



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-13003-PRE/8280**

**DETERMINAÇÃO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA VIA ENERGIA  
DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS**

Juan Galvarino Cerda Balcazar\*  
Rosana Aparecida Nogueira de Araújo\*

\*Bolsista FEG/ UNESP

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo  
Dr. Antonio F Bertachini de A Prado



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **DETERMINAÇÃO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA VIA ENERGIA DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS.**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Juan Galvarino Cerda Balcazar (FEG-UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [mec04226@feg.unesp.br](mailto:mec04226@feg.unesp.br)  
(de Março/2005 a Julho/2005)

Rosana Ap.<sup>da</sup> Nogueira de Araújo (FEG-UNESP, ex-bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [fis00041@feg.unesp.br](mailto:fis00041@feg.unesp.br)  
(de Agosto/2004 a Fevereiro/2005)

Dr. Antônio F. Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)  
E-mail: [prado@dem.inpe.br](mailto:prado@dem.inpe.br)

**COLABORADOR**

Dr. Othon Cabo Winter (FEG-UNESP)

Maio de 2005

# SUMÁRIO

## **CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO TEÓRICA**

- I- O problema de três corpos
- II- O problema circular restrito de três corpos
- III- Formulação matemática

## **CAPÍTULO II – METODOLOGIA**

## **CAPÍTULO III – RESULTADOS E ANÁLISES**

- I- 1ª Abordagem – Limitando o tempo de integração
- II- 2ª Abordagem: Análise gráfica

## **CAPÍTULO IV – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

## INTRODUÇÃO

O nome “esfera de influência” refere-se a uma região no espaço em que a influência gravitacional de um determinado corpo é predominante em relação à influência de outros corpos.

As esferas de influência atualmente adotadas consideram apenas fatores constantes, como as massas e as distâncias dos corpos envolvidos resultando, portanto em uma esfera de influência de tamanho fixo.

Neste trabalho é proposto levar em consideração efeitos dinâmicos do encontro entre dois corpos na determinação da esfera de influência. Isso é feito considerando as velocidades relativas entre os corpos envolvidos, bem como a configuração geométrica do encontro, mais adiante, fatores como a aceleração, o ângulo de entrada, etc..

O que se pretende é determinar a dependência da influência gravitacional de um corpo sobre um outro corpo em função da velocidade com que este se aproxima, e desta forma obter uma formulação matemática para o cálculo da esfera de influência em função desta velocidade.

Com esse objetivo, duas diferentes abordagens foram necessárias para o estudo do problema proposto e serão apresentadas neste trabalho.

## I- INTRODUÇÃO TEÓRICA.

### I. O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS.

O problema de dois corpos que descreve a interação gravitacional entre dois pontos de massa, pode ser resolvido analiticamente e a solução é a equação geral das cônicas. No entanto, o caso particular mais simples e talvez mais importante do problema de N corpos é o caso em que  $N=3$ , referente ao problema de três corpos. Mesmo assim nem esse caso possui uma solução analítica fechada.

O problema de três corpos é separado em problema geral dos três corpos, em que é estudado o movimento das três partículas interagindo gravitacionalmente entre si, e em problema restrito de três corpos.

Existem soluções particulares conhecidas para esse caso, como, as soluções de Lagrange. O subcaso conhecido como “Problema Restrito de Três Corpos” é um dos tópicos mais investigados em Mecânica Celeste, existindo uma grande quantidade de trabalhos publicados na literatura que abordam esse assunto.

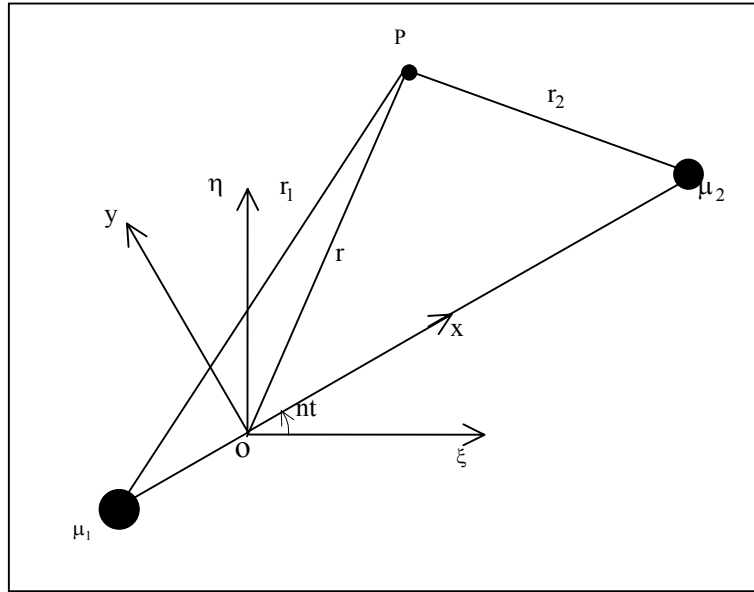
### II. O PROBLEMA CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS.

