



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13023-PRE/8300

**ANÁLISE DE BIFURCAÇÃO DE OSCILAÇÕES FORÇADAS NÃO-
LINEARES EM PLACAS CIRCULARES COM BORDA LIVRE**

Roberto de Oliveira Possidente*

*Bolsista FEG/UNESP

Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE), orientado pelo
Dr. José Ernesto de Araújo Filho

INPE
São José dos Campos
2005



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Análise de bifurcação de oscilações forçadas não-lineares em placas circulares com borda livre

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)

Bolsista: Roberto de Oliveira Possidente (FEG/UNESP)
ele04336@feg.unesp.br

Orientador: José Ernesto de Araújo Filho (LIT/INPE)
ernesto@lit.inpe.br

Junho de 2005

Índice

Índice de Figuras	3
1 – Introdução	4
1.1 - Objetivo do Trabalho	4
1.2 – Desenvolvimento Realizado	5
2 – Histórico do estudo sobre Dinâmica de Placas	6
3 – Sistemas Lineares.....	8
3.1 – Sistemas com um grau de liberdade	8
3.1.1 – Sistema linear massa-mola	8
3.1.2 – Simulação de um sistema de um grau de liberdade	9
3.2 – Sistemas com dois graus de liberdade	12
3.2.1 – Dois sistemas massa-mola acoplados.....	12
3.2.2 – Simulação de um sistema com dois graus de liberdade	14
3.3 – Sistema com infinitos graus de liberdade	19
3.3.1 – Simulação de um sistema com infinitos graus de liberdade.....	19
4 – Sistemas Não-Lineares.....	23
4.1 – Sistemas com um grau de liberdade	23
4.1.1 – Simulação de um sistema não-linear de um grau de liberdade	23
4.2 – Sistemas com dois graus de liberdade	26
4.2.1 – Simulação de um sistema não-linear com dois graus de liberdade	26
5 - Equações de Movimento de Placas Circulares em coordenadas Cilíndricas.....	32
5.1- Excitação harmônica em placas circulares de borda livre.....	35
5.2- Análise da dinâmica não-linear de placas circulares com borda livre	36
6 – Conclusão.....	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45
APÊNDICE.....	Erro! Indicador não definido.

Índice de Figuras

<i>Figura 1: Resposta translacional e retrato de fase do sistema com um grau de liberdade – 1º Caso.....</i>	<i>9</i>
<i>Figura 2: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 2º Caso.....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 3: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 3º Caso.....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 4: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 1º Caso</i>	<i>15</i>
<i>Figura 5: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 2º Caso</i>	<i>16</i>
<i>Figura 6: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 3º Caso</i>	<i>17</i>
<i>Figura 7: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 4º Caso</i>	<i>18</i>
<i>Figura 8: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 1º Caso.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 9: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 2º Caso.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 10: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 3º Caso.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 11: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 1º Caso.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 12: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 2º Caso.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 13: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 3º Caso.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 14: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 4º Caso.....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 15: Resposta do movimento transversal – últimos 2000 pontos analisados.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 16: Resposta do movimento transversal – últimos 500 pontos analisados.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 17: Configurações de deformação da placa nos instantes $t=5,10,40,60,90$ e 100.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 18: Resposta – amplitude entre 0 e 1 – passo 0,1 – últimos 2000 pontos.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 19: Resposta - amplitude entre 0 e 1 – passo 0,1 – últimos 500 pontos.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 20: Resposta considerando 10 amplitudes normalizadas.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 21: Resposta – amplitude entre 0 e 1 - passo 0,333.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 22: Resposta considerando 3 amplitudes normalizadas.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 23: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,1 – últimos 2000 pontos.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 24: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,1 – últimos 500 pontos.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 25: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,333 – últimos 2000 pontos.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 26: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,333 – últimos 500 pontos.....</i>	<i>43</i>

1 – Introdução

Uma análise da dinâmica não-linear de placas circulares com borda livre é apresentada neste trabalho. Em particular, é investigado o comportamento de bifurcação de oscilações forçadas não-lineares em placas circulares com borda livre. Placas circulares têm muitas aplicações, principalmente em engenharia civil, mecânica e aeroespacial. Elas são largamente empregadas na construção de vários sistemas estruturais, incluindo prédios, estruturas aeroespaciais, componentes eletrônicos e estruturas marinhas.

Na realidade, vários fatores complicativos estão presentes no sistema físico de uma placa, tais como: anisotropia, forças ‘inplane’, espessura não-linearmente variável, grandes deflexões, deformação de cisalhamento, inércia rotacional etc. Esses fatores são responsáveis pelo comportamento não-linear do sistema fazendo com que modelos lineares não sejam eficientes na análise da dinâmica do sistema. Logo, a modelagem de um sistema mecânico ou estrutural por equações e condições de contorno lineares não é realista.

Se o sistema está sujeito à uma excitação paramétrica que resulta em uma resposta de instabilidade, evidentemente, tal modelo prevê amplitudes ilimitadas de vibração, pois o crescimento previsto da resposta é exponencial. Conseqüentemente, um modelo mais realista inclui termos não-lineares que atuam como limitadores da resposta prevista. Alguns fenômenos físicos interessantes, que não ocorrem em sistemas lineares, podem aparecer em sistemas não-lineares, dentre os quais podemos destacar o surgimento do fenômeno de bifurcação.

Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de um ou mais parâmetros chamados parâmetros de controle. Um sistema dinâmico pode então ser pensado como função do parâmetro de controle. Portanto, o comportamento dinâmico do sistema pode ser bem diferente se o valor desse parâmetro for alterado.

Variando-se o parâmetro de controle pode-se eventualmente mudar o diagrama de fases qualitativamente, ou seja, novos pontos estacionários podem se tornar instáveis e vice-versa, quando um valor crítico do parâmetro de controle é atingido. No ponto de valor crítico do parâmetro de controle o sistema dinâmico perde a estabilidade estrutural. Diz-se que ele sofreu uma bifurcação e o ponto de valor crítico é o ponto de bifurcação.

