



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-13016-PRE/8293**

**MODELO DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR PARA O  
SATÉLITE TOPEX/POSEIDON**

Gustavo Henrique Dian\*  
Mateus Brizzotti Andrade\*

\*Bolsista UNESP

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelos  
Drs. Hélio Koiti Kuga e Rodolpho Vilhena de Moraes

INPE  
São José dos Campos  
2005



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **MODELO DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR PARA O SATÉLITE TOPEX/POSEIDON**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Gustavo Henrique Dian (FEG/UNESP)

E-mail: [gustavo.dian@gmail.com](mailto:gustavo.dian@gmail.com)

Mateus Brizzotti Andrade (FEG/UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: [mateusbrizzotti@ig.com.br](mailto:mateusbrizzotti@ig.com.br)

Dr. Hélio Koiti Kuga (DMC / INPE, Orientador)

E-mail: [hkk@dem.inpe.br](mailto:hkk@dem.inpe.br)

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (DMA / FEG / UNESP, Orientador)

E-mail: [rodolpho@feg.unesp.br](mailto:rodolpho@feg.unesp.br)

Junho de 2005

## **AGRADECIMENTOS**

Eu, Gustavo Henrique Dian, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e ao INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) pela oportunidade fornecida para que eu desenvolvesse este trabalho juntamente com Dr. Hélio Koiti Kuga e Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes. Agradeço também a meus amigos da república e minha família pela consideração e apoio.

## SUMÁRIO

1.0 INTRODUÇÃO.....	3
2.0 TÓPICOS ESTUDADOS.....	4
2.1 LEIS DE KEPLER.....	4
2.2 LEIS DE NEWTON.....	4
2.3 PROBLEMA DOS DOIS CORPOS.....	6
2.4 PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR.....	9
2.5 MODELO DE MARSHALL E LUTHCKE (1994) PARA FORÇAS DE RADIAÇÃO ATUANDO NO SATÉLITE TOPEX/POSEIDON.....	13
3.0 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO.....	15
3.1 ALGORITMO PARA CÁLCULO DA FORÇA DE RADIAÇÃO.....	21
4.0 CONCLUSÕES.....	23
5.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	24

## 1.0 INTRODUÇÃO

O satélite TOPEX/Poseidon (Ocean Topography Experiment ou T/P) foi lançado no dia 10 de agosto de 1992 pelo foguete ARIANE, com a finalidade de estudar circulações oceânicas. Ele está em uma órbita circular congelada de 1336 km de altura e com uma inclinação de 66 graus, resultando em um rastreamento terrestre que se repete a cada 10 dias. Para atingir plenamente os requisitos de sua finalidade específica, tal missão foi planejada para que o erro na sua órbita não excedesse em 13 cm na direção radial sobre o período de 10 dias de repetição da órbita.

Caso o movimento orbital não fosse perturbado, as órbitas dos satélites artificiais terrestres seriam elipses de tamanhos e excentricidades constantes, em planos fixos e os satélites permaneceriam nessas órbitas indefinidamente. Entre os principais efeitos que fazem com que a órbita se altere com o tempo estão a não homogeneidade da distribuição de massa da Terra, a atração do Sol e da Lua, a pressão de radiação solar direta e indireta, o arrasto atmosférico, forças devidas às marés terrestres, arrasto Poynting Robertson, efeito Yarkovsky, etc.

A complexidade da forma do satélite TOPEX/Poseidon necessita de consideráveis análises de todas as contribuições de força na superfície. Na altura de 1336 km, a maior força não gravitacional que atua no satélite é a pressão de radiação solar. Em adição a radiação direta do sol, emissões albedo e infravermelho da Terra junto com emissões térmicas do satélite contribuem para a perturbação da órbita do satélite.

Um trabalho publicado em 1994 (Marshall and Luthcke, 1994) descreve com detalhes um modelo para pressão de radiação solar no satélite TOPEX/Poseidon, de modo que estas forças possam ser exatamente determinadas.

O objetivo principal do presente trabalho é desenvolver um algoritmo com o modelo de Marshall and Luthcke para calcular, a cada instante, as intensidades das forças de radiação.

A desenvolvimento de tal modelo é de grande importância para algumas pesquisas que estão sendo realizadas no Departamento de Matemática da FEG, em colaboração com o Departamento de Mecânica e Controle do INPE em São José dos Campos. De fato a determinação de órbitas com GPS, tema de pesquisa em comum entre as duas Instituições, precisa de uma órbita de referência e a do T/P é, em geral, a utilizada.

Neste trabalho foram desenvolvidas rotinas para o cálculo das forças causadas pela incidência do sol na superfície do satélite, para facilitar a implementação e soma dessa perturbação na órbita do satélite. Forças causadas pelas radiações albedo e infravermelho da Terra e emissões térmicas do satélite não foram consideradas.

## 2.0 TÓPICOS ESTUDADOS

Durante um estágio orientado realizado anteriormente ao período da bolsa e durante o período da bolsa, os tópicos abaixo foram estudados.

### 2.1 LEIS DE KEPLER

Farei uma breve introdução às Leis de Kepler, pois o que é realmente relevante para este projeto são as Leis de Newton, concluídas a partir destas leis.

Johanes Kepler (1571 – 1630), baseado nas observações de Tycho Brahe e após um minucioso estudo sobre o movimento dos planetas, concluiu:

1º) a) As trajetórias dos planetas em seus movimentos heliocêntricos são curvas planas e os planos que as contêm sempre passam pelo Sol.

b) A área varrida pelo raio vetor que liga o planeta ao Sol é proporcional ao tempo empregado para descrevê-la (Lei das Áreas).

2º) As trajetórias dos planetas são elipses nas quais o Sol sempre ocupa um dos focos.

3º) O quadrado dos tempos gastos pelos planetas para descreverem suas órbitas completas é proporcional aos cubos dos eixos máximos (Lei Harmônica).

### 2.2 LEIS DE NEWTON

Vejamos quais conclusões Isaac Newton (1643 – 1727) tirou destas leis quando procurou saber a que tipos de força estavam sujeitos os planetas, isto é, que tipo de forças produziriam trajetórias que satisfizessem as Leis de Kepler.

