



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS PRODUZIDOS POR SISTEMAS BINÁRIOS EM COALESCÊNCIA

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Eduardo da Costa Paul (UNITAU, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: eduardo.paul@gmail.com

Dr. Oswaldo Duarte Miranda (DAS/INPE, Orientador)
E-mail: oswaldo@das.inpe.br

Julho de 2008

SUMÁRIO

RESUMO

RESUMO DO RELATÓRIO PARCIAL

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 – AS ONDAS GRAVITACIONAIS

CAPÍTULO 3 – DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

- 4.1 A taxa de coalescência de sistemas binários em espiralação para a Galáxia
- 4.2 A taxa de coalescência de sistemas binários cosmológicos
- 4.3 O fundo estocástico de ondas gravitacionais
- 4.4 A razão sinal/ruído S/N

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS ALCANÇADOS E CONCLUSÕES

- 5.1 Taxa de coalescência para a Galáxia
- 5.2 Taxa de formação cósmica e a razão sinal/ruído

Resumo

O objetivo deste trabalho foi estudar a assinatura de fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados por sistemas binários compactos, constituídos por estrelas de nêutrons, em espiralação. Para a formulação teórica do problema, nós definimos, em primeiro lugar, a taxa de coalescência de estrelas de nêutrons em sistemas binários. Em seguida, esse formalismo foi expandido para o caso de sistemas binários cosmológicos. A partir da taxa de coalescência de sistemas binários cosmológicos, nós calculamos as características, em termos de amplitude adimensional, densidade de energia, e frequência observada, do fundo estocástico gerado e a razão sinal/ruído, que representa a detectabilidade do sinal. Para esses cálculos, nós desenvolvemos dois programas, escritos em linguagem FORTRAN: o primeiro com o objetivo de obter a taxa de coalescência de sistemas binários, e o segundo com o intuito de obter as características do fundo estocástico em ondas gravitacionais. A partir desses resultados, nós geramos gráficos para a análise do comportamento dessas funções, variando parâmetros como o expoente da função de massa inicial, o tempo mínimo necessário para a coalescência de um dado sistema binário e a escala de tempo para a formação estelar. As razões sinal/ruído obtidas para o detector LIGO III dão uma perspectiva positiva para algumas das combinações dos parâmetros de entrada dos nossos modelos, chegando a um máximo de cerca de 2,36. Esse resultado mostra que existe uma possibilidade real de detecção do fundo estocástico em ondas gravitacionais estudado a partir da correlação dos sinais de saída de dois interferômetros do tipo LIGO III.

Resumo do relatório parcial

A primeira parte desse projeto foi basicamente constituída por um período de estudo da teoria envolvida. Isso foi feito com o intuito de se desenvolver o conhecimento analítico necessário para a realização do projeto. Para isso, estudaram-se os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral, e suas previsões a respeito das ondas gravitacionais. Em seguida, nós iniciamos a formulação do problema da taxa de coalescência de sistemas binários, a partir do formalismo proposto por de Freitas Pacheco em 1997.

1 - Introdução

A Teoria da Relatividade Geral prevê a existência de ondas gravitacionais como sendo perturbações da métrica do espaço-tempo que se deslocam com a velocidade da luz. Tais ondas podem ser geradas pelos mais diversos eventos astrofísicos, como transições de fase no Universo primordial, a formação das primeiras estrelas do Universo e coalescência de objetos compactos. A detecção direta das ondas gravitacionais é considerada um dos grandes desafios para a física experimental deste século. Existem vários detectores já em operação espalhados pelo mundo, tanto do tipo interferométrico (como o projeto americano LIGO - *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*, e o europeu VIRGO), quanto do tipo massa ressonante (como o projeto Schenberg, liderado pela Divisão de Astrofísica do INPE).

O início da astronomia de ondas gravitacionais certamente produzirá novos e importantes testes para a Teoria da Relatividade Geral e para as teorias alternativas de gravitação no regime de campo forte. Em particular, foi estudada a assinatura (em termos de amplitude e frequência) de fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados por sistemas binários compactos em espiralação. A obtenção das características desses fundos estocásticos configura-se numa importante via de determinação da época exata em que as primeiras estrelas foram formadas no Universo, de forma a colocar alguma luz sobre o instante em que terminou a chamada “era cosmológica das trevas”.

No presente trabalho, foi estudada a coalescência de sistemas binários de estrelas de nêutrons e seus respectivos sinais em ondas gravitacionais, e calculadas as razões sinal/ruído para detectores interferométricos do tipo LIGO.

2 - As ondas gravitacionais

As equações de campo da Relatividade Geral (RG) são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, R é o escalar de Ricci, G é a constante da gravitação universal, c é a velocidade da luz e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento.

O lado esquerdo dessa equação está relacionado com a geometria do espaço-tempo, representando a sua curvatura, enquanto o lado direito contém o tensor energia-momento e representa as fontes físicas de gravitação. Essas equações (16, no total) não são lineares, o que muitas vezes torna os cálculos na teoria da RG extremamente complexos. Além disso, a não linearidade das equações também implica que o princípio de superposição não é válido.

Considerando-se campos gravitacionais fracos em locais suficientemente distantes de fontes, a métrica do espaço-tempo pode ser aproximada como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação muito pequena. Nesse regime de campo fraco, as equações de campo podem ser reduzidas a uma forma simplificada, dada por

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = -16\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3)$$

No vácuo, o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, é nulo, e as equações assumem uma forma ainda mais simples, $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = 0$, que é a forma matemática de uma equação de onda. As suas soluções têm a forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{[ik(z-ct)]} \quad (4)$$

que representa uma onda gravitacional se propagando na direção $+z$ com velocidade c . Essas ondas possuem dois modos de polarização, dados por

$$h_+ = R \left\{ A_+ e^{-i \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]} \right\} \quad (5)$$

e

$$h_\times = R \left\{ A_\times e^{-i \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]} \right\} \quad (6)$$

Nessas equações, toma-se apenas a parte real; A_+ e A_\times são as amplitudes de cada polarização, ω é a frequência da onda e z é uma coordenada espacial. Essas soluções representam uma onda se movendo radialmente para fora da fonte. Os efeitos característicos dessas polarizações podem ser vistos na figura 1. Nessa figura, a onda gravitacional atravessa o plano de um anel de partículas perpendicularmente. A polarização h_+ faz com que o anel seja esticado e comprimido em seu plano. A deformação gerada apresenta um formato de cruz, justificando o nome dado à polarização. A componente h_\times tem um efeito similar, porém rotacionado em 45°.

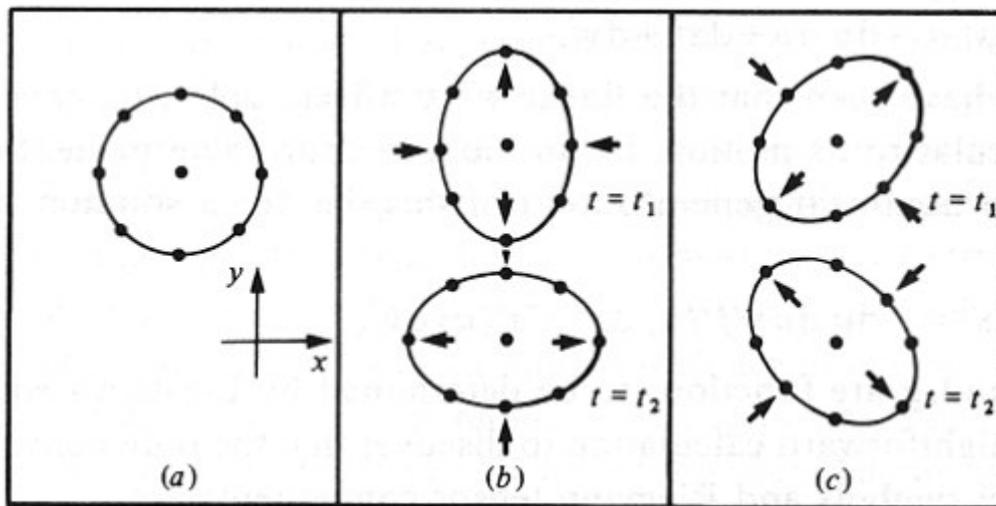


Figura 1 - Efeitos dos dois tipos de polarização em um anel de partículas. (a) Anel em repouso, sem a influência de ondas gravitacionais. (b) Efeito da polarização h_+ . (c) Efeito da polarização h_\times .

