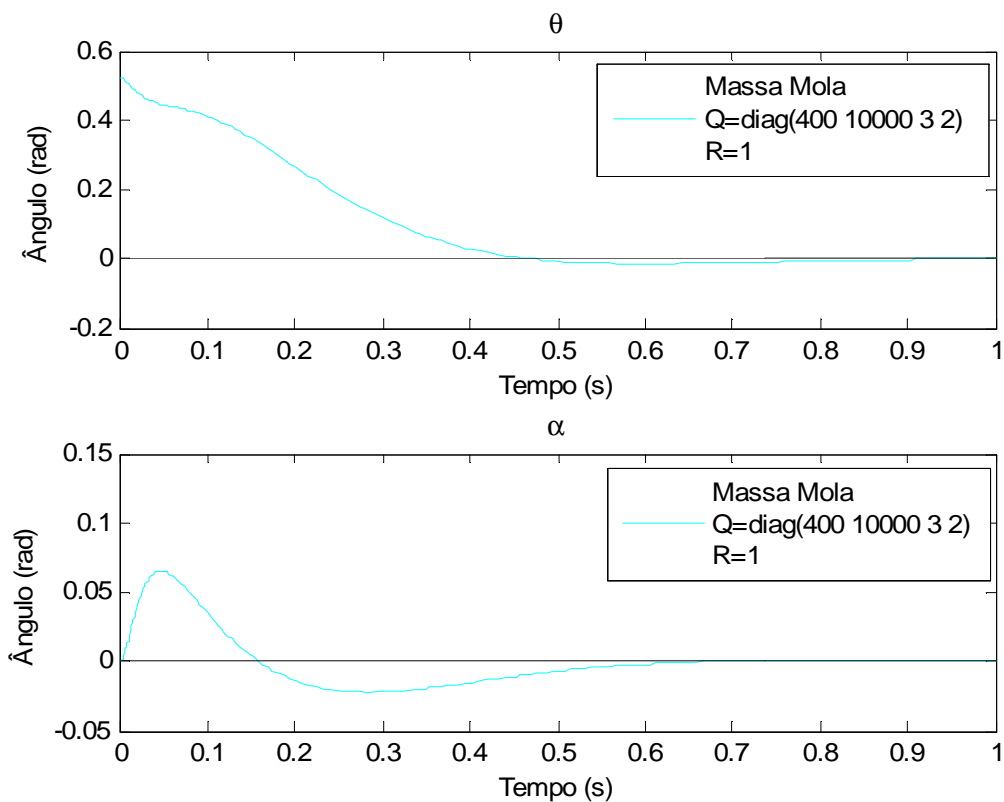
$$Q = \text{diag}[400 \ 10000 \ 3 \ 2] \quad (4.2)$$

tendo em vista que este valor apresentou o menor deslocamento flexível e uma porcentagem de “overshoot” aceitável (menor que 5%).

Adota-se como condição inicial:

$$\theta = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad} \quad (4.3)$$

Com a adoção dos valores para os parâmetros Q e R 4.2 e 4.1 respectivamente, chega-se a um controlador capaz de atenuar os deslocamentos flexíveis e seguir uma referência imposta para o deslocamento angular do corpo rígido. As simulações com estes parâmetros estão ilustradas na fig 4.



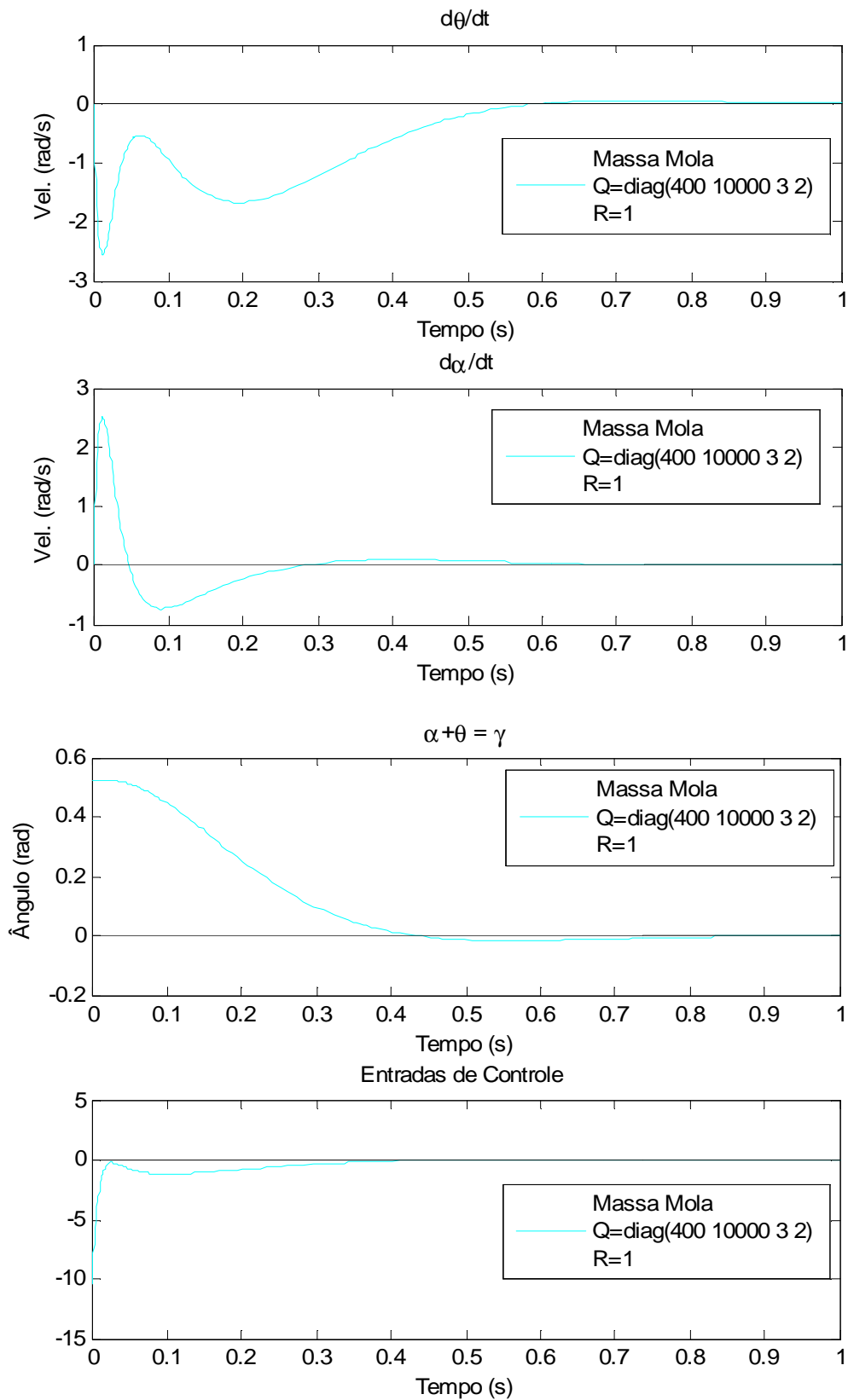


Fig 4 – Resposta dinâmica ao controlador LQR para o melhor caso Q e R encontrado experimentalmente

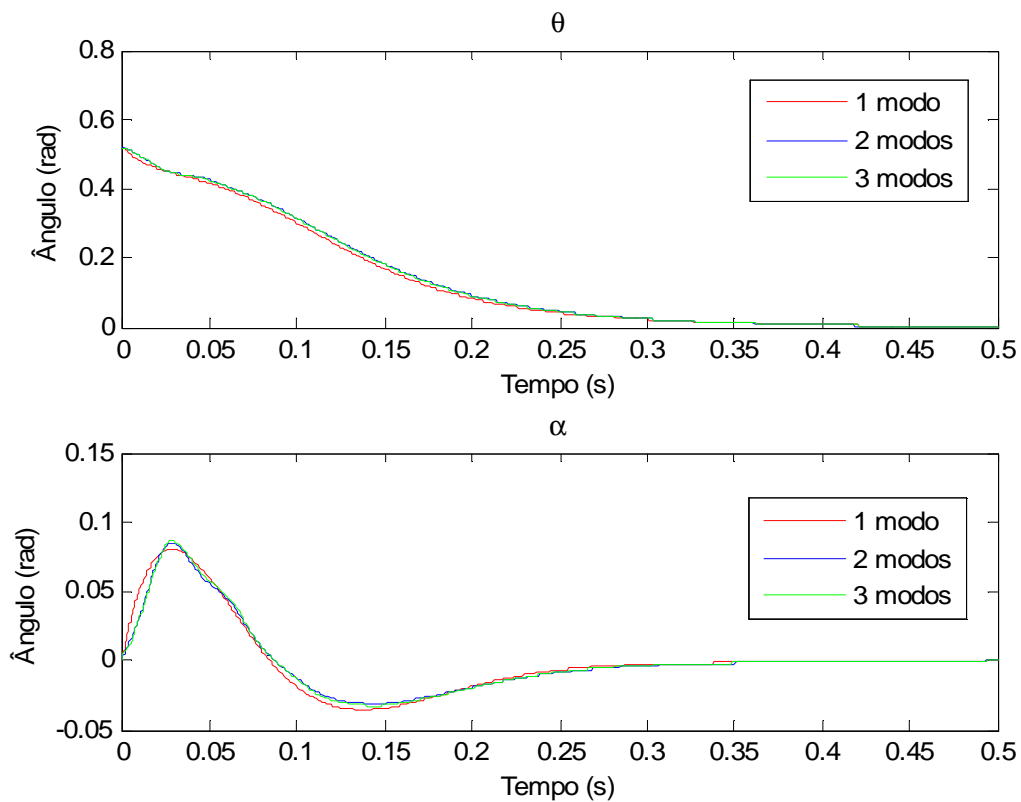
4.2 Projeto do LQR utilizando o modelo dos modos assumidos

Nesta seção projeta-se um controlador LQR utilizando-se o modelo dos modos assumidos. Pretende-se atenuar os efeitos da flexão e fazer com que o corpo rígido siga uma referencia arbitraria. Deseja-se observar a resposta dinâmica do sistema a variações de parâmetros como o tamanho, peso e numero de modos de vibração a considerar.