Consideremos um planeta P, de massa  $m$  e a uma distância  $r$  do Sol. Pela 1ª Lei de Kepler, podemos considerar um sistema cartesiano, ortogonal, no plano da órbita e com centro no Sol, como mostra a figura (2.2.1):

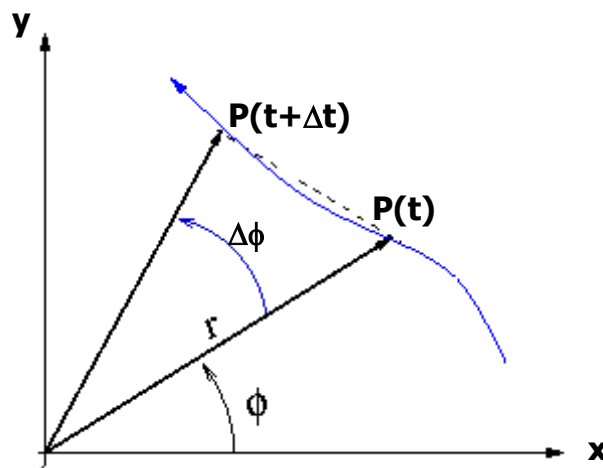


Figura (2.2.1) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Pela Lei das Áreas, temos:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\Phi = \text{constante} \cdot dt \quad (2.2.1)$$

E a força que age em cada instante sobre o planeta é dada por:

$$\vec{f} = m(\ddot{r} - r\dot{\Phi}^2) \frac{P-S}{r} \quad (2.2.2)$$

ou seja, “é uma força que tem sua linha de ação passando pelo centro do Sol”.

Da 2ª lei, Newton conclui que “a força é atrativa (dirigida para o Sol) e tem seu módulo inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol”, conforme a equação (2.2.3), obtida através de diversos cálculos matemáticos:

$$\vec{f} = -\frac{m}{r^2} \left[ \frac{C^2}{a(1-e^2)} \right] \frac{P-S}{r} \quad (2.2.3)$$

E da 3ª Lei de Kepler, podemos concluir que:

$$\mu = \mu' \quad (2.2.4)$$

O que significa dizer que a razão  $\mu$  independe do planeta.

Temos então: “A força que age em cada instante sobre os planetas é central, com centro no Sol, inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias ao Sol, diretamente proporcional à massa do planeta e o coeficiente de proporcionalidade independe do planeta”.

Suponhamos agora um planeta de massa  $m$ , colocado na presença do Sol, de massa  $M$ . Pelo princípio de ação e reação, o planeta irá aplicar sobre o Sol uma força  $\vec{F}$  de mesmo módulo que a  $\vec{f}$  e de sentido contrário, conforme a figura (2.2.2):

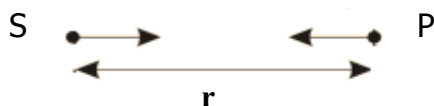


Figura (2.2.2) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Temos assim (podem ser encontradas em Vilhena de Moraes (1978)):

$$\vec{F} = -\frac{\mu' M}{r'^2} \frac{S-P}{r'} \quad (2.2.5) \quad \text{e} \quad \vec{f} = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{P-S}{r} \quad (2.2.6)$$

e, portanto:

$$\mu' M = \mu m \quad (2.2.7)$$

Isto é, a razão:

$$G = \frac{\mu'}{m} = \frac{\mu}{M} \quad (2.2.8)$$

independe do Sol e dos planetas, pois  $\mu'/m$  só depende do planeta P e  $\mu/M$  só depende do Sol (as constantes  $\mu$  e  $\mu'$  dependem do centro de forças).

A constante G é chamada constante da gravitação universal e  $\vec{f}$  pode ser escrita sob a forma:

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2.9)$$

Que é chamada Lei da Gravitação Universal.

### 2.3 PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

Enunciaremos o conhecido “Problema dos Dois Corpos”: considerem-se em um sistema de referência Galileano dois pontos materiais  $P_1$  e  $P_2$  de massas, respectivamente,  $m_1$  e  $m_2$  e que se atraem de acordo com a Lei de Newton, isto é, a força que  $m_j$  exerce sobre  $m_i$  é dada por:

$$\vec{f}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{P_i - P_j}{r^3} \quad (2.3.1)$$

onde  $i$  e  $j$  variam de 1 a 2 ( $i \neq j$ ) e  $r$ , módulo de  $\vec{r}$ , é a distância de  $P_i$  a  $P_j$ . Determinar o movimento de  $P_i$  e  $P_j$ .

Se chamarmos de  $\vec{r}_1$  a posição de  $P_1$  e  $\vec{r}_2$  a posição de  $P_2$ , teremos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{P_1 - P_2}{r} \quad (2.3.2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{P_2 - P_1}{r} \quad (2.3.3)$$



Estas equações formam um sistema de 6 equações diferenciais de 2ª ordem, ou seja, um sistema de 12 equações diferenciais de 1ª ordem, cuja solução completa exige 12 constantes de integração.

Seis destas constantes podem ser obtidas observando que o segundo membro das equações (2.3.2) e (2.3.3) são iguais e de sinal contrário.

Mas, por definição, a posição do centro de massa do sistema formado pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$  é dada por:

$$\vec{r}_g = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3.4)$$

logo,

$$\vec{r}_g = \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{A}t + \vec{B}) \quad (2.3.5)$$

isto é, o centro de massa do sistema está se movendo em movimento retilíneo uniforme;  $\vec{B}$  é a posição inicial e  $\vec{A}$  é a velocidade.

Chamaremos de  $\vec{r}_1'$  e de  $\vec{r}_2'$ , respectivamente, a posição de  $P_1$  e de  $P_2$  em relação ao centro de massa, como mostra a figura (2.3.1):

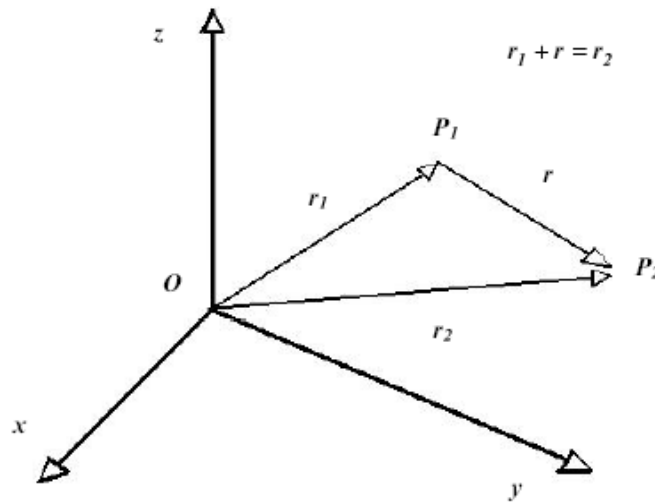


Figura (2.3.1) – Sistema de coordenadas no problema de dois corpos  
Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Teremos então:

$$\ddot{\vec{r}}_1' = -\frac{Gm_2}{r^2} \frac{(\vec{r}_1' - \vec{r}_2')}{r} \quad (2.3.6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2' = -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{(\vec{r}_2' - \vec{r}_1')}{r} \quad (2.3.7)$$