1.1 - Objetivo do Trabalho

Neste trabalho é realizada uma análise do comportamento dinâmico de oscilações forçadas de sistemas não-lineares em placas circulares com borda livre.

Um modelo matemático de vibração não-linear de uma placa circular com borda livre, sujeita à excitação harmônica concentrada no ponto central da placa, foi empregado no presente trabalho. Através da variação dos valores de alguns parâmetros de controle, tais como: frequência e amplitude do sinal de excitação, foi feita a análise do comportamento dinâmico não-linear da placa.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre sistemas de vibração e dinâmica não-linear. Foram pesquisados livros publicados por pesquisadores da área, para formar uma base de conhecimento sobre sistemas de vibração e dinâmica não-linear. Após esse estudo, foi realizada uma pesquisa sobre a dinâmica não-linear de estruturas, especificamente, de placas circulares. Para tal pesquisa, foram utilizadas as seguintes bibliotecas: (1) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais; (2) Universidade Estadual Paulista – Campus Guaratinguetá; (3) Instituto Tecnológico da Aeronáutica. Os artigos e periódicos foram pesquisados nas bibliotecas já mencionadas e na internet, através das bases de dados: (1) Web of Science – www.webofscience.com (2) Capes – www.periodicos.capes.gov.br, (3) Scirus – www.scirus.com; (4) IEE Explorer – www.ieee.org/portal/site; e dos sites de busca: (1) yahoo (Brasil) – www.yahoo.com.br, (2) google – www.google.com

1.2 – Desenvolvimento Realizado

Como etapa inicial realizou-se simulações de sistemas mecânicos de vibração de um, dois e infinitos graus de liberdade, através de Scripts do MatLab. Os sistemas de um e dois graus de liberdade simulados eram compostos por conjuntos massa-mola-amortecedor, onde a resposta à vibração livre e forçada foram obtidas utilizando o método de Range-Kutta para resolução aproximada do sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes da modelagem do sistema.

Os métodos utilizados para obtenção dos modelos matemáticos dos sistemas foram baseados em princípios físicos, tais como: Leis de Newton e Principio de D'Alembert. Verificou-se o comportamento dinâmico desses sistemas empregando tanto modelos lineares quanto modelos não lineares. Sendo que para obtenção destes foi considerada a característica não-linear do comportamento da força de restauração das molas do sistema, ou seja, foi considerado um termo não linear característico da constante elástica das molas.

No caso linear, para simulação do sistema de infinitos graus de liberdade, sistema estrutural, foi empregado um modelo matemático que representa a vibração linear livre de uma membrana circular com borda fixa. Onde a equação diferencial parcial que governa o movimento de vibração da membrana foi obtida através da Teoria Clássica de Membranas, conforme o livro de Magrab [2]. Com a simulação do modelo foram obtidos os modos naturais de vibração da membrana considerando a combinação de n círculos nodais com m diâmetros nodais.

2 – Histórico do estudo sobre Dinâmica de Placas

Geralmente, encontra-se na natureza estruturas sujeitas à carregamentos dinâmicos, ou seja, sujeitas à cargas cuja magnitude, direção ou ponto de aplicação varia com o tempo. A resposta dinâmica do sistema é constituída pelas deflexões e tensões variantes no tempo.

A obtenção da resposta dinâmica de vibração forçada não linear de placas circulares e a análise do comportamento de bifurcação do sistema, no caso específico de borda livre, é raramente vista na literatura científica. Um bom entendimento do comportamento dinâmico para componentes estruturais é crucial para a avaliação do design, performance e confiabilidade de sistemas mecânicos e estruturais.

O estudo da dinâmica de placas tem sido realizado há várias décadas por pesquisadores da área, sendo que os livros de Timoshenko [1], Magrab [2] e a monografia de Leissa [3] são excelentes referências sobre dinâmica linear de placas. Muitos artigos científicos com base na Teoria Clássica de placas foram publicados até o presente momento, como pode ser observado através da revisão da literatura feita por Leissa [5] e Liew [8]. Em [9], este autor formula uma teoria linear tri-dimensional de vibração livre de placas circulares, diferentemente dos autores da maioria dos artigos sobre dinâmica linear de placas, os quais se baseiam em teorias lineares em duas dimensões. Liew obteve as frequências naturais de vários modos normais de vibração da placa através do método de Rayleigh-Ritz e investigou a perturbação da resposta de frequência através da variação das condições de contorno e espessura da placa. Porém, sistemas estruturais são inerentemente não lineares, logo, fatores complicativos, tais como os expostos por Leissa [4] e [6], tornam a utilização de modelos lineares inadequados para a representação de sistemas de vibração de placas, além de dificultarem a obtenção da solução exata do problema. Leissa [7] analisou particularidades adotadas nas soluções de modelos lineares aplicados à componentes estruturais e obteve resultados inconsistentes da resposta dinâmica da placa. Tal fato comprova que a teoria linear não é capaz de prever a resposta correta para sistemas reais, devido estes apresentarem propriedades não-lineares.

Uma revisão dos artigos mais recentes sobre vibração não-linear de placas é feita por Sathyamoorthy [10], onde a maioria das referências citadas trata dos efeitos da não-linearidade geométrica no comportamento dinâmico. Kang [11] apresenta um método de análise, baseado em equações dinâmicas de elasticidade tridimensionais, para determinação das frequências de vibração livre e modos de placas circulares e anulares, com variação não-linear de espessura ao longo da direção radial da placa. A vibração de placas laminadas compostas finas de geometria não-linear é estudada pelos métodos de elemento finito hierárquico e balanço harmônico por Ribeiro [13], sendo que a resposta forçada e livre são analisadas e a estabilidade das soluções é investigada pela