Utiliza-se como parâmetros para Q e R os valores mencionados em 4.2 e 4.1 respectivamente e a condição inicial 4.3.

4.2.1 Resposta ao aumento no número de modos de vibração

Observou-se o comportamento do controlador LQR sobre o sistema quando se aumenta o numero de modos de vibração a considerar no modelo dos modos assumidos. Os resultados obtidos através de simulações estão ilustrados a seguir fig(5).



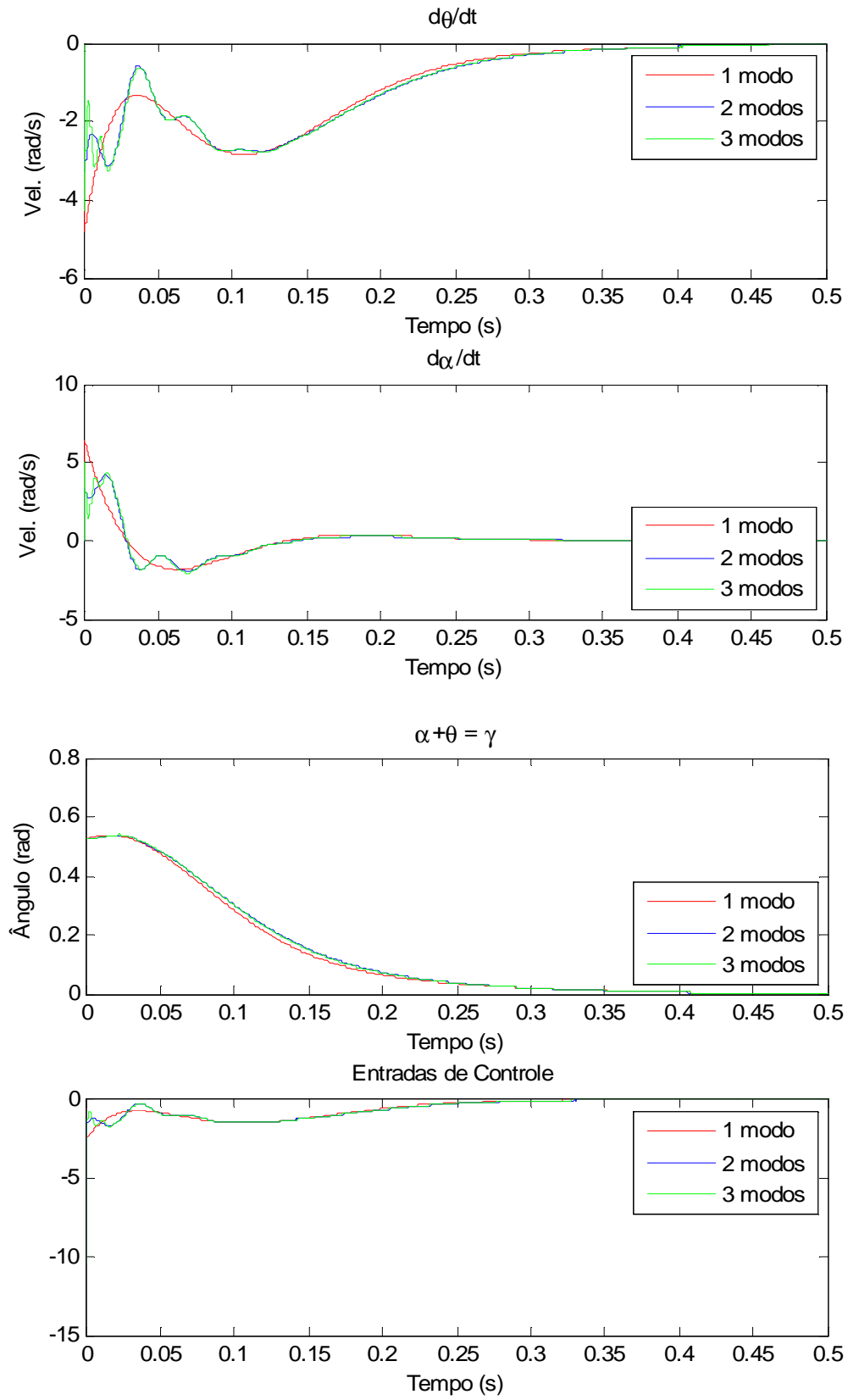


Fig 5 – Resposta dinâmica no tempo levando-se em consideração os três modos de vibração

Por inspeção visual, os valores das entradas observados na fig (5) se assemelham. Analisando-se a velocidade do corpo rígido (θ) e a velocidade do deslocamento flexível do apêndice (α), observa-se que as respostas considerando-se 1, 2 e 3 modos são ligeiramente diferentes. Observamos maiores oscilações nestas com o aumento dos modos. Ao aumentarmos o numero de modos o modelo do sistema se torna mais fiel ao real. Pode-se ressaltar também que determinada condição inicial pode excitar mais determinado modo do que outro.

4.2.2 Localização dos pólos e a variação da freqüência dos modos de vibração com o aumento do numero de modos

Observou-se a variação da localização dos pólos com o aumento do numero de modos de vibração em malha aberta (sem controle) e depois em malha fechada (com controle) .

Os valores de localização dos os pólos sem a aplicação de controle estão na tabela (3). O gráfico representativo de sua localização no plano está na fig (6).

Tabela 3 – Localização dos pólos e a frequencia dos modos de vibração para 1, 2 e 3 modos em malha aberta

Localização dos pólos			Frequencia dos modos de vibração (rad/s)		
1 modo	2 modos	3 modos	1 modo	2 modos	3 modos
1.0e+003 *	1.0e+003 *	1.0e+003 *	1.0e+003 *	1.0e+003 *	1.0e+003 *
0	0	0	0	0	0
-3.2847	-3.7141	-3.8147	0.0343	0.0341	0.0341
0.0004+0.0343i	-0.0007 + 0.2167i	-0.0010 + 0.6068i	0.0343	0.0341	0.0341
-0.0004 -0.0343i	-0.0007 + 0.2167i	-0.001-0.6068i	3.2847	0.2167	0.2154
	-0.0004+0.0341i	-0.0007 + 0.2154i		0.2167	0.2154
	0.0004 - 0.0341i	-0.0007-0.2154i		3.7141	0.6068
		-0.0004+0.0341i			0.6068
		-0.0004 - 0.0341i			3.8147

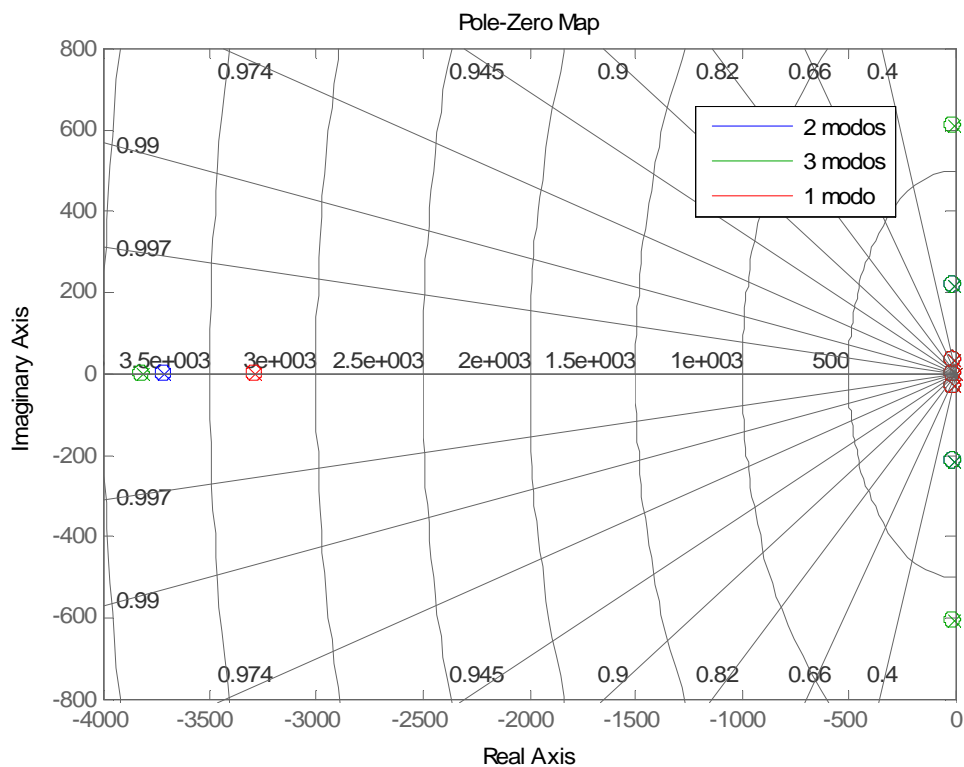


Fig 6 – Localização dos pólos em malha aberta para 1, 2 e 3 modos de vibração

Em malha aberta, o sistema apresenta autovalores localizados na origem do eixo imaginário o que caracteriza a instabilidade deste. Com o aumento do numero de modos de vibração os autovalores assumem uma maior parte imaginaria.