Se colocarmos a origem do sistema de referência no centro de massa, a equação (2.3.4) nos dará (podem ser encontradas em Vilhena de Moraes (1978)):

$$r^2 = r_1'^2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2 \quad (2.3.8)$$

$$\ddot{\vec{r}}_1' = -G \frac{m_1^3}{r_1'^2 (m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_1'}{r_1'} \quad (2.3.9)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2' = -G \frac{m_2^3}{r_2'^2 (m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_2'}{r_2'} \quad (2.3.10)$$

Sendo o movimento plano, trabalharemos no próprio plano e, portanto, expressaremos  $\dot{\vec{r}}$  da seguinte maneira:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} e^{i\phi} \vec{i} + r \dot{\phi} e^{i\phi} \vec{i} \quad (2.3.11)$$

E, conseqüentemente:

$$\left( \dot{\vec{r}} \right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (2.3.12)$$

Substituindo este valor em equações estudadas anteriormente, obtém-se:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 2 \left( \frac{\mu}{r} + E \right) \quad (2.3.13)$$

onde E é a energia específica  $\left( E = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \right)$ , podemos eliminar  $\dot{\phi}$  através da integral das áreas, obtendo:

$$\phi - \omega = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{C}{\sqrt{-C^2 \xi^2 + 2(\mu \xi + E)}} d\xi \quad (2.3.14)$$

Onde  $\omega$  é uma constante de integração. E após algum desenvolvimento algébrico com o segundo membro da equação (2.3.14), teremos como resposta:

$$\phi - \omega = \arccos \left( \frac{-\frac{\mu}{C} + C\xi}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{C^2}}} \right) \quad (2.3.15)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} \left[ 1 + \sqrt{2 \frac{EC^2}{\mu^2} + 1} \cos(\phi - \omega) \right] \quad (2.3.16)$$

Que é equivalente a:

$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\phi - \omega)} \quad (2.3.17)$$

Que é a equação de uma cônica em coordenadas polares onde:  $p$  é o semi latus rectum;  $a$  é o semi-eixo maior;  $e$  é a excentricidade da cônica; e  $(\phi - \omega)$  é o ângulo polar.

Da equação (2.3.16) podemos observar que

Se  $E < 0$ , então  $e < 1$ , isto é, a cônica será uma elipse.

Se  $E = 0$ , então  $e = 1$ , isto é, a cônica será uma parábola.

Se  $E > 0$ , então  $e > 1$ , isto é, a cônica será uma hipérbole.

Em geral, escolhemos para  $\tau$  o instante de passagem pelo pericentro. Já a constante  $\omega$  fixa a posição da cônica no plano da órbita, enquanto  $a$  e  $e$  fixam a forma e o tamanho dos elementos geométricos.

No caso geral (sistema de referência não colocado no plano da órbita), precisamos de mais dois elementos (duas constantes de integração) para fixar o plano.

Concluimos então que o movimento de  $P_2$  em relação a  $P_1$  será uma cônica e que  $P_1$  sempre ocupará um dos focos. Conforme as condições iniciais do movimento, a órbita será elíptica, parabólica ou hiperbólica.

## 2.4 PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR

(Pode ser encontrado em El'y Asberg, 1968).

Inicialmente é necessário fazer algumas observações sobre pressão:

$$1.^{\circ}) \textit{ pressão} \cong \frac{\textit{força}}{\textit{área}} = \frac{m \cdot a}{\textit{área}} = \frac{m \cdot \frac{v}{t}}{\textit{área}} = \frac{m \cdot v}{t \cdot \textit{área}} = \frac{\textit{quant. mov.}}{t \cdot \textit{área}} \quad (2.4.1)$$

Por outro lado:

$$\textit{int ens. fluxo} \cong \frac{\textit{energia}}{\textit{tempo} \cdot \textit{área}} = \frac{m \cdot v^2}{t \cdot \textit{área}} \quad (2.4.2)$$

Dividindo-se a intensidade do fluxo pela velocidade:

$$\frac{\textit{int ens. fluxo}}{v} = \frac{m \cdot v}{t \cdot \textit{área}} = \frac{\textit{quant. mov.}}{t \cdot \textit{área}} \quad (2.4.3)$$

Portanto:

$$\boxed{\textit{pressão} = \frac{\textit{fluxo}}{\textit{velocidade}}} \quad (2.4.4)$$

2.º) A energia de um fóton vale:

$$E = \hbar v \quad (2.4.5)$$

$\hbar$  ... constante de Planck,

$v$  ... frequência de um fóton.

O momento (quantidade de movimento) do fóton é dado por:

$$\mu = \frac{E}{c} = \frac{\text{fluxo} \cdot \text{tempo} \cdot \text{área}}{\text{velocidade da luz}} \quad (2.4.6)$$

$$\boxed{\text{pressão} = \frac{\mu}{t \cdot \text{área}} = \frac{\text{fluxo}}{\text{velocidade}}} \quad (2.4.7)$$

3.º) O Sol é obviamente a principal fonte de energia radiante para veículos espaciais dentro do sistema solar. Se a absorção da energia radiante no meio interplanetário é negligenciada, o fluxo por unidade de superfície pode ser escrito como:

$$S = S_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (2.4.8)$$

$r$ ... distância do veículo ao Sol,

$r_0$ ...raio médio da órbita da Terra,

$S_0$ ... intensidade do fluxo da radiação solar à distância de  $1 r_0$

$$S_0 = 1.94 \text{ cal/cm}^2 \text{ min} = 1.35 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ seg.}$$

$$q_0 = \frac{S_0}{c} = 4.65 \cdot 10^{-5} \text{ g cm/seg}^2$$

Se supormos um satélite perfeitamente esférico e absorvente (e com toda a superfície à mesma temperatura), a uma distância  $r$  do Sol (dada em u.a.):

$$\vec{p}_0 = \frac{1}{g} \left( \frac{A}{m} \right) \frac{q_0}{r_0^2} \vec{r}_0 \quad (2.4.9)$$

Pressão de radiação solar é uma quantidade vetorial definida pela equação (2.4.10):

$$\vec{q} = \pm \frac{\Sigma}{c} \vec{\tau} \quad (2.4.10)$$

onde:

$\Sigma$ ... intensidade do fluxo de energia radiante através de uma área unitária do elemento de superfície que está sendo considerado,

$c$ ...velocidade da luz,

$\vec{\tau}$ ...vetor unitário na direção da luz incidente,

+...radiação incidente e

-...radiação refletida ou emissão.