aplicação da teoria de Floquet. Sridhar, Mook and Nayfeh analisam em [14] e [15] as respostas simétricas e assimétricas, respectivamente, de uma placa circular à uma excitação harmônica tendo uma frequência próxima à uma das frequências naturais. As equações de von Kàrmàn são utilizadas e o método de escalas múltiplas, uma técnica de perturbação, é empregado para resolver as equações governantes não-lineares. Nayfeh and Nayfeh [17] implementam métodos de perturbação e escalas múltiplas para estudar os modos não-lineares de sistemas contínuos de uma dimensão com não-linearidades inerciais e geométricas cúbicas. Em [18], Nayfeh and Balachandran fazem uma revisão da teoria e experimentos sobre a influência das interações modais na resposta não-linear de sistemas estruturais e dinâmicos excitados harmonicamente. Chia [19] investiga analiticamente as vibrações de larga amplitude de placas circulares com borda fixa. O método Garlekin é empregado na formulação das soluções, que são obtidas numericamente através do método de Range-Kutta. Dumir [20] trata da análise transiente e estática assimétrica geometricamente não-linear de placas circulares espessas cilindricamente ortotrópicas sujeitas à carregamentos centrais discretos e uniformemente distribuídos.

Uma importante referência sobre oscilações não-lineares de placas é o livro de Chia [23] que apresenta vários exemplos de vibração livre e forçada de placas com diversos formatos sob condições de contorno diversas. Yeh, Chen, and Lai [24] estudam as condições que possivelmente produzem o movimento caótico e o comportamento de bifurcação para grandes deflexões de uma placa circular termo-elástica simplesmente suportada com espessura variável. A equação diferencial parcial governante é derivada pelo método Garlekin e várias características incluindo espectro de Fourier, retrato de fase, mapa de Poincar'e e diagramas de bifurcação são numericamente obtidas. Touzé, Thomas and Chaigne, realizam um estudo teórico e experimental, em [25] e [26] respectivamente, sobre vibrações forçadas assimétricas não-lineares de placas circulares com borda livre. Sendo que a excitação é harmônica, com uma frequência próxima a frequência natural de um modo assimétrico da placa. As equações de von Kàrmàn são utilizadas para estabelecer as equações governantes e o método de escalas múltiplas é empregado para se obter a solução analítica aproximada.

3 – Sistemas Lineares

O estudo sobre sistemas mecânicos lineares de vibração serve como introdução à análise de sistemas não lineares, que é o assunto de interesse deste trabalho. Dentre as características observadas estão o deslocamento e a velocidade translacional da massa e a análise de estabilidade através do retrato de fase do sistema. As equações matemáticas que descrevem os modelos físicos simulados são obtidas empregando-se o princípio de D'Alembert.

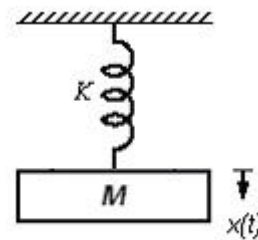
3.1 – Sistemas com um grau de liberdade

3.1.1 – Sistema linear massa-mola

O movimento retilíneo de uma massa m presa a uma mola de constante k é governada pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0 \quad w^2 = k/m$$

Modelo Físico do Sistema



Se a massa for solta com condições iniciais não triviais, ou seja, se $x(0)$ e $x'(0)$ não forem simultaneamente nulos, efetuará oscilações harmônicas com frequência angular w dada por

$$x = A \cos wt + B \sin wt \quad (A, B = \text{constantes reais})$$

ou, alternativamente, por: $x = C e^{-wt}$ ($C = \text{constante complexa}$).

OBS.: com a convenção implícita de que a parte real de x será identificada com a solução real.

Este é um exemplo de oscilações de um sistema com **um grau de liberdade**. O estado do sistema pode ser descrito por uma única função $x = x(t)$ representando a coordenada da massa m .

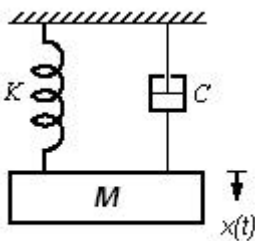
3.1.2 – Simulação de um sistema de um grau de liberdade

O comportamento de oscilação do sistema linear massa-mola-amortecedor suspenso por um suporte foi simulado através de Scripts do MatLab (arquivo sim.m), utilizando-se do método de Range-Kutta para resolução do sistema de equações diferenciais resultantes da modelagem matemática. Foram analisados três casos distintos de excitação desse sistema:

1º Caso: Sistema sem excitação. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm1.m)

Nesse caso o sistema não está sendo excitado por nenhuma força externa, conforme figura a seguir:

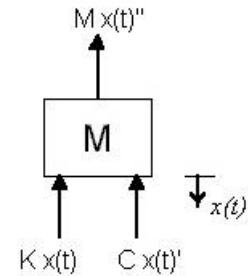
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + Cx(t)' + Kx(t) = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x(t)=1$ e $x'(t)=0$.