Fonte: Hendry, 2007

O efeito de uma onda gravitacional é de esticar e comprimir o espaço-tempo na região que ela atravessa. Dessa forma, a distância entre dois objetos oscila quando uma onda passa por eles. Apesar disso, a aceleração não é detectável, devido ao Princípio de Equivalência. Apenas a aceleração relativa pode ser observada.

3 - Detectores de ondas gravitacionais

As duas formas mais exploradas de detecção de ondas gravitacionais consistem na medição de oscilações em alguma espécie de antena sólida provocadas por tensão mecânica, e no monitoramento da distância entre dois ou mais pontos.

Os detectores do primeiro tipo citado são chamados de detectores de massa-ressonante. O pioneiro nesse método de detecção foi Joseph Weber, na década de 60. O seu primeiro dispositivo de detecção era um cilindro de alumínio de 1,2 ton, 1,5 m de comprimento e 61 cm de diâmetro, suspenso em uma câmara a vácuo [Aguar, 2008]. Ainda na década de 60, Weber alegou possíveis detecções de sinais de ondas gravitacionais. Apesar disso, outros experimentadores nunca conseguiram reproduzir esses resultados, mesmo usando detectores mais sensíveis. Atualmente, a divisão de astrofísica do INPE está desenvolvendo um detector do tipo massa-ressonante esférico, chamado de Mário Schenberg, o único detector de ondas gravitacionais do Brasil. A figura 2 mostra um desenho esquemático do detector Mário Schenberg.

O segundo tipo de detector consiste basicamente em monitorar a distância em dois ou mais pontos através de métodos interferométricos. Alguns projetos conhecidos são o norte-americano LIGO e o europeu VIRGO. A figura 3 mostra fotos aéreas dos detectores LIGO. Além desses, a NASA e a ESA estão desenvolvendo em conjunto um novo detector chamado de LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), que estará situado em órbita no espaço e consistirá em três aparelhos posicionados nos vértices de um triângulo equilátero, com lados medindo cerca de 5 milhões de quilômetros.

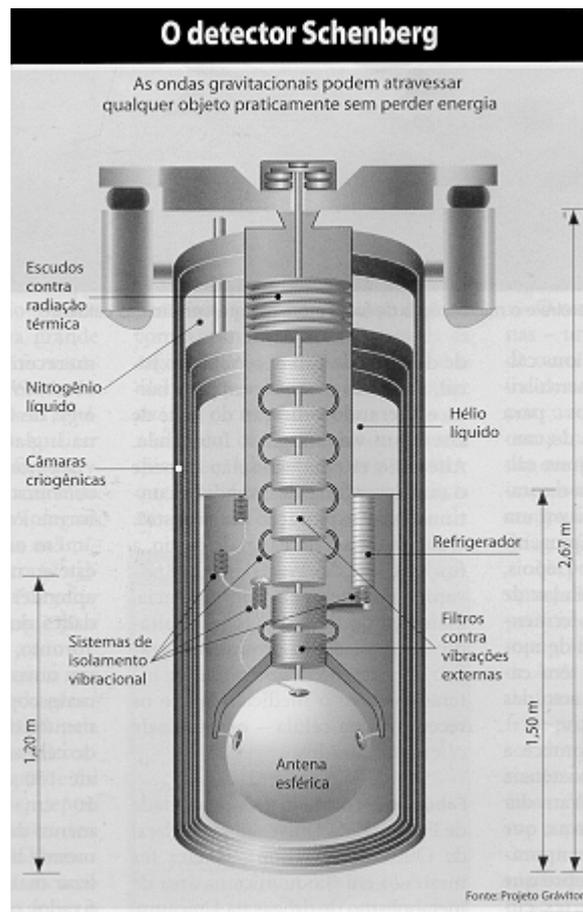


Figura 2 - Detector Mário Schenberg da Divisão de Astrofísica do INPE



Hanford, Washington



Livingston, Louisiana

Figura 3 - Detectores LIGO nos sítios em Hanford e Livingston (Estados Unidos)

Fonte: Livingston Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

4 - Formulação do problema

O objetivo deste trabalho foi estudar a assinatura de fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados por sistemas binários de estrelas de nêutrons em coalescência. Para a formulação desse problema, foram consideradas quatro etapas principais: a taxa de coalescência de sistemas binários para a Galáxia, a taxa de coalescência de sistemas binários cosmológicos (generalizando a taxa de coalescência para a Galáxia), o fundo estocástico de ondas gravitacionais gerados por esses sistemas e a razão sinal/ruído para detectores interferométricos do tipo LIGO. A descrição de cada uma dessas etapas será dada nas seções a seguir.

4.1 - A taxa de coalescência de sistemas binários em espiralação para a Galáxia

As coalescências de duas estrelas de nêutrons (NS-NS), dois buracos negros (BH-BH) ou de um buraco negro e uma estrela de nêutron (BH-NS) estão entre as fontes mais importantes de ondas gravitacionais, devido à imensa quantidade de energia liberada no processo. Em particular, a coalescência de sistemas binários NS-NS pode irradiar cerca de 10^{53} erg no último segundo de sua trajetória espiral, em frequências de até 1,4-1,6 kHz [Freitas-Pacheco, 2006].

A coalescência de duas estrelas de nêutrons (NS-NS) constitui uma possibilidade bastante atraente devido à enorme quantidade de energia envolvida no processo e do bom conhecimento do seu comportamento dinâmico.

Sendo $P(\tau)$ a probabilidade por unidade de tempo da formação de um sistema NS-NS com uma escala temporal de coalescência τ , e $R(t)$ a taxa de formação de estrelas de nêutrons (que exprime quanto de gás é convertido em estrelas por unidade de tempo) na época t , o número de binárias NS-NS por intervalo de coalescência hoje é [Freitas-Pacheco, 1997]

$$\frac{dN_{ns}}{d\tau_*} = \xi_b \int_0^T R(t') P(\tau_* + (T - t')) dt' \quad (7)$$

onde ξ_b é a fração de estrelas de nêutrons que correspondem a pares NS-NS e T é a idade da Galáxia. O parâmetro ξ_b é tomado como constante durante a evolução da Galáxia. Nessa integral, τ_* é a escala temporal de coalescência contada a partir do presente instante. Dessa forma, o argumento da função de probabilidade representa a idade do sistema binário somada com a escala de tempo de coalescência observada.

A taxa de coalescência em uma determinada época é dada por

$$v_c(t) = \xi_b \int_{t_0}^t R(t-t')P(t')dt' \quad (8)$$

onde t_0 é o tempo mínimo necessário para que um sistema binário de estrelas de nêutrons coalesça, tomado como sendo igual a 0,1 Gyr. Essa equação exige o uso de uma lei específica para a taxa de formação estelar e para a distribuição de probabilidade $P(\tau)$. Tomando a taxa de formação estelar como sendo proporcional a massa de gás disponível, tanto ela quanto a taxa de formação de estrelas de nêutrons decaem exponencialmente em função do tempo. Fazendo com que $P(\tau) = B/\tau$ [Regimbau, 2006], onde B é uma constante de normalização, tem-se

$$v_c(t) = \xi_b BR(T) \int_{t_0}^t \frac{e^{\beta(T+x-t)}}{x} dx \quad (9)$$

Normalizando-se essa função no intervalo de 2×10^5 yr até 20Gyr, o valor obtido é de $B = 0,087$. Na seção seguinte utilizaremos as idéias básicas colocadas acima para construir a “taxa de coalescência cosmológica”. Isto é, generalizando a taxa de coalescência da nossa Galáxia (Via Láctea) para todo o Universo.

4.2 - A taxa de coalescência de sistemas binários cosmológicos

Além da emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários próximos, espera-se que a superposição das ondas geradas por um número muito grande de sistemas binários distantes produza um fundo estocástico detectável. Para a determinação desse fundo, é

necessário que o formalismo anterior seja ampliado para estabelecer-se o sinal de um fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado pela coalescência de sistemas binários cosmológicos.