No problema circular restrito de três corpos, é estudado o movimento de uma partícula  $m_3$ , de massa desprezível, que sofre a ação gravitacional de dois outros corpos  $m_1$  e  $m_2$ . Os outros dois corpos têm seu movimento descrito pelo problema de dois corpos.

Como foi considerado que a partícula  $m_3$  possui massa muito pequena em relação aos outros dois corpos, podemos dizer que ela não perturba o movimento destes, por isso o problema é chamado de restrito. E recebe o nome de circular porque o corpo de massa  $m_2$  está em órbita circular ao redor do corpo principal ( $m_1$ ).

#### **Equações do movimento.**

Considere um sistema de referência inercial de coordenadas  $(\xi, \eta)$  centrado no centro de massa do sistema (ponto O), como mostra a Figura (1);



**Figura 1:** Esquema do problema de três corpos onde os sistemas de referência inercial  $(\xi, \eta)$  e girante  $(x, y)$  estão relacionados. A origem O está localizada no centro de massa dos dois corpos

Vamos assumir que as duas massas exercem uma força na partícula, embora a partícula não afete as duas massas.

Sendo, o eixo  $\xi$ , o eixo ao longo da linha que une  $m_1$  a  $m_2$  no tempo  $t=0$ , com o eixo  $\eta$  perpendicular a eles e ao plano orbital das duas massas, e  $(\xi_1, \eta_1)$  e  $(\xi_2, \eta_2)$  as coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$ . Como  $m_2$  está em órbita circular ao redor de  $m_1$  será utilizado um sistema conveniente de unidades de medida de forma que a distância de separação entre eles, que é constante, seja  $a = 1$ , e que as unidades de tempo e massa sejam escolhidas de forma que  $G(m_1+m_2)=1$ . Nesse sistema de unidades a terceira Lei de Kepler leva à  $n = 1$ . Como  $m_1 > m_2$ , será definido que:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

de forma que:

$$\mu_1 = 1 - \mu_2 \quad \text{e} \quad \mu_2 = \mu \tag{2}$$

logo:  $\mu_1 + \mu_2 = 1$

As equações do movimento da partícula, no sistema inercial são:

$$\ddot{\xi}_3 = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{r_2^3} \quad (3)$$

$$\ddot{\eta}_3 = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta_3}{r_2^3}$$

onde:

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 \quad (4)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2$$

e  $(\xi_3, \eta_3)$  são as coordenadas da partícula. Como as massas principais estão se movendo em órbitas circulares ao redor do centro de massa, a distância entre elas é constante. Logo, essas massas movem-se com velocidade angular também constante. Portanto pode ser considerado o movimento da partícula em um sistema de referência que gira junto com as massas principais.

Considerando agora um sistema de coordenadas girantes  $(x,y)$  com origem no centro de massa. A direção do eixo  $x$  é escolhida de forma que os corpos principais estejam sempre situados nesse eixo. O eixo  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$ . A figura 1 ilustra essa situação.

As coordenadas de  $m_1$  e  $m_2$  são  $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$  e  $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \quad (5)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2$$

Onde  $(x,y)$  são as coordenadas da partícula em relação ao sistema girante.