Já os valores obtidos para a localização dos pólos em malha fechada (com a aplicação de controle) estão na tabela (4). O gráfico representativo de sua localização no plano está na fig (7).

Tabela 4 – Localização dos pólos e a frequência dos modos de vibração para 1, 2 e 3 modos em malha aberta.

Localização dos pólos			Frequencia dos modos de vibração (ω_n) (rad/s)		
1 modo	2 modos	3 modos	1 modo	2 modos	3 modos
1.0e+004 *	1.0e+004 *	1.0e+004 *	1.0e+004 *	1.0e+004 *	1.0e+004 *
-1.3105	-2.1382	-1.5758	0.0012	0.0012	0.0012
-0.0012	-0.0033 +0.0177i	-0.0150+0.0685i	0.0030	0.0030	0.0030
-0.0019 +0.0023i	-0.0033 - 0.0177i	- 0.0150-0.0685i	0.0030	0.0030	0.0030
-0.0019+0.0023i	-0.0012	-0.0031 + 0.0180i	1.3105	0.0180	0.0183
	-0.0021 +0.0021i	-0.0031 - 0.0180i		0.0180	0.0183
	-0.0021 - 0.0021i	-0.0012		2.1381	0.0701
		-0.0021 + 0.0021i			0.0701
		-0.0021 - 0.0021i			1.5758

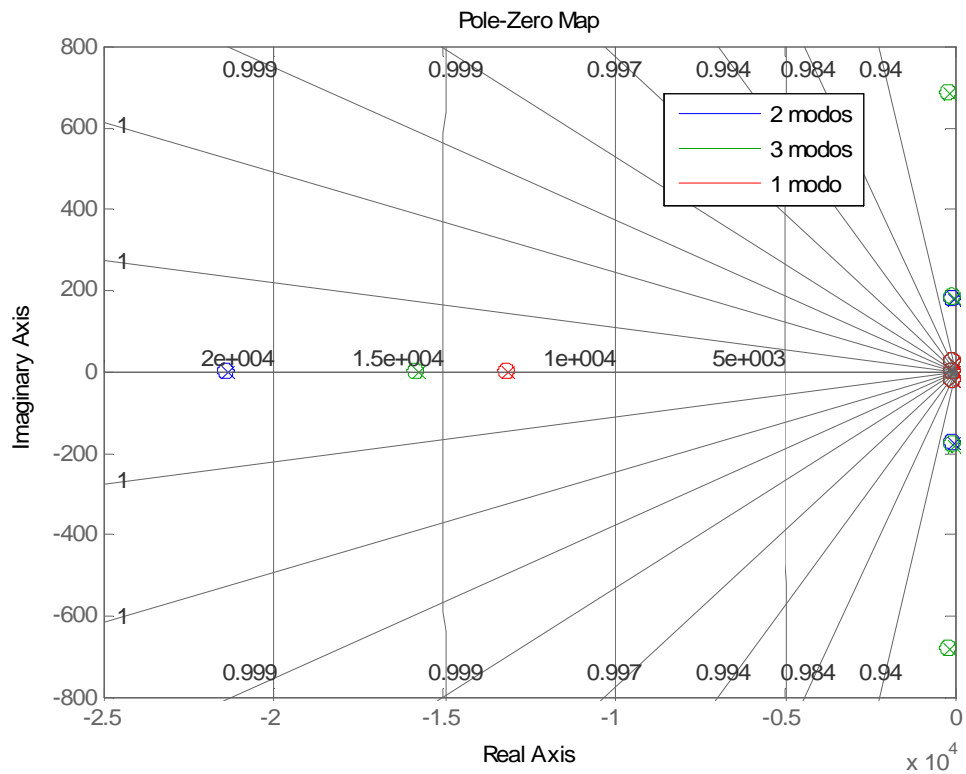


Fig 7 – Localização dos pólos com controle LQR para 1, 2 e 3 modos de vibração da seção 4.2.1.

Em malha fechada e com o aumento do números de modos de vibração, os pólos se deslocam para a esquerda do eixo imaginário e possuem maior parte imaginaria se comparados a localização em malha aberta. A frequência dos modos de vibração ao aplicar-se o controle LQR é reduzida.

4.2.3 Resposta dinâmica a variação no tamanho da viga

Realizaram-se simulações para observar o comportamento do sistema quando é aumentado ou diminuído o tamanho da viga. Os valores utilizados estão na tabela 5.

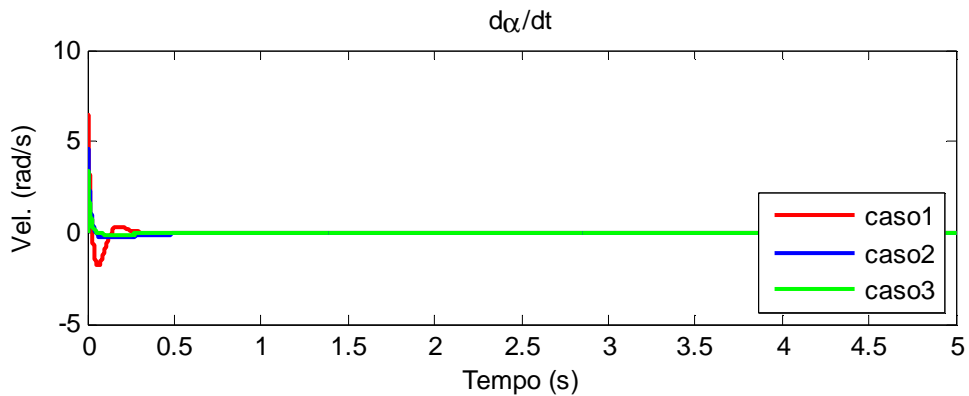
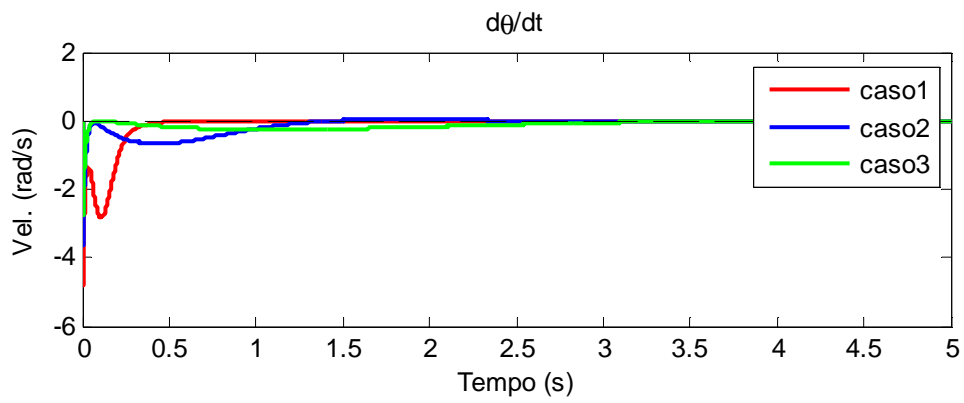
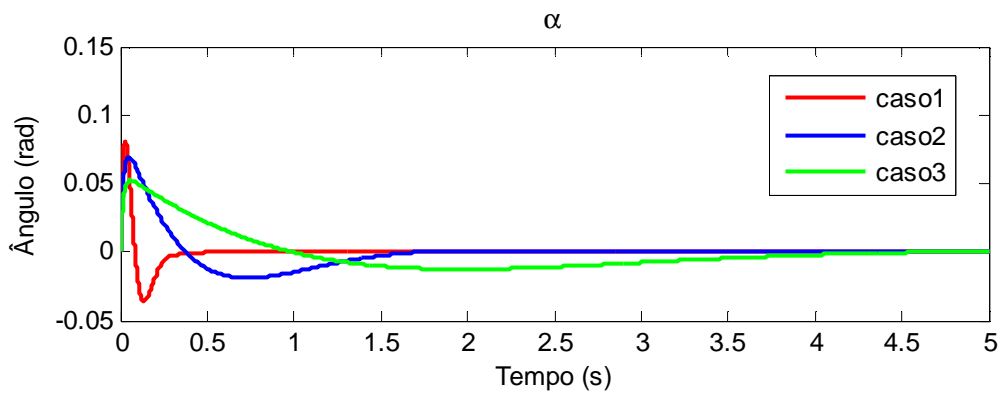
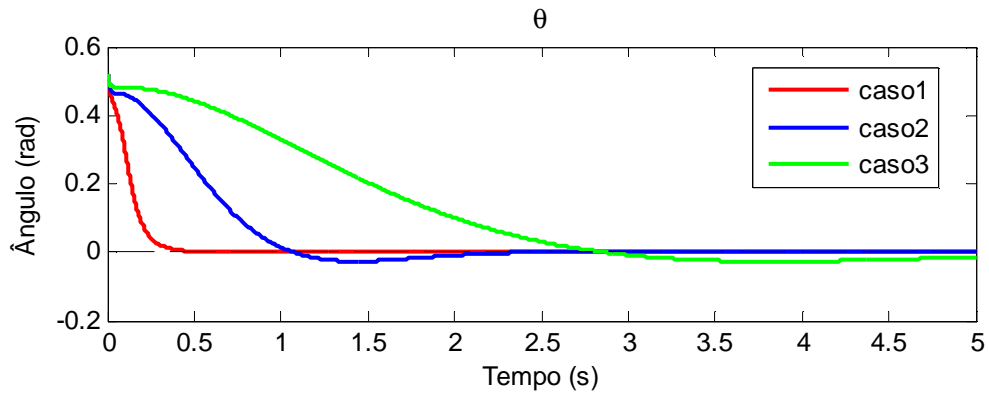
Tabela 5 – Variações no comprimento utilizadas nas simulações