Sendo β_{NS} a fração de binárias que permanecem ligadas após o segundo evento de supernova, f_b a fração de binárias massivas formadas entre todas as estrelas e λ_{NS} a fração de massa das progenitoras de estrelas de nêutrons, define-se

$$\lambda_p = \beta_{NS} f_b \lambda_{NS} \quad (10)$$

onde λ_p é a fração de massa convertida em sistemas binários de estrelas de nêutrons. Segundo Regimbau e de Freitas Pacheco [Regimbau, 2006], $\beta_{NS} = 0,024$ e $f_b = 0,136$, valores obtidos através de simulações numéricas. Os autores comentam que esses números dependem da velocidade de dispersão adotada para a explosão do sistema. Se eles tivessem adotado um valor de $230 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, ao invés de $80 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, a fração de sistemas mantidos unidos seria reduzida em cerca de uma ordem de grandeza, para $\beta_{NS} = 0,0029$.

Supondo-se que estrelas progenitoras com massa superior a 25 massas solares dão origem a buracos negros, tomando-se o valor mínimo da massa de progenitoras para a formação de estrelas de nêutrons como sendo de 8 massas solares [Pereira, 2008] e tomando-se uma função de massa inicial $\xi(m)$, que exprime a frequência de formação de estrelas para um dado intervalo de massa, da forma

$$\xi(m) = Am^{-(1+x)} \quad (11)$$

onde $x = 1,35$ (chamado de expoente de Salpeter), normalizada no intervalo de $0,1 M_\odot$ a $140 M_\odot$, de tal forma que $\int m\xi(m)dm = 1$, temos que

$$\lambda_{NS} = \int_{10}^{25} \xi(m)dm = 5,39 \times 10^{-3} M_\odot^{-1} \quad (12)$$

Tomando-se os valores conhecidos de β_{NS} e de f_b e o valor calculado de λ_{NS} , obtém-se para λ_p o valor de

$$\lambda_p = 1,76 \times 10^{-5} M_{\odot}^{-1} \quad (13)$$

Finalmente, a razão diferencial “cosmológica” de formação de sistemas binários de estrelas de nêutrons pode ser escrita como

$$dR_{NS-NS} = \lambda_p B a_b(z) \frac{dV}{dz} dz \int_{t_0}^t \frac{e^{\beta(T+x-t)}}{x} dx \quad (14)$$

onde $a_b(z)$ é o fluxo de matéria bariônica para as estruturas primordiais (em $M_{\odot} Mpc^{-3} yr^{-1}$). Essa função foi obtida diretamente do trabalho de mestrado de Pereira [Pereira 2008] e é fruto de um cenário para a formação das estruturas em grande escala do Universo estudado por esse autor. Na (14) dV/dz representa a variação do volume comóvel do Universo (isto é, vincula o particular modelo cosmológico. No nosso caso é o chamado modelo Λ -CDM), e a conversão de tempo cósmico para “redshift” é feita através de

$$\frac{dt}{dz} = \frac{9,78 h^{-1} Gyr}{(1+z) \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_m (1+z)^3}} \quad (15)$$

sendo Ω_{Λ} e Ω_m os chamados parâmetros de densidade cosmológicos para, respectivamente, a energia escura e a matéria total presente no Universo. Já h representa o parâmetro de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Veja que o integrando da equação (14) leva em conta que a formação estelar é uma função que varia exponencialmente com o tempo. A equação (14) nada mais é do que a “generalização cosmológica” da taxa de coalescência inferida para a nossa Galáxia, conforme representada pela equação (9).

4.3 - O fundo estocástico de ondas gravitacionais

O fluxo de energia específico (em $\text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$) no referencial do observador para uma determinada coalescência de sistema binário é

$$f_{\nu_0} = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} (1+z_c) \quad (16)$$

onde z_c é o *redshift* em que ocorre a coalescência, $d_L = (1+z_c)r$ é a distância de luminosidade até o sistema que coalesce, r é a distância própria, que depende do modelo cosmológico adotado, $dE_{GW}/d\nu$ é a densidade espectral de energia gravitacional e $\nu = (1+z_c)\nu_0$ é a frequência emitida pela fonte.

Usando-se a aproximação quadrupolar e tomando-se um sistema com massas m_1 e m_2 , em órbita circular, tem-se

$$\frac{dE_{GW}}{d\nu} = K\nu^{-1/3} \quad (17)$$

onde foi levado em conta o fato de que a frequência da onda gravitacional é o dobro da frequência orbital. Segue então

$$K = \frac{(G\pi)^{2/3}}{3} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \quad (18)$$

Se ambas as estrelas tiverem massa equivalente a 1,4 massas solares, temos $K = 5,20 \times 10^{50} \text{erg}\cdot\text{Hz}^{-2/3}$.

As propriedades espectrais do fundo estocástico de ondas gravitacionais é caracterizado por Ω_{GW} , um parâmetro adimensional definido como

$$\Omega_{GW}(\nu_0) = \frac{1}{c^3 \rho_c} \nu_0 F_{\nu_0} \quad (19)$$

em que ν_0 é a frequência medida na Terra e ρ_c é a densidade crítica para se fechar o Universo, relacionada com o parâmetro de Hubble por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (20)$$

e F_{ν_0} é o fluxo de ondas gravitacionais recebido na Terra, integrado sobre todas as fontes desde o *redshift* inicial z_i até o *redshift* final z_f

$$F_{\nu_0} = \int_{z_i}^{z_f} f_{\nu_0} dR_{NS-NS} \quad (21)$$

4.4 - A razão sinal/ruído S/N

Como a amplitude de qualquer onda gravitacional que se espera receber na Terra é muito pequena, surge o problema referente à sua detectabilidade. Com valores tão pequenos para a amplitude recebida, os sinais detectados podem acabar sendo camuflados pelo ruído local gerado nas proximidades do detector. Por esse motivo, é de fundamental importância que se conheça a razão sinal/ruído (S/N) esperada de um determinado detector para que se possa saber qual é a real expectativa de detecção de alguma onda gravitacional.

Se essa razão tiver o valor de 1, a amplitude do sinal é igual à amplitude do ruído. Esse seria o valor mínimo necessário para que haja a possibilidade de se detectar o sinal. Para aumentar a expectativa de detecção, o ideal é que a razão atinja valores ainda mais altos.

Uma forma de se aumentar a razão S/N é através da correlação dos sinais de detectores diferentes. Dessa maneira os sinais detectados se reforçam, já que têm a mesma origem. O mesmo não acontece com os ruídos dos detectores, pois não são relacionados um com o outro.

Para o caso de dois detectores do tipo interferométrico, os sinais dos fundos estocásticos detectados serão

$$s_1(t) = h_1 + n_1 \text{ e } s_2(t) = h_2 + n_2 \quad (22)$$

em que h_1 e h_2 são os sinais detectados e n_1 e n_2 são os ruídos internos de cada detector. Se os dois detectores estiverem localizados no mesmo ponto e tiverem a mesma orientação no espaço, h_1 e h_2 terão o mesmo valor. O sinal efetivo obtido a partir desses sinais é dado por [Pereira, 2008]

$$S = \langle s_1, s_2 \rangle \equiv \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t) dt \quad (23)$$

em que T é o tempo de integração.

Levando-se em conta que o sinal é pequeno se comparado com o ruído, obtém-se

$$S = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, h_2 \rangle + \langle h_1, n_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle \equiv \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle \quad (24)$$

Esse resultado, porém, é apenas uma idealização do caso em que os braços dos detectores estão perfeitamente alinhados e os sinais são detectados sem nenhum atraso nos dois aparelhos. Em um caso mais realista, é necessário que seja definida uma função de redução para a sobreposição dos sinais, dada por [Pereira, 2008]

$$\gamma(f) = \frac{5}{8\pi} \int_{s^2} d\hat{\Omega} e^{2\pi i \hat{\Omega} \Delta \bar{x} / c} (F_1^+ F_2^+ + F_1^\times F_2^\times) \quad (25)$$

em que $\hat{\Omega}$ é um vetor unitário, $\Delta \bar{x}$ é a distância entre os dois detectores e $F_i^{+, \times}$ são as respostas dos detectores às duas polarizações da onda recebida, dadas por

$$F_i^{+, \times} = \frac{1}{2} (\hat{X}_1^a \hat{X}_1^b - \hat{Y}_1^a \hat{Y}_1^b) e_{ab}^{+, \times}(\hat{\Omega}) \quad (26)$$

em que \hat{X}_1^a e \hat{Y}_1^a são as direções dos braços de cada detector, e $e_{ab}^{+, \times}(\hat{\Omega})$ é o tensor de polarização da onda.