Estas coordenadas relacionam-se com as coordenadas do sistema inercial através de uma rotação simples, dada pela seguinte matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6)$$

Se nós diferenciarmos cada componente dessa matriz duas vezes, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

e:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Dessa matriz, concluímos que :

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\sin(nt) = \left[ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos(nt) + \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin(nt) \quad (9)$$

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x)\sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y)\cos(nt) = \left[ \mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin(nt) - \left[ \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos(nt)$$

Multiplicando essas duas equações por  $\cos(nt)$  e  $\sin(nt)$  respectivamente e somando-as, e multiplicando a primeira por  $-\sin(nt)$  e a segunda por  $\cos(nt)$  e somando-as, obtemos as equações do movimento da partícula no sistema girante:

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \quad (10)$$

$$(\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) = -\left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y \quad (11)$$

Podemos escrever essas equações na forma:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{e} \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (12)$$

onde:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (13)$$



### III. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para a análise do problema é necessário o cálculo das energias inicial e final da partícula, pois somente assim pode-se afirmar se um corpo esteve, está ou se já deixou a região de influência de um outro corpo.

Para o cálculo dessas energias será usada a seguinte função, bastante conhecida da mecânica celeste:

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (15)$$

Para o cálculo da energia da partícula em relação ao Sol essa função fica:

$$E = \frac{1}{2} v_{ps}^2 - \frac{\mu_{sol}}{r_{sol}} \quad (16)$$

onde:

$v_{ps}$ : é a velocidade da partícula em relação ao Sol, no sistema inercial.

$r_{sol}$ : é a distância da partícula ao Sol.

Analogamente, para o cálculo da energia em relação ao planeta, temos:

$$E = \frac{1}{2} v_{pp}^2 - \frac{\mu_{plan}}{r_{plan}} \quad (17)$$

onde :

$v_{pp}$ : é a velocidade da partícula em relação ao planeta no sistema inercial.

$r_{plan}$ : é a distância da partícula ao planeta.

As velocidades da partícula em relação ao Sol ( $v_{ps}$ ) e em relação ao planeta ( $v_{pp}$ ) são velocidades relativas, e podem ser calculadas através de:

$$v_{pp} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_{plan})^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{plan})^2} \quad (18)$$

$$v_{ps} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_{sol})^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_{sol})^2}$$

Como pode ser observado, são necessárias as componentes da velocidade da partícula ( $\xi, \eta$ ), do planeta ( $\xi_{\text{plan}}, \eta_{\text{plan}}$ ), e do Sol ( $\xi_{\text{sol}}, \eta_{\text{sol}}$ ), no sistema inercial, que devido à configuração inicial (figura 2) são dadas no sistema girante.

A transformação dessas componentes da velocidade da partícula do sistema girante para as do sistema inercial, é possível utilizando a matriz de rotação (7), obtendo-se então:

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - ny)\cos(nt) - (\dot{y} + nx)\sin(nt) \tag{19}$$

$$\dot{\eta} = (\dot{x} - ny)\sin(nt) + (\dot{y} + nx)\cos(nt)$$

Para o cálculo das velocidades do planeta e do Sol no sistema inercial, será feito o seguinte desenvolvimento geométrico e matemático.

- Para o planeta

Na figura (2) é demonstrado como se dá a evolução orbital do planeta. No sistema inercial, ele se move com uma velocidade  $\vec{v}$  ao redor do Sol. No sistema girante ele se move em uma órbita circular em torno do baricentro do sistema, estando parado em relação ao Sol.

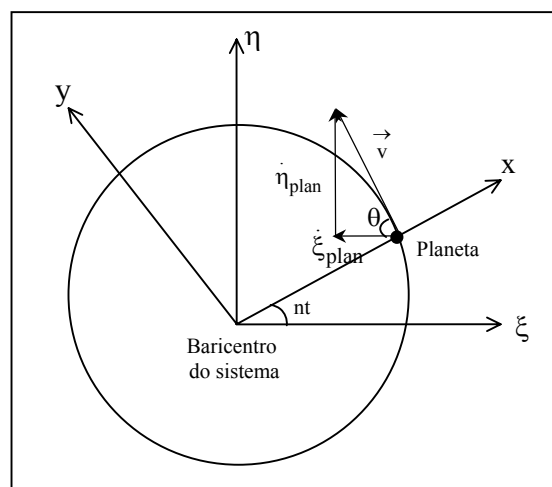


Figura 2: Representação da evolução orbital do planeta no sistema girante. Nessa figura  $\theta = 90^\circ - nt$ .