Como a pressão de radiação é produzida por fluxos de radiação incidente e refletidos, a magnitude desta pressão depende substancialmente do mecanismo de reflexão desta radiação. Consideramos os seguintes casos limites:

Absorção total da luz incidente (quando  $\bar{\alpha}$  radiação refletida)

Seja:

$S$ ... intensidade do fluxo de energia radiante através de uma superfície de área unitária normal ao fluxo e

$\alpha$ ... o ângulo entre as direções do fluxo luminoso e a normal da superfície.

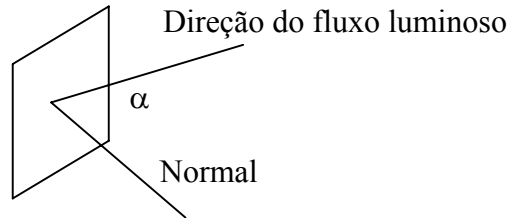


Figura (2.4.1) - Ângulo entre as direções do fluxo luminoso e a normal da superfície.

$$\Sigma = S \cos \alpha \quad (2.4.11)$$

$$\vec{q} = \frac{S \cos \alpha}{c} \vec{\tau} \quad (2.4.12)$$

## 2. Reflexão especular perfeita

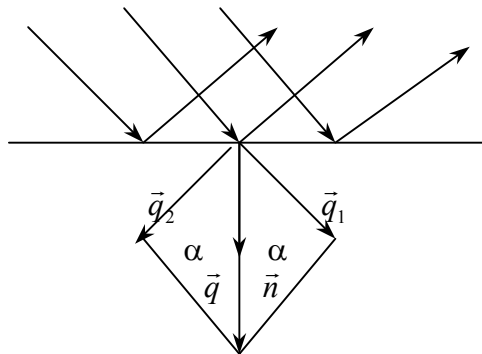


Figura (2.4.2) - Pressão de radiação incidente e refletida

$\vec{q}_1$  ... pressão de radiação incidente.

$\vec{q}_2$  ... pressão de radiação refletida

$$|\vec{q}_1| = |\vec{q}_2| = \frac{S \cos \alpha}{c} \quad (2.4.13)$$

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \quad (2.4.14)$$

$$\vec{q} = q\vec{n} \quad (2.4.15)$$

onde:

$$q = |\vec{q}| = 2 \frac{S \cos^2 \alpha}{c} \quad (2.4.16)$$

$$\therefore \vec{q} = 2 \frac{S \cos^2 \alpha}{c} \vec{n} \quad (2.4.17)$$

3. Reflexão difusa perfeita.

Neste caso:

$$\vec{q}_1 = \frac{S \cos \alpha}{c} \vec{\tau} \quad (2.4.18)$$

Para determinarmos  $\vec{q}_2$ , assumiremos a lei do espalhamento de Lambert:

$$d\Sigma = \eta \cos \gamma d\Omega \quad (2.4.19)$$

$d\Omega$ ... elemento de ângulo sólido,

$d\Sigma$ ... intensidade do fluxo refletido no ângulo sólido  $d\Omega$ ,

$\gamma$ ... ângulo entre o eixo do ângulo sólido e a normal da superfície e

$\eta$ ... constante

Mas,

$$d\Omega = 2\pi \sin \gamma d\gamma \quad (2.4.20)$$

Logo,

$$d\Sigma = 2\pi\eta \sin \gamma \cos \gamma d\gamma \quad (2.4.21)$$

$$\Sigma = \pi\eta \int_0^{\pi/2} \sin 2\gamma d\gamma = \pi\eta \quad (2.4.22)$$

Por outro lado, a intensidade do fluxo de energia radiante através de uma área unitária é dada pela equação (2.4.23):

$$\Sigma = S \cos \alpha \quad (2.4.23)$$

Temos assim, assumindo uma reflexão difusa perfeita:

$$\Sigma = S \cos \alpha = \pi\eta$$

$$\therefore \eta = \frac{S \cos \alpha}{\pi} \quad (2.4.24)$$

Logo:

$$d\Sigma = 2S \cos \alpha \sin \gamma \cos \gamma d\gamma \quad (2.4.25)$$

Considerações de simetria levam à conclusão de que as componentes do fluxo tangente à superfície refletora se cancelam mutuamente existindo, então, somente a componente normal  $d\vec{q}_2$ :

$$d\vec{q}_2 = \frac{2S \cos \alpha}{c} \sin \gamma \cos \gamma \cos \gamma \vec{n} d\gamma \quad (2.4.26)$$

$$\therefore \vec{q}_2 = \frac{2S \cos \alpha}{c} \vec{n} \int_0^{\pi/2} \sin \gamma \cos^2 \gamma d\gamma = \frac{2S \cos \alpha}{3c} \vec{n} \quad (2.4.27)$$

para o caso de reflexão difusa perfeita:

$$\vec{q} = \frac{S \cos \alpha}{c} \vec{\tau} + \frac{2}{3} \frac{S \cos \alpha}{c} \vec{n} \quad (2.4.28)$$

Se o mecanismo de reflexão é uma combinação de reflexão especular e difusa, então:

$$\vec{q} = \frac{S \cos \alpha}{c} \left[ (1 - k_1) \vec{\tau} + \left( 2k_1 \cos \alpha + \frac{2}{3} k_2 \right) \vec{n} \right] \quad (2.4.29)$$

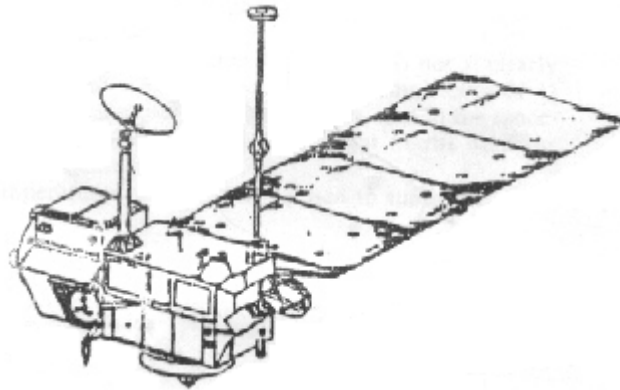
onde  $k_1$  e  $k_2$  são, respectivamente, os coeficientes de reflexão especular e difusa. Sendo que:  $0 \leq k_1, k_2 \leq 1$ .