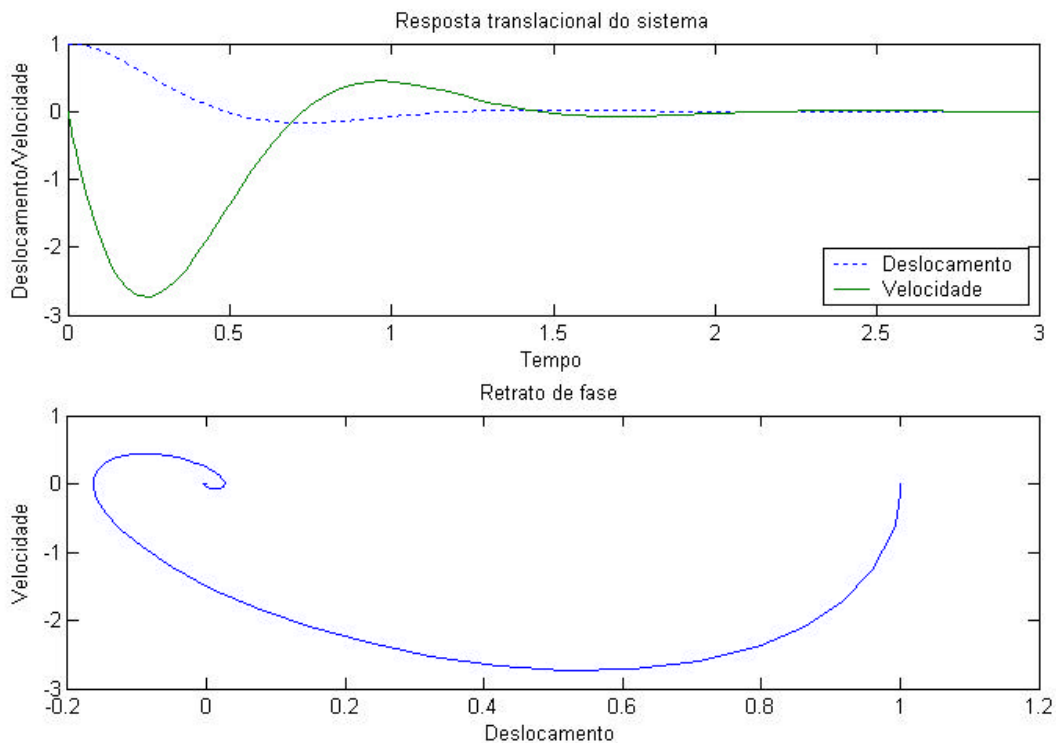
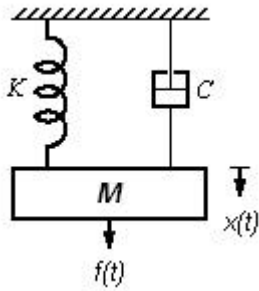


Figura 1: Resposta translacional e retrato de fase do sistema com um grau de liberdade – 1º Caso

2º Caso : Excitação na massa. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm2.m)

Nesse caso a função de excitação $f(t)$ está sendo aplicada diretamente na massa M do sistema, conforme figura a seguir:

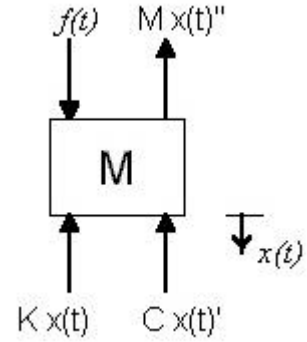
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + Cx(t)' + Kx(t) = f(t)$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x(t)=0$ e $x'(t)=0$.

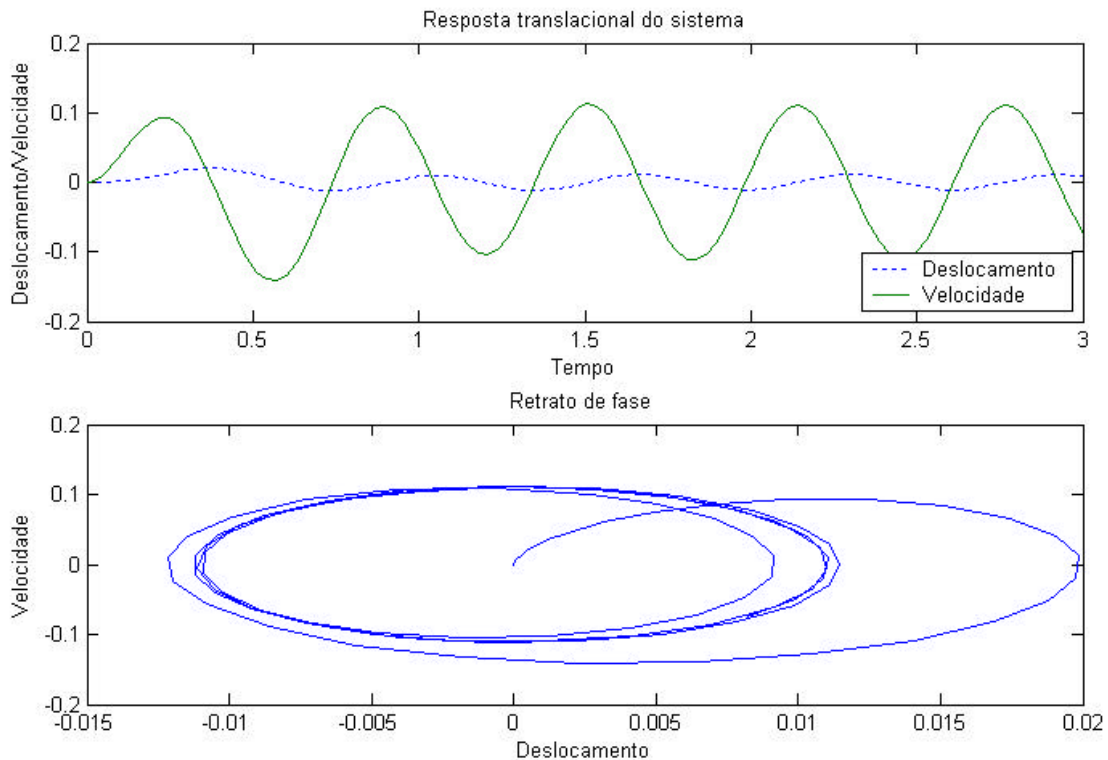
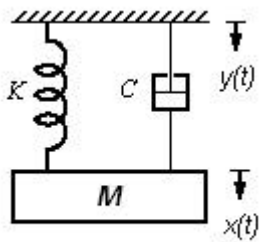


Figura 2: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 2º Caso

3º Caso : Excitação no suporte de fixação (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm3.m)

Nesse caso a função de excitação $f(x)$ está sendo aplicada diretamente no suporte de fixação do sistema, conforme figura abaixo.

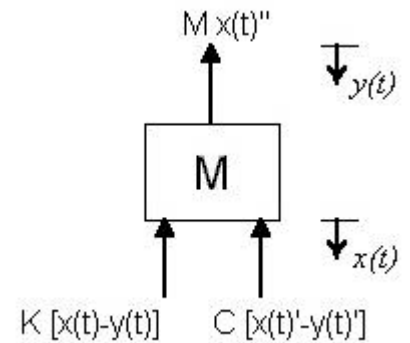
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + C[x(t)' - y(t)'] + K[x(t) - y(t)] = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x(t)=0$ e $x'(t)=0$.