Dessa situação, obtêm-se que:

$$\dot{\xi}_{\text{plan}} = v \cos(90^\circ - nt) = v(\cos(90^\circ) \cos(nt) + \sin(90^\circ) \sin(nt))$$

e portanto:

$$\boxed{\dot{\xi}_{\text{plan}} = v \sin(nt)} \quad (20)$$

e ainda que:

$$\dot{\eta} = v \sin(90^\circ - nt) = v(\sin(90^\circ) \cos(nt) - \cos(90^\circ) \sin(nt))$$

e então:

$$\boxed{\dot{\eta}_{\text{plan}} = v \cos(nt)} \quad (21)$$

▪ Para o Sol

A mesma figura pode ser considerada para o cálculo dos componentes da velocidade do Sol no sistema inercial, já que este assim como o planeta também possui movimento circular em relação ao baricentro do sistema. Sendo assim as componentes  $(\dot{\xi}_{\text{sol}}, \dot{\eta}_{\text{sol}})$  também serão dadas por:

$$\boxed{\dot{\xi}_{\text{sol}} = v \sin(nt)} \quad \boxed{\dot{\eta}_{\text{plan}} = v \cos(nt)} \quad (22)$$

No sistema girante, a velocidade do Sol e do planeta é nula (eles estão sobre o mesmo eixo (x), estando portanto parado um em relação ao outro).

No sistema inercial, eles movem-se com uma velocidade linear dada por:

$$v = \omega r \quad (23)$$

em termos orbitais:  $\omega = n$ , e  $r$  é a distância que o corpo se encontra do ponto de rotação, sendo portanto  $r = \mu_1$  para o planeta, e  $r = -\mu_2$  para o sol. Substituindo esses valores em (20), (21) e nas equações (22), tem-se que:

$$v = n\mu_1 \quad (\text{planeta}) \quad (24)$$

$$v = n\mu_2 \quad (\text{Sol})$$

Substituindo (22) em (18, 19 e 20), chegamos em:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{\text{plan}} &= \mu_1 \text{sen}(nt) \\
\dot{\eta}_{\text{plan}} &= \mu_1 \text{cos}(nt) \\
\dot{\xi}_{\text{sol}} &= -\mu_2 \text{sen}(nt) \\
\dot{\eta}_{\text{sol}} &= -\mu_2 \text{cos}(nt)
\end{aligned}
\tag{25}$$

Com o cálculo dessas componentes da velocidade do planeta e do Sol no sistema inercial, é possível voltar em (18) e obter as velocidades relativas da partícula em relação ao planeta e ao Sol ( $v_{ps}$  e  $v_{pp}$ ), e por fim calcular a energia da partícula em relação ao planeta ( $E_{\text{plan}}$ ) e em relação ao Sol ( $E_{\text{sol}}$ ).

## II- METODOLOGIA

Temos por objetivo obter uma função para o cálculo do raio da esfera de influência de um corpo, considerando inicialmente determinados parâmetros como: as massas envolvidas, a velocidade com que a partícula se aproxima, e o parâmetro de aproximação “d”.

Para isso, consideramos inicialmente a seguinte configuração;

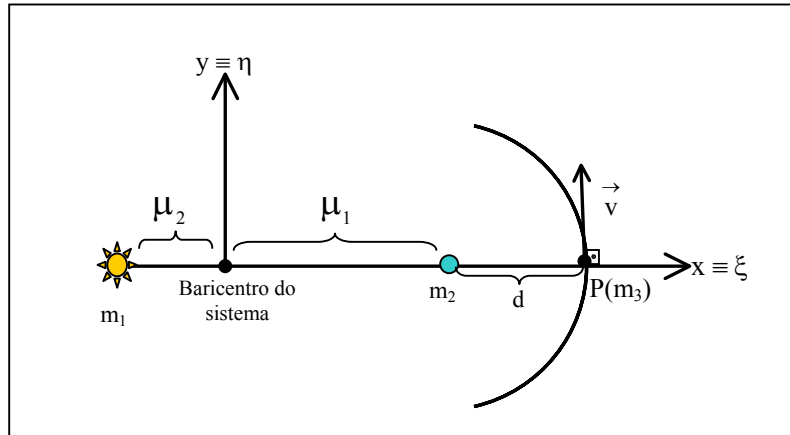


Figura 3: Condição Inicial.