## 2.5 MODELO MARSHALL E LUTHCKE (1994) PARA FORÇAS DE RADIAÇÃO ATUANDO NO SATÉLITE TOPEX/POSEIDON

Aqui o objetivo é primeiro descrever rapidamente o satélite TOPEX/Poseidon e sua missão e depois resumir o modelo de Marshall e Luthcke para forças de radiação.

O satélite TOPEX/Poseidon (Ocean Topography Experiment ou T/P), mostrado na figura (2.5.1), foi lançado no dia 10 de agosto de 1992 pelo foguete ARIANE, com a finalidade de estudar circulações oceânicas. Ele está em uma órbita circular congelada de 1336 km de altura e com uma inclinação de 66 graus, resultando em um rastreamento terrestre que se repete a cada 10 dias. Para atingir plenamente os requisitos de sua finalidade específica, tal missão foi planejada para que o erro na sua órbita não excedesse em 13 cm na direção radial sobre o período de 10 dias de repetição da órbita.

Ele possui um complexo sistema de controle de atitude devido ao eixo da placa solar. O ponto de incidência ideal do sol na placa solar exige do satélite uma guinada em torno do eixo Z (“yaw”). Para realização da guinada foi desenvolvido um algoritmo baseado no sistema de coordenadas fixo do satélite. Esse sistema de coordenadas tem origem dentro do corpo do satélite, não posicionado no centro de massa, com o eixo positivo Y apontando na direção oposta do eixo da placa solar, o eixo positivo Z apontando para o centro da Terra e o eixo positivo X completa o sistema. O sistema inercial da órbita tem origem no centro da Terra, com o eixo positivo X apontando perpendicular à órbita do satélite, o eixo positivo Z na direção da projeção do vetor incidente do sol na órbita do satélite, e o eixo positivo Y perpendicular a esses.



Figura(2.5.1) – Satélite TOPEX/Poseidon  
Fonte: Marshall and Luthcke (1994)

As maiores forças não gravitacionais que agem no satélite Topex/Poseidon são aquelas devido à pressão de radiação solar. O trabalho publicado em 1994 (Marshall and Luthcke, 1994) descreve com detalhes um modelo para pressão de radiação solar no satélite TOPEX/Poseidon de modo que estas forças, e os efeitos destas na determinação da órbita, possam ser exatamente determinadas.

Neste trabalho foi desenvolvido um micromodelo, mais computacionalmente intensivo, e um macromodelo, menos computacionalmente intensivo e mais adequado para determinações de órbitas precisas, para que os resultados pudessem ser comparados.

O macromodelo aproxima a superfície do satélite para uma combinação de placas planas alinhadas ao longo do sistema de coordenadas fixo do satélite, figura (2.5.2).

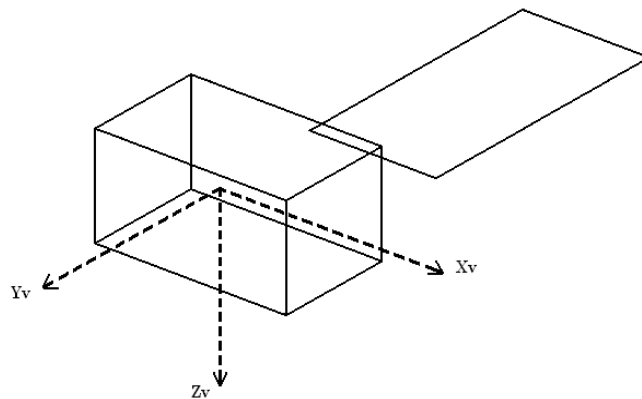


Figura (2.5.2) – Macromodelo.  
Fonte: Marshall and Luthcke (1994)

As forças de radiações devido a incidência solar, emissões albedo e infravermelho da Terra e de emissões térmicas produzidas pelas superfícies do satélite, em cada superfície composta, são computadas independentemente. Todos os efeitos de interações das placas, como sombreamento, reflexão e condução são ignorados. Então as forças são somadas para se ter o efeito total no centro de massa do satélite.



### 3.0 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O objetivo desse trabalho consistia em seguindo o modelo de Marshall e Luthcke desenvolver um algoritmo para calcular as forças de pressão de radiação solar atuando no satélite artificial Topex/Poseidon.

Foram desenvolvidas rotinas para o cálculo das forças causadas pela incidência do sol na superfície do satélite. Forças causadas pelas radiações albedo e infravermelho da Terra e emissões térmicas do satélite não foram consideradas.

O modelo de Marshall e Luthcke aproxima a superfície do Topex/Poseidon para uma combinação de placas planas, macromodelo, alinhadas ao longo do sistema de coordenadas fixo do satélite, figura (2.5.2). A força atuando em cada placa é dada pela equação (3.1), (Marshall and Luthcke, 1994).

$$F = \frac{GA \cos \theta}{c} \left[ 2 \left( \frac{\delta}{3} + \rho \cos \theta \right) \hat{n} + (1 - \rho) \hat{s} \right] \quad (3.1)$$

onde:

$G$  = fluxo de radiação do sol ( $W/m^2$ );

$A$  = área superficial de cada placa ( $m^2$ );

$\delta$  = coeficiente de reflexão difusa\*;

$\rho$  = coeficiente de reflexão especular\*;

\*porcentagem do total de radiação incidente.

$\hat{n}$  = vetor normal à placa;

$\hat{s}$  = vetor incidente do sol na placa;

$\theta$  = ângulo formado entre  $\hat{n}$  e  $\hat{s}$ ;

$c$  = velocidade da luz(m/s);

Os dados referentes ao satélite, como posição e velocidade, estão no sistema de coordenadas inercial da terra ( $X, Y, Z$ ) e as forças de pressão de radiação são decompostas no sistema de coordenadas fixo da órbita do satélite ( $X_0, Y_0, Z_0$ ), ver figura (3.4), por isso é necessário uma matriz que faça a conversão entre esses dois sistemas.