A equação (25) é normalizada de maneira a fazer com que o valor de γ seja 1 quando os braços dos detectores estiverem alinhados e a separação entres eles for 0. A parte exponencial da equação leva em conta o atraso temporal na resposta dos detectores.

Por outro lado, uma equação mais geral que relacione os sinais dos detectores é

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t') Q(t-t') dt' \quad (27)$$

em que $Q(t-t')$ é uma função filtro, que também depende da configuração espacial dos detectores, dos seus ruídos e do espectro de potência do fundo estocástico. Em condições ideais, usa-se como filtro a função delta de Dirac $Q(t-t') = \delta(t-t')$. Assim, a equação fica

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t') Q(t-t') dt' \quad (28)$$

Essa equação também pode ser escrita no domínio das frequências como

$$S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(f-f') \bar{s}_1^*(f) \bar{s}_2(f') \bar{Q}(f') df' \quad (29)$$

com $\delta_T(f-f')$ dado por

$$\delta_T(f) \equiv \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i f t} = \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f} \quad (30)$$

Se o sinal for isotrópico, não polarizado e Gaussiano, as transformadas de Fourier do sinal e do ruído serão

$$\langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \rangle = \delta(f-f') \frac{3H_0^2}{20\pi^2} |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \mathcal{G}(|f|) \quad (31)$$

$$\langle \bar{n}_1^* \bar{n}_j \rangle = \frac{1}{2} \delta(f-f') \delta_{ij} P_i(|f|) \quad (32)$$

em que i e j representam a posição do detectores e $P_i(f)$ é a função densidade de espectro de potência do ruído.

A partir das equações (31) e (29), chega-se a

$$\langle S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(f - f') \langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \rangle \bar{Q}(f') df' \quad (33)$$

ou

$$\langle S \rangle = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(|f|) |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \bar{Q}(f) df \quad (34)$$

O nível de ruído é definido como

$$N \equiv S - \langle S \rangle \quad (35)$$

Levando-se em consideração que o ruído em cada detector é significativamente maior do que o sinal, tem-se que

$$N \cong \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(f - f') \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \bar{Q}(f') df' \quad (36)$$

Já que os ruídos de cada detector são independentes um do outro, tem-se que

$$\langle N \rangle = 0 \quad (37)$$

porém, o valor quadrático médio será diferente de zero:

$$\langle N^2 \rangle = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \quad (38)$$

Por fim, obtém-se

$$\langle N^2 \rangle = \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(|f|) P_2(|f|) |\bar{Q}(f)|^2 df \quad (39)$$

Agora, é necessário se achar uma função filtro que maximize a razão S/N para aumentar as chances de se observar o fundo estocástico. Define-se, então, a razão S/N como

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\langle S \rangle}{\langle N^2 \rangle^{1/2}} \quad (40)$$

Define-se o número complexo (A, B) , tal que

$$(A, B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A^*(f)B(f)P_1(|f|)P_2(|f|)df \quad (41)$$

em que $A(f)$ e $B(f)$ são funções complexas arbitrárias. Com esse definição, o sinal detectado pode ser expresso como

$$\langle S \rangle = \left(\bar{Q}, \frac{\mathcal{N}(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|)P_2(|f|)} \right) \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \quad (42)$$

e o ruído como

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{4}(\bar{Q}, \bar{Q})T \quad (43)$$

A partir dessas expressões, a equação para a razão sinal/ruído pode ser escrita como

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \left(\frac{3H_0^2}{10\pi^2}\right)^2 T \frac{\left(\bar{Q}, \frac{\mathcal{N}(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|)P_2(|f|)} \right)^2}{(\bar{Q}, \bar{Q})} \quad (44)$$

Lembrando que o produto interno entre dois vetores é máximo quando eles têm a mesma direção, tem-se que

$$\bar{Q}(f) = \frac{\mathcal{N}(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|)P_2(|f|)} \quad (45)$$

Finalmente, a expressão para a razão sinal/ruído é dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{9H_0^4}{50\pi^4} T \int_0^\infty \frac{\gamma^2(f)\Omega_{GW}^2(f)}{f^6 P_1(f)P_2(f)} df \quad (46)$$

onde Ω_{GW} é a densidade de energia em ondas gravitacionais, dado pela equação (19).

5 - Resultados alcançados e conclusões

5.1 - Taxa de coalescência para a Galáxia

A primeira etapa do desenvolvimento deste trabalho consistiu na determinação da taxa de coalescência de sistemas binários compactos em espiralação constituídos por estrelas de nêutrons que, como foi descrito na seção (4.1), é dada por

$$\nu_c(t) = \xi_b BR(T) \int_{t_0}^t \frac{e^{\beta(T+x-t)}}{x} dx$$

em que ξ_b é a fração de estrelas de nêutrons que correspondem a pares NS-NS, B é uma constante de normalização, $R(t)$ é a taxa de formação de estrelas de nêutrons na época t , T é a idade da Galáxia, t_0 é o tempo mínimo necessário para que um sistema binário de estrelas de nêutrons coalesça e β é o inverso da escala de tempo para a formação estelar, que depende do tipo da galáxia.

Para a realização de tal cálculo, foi desenvolvido um programa escrito em linguagem FORTRAN. Seguindo o trabalho de de Freitas Pacheco [Freitas-Pacheco, 1997], os valores adotados foram de $\xi_b = 3 \times 10^{-4}$ e $B = 0,087$. Os valores de T , t_0 e β foram deixados como dados de entrada do programa, sendo que os valores típicos, também adotados por de Freitas Pacheco são $T = 15$ Gyr, $t_0 = 0,1$ Gyr e $\beta = 0,2$ Gyr⁻¹ para a Galáxia. A figura 1 mostra um exemplo de gráfico traçado a partir dos dados obtidos através do programa para a Galáxia, usando os valores típicos dos parâmetros de entrada. É possível observar que o pico da curva ocorre aproximadamente no tempo equivalente a 2,2 Gyr.

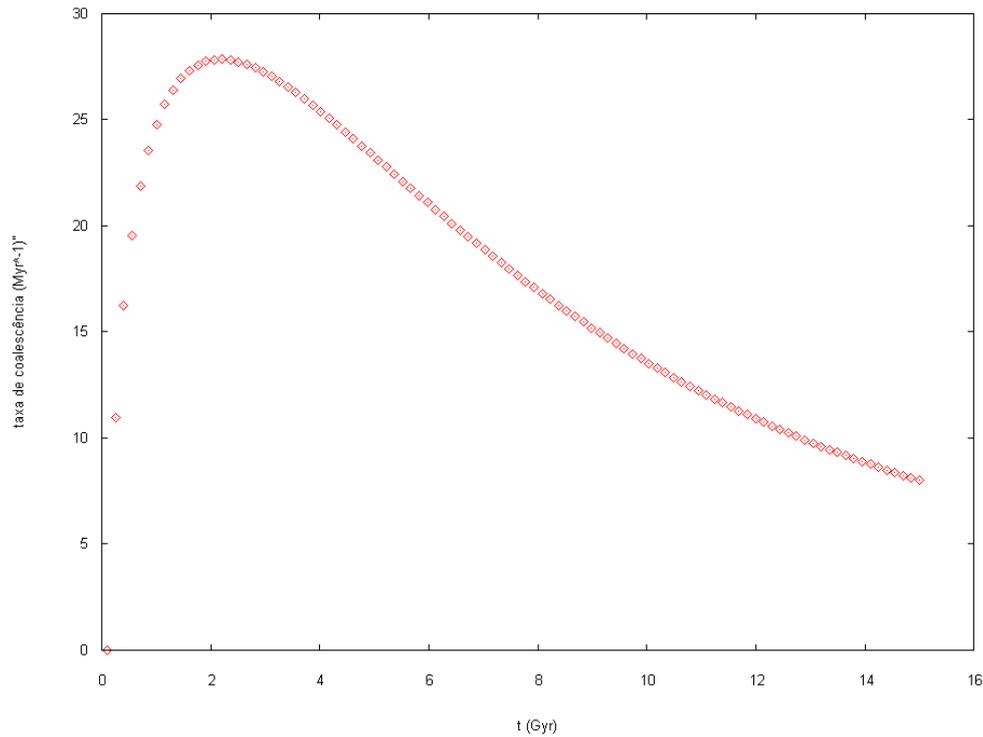


Figura 4 - Taxa de coalescência de sistemas NS-NS para a Galáxia. Veja que a unidade é 10^{-6} yr^{-1} .