A partir de agora, para esse problema, iremos assumir que  $m_1$  é o Sol,  $m_2$  um planeta cuja massa será variada, e  $m_3$  uma partícula que orbita ao redor do Sol, mas que em um determinado momento sofre uma grande aproximação com o planeta tendo sua energia alterada.

Nessa figura,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são respectivamente, a distância entre os corpo de massa  $m_2$  e  $m_1$  ao baricentro do sistema, e “d” é o parâmetro de aproximação, que é a distância mínima de aproximação da partícula (P) ao corpo de massa  $m_2$ .

Observando essa condição inicial imposta propositalmente, e mostrada na Figura 2, podemos chegar a algumas conclusões.

Inicialmente o sistema girante  $(x,y)$  coincide com o sistema inercial  $(\xi,\eta)$ . Como a partícula é colocada exatamente sobre o eixo  $x$ , sua posição inicial não terá componente em  $y$ , sendo portanto dada, pela simples soma das distâncias  $\mu_1$  e “d”. O mesmo é válido para a obtenção da velocidade da partícula, que nessa configuração é perpendicular ao eixo  $x$ , tendo portanto somente componentes em  $y$ . Assim, as condições iniciais do problema podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 + d & y &= 0 \\ \dot{x} &= 0 & \dot{y} &= v \end{aligned} \quad (26)$$

Utilizando a linguagem FORTRAN e o integrador Gauss-Radau foi redigida uma rotina para realizar integrações numéricas que forneçam o valor da energia do problema de dois-corpos para a partícula ao longo do período de integração.

Para a análise do problema, necessariamente a velocidade relativa entre a partícula e o planeta tem de permanecer a mesma enquanto o parâmetro de aproximação “d” varia. No entanto, conforme d aumenta, a órbita da partícula torna-se cada vez mais externa, o que significa que a sua velocidade esta sendo alterada.

Para atender a essa necessidade de manter a velocidade relativa constante, o seguinte procedimento é adotado:

- 1- Fixa-se a velocidade relativa ( $v_{pp}$ ) entre a partícula e o planeta.
- 2- Essa velocidade relativa ( $v_{pp}$ ) é a diferença entre a velocidade da partícula no sistema inercial ( $v_p$  que corresponde à componente  $\dot{\eta}$  da velocidade da partícula no sistema inercial), e a velocidade do planeta ( $v$ ) no sistema inercial (que é igual a 1). Então:

$$v_{pp} = v_p - 1 \quad \text{ou} \quad v_p = v_{pp} + 1 \quad (27)$$

- 3- A matriz de rotação (7) relaciona as componentes da velocidade do sistema girante com as do sistema inercial, então:

$$\dot{y} = \dot{\eta} - x \quad \text{ou} \quad \dot{y} = v_p - x \quad (28)$$

## II- RESULTADOS

### 1ª Abordagem – Limitando o tempo de integração

Nesta abordagem, entramos no programa com as condições iniciais dadas por (14), consideramos diversas partículas com diferentes velocidades em relação ao planeta (velocidade relativa), e para cada uma dessas velocidades, variamos o parâmetro de aproximação “d”

O método usado consiste em fixar a velocidade relativa da partícula em relação ao planeta, variar o parâmetro de aproximação “d”, integrar dentro de um intervalo de tempo estipulado e analisar a variação de energia sofrida pela partícula.

O intervalo de tempo de integração estipulado foi  $t=2$ . Assim no tempo  $t=0$  a partícula se encontra a uma distância  $d$  do planeta com uma energia inicial  $E_i$ . Após a integração, em  $t=2$  a partícula teve sua energia alterada devido ao encontro com o planeta, passando a estar com a energia final  $E_f$ . Tendo conhecidas as energias final e inicial, é possível saber qual foi a ordem de grandeza dessa variação. Isto é feito calculando a razão entre essas energias, sendo a variação  $\Delta E$  dada por:

$$\Delta E = 1 - \frac{E_i}{E_f} \quad (29)$$

Agora se torna necessário estipular quando consideramos que a partícula foi ou não influenciada pelo planeta, ou seja, se ela está fora ou dentro da região de influência.