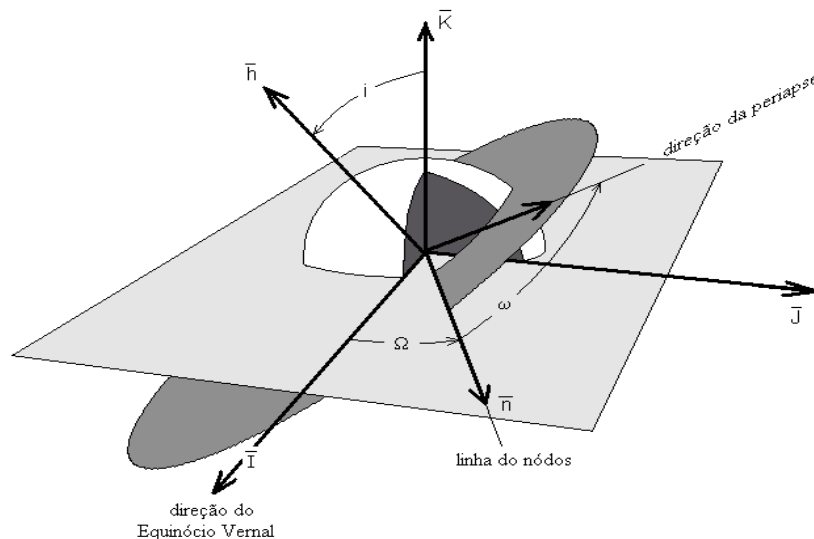


Figura (3.1) – Elementos Keplerianos( $\Omega, \omega$  e  $i$ ).

A matriz de rotação que relaciona o sistema de coordenadas fixo do satélite com o sistema inercial da terra é dada em função dos elementos keplerianos:  $\Omega$  (nódo ascendente),  $\omega$  (argumento do pericentro) e  $i$  (inclinação), ver figura (3.1):

$$\vec{r}_{in} = R(\Omega, \omega, i)\vec{r}_{orb} \quad (3.2)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

A posição do sol na órbita do satélite é dada em função dos ângulos  $\beta'$  e  $\alpha'$ :

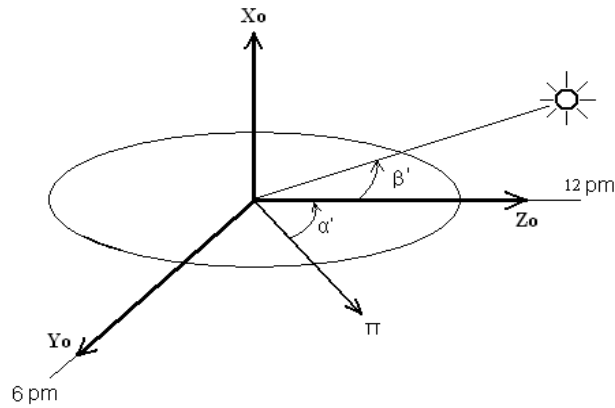


Figura (3.2) – Ângulos  $\beta'$  e  $\alpha'$ .

Da figura (3.2) obtemos que:

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}_0 \\ \widehat{Y}_0 \\ \widehat{Y}_0 \end{bmatrix}_{orb} = \begin{bmatrix} \cos \beta' \cos \alpha' \\ \cos \beta' \sin \alpha' \\ \sin \beta' \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

como:

$$\vec{r}_{orb} = R(\Omega, \omega, i)^T \vec{r}_{in} \quad (3.4)$$

então:

$$\vec{r}_{oorb} = R(\Omega, \omega, i)^T \vec{r}_{oin} \quad (3.5)$$

considerando a posição do sol no sistema inercial ( $\vec{r}_{oin}$ ) conhecida, obtemos os ângulos  $\beta'$  e  $\alpha'$  pela equação (3.6):

$$\begin{bmatrix} \cos \beta' \cos \alpha' \\ \cos \beta' \sin \alpha' \\ \sin \beta' \end{bmatrix} = R(\Omega, \omega, i)^T \vec{r}_{oin} \quad (3.6)$$

O ângulo  $\Omega$ , que mostra a posição do satélite na órbita, figura (3.3) e (3.4), pode ser calculado sendo conhecidos os ângulos  $\alpha'$  e  $f$  (anomalia verdadeira):

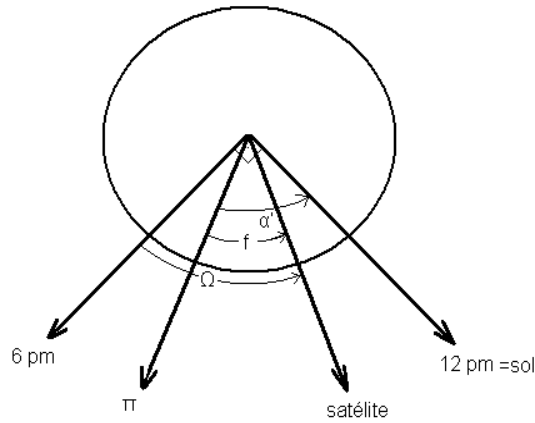


Figura (3.3) – Ângulo  $\Omega$

$$\Omega = (90 - \alpha') + f \quad (3.7)$$

Para se obter o ponto de incidência ideal do sol na placa solar, o satélite deve realizar uma guinada em torno do eixo  $Z_v$  com ângulo  $\Psi$ , definido como ângulo de guinada, figura (3.4).

Esse ângulo é dado em função de  $\beta'$  e  $\Omega$ , conforme a tabela 3.1:

**Tabela 3.1 - Disposições da direção guinada**  
**Fonte: Marshall, Antreasian, Rosborough and Putney (1991)**

Disposição da direção guinada	Região $\beta'$	Região $\Omega$	$\Psi(\beta', \Omega)$
Fixa	$+0.1^\circ \leq \beta' < +15^\circ$	toda	$\Psi = 0^\circ$
	$-15^\circ < \beta' \leq -0.1^\circ$	toda	$\Psi = 180^\circ$
	$\beta' \geq +80^\circ$	toda	$\Psi = 90^\circ$
	$\beta' \leq -80^\circ$	toda	$\Psi = -90^\circ$
Sinusoidal	$\beta' > +15^\circ$	toda	$\Psi = 90^\circ + (90^\circ - \beta') \cos \Omega$
	$\beta' < -15^\circ$	toda	$\Psi = -90^\circ - (90^\circ + \beta') \cos \Omega$
Subindo	$\beta' = +15^\circ$	$90^\circ \leq \Omega \leq 180^\circ$	$\Psi = \beta' \cos^2 \Omega$
	$\beta' = -15^\circ$	$270^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$	$\Psi = \beta' \cos^2 \Omega - 180^\circ$
Descendo	$\beta' = +15^\circ$	$180^\circ \leq \Omega \leq 270^\circ$	$\Psi = \beta' \cos^2 \Omega$
	$\beta' = -15^\circ$	$0^\circ \leq \Omega \leq 90^\circ$	$\Psi = \beta' \cos^2 \Omega - 180^\circ$