	Comprimento
Caso 1	0.4191 m
Caso 2	0.8382 m
Caso 3	1.2573 m

Obs: O caso 1 corresponde ao tamanho original da viga do equipamento FlexGage e o caso 2 e 3 corresponde ao dobro e ao triplo do comprimento respectivamente.

Simulou-se separadamente para cada caso para 1, 2 e 3 modos de vibração que correspondem as fig 8, 9 e 10.

Considerando-se apenas 1 modo de vibração.



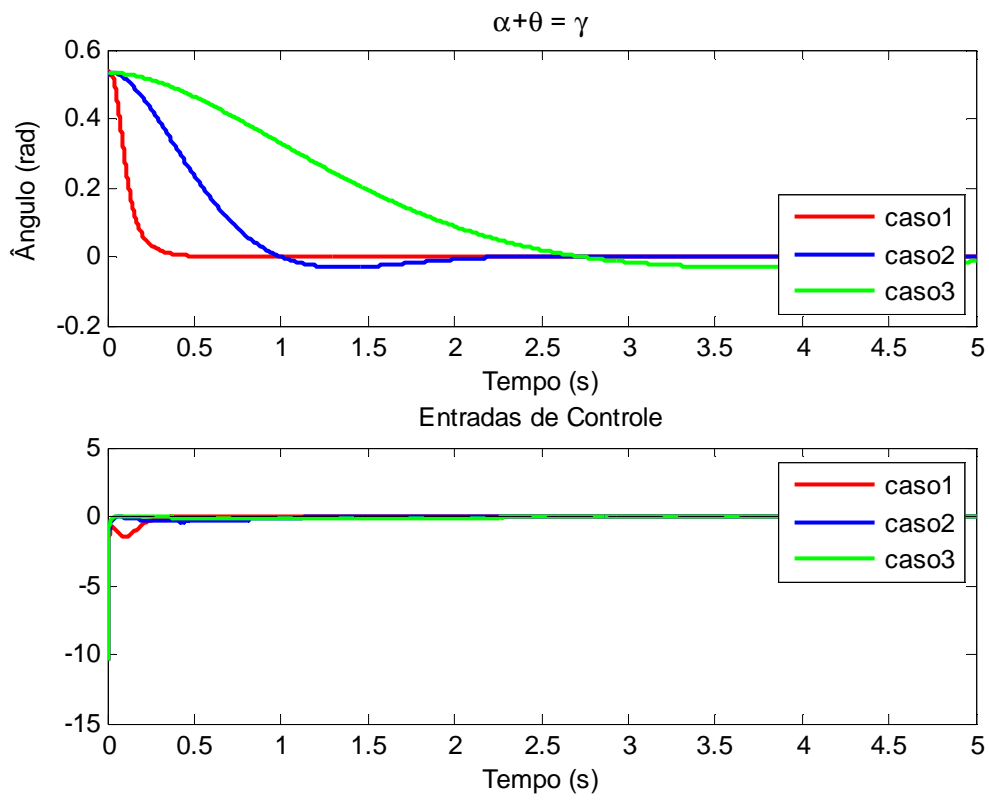
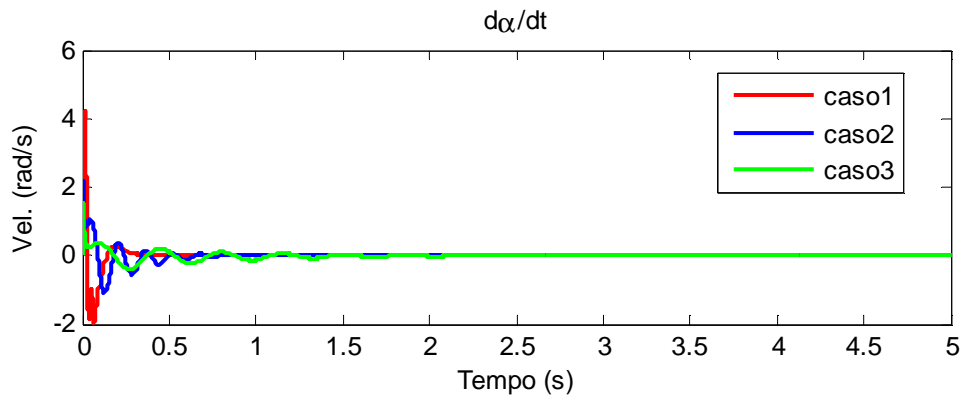
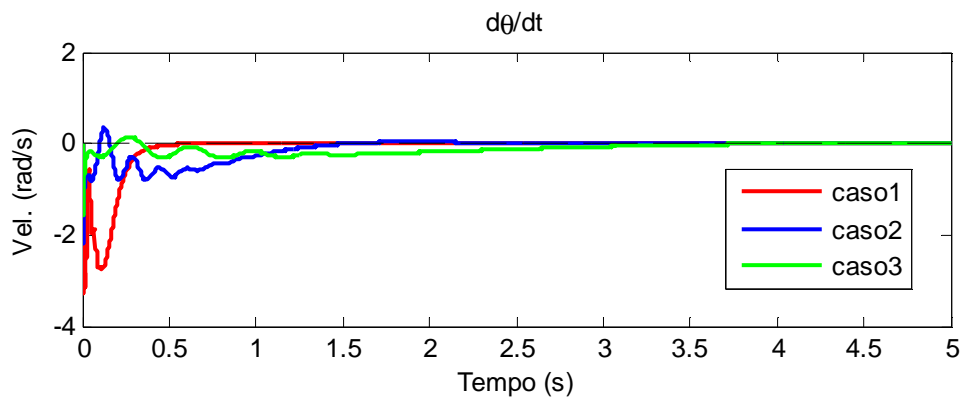
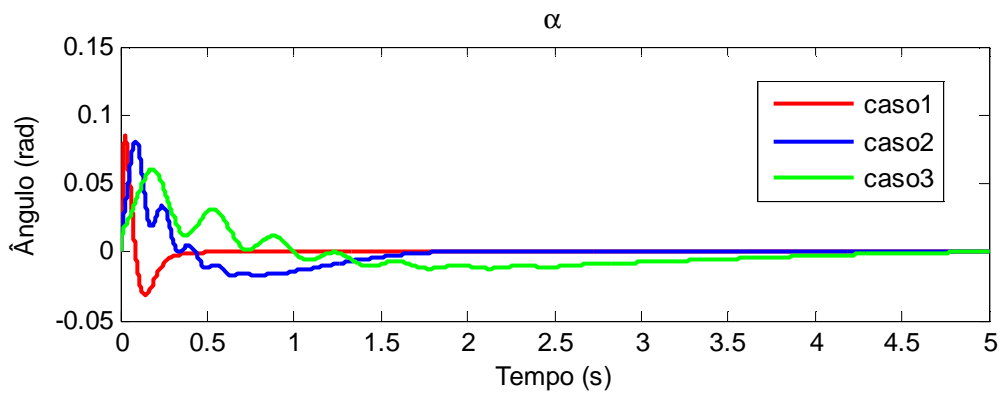
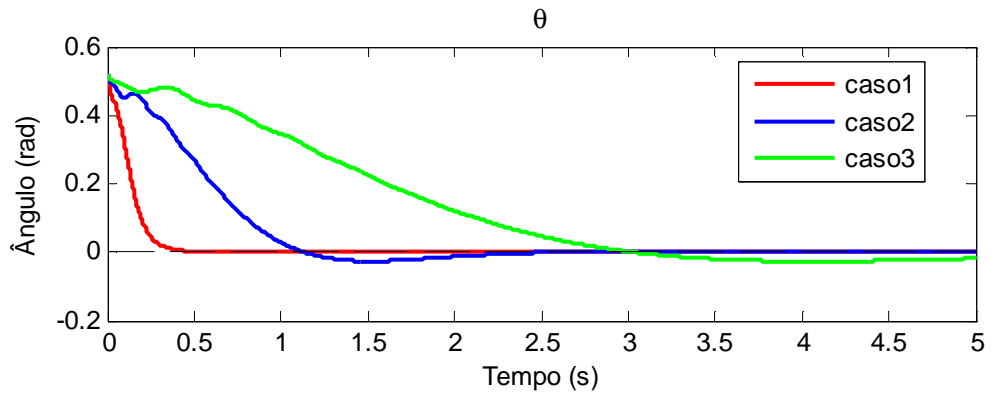


Fig 8- Resposta dinâmica ao aumento do tamanho da viga para os casos da tabela 5 considerando-se apenas 1 modos de vibração.