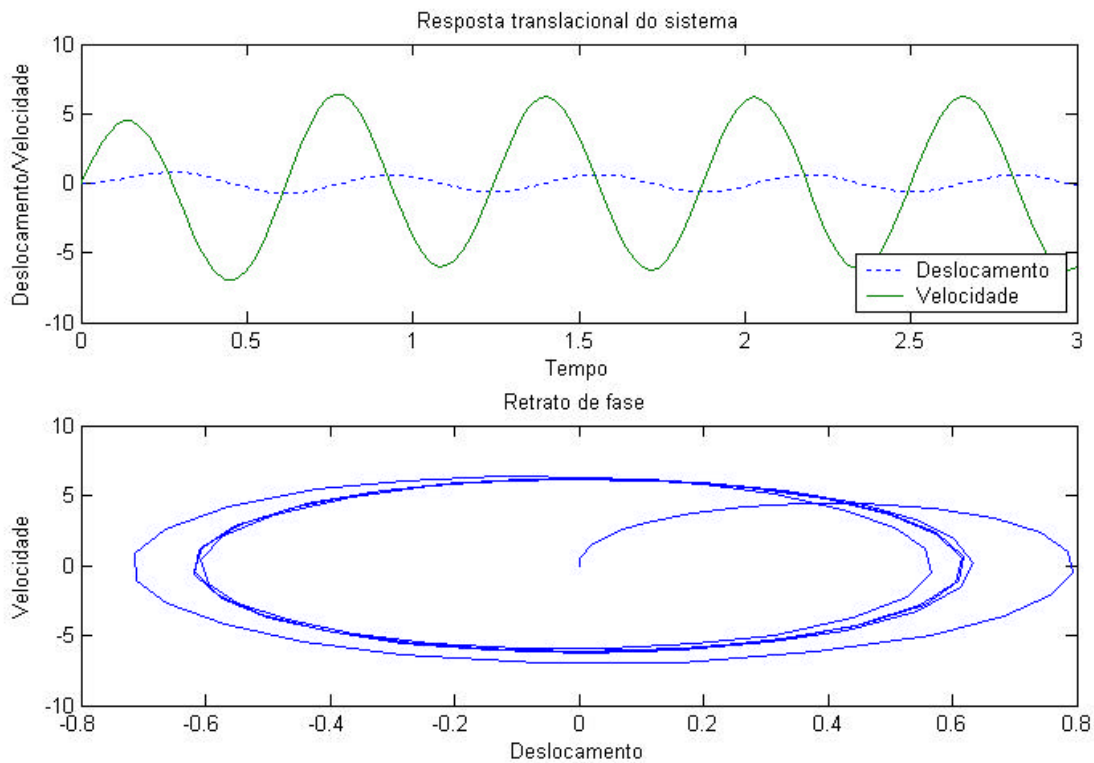


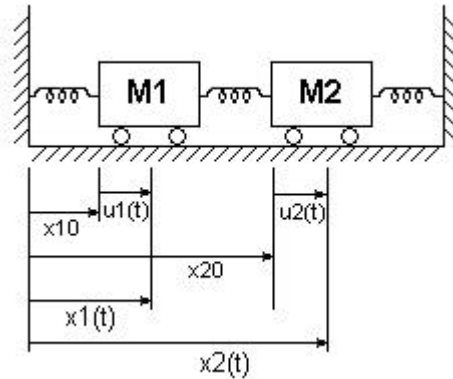
Figura 3: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 3º Caso

3.2 – Sistemas com dois graus de liberdade

3.2.1 – Dois sistemas massa-mola acoplados

Movimentos oscilatórios semelhantes aos vistos anteriormente, em sistemas de um grau de liberdade, podem ser também observados em sistemas com vários graus de liberdade.

Vamos tomar como exemplo duas massas estaticamente acopladas.



Considere duas massas m_1 e m_2 ligadas por molas e movendo-se com atrito desprezível (fig. 1). As posições instantâneas das duas massas são representadas por x_1 e x_2 , e suas posições de equilíbrio por x_{10} e x_{20} . É conveniente representar o movimento em função dos deslocamentos:

$$u_1(t) = x_1(t) - x_{10}, \quad u_2(t) = x_2(t) - x_{20}$$

Duas forças horizontais atuam sobre m_1 (fig. 2). São dadas por:

$$F_{11} = k_1 e_1, \quad F_{12} = k e,$$

Em que e_1 e e são os alongamentos das molas correspondentes. Evidentemente, $e_1 = u_1$ e $e = u_2 - u_1$. A força resultante na direção x é, portanto,

$$F_{12} - F_{11} = k(u_2 - u_1) - k_1 u_1,$$

E a equação do movimento, $F = ma$, será:

$$m_1 u_1'' + (k_1 + k) u_1 - k u_2 = 0$$

Semelhantemente, para a segunda massa,

$$m_2 u_2'' + (k_2 + k) u_2 - k u_1 = 0$$

Estamos agora lidando com um sistema com **dois graus de liberdade**. O estado do sistema (**configuração**) fica descrito por duas funções por duas funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, que satisfazem um sistema de equações diferenciais **acopladas**.