5.2 - Taxa de formação cósmica e a razão sinal/ruído

Um novo programa, também escrito em FORTRAN, foi desenvolvido para a determinação da taxa cósmica de coalescência, da assinatura do fundo estocástico correspondente e da razão sinal/ruído para os detectores LIGO nas suas configurações I (inicial), II (modificada), e III (avançada).

Nesse novo programa, os parâmetros de entrada adotados foram o expoente da função de massa inicial, o tempo mínimo para a coalescência de sistemas binários e o inverso da escala de tempo para a formação estelar. A idade do Universo foi fixada em 15 Gyr. A taxa de coalescência de sistemas binários foi calculada da mesma forma que no primeiro programa. O formalismo desenvolvido nas seções (4.2), (4.3) e (4.4) foi utilizado para o cálculo do fundo estocástico e da razão S/N.

As razões sinal/ruído obtidas para o detector LIGO III dão uma perspectiva positiva para algumas das combinações dos parâmetros de entrada. Por exemplo, considerando

uma distribuição das massas das estrelas que geram o fundo estocástico do tipo Salpeter ($x = 1,35$ na equação (11)), o tempo mínimo de coalescência $\tau_0 = 2,0 \times 10^5$ yr, e a escala característica de tempo para a formação estelar, no Universo, da ordem de $5,0 \times 10^9$ yr ($\beta = 0,2$ Gyr $^{-1}$), foi obtida uma razão sinal/ruído de aproximadamente 2,34. Para um tempo mínimo de coalescência de $1,00 \times 10^6$ yr, mantendo-se os mesmos valores para os dois outros parâmetros, a razão S/N sobe para aproximadamente 2,36.

As figuras 5 e 6 mostram os gráficos da densidade de energia e da amplitude adimensional do fundo estocástico em função da frequência observada na Terra para a combinação de parâmetros correspondente à razão sinal/ruído de 2,34. As figuras 7 e 8 mostram as mesmas características para o caso em que a razão S/N é de 2,36. É possível notar que as curvas permanecem quase inalteradas para essa variação de parâmetros.