Considerando-se 2 modos de vibração



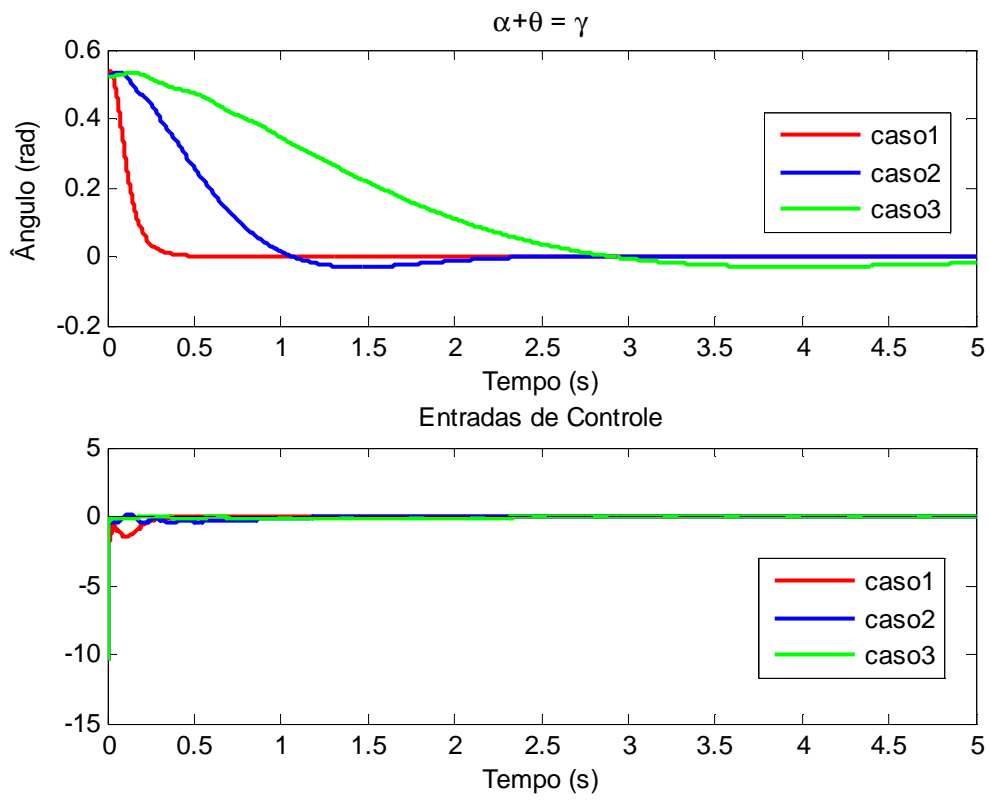
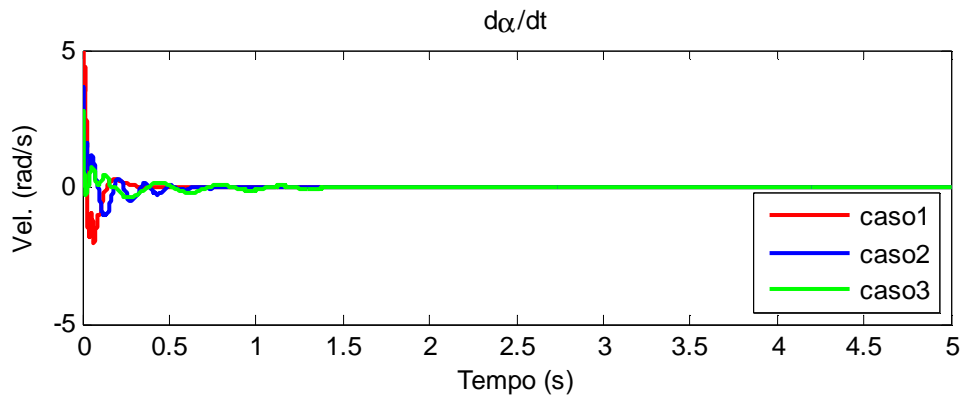
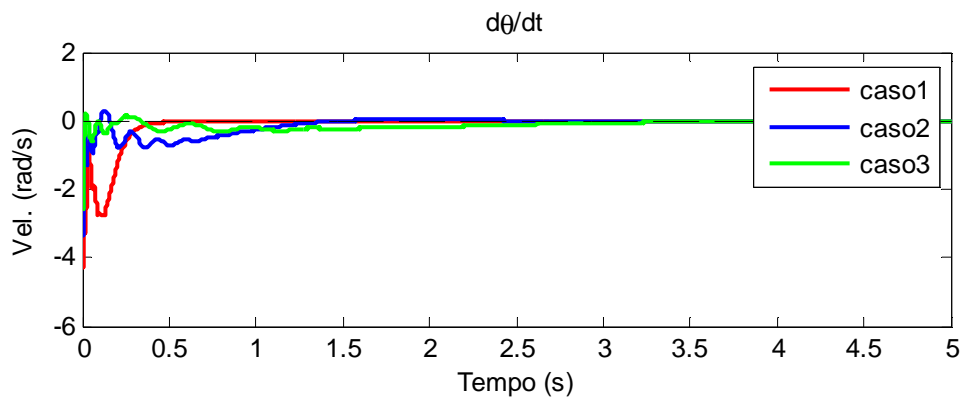
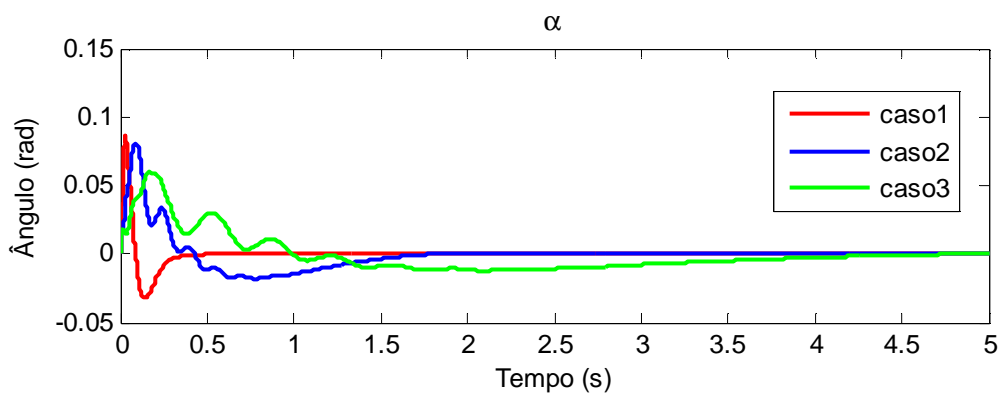
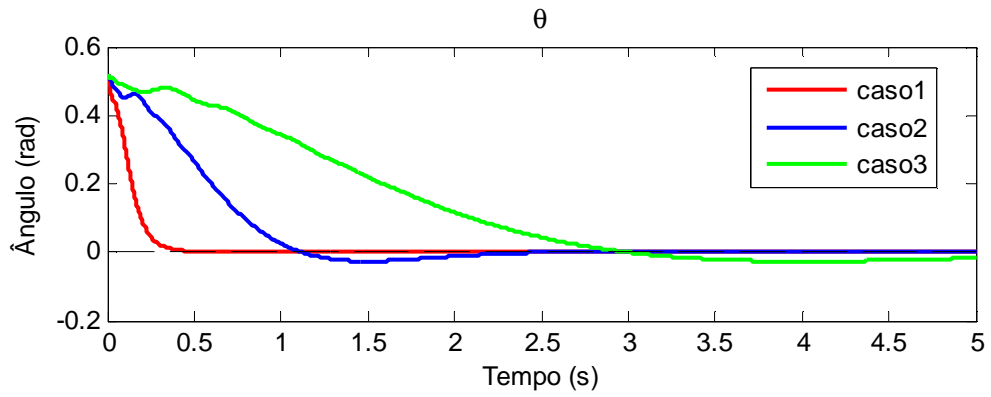


Fig 9 - Resposta dinâmica ao aumento do tamanho da viga para os casos da tabela 5 considerando-se 2 modos de vibração.