A experiência indica que este sistema é capaz de executar oscilações harmônicas com certas frequências características. Portanto, procuraremos uma solução sob a forma:

$$u_1(t) = U_1 e^{-i\omega t}, \quad u_2(t) = U_2 e^{-i\omega t} \quad (U_1, U_2 = \text{constantes complexas})$$

Substituindo no sistema e cancelando o fator $e^{-i\omega t}$, chegamos ao sistema de duas equações lineares homogêneas:

$$\begin{aligned} [-m_1\omega^2 + (k_1+k)]U_1 - kU_2 &= 0, \\ [-m_2\omega^2 + (k_2+k)]U_2 - kU_1 &= 0. \end{aligned}$$

Para obtermos uma solução não trivial, exigimos que o determinante do sistema se anule:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} (k_1+k) - m_1\omega^2 & -k \\ -k & (k_2+k) - m_2\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

A fim de facilitar as manipulações algébricas, considere o caso especial em que $m_1=m_2=m$ e $k_1=k_2=k$. Temos, então,

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

As raízes desta equação são:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{3}\sqrt{k/m},$$

Estas são as frequências características do sistema. As massas podem vibrar (em movimento harmônico simples) somente com estas frequências e em nenhuma outra.

A fim de encontrar explicitamente o movimento do sistema, substituí-se os valores permissíveis de ω nas equações de U_1 e U_2 . Desta maneira obtemos:

$$U_1 = U_2 \quad (\omega=\omega_1) \quad \text{ou} \quad U_1 = -U_2 \quad (\omega=\omega_2).$$

Um dos coeficientes permanece indeterminado, pois as equações são homogêneas.

Fisicamente, isso significa que o sistema pode vibrar com amplitude arbitrária para qualquer uma das frequências características. As relações entre U_1 e U_2 são essencialmente as **relações de fase** entre as massas vibrantes. A primeira frequência da origem à solução

$$u_1^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_1 t}, \quad u_2^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_1 t},$$

Qualquer que seja o valor da constante complexa C_1 , as duas massas vibrarão em fase (com diferença de fase nula). Para ver isso claramente, escreva

$$C_1 = A_1 e^{-i\phi_1} \quad (A_1, \phi_1 = \text{real})$$

Então, as soluções reais são

$$u_1^{(1)}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \quad u_2^{(1)}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1),$$

Semelhantemente, para a segunda frequência,

$$u_1^{(2)}(t) = C_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad u_2^{(2)}(t) = C_2 e^{-i\omega_2 t}, \text{ ou, com } C_2 = A_2 e^{-i\phi_2},$$

$$u_1^{(2)}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

$$u_2^{(2)}(t) = -A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) = A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2 + \pi),$$

Neste caso, as massas vibrarão com uma diferença de fase de 180° .

Cada uma das duas soluções, representadas por pares de funções (u_1, u_2) é chamada *de modo característico de vibração* ou *modo normal de vibração*. Um movimento arbitrário das massas pode ser caracterizado por quatro condições iniciais: $u_1(0), u_1'(0), u_2(0), u_2'(0)$

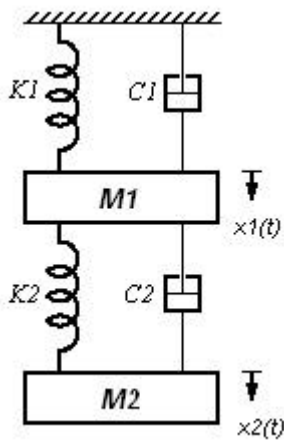
A partir desses quatro valores, poderemos obter os quatro parâmetros A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2 .

3.2.2 – Simulação de um sistema com dois graus de liberdade

O comportamento de oscilação do sistema linear composto por dois conjuntos massa-mola-amortecedor acoplados, suspensos por um dos conjuntos, foi simulado através de Scripts do MatLab (arquivo sim2.m) utilizando-se do método de Range-Kutta para resolução do sistema de equações diferenciais resultantes da modelagem matemática. Foram analisados quatro casos distintos de excitação desse sistema:

1º Caso: Sistema não excitado. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm7.m)

Modelo Físico do Sistema

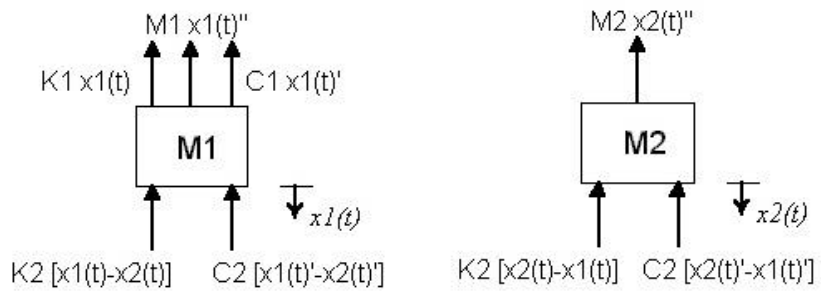


Modelagem matemática:

$$M_1 x_1(t)'' + C_1 x_1(t)' + K_1 x_1(t) + C_2 [x_1(t)' - x_2(t)'] + K_2 [x_1(t) - x_2(t)] = 0$$

$$M_2 x_2(t)'' + C_2 [x_2(t)' - x_1(t)'] + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=2$ e $x_2'(t)=0$