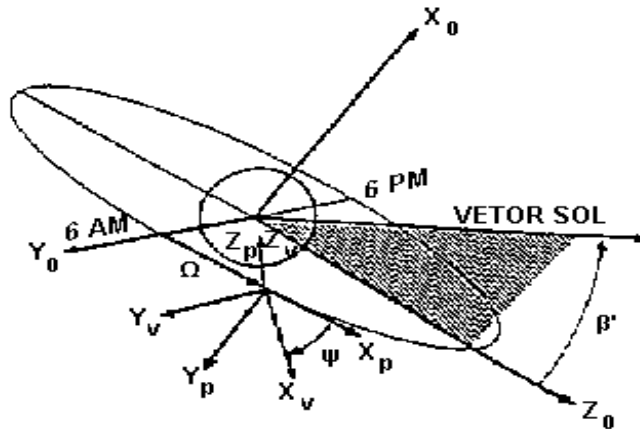


Figura (3.4) – Ângulo  $\Psi$   
 Fonte: Marshall and Luthcke (1994)

Na figura (3.4) temos que  $X_p$ ,  $Y_p$  e  $Z_p$  são o sistema de coordenadas ao longo do rastreo e  $X_v$ ,  $Y_v$  e  $Z_v$  são o sistema de coordenadas fixo do satélite.

Para levar as forças no sistema de coordenadas fixo do satélite ( $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$ ) para o sistema de coordenadas fixo da órbita é feita uma matriz de rotação em função do ângulo  $\Psi$ , equação (3.9):

$$R(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{orb} = \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_v \quad (3.9)$$

A placa solar realiza uma arfagem (“pitch”) com ângulo  $\Phi$ , definido como ângulo de arfagem, para obter o ponto de incidência ideal do sol (Artresian and Rosborough, 1992). O ângulo  $\Phi$  é obtido em função dos ângulos  $\Psi$ ,  $\beta'$  e  $\Omega$ :

$$\Phi = 180^\circ + \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \Omega \cos \beta'}{\cos \Psi \cos \Omega \cos \beta' - \sin \Psi \sin \beta'} \right] \quad (3.10)$$

Os vetores normais a cada placa são dados na tabela 3.2:

**Tabela 3.2- Vetores normais a placa no sistema de coordenadas fixo do satélite**  
 Fonte: Marshall and Luthcke (1994)

Placa	X	Y	Z
X+	1,0	0,0	0,0
X-	-1,0	0,0	0,0
Y+	0,0	1,0	0,0
Y-	0,0	-1,0	0,0
Z+	0,0	0,0	1,0
Z-	0,0	0,0	-1,0
SA+	1,0	0,0	0,0
SA-	-1,0	0,0	0,0

Na equação (3.1) observamos que a força devido a pressão de radiação solar em cada placa é dada em função dos vetores  $\hat{s}$  e  $\hat{n}$ . Para computar a força devemos obtê-la no sistema inercial, ou seja, devemos decompor os vetores  $\hat{s}$  e  $\hat{n}$ .

Para obter o vetor  $\hat{n}$  no sistema inercial temos que:

$$\text{Placa X+}: \quad \hat{n}_{x+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{x+} \quad (3.12)$$

Da equação (3.12) obtemos  $\hat{n}_1$ .

$$\text{Placa X-}: \quad \hat{n}_{x-} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{x-} \quad (3.14)$$

Da equação (3.14) obtemos  $\hat{n}_2$ .

$$\text{Placa Y+}: \quad \hat{n}_{y+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{y+} \quad (3.16)$$

Da equação (3.16) obtemos  $\hat{n}_3$

$$\text{Placa Y-}: \quad \hat{n}_{y-} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{y-} \quad (3.18)$$

Da equação (3.18) obtemos  $\hat{n}_4$ .

$$\text{Placa Z+}: \quad \hat{n}_{z+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{z+} \quad (3.20)$$

Da equação (3.20) obtemos  $\hat{n}_5$ .

Placa Z-:  $\hat{n}_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  (3.21)

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{z-} \quad (3.22)$$

Da equação (3.22) obtemos  $\hat{n}_6$ .

Placa SA+: Para a placa solar o vetor  $\hat{n}_{SA+}$  é dado em função do ângulo de arfagem  $\Phi$ :

$$\hat{n}_{SA+} = \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ 0 \\ -\text{sen } \Phi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{SA+} \quad (3.24)$$

Da equação (3.24) obtemos  $\hat{n}_7$ .

Placa SA-: Análogo a placa solar SA+, o vetor  $\hat{n}_{SA-}$  é dado em função do ângulo de arfagem  $\Phi$ :

$$\hat{n}_{SA-} = \begin{pmatrix} -\cos \Phi \\ 0 \\ \text{sen } \Phi \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\hat{n}_{in} = R(\Omega, \omega, i)R(\Psi)\hat{n}_{SA-} \quad (3.26)$$

Da equação (3.26) obtemos  $\hat{n}_8$ .

Agora, para calcular  $\hat{s}$  devemos resolver a equação (3.27):

$$\hat{s} = \frac{\vec{r}_{oin} - \vec{r}}{|\vec{r}_{oin} - \vec{r}|} \quad (3.27)$$

sendo que os vetores posição do sol ( $\vec{r}_{oin}$ ) e posição do satélite ( $\vec{r}$ ) são conhecidos.

As características óticas e térmicas de cada placa são dadas na tabela 3.3:

**Tabela 3.3 – Características óticas e térmicas das placas**  
**Fonte: Marshall and Luthcke (1994)**

	<b>X+</b>	<b>X-</b>	<b>Y+</b>	<b>Y-</b>	<b>Z+</b>	<b>Z-</b>	<b>SA+</b>	<b>SA-</b>
Área	3,74	3,77	8,27	8,07	8,67	8,44	21,4	21,44
Reflexão Especular	0,201	0,244	0,886	0,782	0,239	0,275	0,05	0,17
Reflexão Difusa	0,375	0,386	0,302	0,339	0,390	0,363	0,22	0,66
Emissividade	0,769	0,995	0,873	0,714	0,770	0,746	0,87	0,88
Temperatura A	181	168	191	190	240	103	236	234
Temperatura C	233	178	18	63	98,5	125	110	96
Tempo D	621	282	759	426	519	680	805	806
Tempo F	111	120	624	487	767	413	828	866
Theta X	1,25	1,00	1,05	1,00	1,06	1,15	1,00	1,00

O termo cosseno na equação (3.1) é definido por:

$$\cos \theta_i = \hat{n}_i \cdot \hat{s} \quad (3.28)$$

no qual  $i$  é a placa de interesse.