Considerando-se 3 modos de vibração



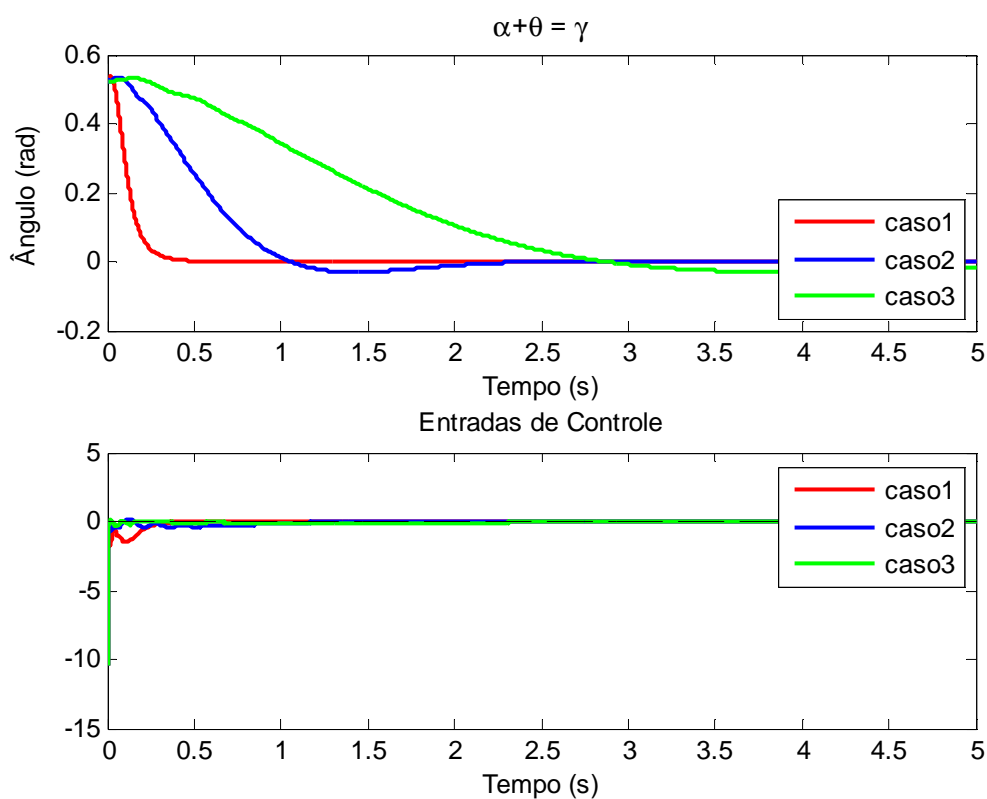


Fig 10 - Resposta dinâmica ao aumento do tamanho da viga para os casos da tabela 5 considerando-se 3 modos de vibração

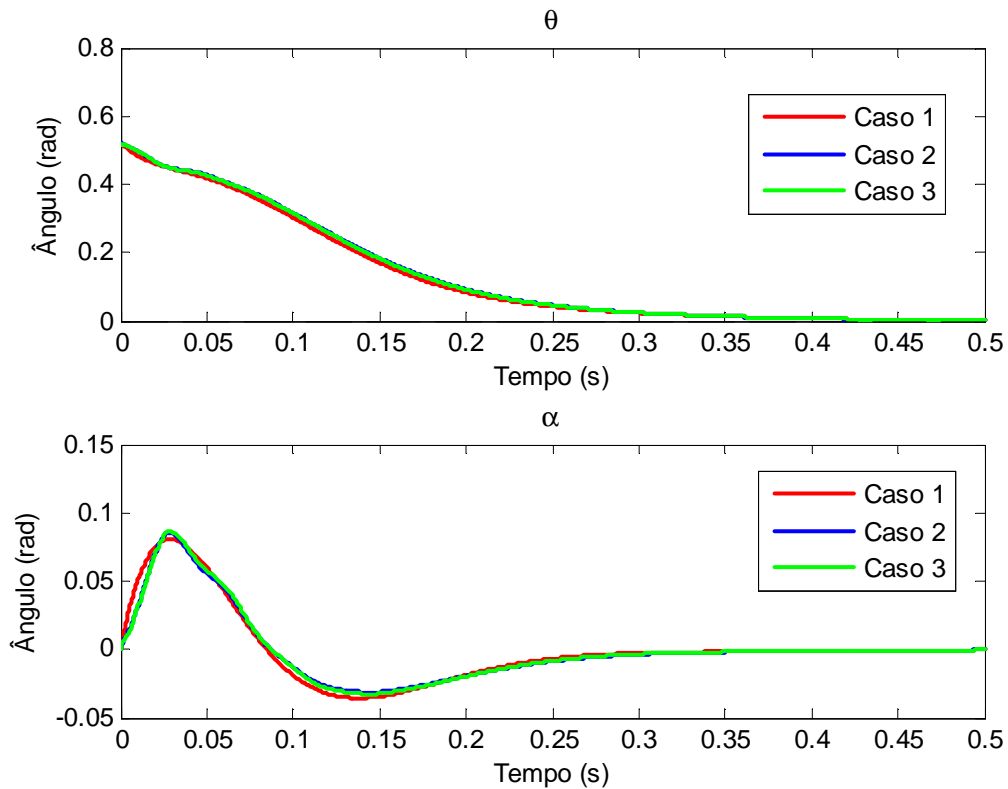
Analisando-se as repostas do sistema para os três casos considerados e com o aumento dos modos de vibração a considerar, nota-se (fig 8, fig9 e fig 10) que quanto menor o tamanho da viga mais efetiva é a ação de controle. Com o aumento do tamanho da viga e conseqüentemente dos modos de vibração podemos observar que o sistema não é totalmente controlado.

4.2.4 Resposta dinâmica ao aumento na massa da viga

Observou-se a resposta dinâmica do sistema ao variarmos a massa da viga e ao aumentarmos o número de modos de vibração. A viga possui massa original de 65 gramas. Nas simulações foram utilizadas os valores para uma massa de 130g (fig 11) e 195g (fig 12) que, correspondem ao dobro e ao triplo da massa original.

Obs: O caso 1 corresponde a 1 modo de vibração, o caso 2 a 2 modos de vibração e o caso 3 a 3 modos de vibração.