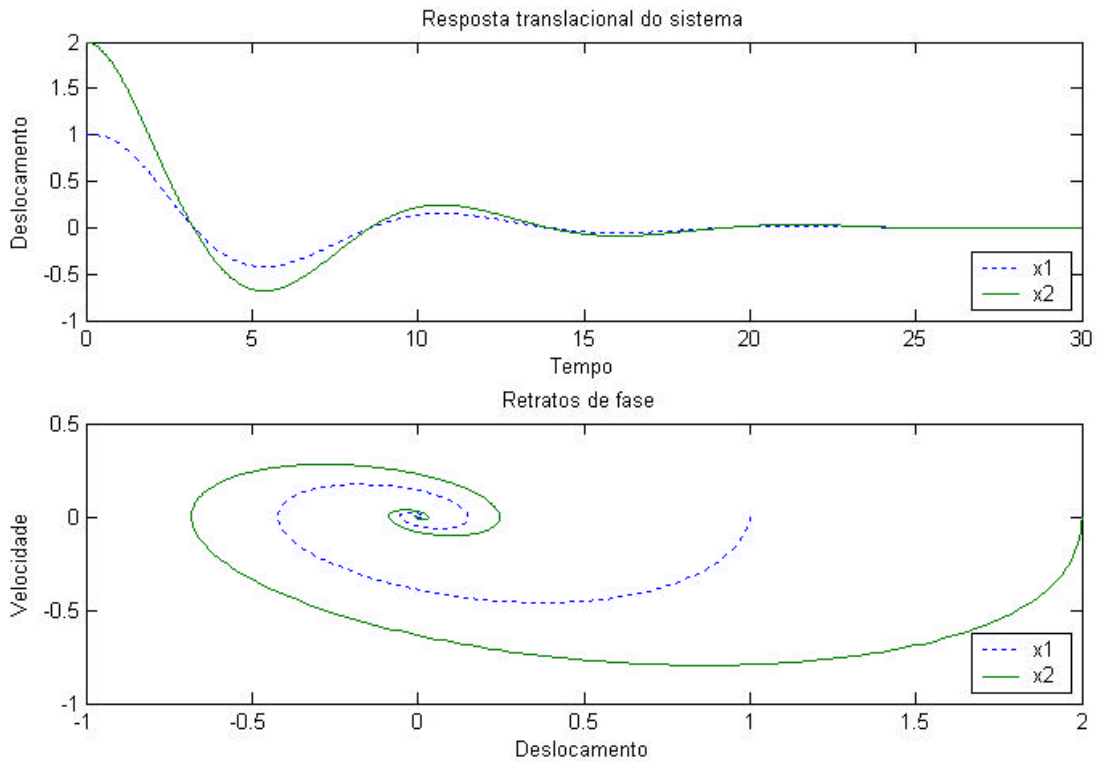
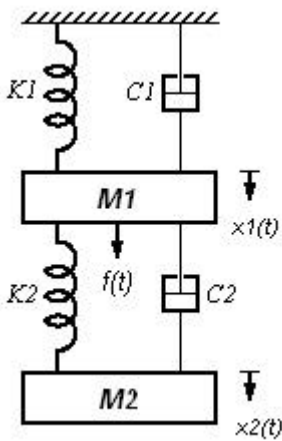


Figura 4: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 1º Caso

2º Caso: Excitação na massa 1. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm8.m)

Modelo Físico do

Sistema

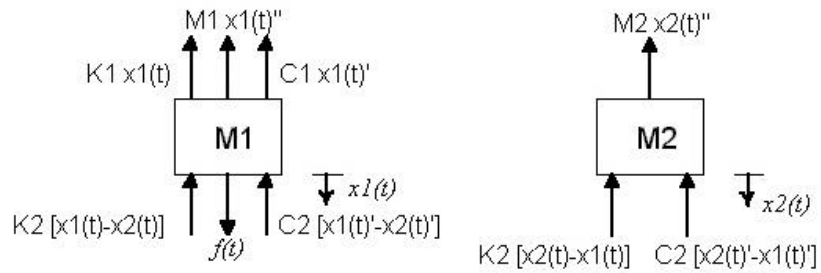


Modelagem matemática:

$$M_1 x_1(t)'' + C_1 x_1(t)' + K_1 x_1(t) + C_2 [x_1(t)' - x_2(t)'] + K_2 [x_1(t) - x_2(t)] = f(t)$$

$$M_2 x_2(t)'' + C_2 [x_2(t)' - x_1(t)'] + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=2$ e $x_2'(t)=0$

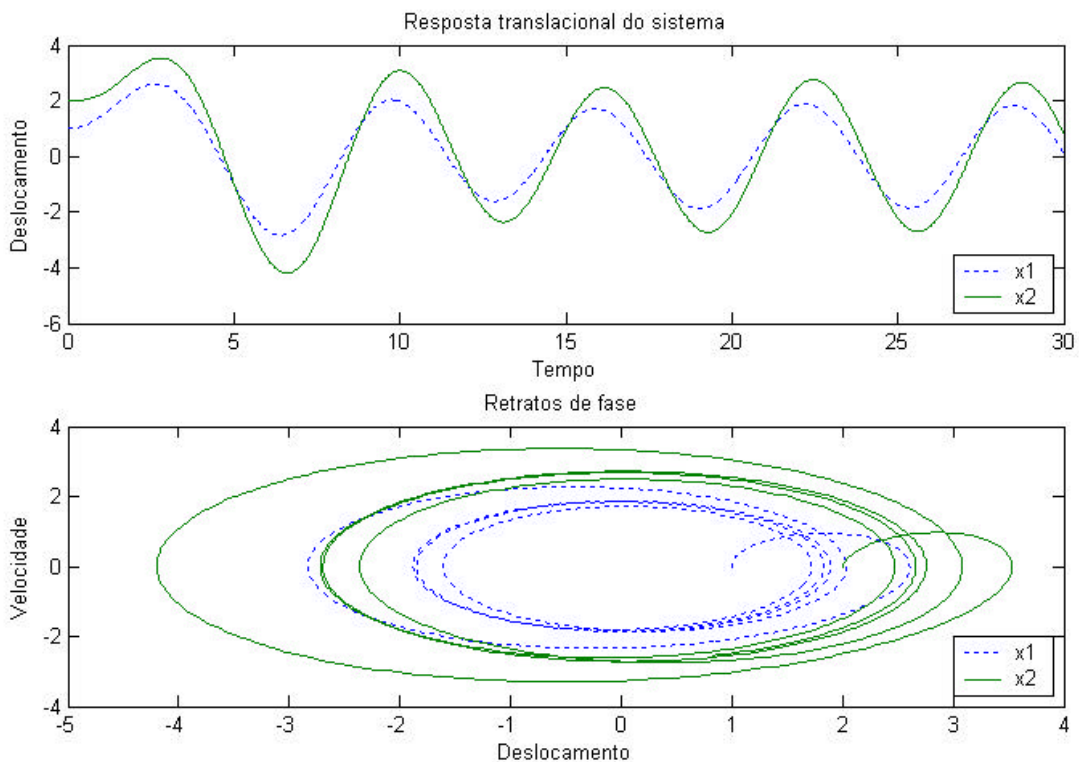
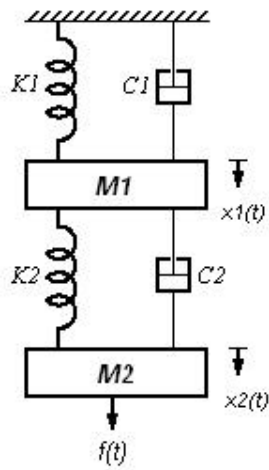