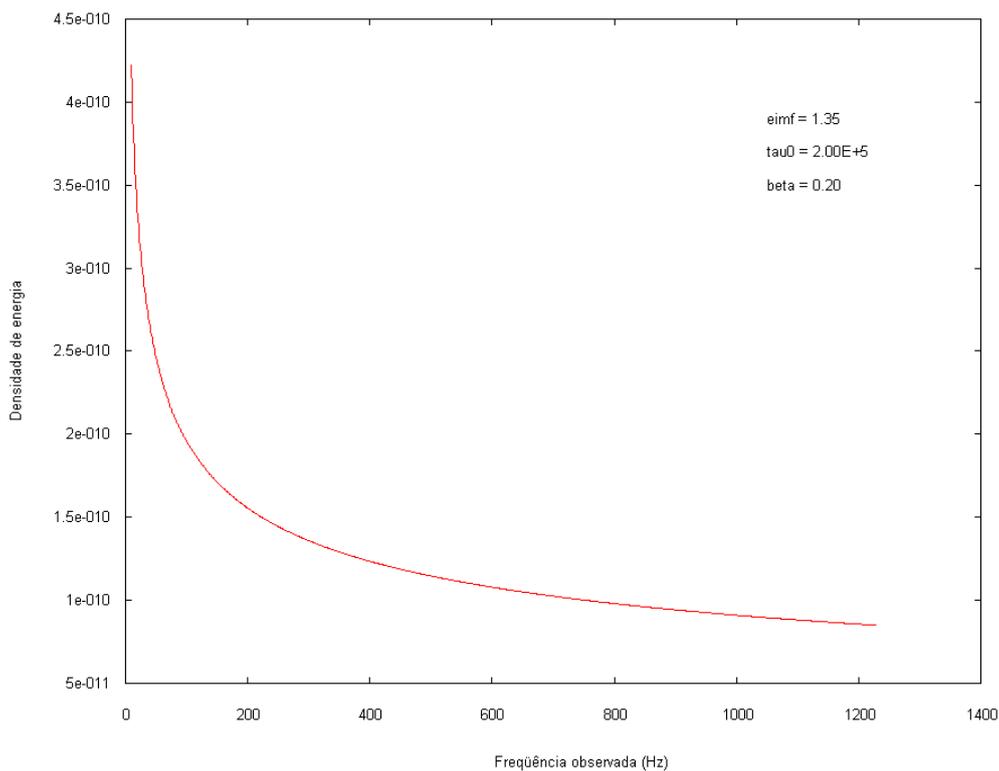


Figura 5 - Densidade de energia correspondente à razão S/N ~ 2,34

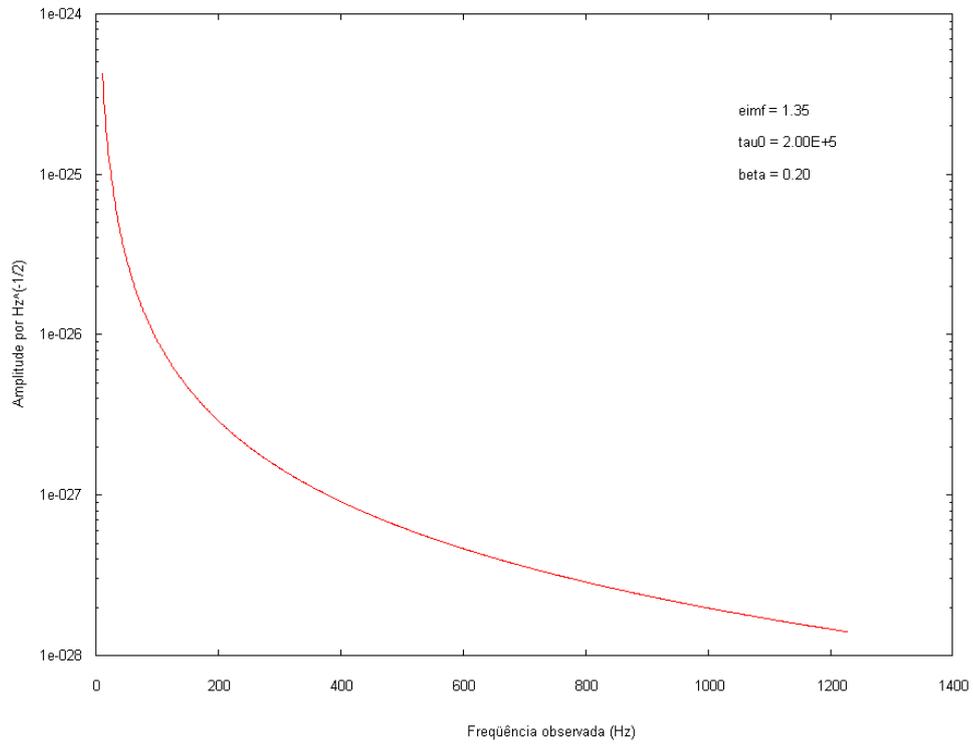


Figura 6 - Amplitude correspondente à razão S/N ~ 2,34

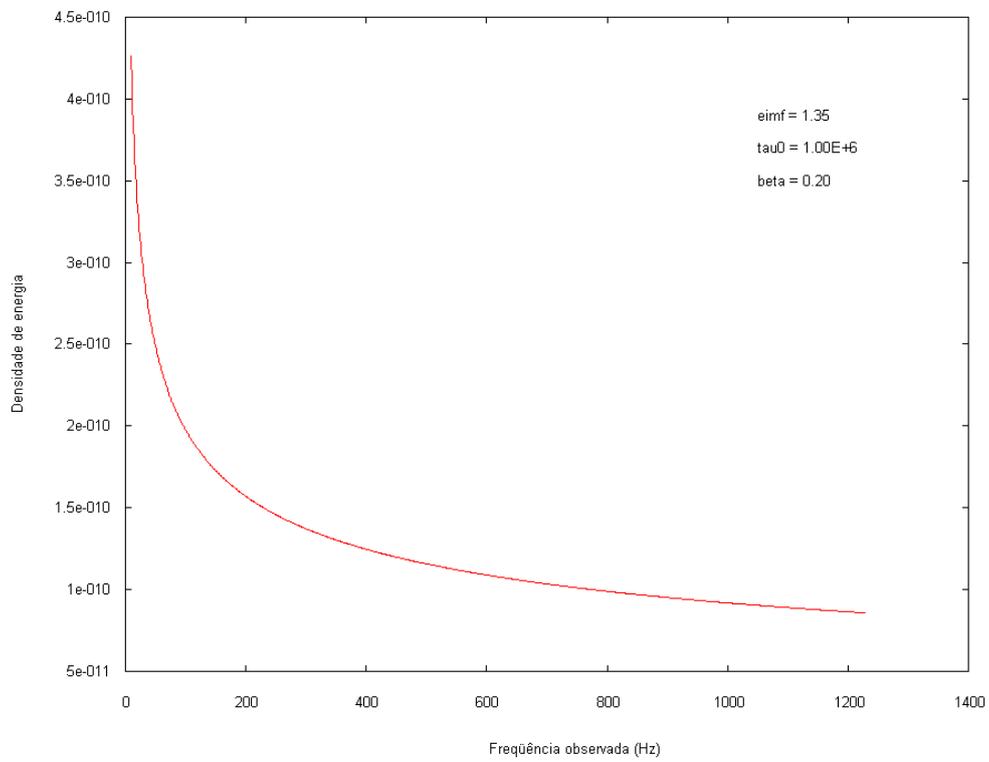


Figura 7 - Densidade de energia correspondente à razão S/N ~ 2,36

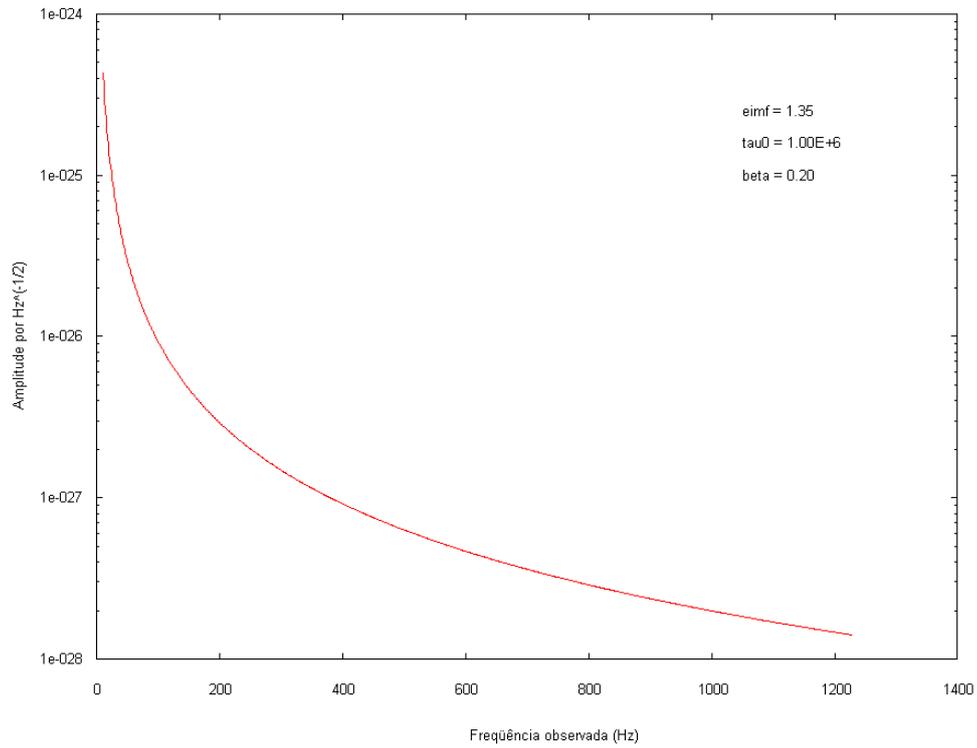


Figura 8 - Amplitude correspondente à razão S/N ~ 2,36

As figuras 9 e 10 mostram as taxas de coalescência para os dois casos acima citados. Fica claro através desses gráficos que a taxa tem um pico mais elevado e largo, e decresce mais lentamente para o primeiro caso.

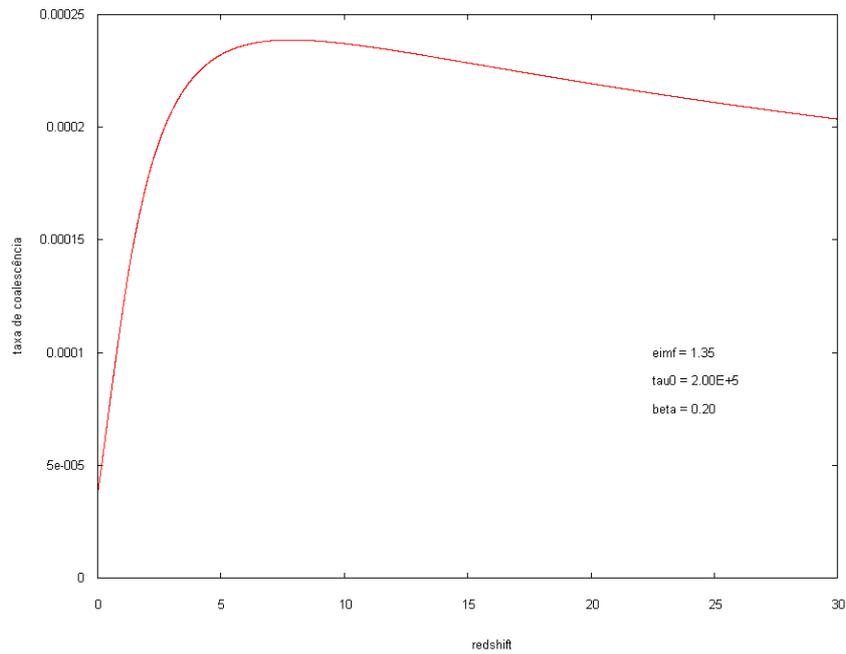


Figura 9 - Taxa de coalescência correspondente à razão S/N de 2,34

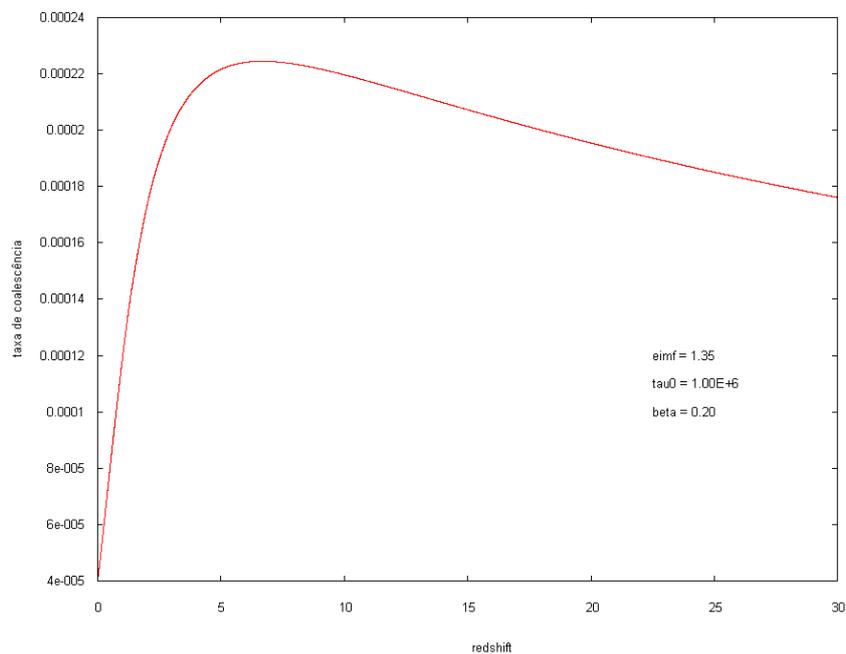


Figura 10 - Taxa de coalescência correspondente à razão S/N de 2,36

As figuras 11, 12, 13 e 14 ilustram a variação do comportamento das funções de densidade de energia e da amplitude adimensional para combinações diferentes da função de massa inicial. Os valores adotados são 0,35 e 2,35. Para o primeiro valor, a razão S/N