Dobro da massa original



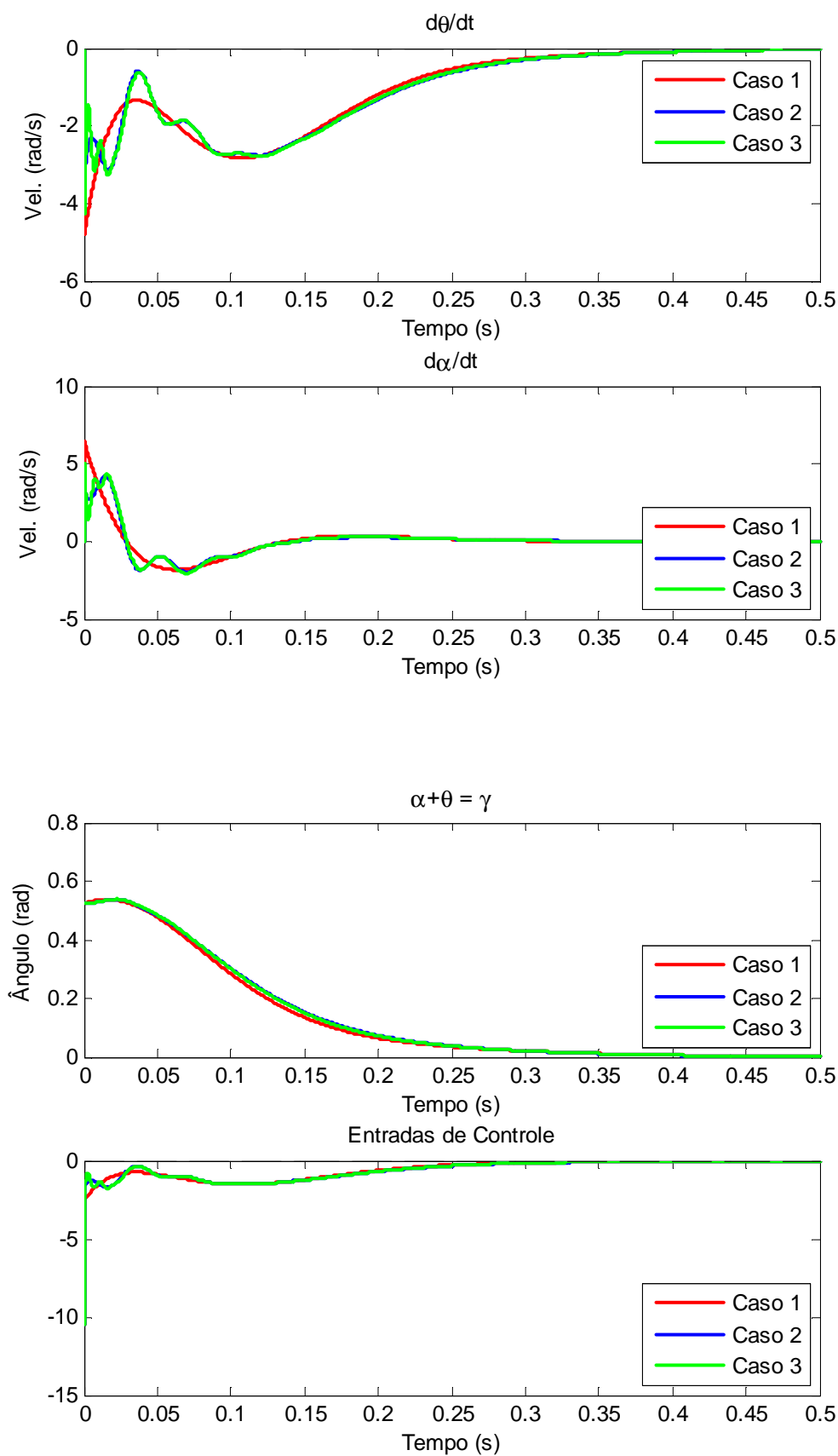
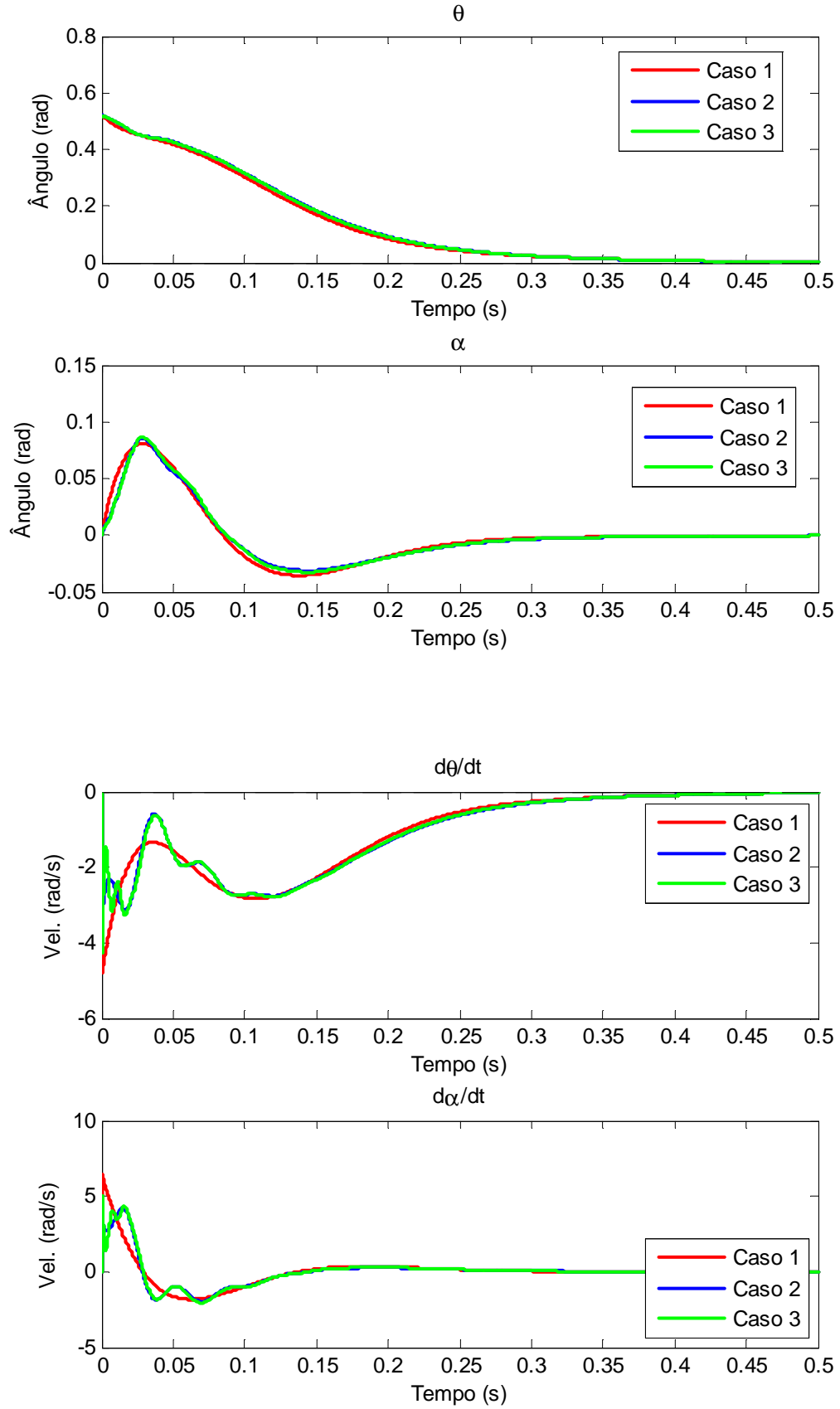


Fig 11 – Resposta dinâmica ao duplicarmos a massa da viga e aumentarmos o número de modos de vibração.