Neste trabalho foi considerado que se a variação de energia sofrida pela partícula for da ordem de  $10^{-2}$  a partícula estaria dentro da região de influência, e que ela estaria fora da esfera de influência para variações menores ou iguais a  $10^{-3}$ . O valor do parâmetro de aproximação “d” para o qual ocorre essa mudança na ordem de grandeza passa a ser considerado o raio da esfera de influência.

Abaixo esta uma tabela feita para  $v_{pp}=0,0020$  (ou  $v_p=1,0020$ ) e com tempo de integração  $t=2$ , que exemplifica o que foi dito.

Nela é observado que quando  $d=0,023$  a variação de energia  $\Delta E$  foi 0,001081 (ou seja mudou na terceira casa decimal). Consideramos portanto, dentro do critério adotado que a partícula se encontra dentro da região de influência), mas quando afastamos um pouco mais a partícula, para  $d=0,024$ , a variação de energia  $\Delta E$  foi 0,0009940 (ou seja mudou na quarta casa decimal e portanto consideramos, dentro do critério adotado, que a partícula se encontra fora da região de influência).

Tabela 1: Dados de “d” ,  $\dot{Y}$  e resultados da variação de energia.

<b>d</b>	<b><math>\dot{Y}</math></b>	<b>Variação</b>
0,00001	0,001993005	colidiu
0,0005	0,001503005	colidiu
0,001	0,001003005	0,077170605996
0,005	-0,002996995	0,050099773925
0,010	-0,007996995	0,006868707865
0,015	-0,012996995	0,002570222898
0,020	-0,017996995	0,001425980406
0,021	-0,018996995	0,001293988756
0,022	-0,019996995	0,001180043036
0,023	-0,020996995	0,001080765957
→ 0,024	-0,021996995	0,000994037549
0,025	-0,022996995	0,000917457537

Repetindo este método para diferentes velocidades, é possível obter um conjunto de pares de variáveis (R,v) onde R é o raio da esfera de influência (que corresponde ao d para o qual a variação de energia é maior que o limite estabelecido), e v é a velocidade relativa entre a partícula e o planeta. Isso foi feito e o resultado é mostrado na tabela abaixo.

Tabela 2: Relação do raio com a velocidade.

<b>R (raio)</b>	<b>Velocidade (<math>v_p</math>)</b>
0,023	1,0020
0,022	1,0040
0,021	1,0060
0,019	1,0080
0,017	1,010



É importante observar que o resultado está dentro do que era esperado, isto é, o raio da esfera de influência é inversamente proporcional à velocidade.

### Problemas com a 1ª abordagem

Apesar dessa abordagem ter nos dado um resultado dentro do esperado, ela apresenta alguns problemas devido ao fato dela estar ligada ao tempo de integração. A integração parava em  $t=2$ . Porém, constatou-se que esse tempo não garantia que de fato a partícula deixou a região de influência do planeta. Isto significa que a energia final (energia da partícula no tempo  $t=2$ ) ainda poderia sofrer alterações se a integração continuasse, ou ainda, a partícula poderia sofrer outros encontros com o planeta em sua evolução orbital resultando em mudanças na energia. Este segundo caso é mostrado no gráfico abaixo. Nele temos a distância da partícula  $r_2$  em relação ao planeta feito para  $t=10$ . Observe que em determinado momento (aproximadamente  $t=7$ )  $r_2$  diminuiu, para depois voltar a crescer o que vem nos dizer que a partícula se aproximou novamente do planeta resultando numa variação de energia depois de  $t=2$ .

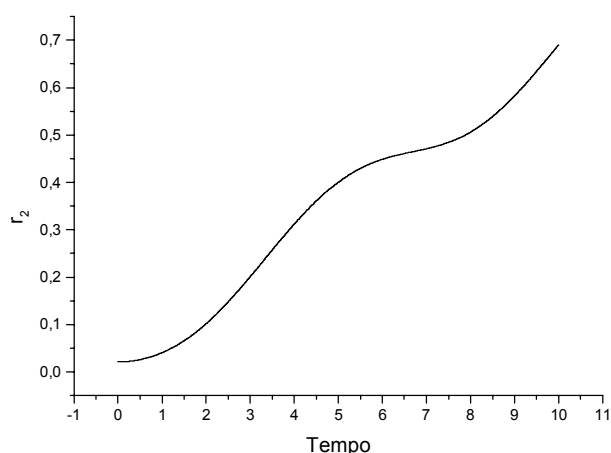


Figura 4 : Gráfico 1 Distância da partícula em relação ao planeta ( $r_2$ )

Diante dessa dificuldade imposta pelo método é sugerida uma nova abordagem, desta vez independente do tempo.