assume o valor de aproximadamente 1,40. No segundo, a razão S/N é de 0,103. O valor de $x = 0,35$ produz as maiores razões S/N. O expoente de 2,35 gera os valores mais baixos para a razão sinal/ruído em qualquer combinação de parâmetros, chegando ao valor mais baixo de $1,40 \times 10^{-2}$ para o caso em que $\tau_0 = 2,0 \times 10^5$ yr e $\beta = 1,4$ Gyr⁻¹.

A Tabela 1 apresenta os valores das razões sinal/ruído para todos os modelos gerados em nosso trabalho. A partir dela fica evidente que o cenário mais favorável para a detecção, em relação ao inverso da escala de tempo de formação estelar, é aquele em que o seu valor é de 0,2. Todos os outros valores deste parâmetro resultam em uma razão S/N menos favorável quando são mantidas as combinações dos valores dos outros dados de entrada. Em contraste, também é evidente que o valor de β igual a 1,4 é o que produz os piores resultados.

O tempo mínimo de coalescência produz resultados um pouco mais favoráveis quando tem seu valor definido em $1,00 \times 10^6$ yr. A diferença, por exemplo, entre o modelo 1 e o modelo 5 citados acima deve-se à variação deste parâmetro. Neste caso, a diferença é de quase 1%. Essa proporção entre os valores obtidos mantém-se aproximadamente constante ao alterarmos apenas o valor do tempo mínimo de coalescência, qualquer que seja o expoente da função de massa inicial. Isso também pode ser observado para os outros valores do inverso da escala de tempo de formação estelar. Para $\beta = 0,6$, essa diferença é de cerca de 14%; quando $\beta = 1,0$, é de 16%; e quando $\beta = 1,4$, também é de 16%.

O valor do expoente da função de massa inicial que gera os melhores resultados para a razão sinal/ruído é o valor de 1,35, conhecido com expoente de Salpeter. Mantendo-se todos os outros parâmetros constantes, o valor de 0,35 para o expoente de massa inicial gera razões S/N cerca de 40% menores do que o valor de 1,35. Adotando-se, por outro lado, o valor de 2,35, o resultado obtido é aproximadamente 4,5% do que aquele obtido com 1,35.

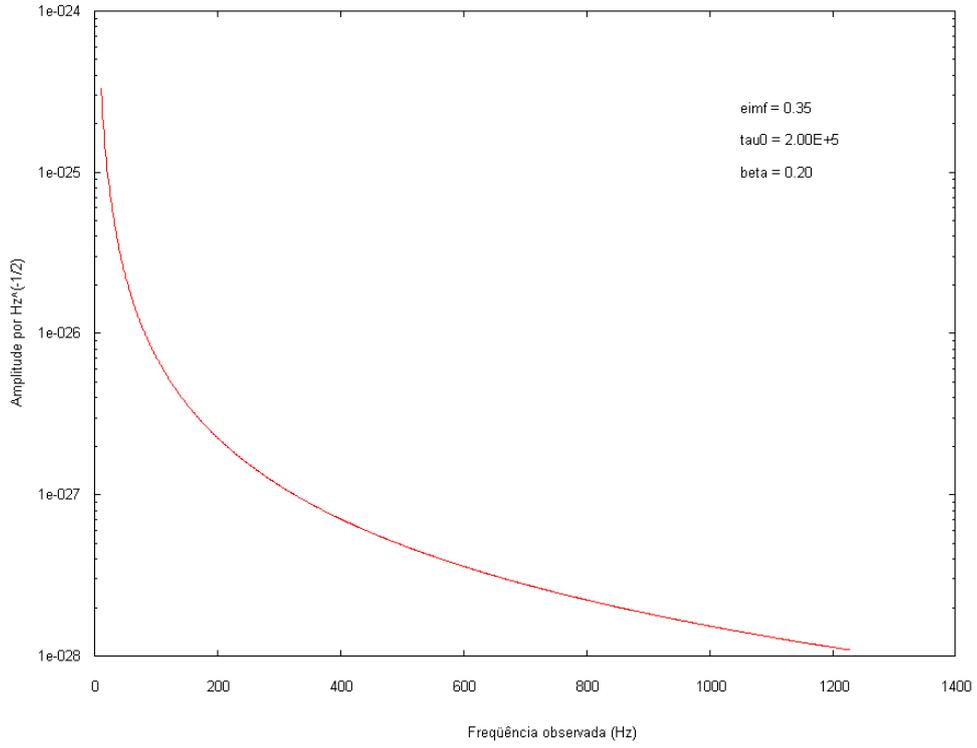


Figura 11 - Amplitude adimensional para o valor do expoente da função de massa inicial igual a 0,35

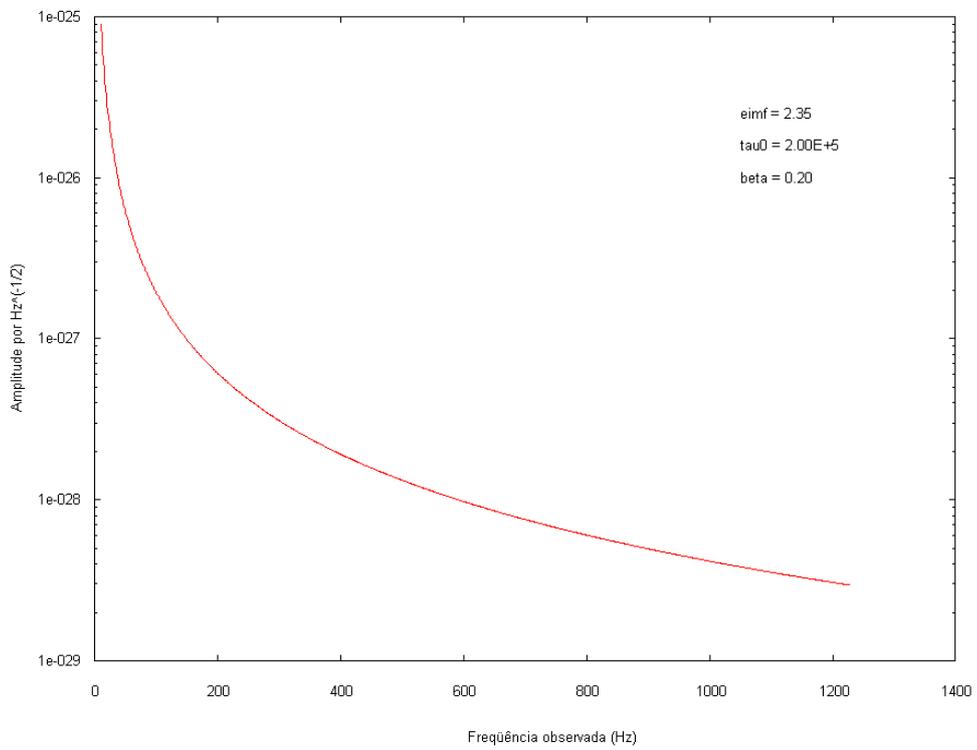


Figura 12 - Amplitude adimensional para o valor do expoente da função de massa inicial igual a 2,35