Triplo da massa original



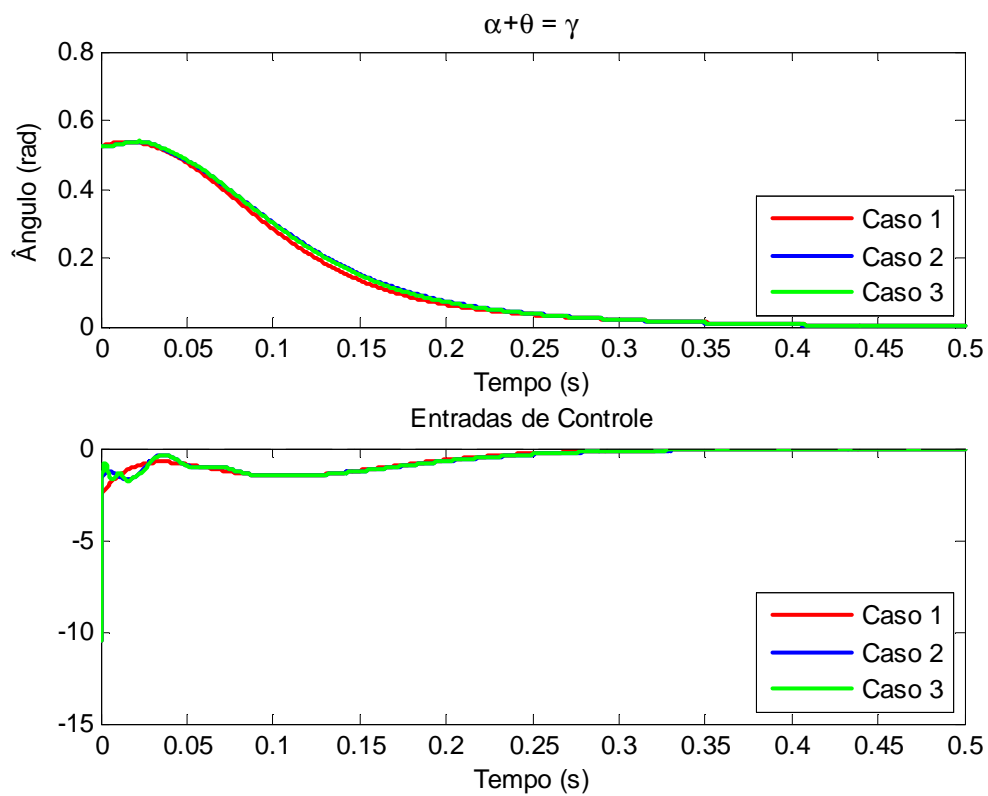


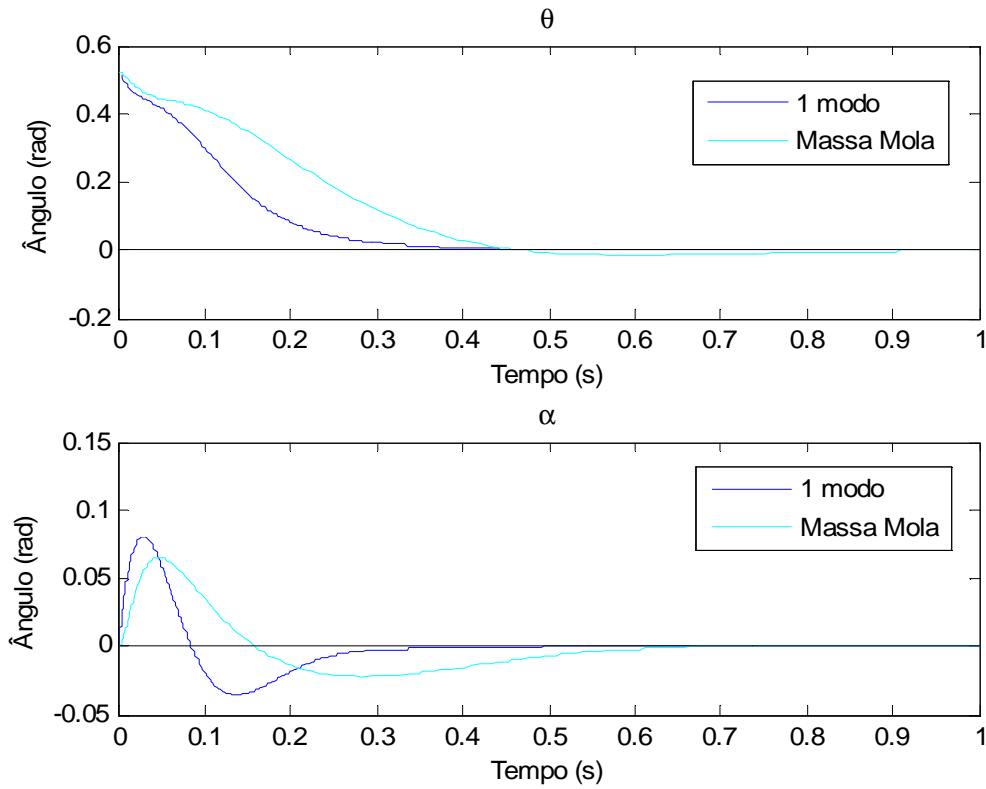
Fig 12 – Resposta dinâmica ao duplicarmos a massa da viga e aumentarmos o número de modos de vibração

Ao aumentarmos a massa da viga, podemos notar que o caso 2 se assemelha ao caso 3 e possivelmente se aumentarmos muito a massa desta todos os casos considerados apresentem a mesma resposta dinâmica. Com o aumento da massa a viga se torna mais rígida, o que faz com que ela vibre menos.

4.3 Comparação entre o método LQR aplicado ao modelo massa mola e o aplicado ao modelo obtido através do método dos modos assumidos.

Para as simulações utilizou-se o mesmo os valores especificados para Q e R por 4.2 e 4.1 e adota-se como condição inicial 4.3.

Observou-se a resposta dinâmica para o modelo dos modos assumidos considerando-se 1 modo de vibração e para o modelo massa mola quanto a aplicação do controlador LQR.



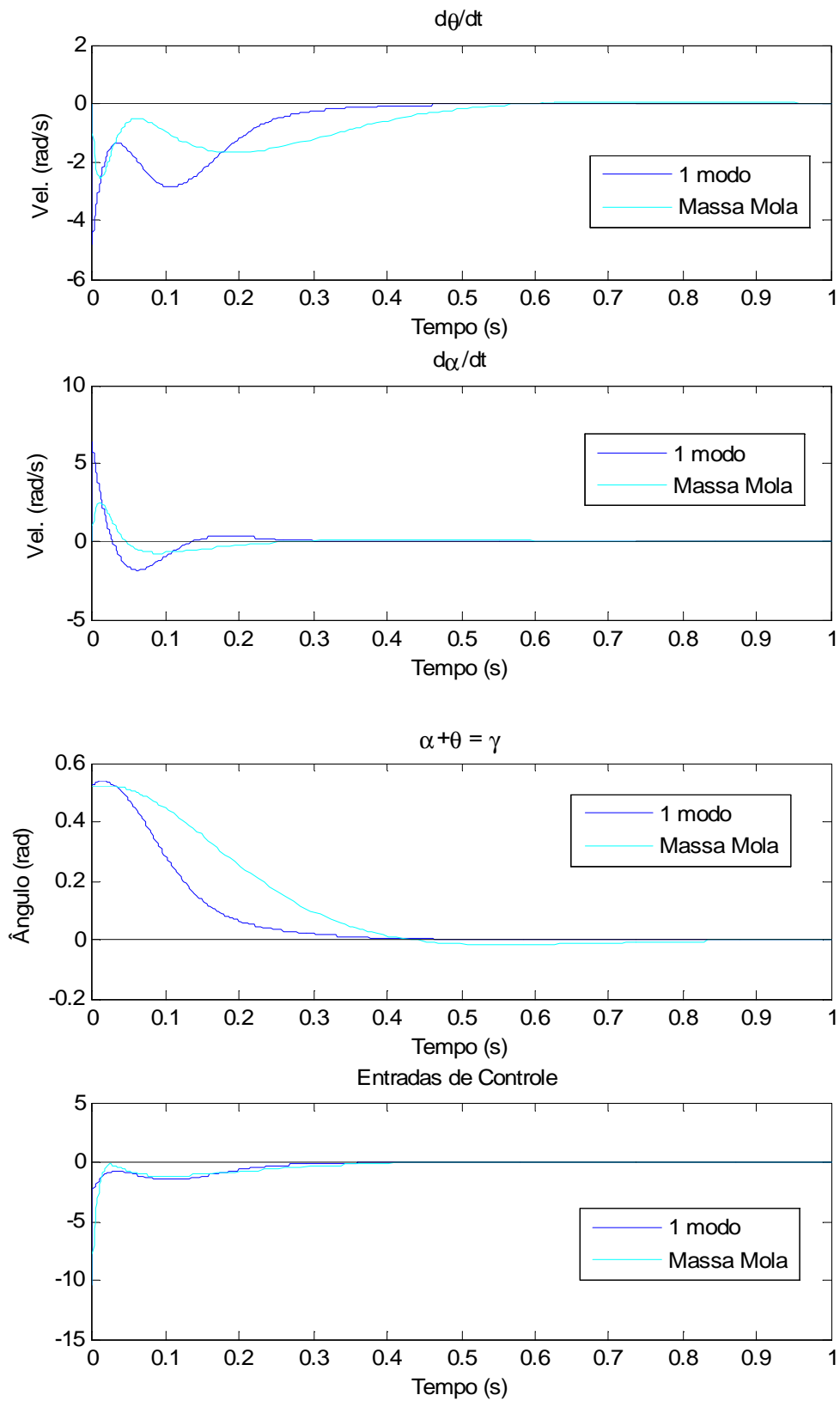


Fig 12 – Resposta dinâmica a aplicação do controlador LQR para 1 modo de vibração do modelo do modos assumidos e para o modelo massa mola.

Podemos observar através da fig(12) que o controlador projetado com o modelo através do método dos modos assumidos apresenta um desempenho melhor do que o modelo massa mola, posto que o critério utilizado para avaliar o desempenho do controlador consiste em fazer com que o sistema seguisse uma referência imposta e ao mesmo tempo amortecesse rapidamente as vibrações remanescentes.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho desenvolveu-se o estudo da dinâmica e do sistema de controle de um satélite rígido flexível. Utilizou-se a metodologia lagrangiana para desenvolver dois modelos da planta do satélite, o qual foi estudado através montagem conhecida como FlexGage da Quanser©R (Quanser, 2009), composta por um apêndice flexível acoplada a um servomotor, que é o atuador do sistema. No primeiro modelo empregou-se uma configuração do tipo massa mola, onde os efeitos da flexibilidade são relacionados ao comportamento da mola. Já o segundo, utiliza o método dos modos assumidos, onde a flexibilidade tem seus efeitos representados por até três modos de vibração. A partir destes modelos, aplica-se a técnica de controle LQR para projetar o controlador do sistema. Verificou-se que o desempenho do controlador para o modelo massa mola é função dos parâmetros Q e R. No estudo do modelo dos modos assumidos, foi possível investigar a influencia da variação dos parâmetros da viga como peso e tamanho na ação do controlador, assim como a sua resposta ao aumento dos numero de modos de vibração. Neste estudo observou-se que o aumento do número de modos de vibração o modelo torna-se mais fiel ao real. O aumento do tamanho da viga faz com que o controle seja menos efetivo e o aumento da massa faz com que o modelo se torne mais rígido, como poder ser observado nas figuras 11 e 12. Além disso, observou-se que o nível de excitação do modelo é função da condição inicial imposta usada na simulação. O critério utilizado para avaliar o desempenho do controlador consistiu em fazer com que o sistema seguisse uma referência imposta e ao mesmo tempo amortecesse rapidamente as vibrações remanescentes. Comparativamente, observou-se que o controlador LQR aplicado ao modelo dos modos assumidos tem melhor desempenho do que, quando o mesmo controlador é aplicado ao modelo massa mola. Acredita-se que este melhor desempenho está relacionado ao fato do modelo dos modos assumidos representar com mais fidelidade à dinâmica do sistema. Confirmando, que uma dinâmica mais realista, resulta em controlares mais robustos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] JUNKINS, J. L.; KIM, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures.** Washington, D.C.: AIAA, 1993.

[2] CRAIG, R. R.; SU, T. J. A review of model reduction methods for structural control design. **Dynamics and Control of Structure in Space**, p. 121-134, 1990.

[3] QUANSER homepage. jan 2009. Disponível em: <<http://www.quanser.com/>> .