Agora temos todos os dados necessários para calcular a força de pressão de radiação solar na superfície do satélite Topex/Poseidon:

A força em cada placa é dada por:

$$F_i = \frac{GA_i \cos \theta_i}{c} \left[ 2 \left( \frac{\delta_i}{3} + \rho_i \cos \theta_i \right) \hat{n}_i + (1 - \rho_i) \hat{s} \right] \quad (3.29)$$

utilizando para todas as placas,  $i=1, 8$ , temos a força total atuando no satélite:

$$F = \sum_{i=1}^8 F_i \quad (3.30)$$

### 3.1 ALGORITMO PARA CALCULO DA FORÇA DE RADIAÇÃO

1- Calcular  $\beta'$  e  $\alpha'$

Dados: - posição do sol no sistema coordenadas inercial da Terra,  $\vec{r}_{\odot in}$  ;  
- matriz  $R(\Omega, \omega, i)$ .

Usar equação (3.6) para calcular  $\beta'$  e  $\alpha'$ .

Usar equação (3.7) para calcular  $\Omega$ .

2- Calcular ângulo  $\Psi$

Dados: - ângulos  $\beta'$  e  $\Omega$ .

Usar a tabela 3.1 para calcular  $\Psi$ .

3- Calcular ângulo  $\Phi$

Dados: - ângulos  $\beta'$ ,  $\Omega$  e  $\Psi$ .

Usar equação (3.10) para calcular  $\Phi$ .

4- Calcular para cada placa o efeito da pressão de radiação solar

Dados: - matriz  $R(\Omega, \omega, i)$ ;

- posição do satélite no sistema de coordenadas inercial da Terra,  $\vec{r}$  ;

- posição do sol no sistema de coordenadas inercial da Terra,  $\vec{r}_{\text{sol}}$ ;
- ângulos  $\Psi$  e  $\Phi$ ;
- Tabela 3.3.

Usar equações (3.11) até (3.26) para decompor o vetor normal à superfície,  $\hat{n}$ , no sistema de coordenadas inercial da Terra.

Usar equação (3.27) para obter o vetor direção do sol,  $\hat{s}$ , no sistema inercial da Terra.

Usar equações (3.28) até (3.30), para calcular a força resultante no centro de massa do satélite.



## 4.0 CONCLUSÕES

O satélite TOPEX/Poseidon (Ocean Topography Experiment ou T/P) foi desenvolvido com o objetivo de estudar as circulações oceânicas da Terra. Para realizar seu objetivo o erro na sua órbita não pode ser maior do que 13 cm na direção radial sobre o período de 10 dias de repetição da órbita.

Para se obter a precisão requerida para a missão, forças de perturbação da órbita devem ser consideradas. Para o satélite TOPEX/Poseidon a maior força atuando em sua superfície é a de pressão de radiação solar.

Um trabalho publicado em 1994 (Marshall and Luthcke, 1994) descreve com detalhes um modelo para pressão de radiação solar do satélite TOPEX/Poseidon, de modo que estas forças possam ser exatamente determinadas. Este leva em consideração as formas complexas do satélite e todas as forças de pressão de radiação atuando no satélite (devido ao sol, albedo e infravermelho da Terra e emissões térmicas do satélite).

O objetivo dessa pesquisa foi desenvolver um algoritmo computacional para calcular as forças de pressão de radiação solar atuando no satélite TOPEX/Poseidon seguindo o modelo de Marshall e Luthcke.

Para realizar o objetivo o modelo de Marshall e Luthcke foi desenvolvido detalhadamente. O desenvolvimento consistiu em decompor as forças de pressão de radiação, dadas em vetores correspondentes a superfície do satélite e a incidência do sol na superfície, para o sistema de coordenadas inercial da Terra, a fim de que tais forças possam ser obtidas. Todas as matrizes de rotação foram calculadas e todas as tabelas com os dados necessários para os cálculos foram inseridas no trabalho. Forças de pressão de radiação devido ao albedo e infravermelho da Terra e emissões térmicas do satélite não foram consideradas.

Como resultado do desenvolvimento obtivemos a força total atuando no centro de massa do satélite, realizando assim o objetivo da pesquisa.

Com a força de pressão de radiação detalhadamente calculada, a implementação de um programa de computador fica facilitada. Assim a perturbação na órbita pode ser obtida e a precisão orbital requerida para a missão do TOPEX/Poseidon pode ser alcançada, pois foi desenvolvido um modelo específico para este satélite.

## 5.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Kuga, H.K., “Técnicas de determinação de órbita de satélites artificiais.” Em “Fundamentos de tecnologia espacial”, editado por Prado, A.F.B.A. e Kuga, H.K., Cap. 11, p. 137-160, 2001.
- Marshall, J. A., Antreasian, P.G., Rosborough, Putney, B.H., “Modeling Radiation Forces Acting on Satellites for Precision Orbit Determination,” *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, (Durango,CO), AAS Paper 91-357, Aug.1991.
- Artesian, P.G., and Rosborough, G.W., ”Prediction of Radiant Energy Forces on the TOPEX/POSEIDON Spacecraft,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 29, No. 1,1992, pp. 81-90.
- Marshall, J. A. and Luthcket, S. B., “Modelling Radiation Forces on TOPEX/Poseidon for Precision Orbit Determination,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol 31, No. 1, January-February, 1994.
- Vilhena de Moraes, R., “Trajetória de Veículos Espaciais,” (Publicação Interna), ITA, São José dos Campos, 1978.
- Vilhena de Moraes, R., “Non-Gravitational Disturbing Forces,” *Adv. Space Res.* Vol. 14, No. 5, pp(5)45-(5)68, 1994.
- Vieira Neto, E., “Introdução à Mecânica Celeste,” Apostila da 8º Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia, FEG, Guaratinguetá, 2004.
- El’y Asberg, P.E., “Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites”, *Mechanics of space Flight*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1967.

*Algumas das referências citadas referem-se a obras consultadas para a elaboração do relatório, embora não tenham sido referenciadas no texto.*