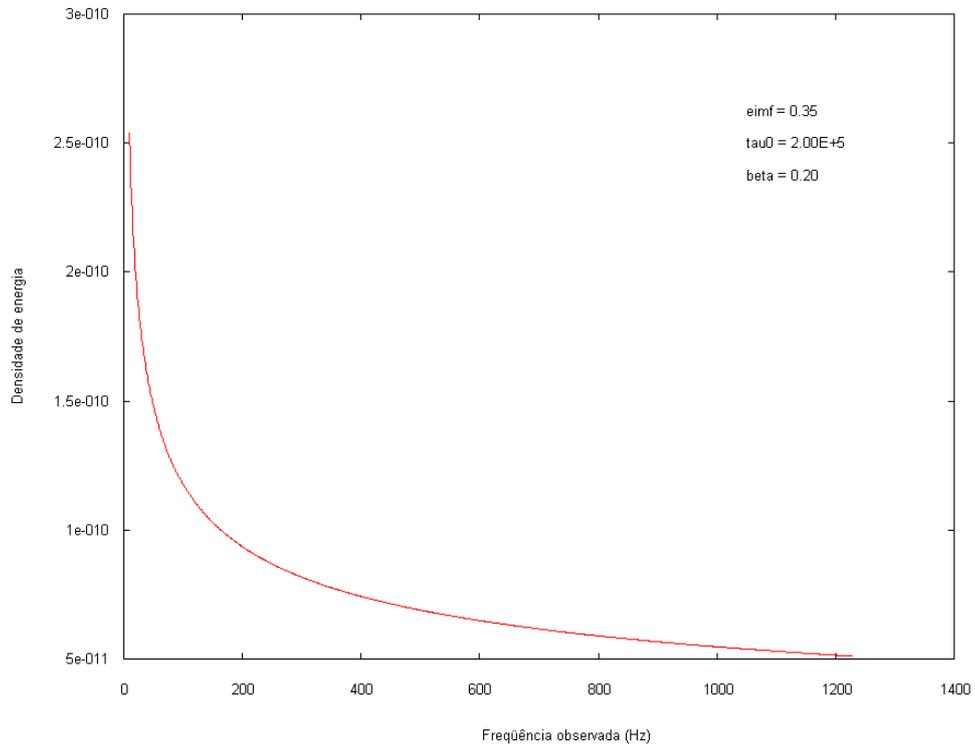


Figura 13 - Densidade de energia para o valor do expoente da função de massa inicial igual a 0,35

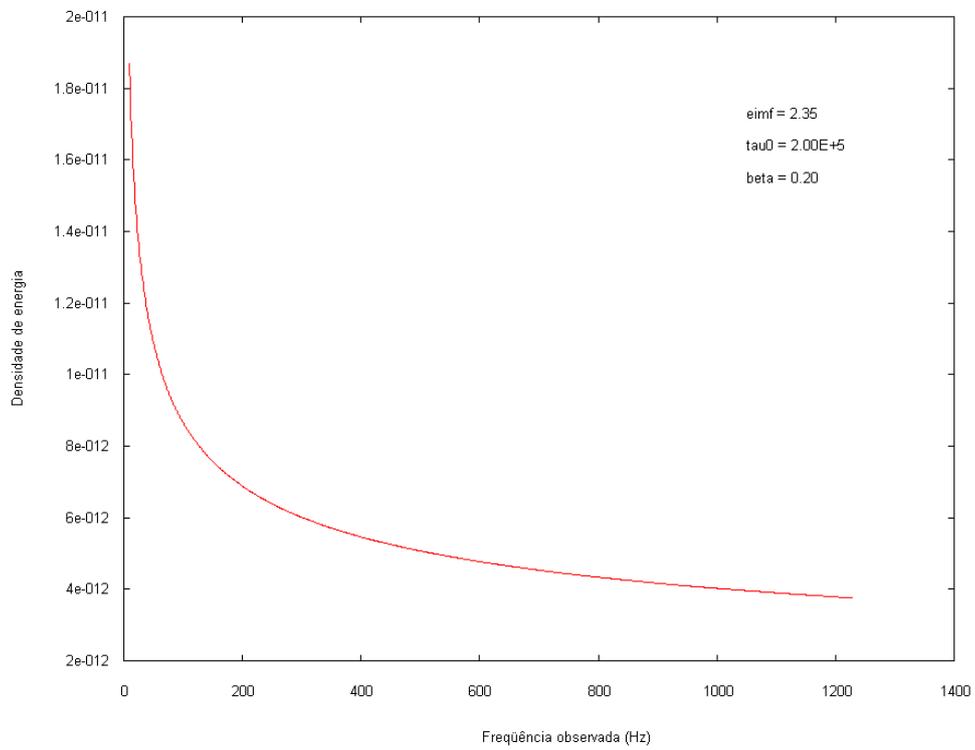


Figura 14 - Densidade de energia para o valor do expoente da função de massa inicial igual a 2,35

Tabela 1 - Modelos gerados e suas respectivas razões sinal/ruído (S/N). O tempo de integração considerado foi $T = 1$ ano para obtenção das razões S/N listadas abaixo.

modelo	expoente da função de massa inicial	tempo mínimo de coalescência (yr)	inverso da escala de tempo de formação estelar (Gyr^{-1})	razão S/N
1	1,35	$2,00 \times 10^5$	0,2	2,34
2	1,35	$2,00 \times 10^5$	0,6	1,05
3	1,35	$2,00 \times 10^5$	1,0	0,472
4	1,35	$2,00 \times 10^5$	1,4	0,317
5	1,35	$1,00 \times 10^6$	0,2	2,36
6	1,35	$1,00 \times 10^6$	0,6	1,19
7	1,35	$1,00 \times 10^6$	1,0	0,548
8	1,35	$1,00 \times 10^6$	1,4	0,368
9	0,35	$2,00 \times 10^5$	0,2	1,40
10	0,35	$2,00 \times 10^5$	0,6	0,629
11	0,35	$2,00 \times 10^5$	1,0	0,284
12	0,35	$2,00 \times 10^5$	1,4	0,191
13	0,35	$1,00 \times 10^6$	0,2	1,42
14	0,35	$1,00 \times 10^6$	0,6	0,717
15	0,35	$1,00 \times 10^6$	1,0	0,330
16	0,35	$1,00 \times 10^6$	1,4	0,222
17	2,35	$2,00 \times 10^5$	0,2	0,103
18	2,35	$2,00 \times 10^5$	0,6	0,0463
19	2,35	$2,00 \times 10^5$	1,0	0,0209
20	2,35	$2,00 \times 10^5$	1,4	0,0140
21	2,35	$1,00 \times 10^6$	0,2	0,104
22	2,35	$1,00 \times 10^6$	0,6	0,0528
23	2,35	$1,00 \times 10^6$	1,0	0,0242
24	2,35	$1,00 \times 10^6$	1,4	0,0163

Os resultados obtidos demonstram que existe uma possibilidade real de detecção do fundo estocástico de ondas gravitacionais estudado a partir da correlação dos sinais de saída de dois interferômetros do tipo LIGO III (configuração avançada que deve ser atingida por volta de 2012), especialmente para os valores dos parâmetros $x = 1,35$, $\tau_0 = 1,00 \times 10^6$ e $\beta = 0,2 \text{ Gyr}^{-1}$.

6 - Referências

AGUIAR, O. D. *The past, present and future of the resonant-mass gravitational wave detector (in press 2008)*.

FREITAS-PACHECO, J. A. F. *The NS-NS coalescence rate in galaxies and its significance to the VIRGO gravitational antenna*, *Astroparticle Physics*, 8 (1997), 21-26.

FREITAS-PACHECO, J. A. F.; REGIMBAU, T.; VINCENT, S.; SPALLICCI, A. *Expected coalescence rates of NS-NS binaries for laser beam interferometers*, *International Journal of Modern Physics D15* (2006), 235-250.

HENDRY, M. *An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles*, Second VESF School on Gravitational Waves, Cascina, Itália (junho de 2007).

PEREIRA, E. S. *Fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados por buracos negros pré-galácticos*, Dissertação de Mestrado, INPE, 2008.

REGIMBAU, T.; FREITAS-PACHECO, J. A. F. *Stochastic background from coalescences of neutron star-neutron star binaries*, *The Astrophysical Journal*, 642:455-461, 2006 May1.