### 2ª Abordagem: Análise gráfica

Esta abordagem consiste em

1. fixar a velocidade relativa da partícula em relação ao planeta, variar o parâmetro de aproximação “d”, e integrar dentro de um intervalo de tempo estipulado ( $t=2$ ).
2. Fazer em um mesmo gráfico a curva que mostra a variação de energia pelo tempo que uma partícula com a a velocidade fixa sofreu para diferentes “d”.
3. Graficamente observar para qual valor do parâmetro de aproximação “d” não houve variação de energia (dentro de um limite considerado)

Neste caso o “d” considerado como o limite do raio da esfera de influência é aquele no qual a variação de energia total proporcionada é menor que a diferença entre a energia final para esse d e para o d imediatamente anterior a ele

O gráfico abaixo exemplifica o que foi dito:

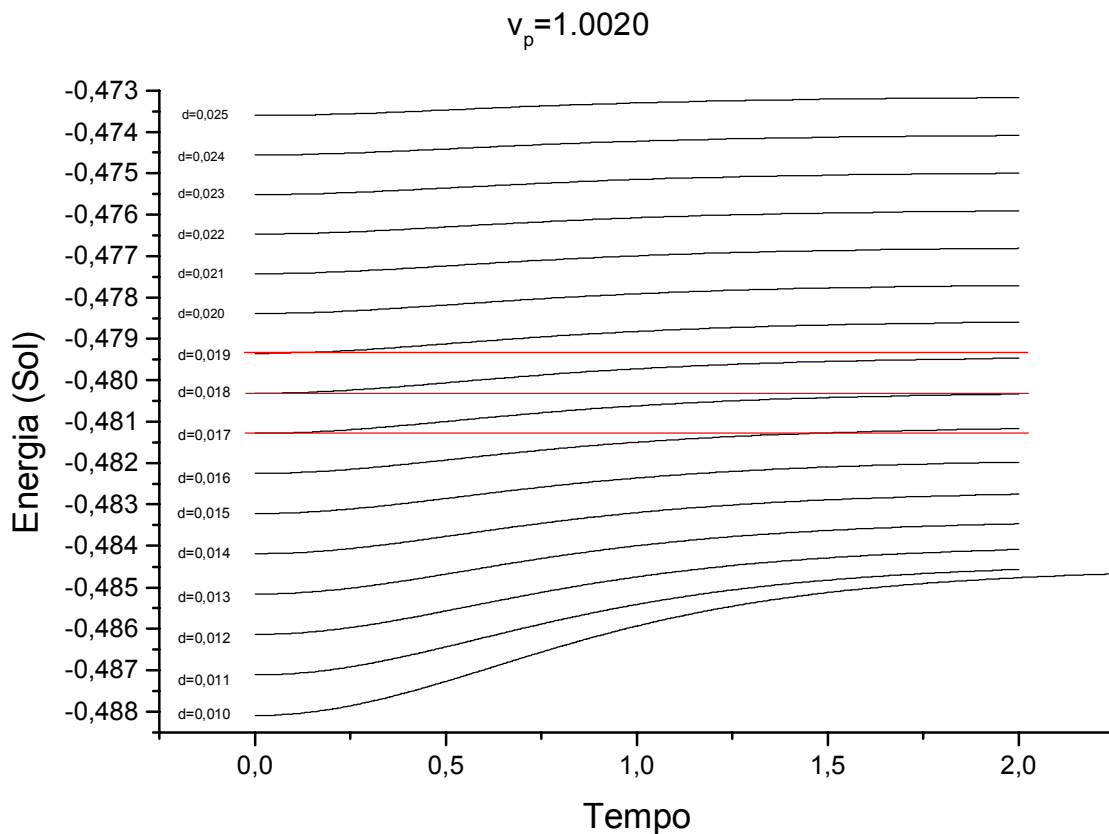


Figura 5: Gráfico de Energia( Sol ) pelo tempo, para vários raios.

A velocidade  $v_p=1.0020$  é mantida constante. O “d” é variado. Repare que para os valores menores do “d” a variação de energia proporcionada é maior. Conforme “d” vai aumentando, a variação vai se tornando cada vez menor, até que se torna

praticamente constante. Repare que traçando uma linha (em vermelho) na curva feita para  $d=0,017$ , ela intercepta a curva feita para  $d=0,016$ , o que significa que a diferença de energia entre uma partícula no ponto  $d=0,016$  e outra no ponto  $d=0,017$  é menor que a variação sofrida pela própria partícula nesse ponto.

Então neste caso consideramos que o raio da esfera de influência do planeta adotado (com massa  $m_2=10^{-3}$ ) para um partícula com velocidade  $v_p=1.0020$  é  $R=0.017$ . Obtemos então um par de pontos  $(R, v_p)$ . Com um conjunto maior desses pares é possível obter a relação entre o raio da esfera de influência de um planeta com a velocidade das partículas.

Esse procedimento foi feito para outras velocidades e o resultado é mostrado na tabela abaixo.

**Tabela 3:** Relação da velocidade da partícula em relação a esfera de influência.

Velocidade da partícula ( $v_p$ )	Raio da esfera de influência (R)
1,0008	0,020
1,0009	0,019
1,0010	0,019
1,0020	0,018
1,0030	0,018
1,0040	0,017
1,0050	0,016
1,0060	0,016
1,0070	0,015
1,0080	0,012

Esses dados fornecem o seguinte gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade, e conseqüentemente da função que possibilita o cálculo da raio de esfera de influência de um planeta com massa  $m^2=10^{-3}$  para partículas com diferentes velocidades.

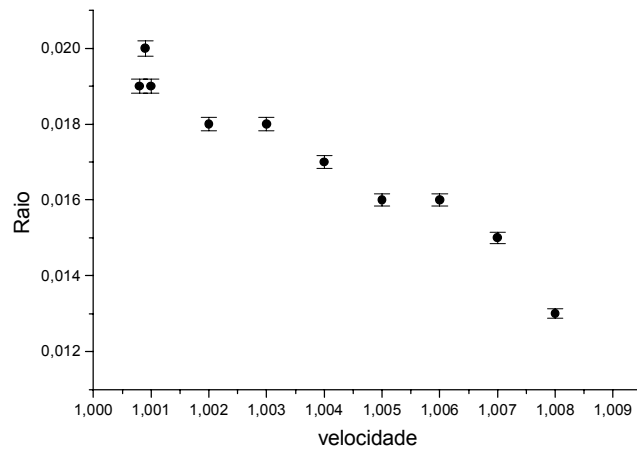


Figura 6: Gráfico de Raio de influência pela velocidade da partícula.

Aproximando esses pontos por uma reta, foi feito então o ajuste linear que forneceu a seguinte função:

$$R(v) = (0,82315 \pm 0,06799)v + (-0,80304 \pm 0,06769)$$

#### IV- CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O estudo aqui sugerido trata-se de algo muito novo, não havendo, portanto estudos anteriores que pudessem ser usados como ponto de partida.

Por isso, até o presente momento o que foi feito é uma série de teste para encontrar qual o método mais apropriado para que o objetivo do trabalho seja atingido. Neste trabalho foram mostradas duas diferentes abordagens, sendo que a primeira, apesar de apresentar o resultado esperado se mostrou pouco precisa, já que abria possibilidades de diversos outros fenômenos acontecerem, comprometendo os dados obtidos. Diante disso, foi adotada uma nova abordagem, que vem se mostrando mais apropriada.

Os resultados apresentados nesse relatório são preliminares, apenas vem nos dizer que o método adotado é válido, mas para atingir o resultado esperado que é a obtenção de uma função que possibilite o cálculo do raio da esfera de influência de um planeta em função da velocidade de diferentes partículas que dele se aproxime, é necessária ainda uma série de análises relacionadas ao intervalo de velocidades para os quais o método funciona, bem como introduzir esse mesmo estudo feito apenas para uma massa para diferentes grandezas de massas.

De uma maneira geral, pode-se concluir que os resultados aqui obtidos são satisfatórios e promissores.