Figura 5: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 2º Caso

3º Caso: Excitação na massa 2. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm9.m)

Modelo Físico do Sistema

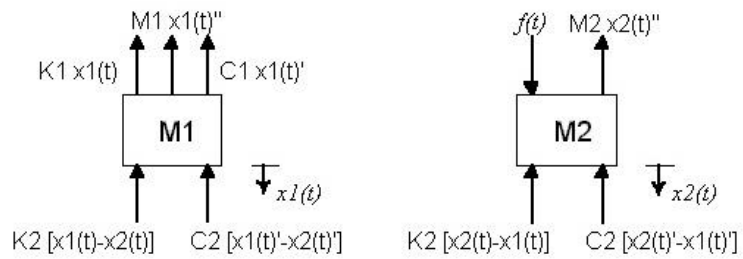


Modelagem matemática:

$$M_1 x_1(t)'' + C_1 x_1(t)' + K_1 x_1(t) + C_2 [x_1(t) - x_2(t)]' + K_2 [x_1(t) - x_2(t)] = 0$$

$$M_2 x_2(t)'' + C_2 [x_2(t) - x_1(t)]' + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] = f(t)$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=2$ e $x_2'(t)=0$

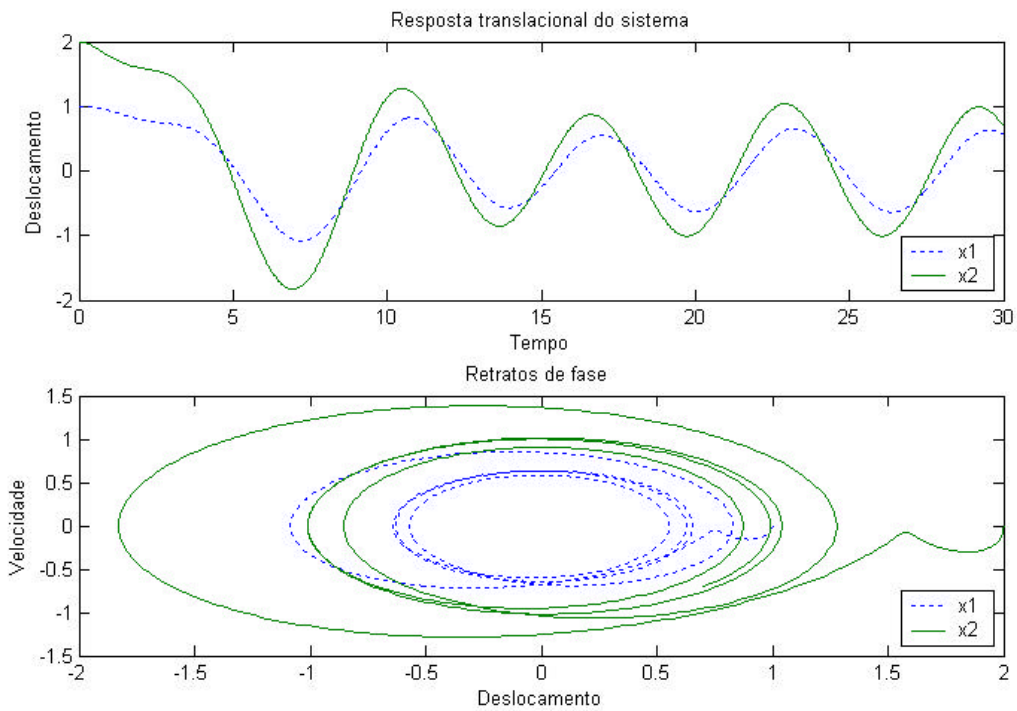
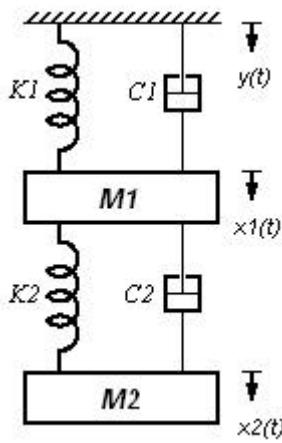


Figura 6: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 3º Caso

4º Caso: Excitação no suporte de fixação dos conjuntos. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm10.m)

Modelo Físico do Sistema

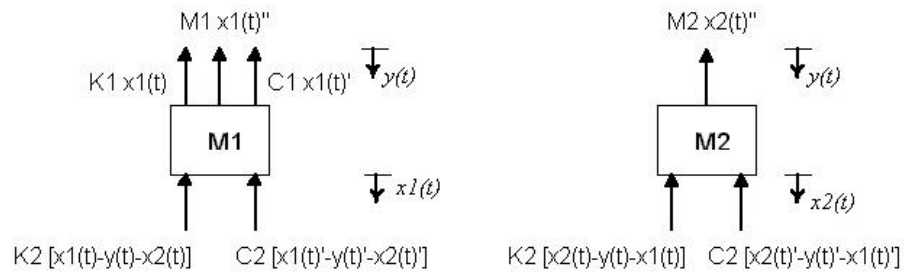


Modelagem matemática:

$$M1x1(t)'' + C1x1(t)' + K1x1(t) + C2[x1(t)' - y(t)' - x2(t)'] + K2[x1(t) - y(t) - x2(t)] = C$$

$$M2x2(t)'' + C2[x2(t)' - y(t)' - x1(t)'] + K2[x2(t) - y(t) - x1(t)] = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x1(t)=0$, $x1'(t)=0$, $x2(t)=0$ e $x2'(t)=0$

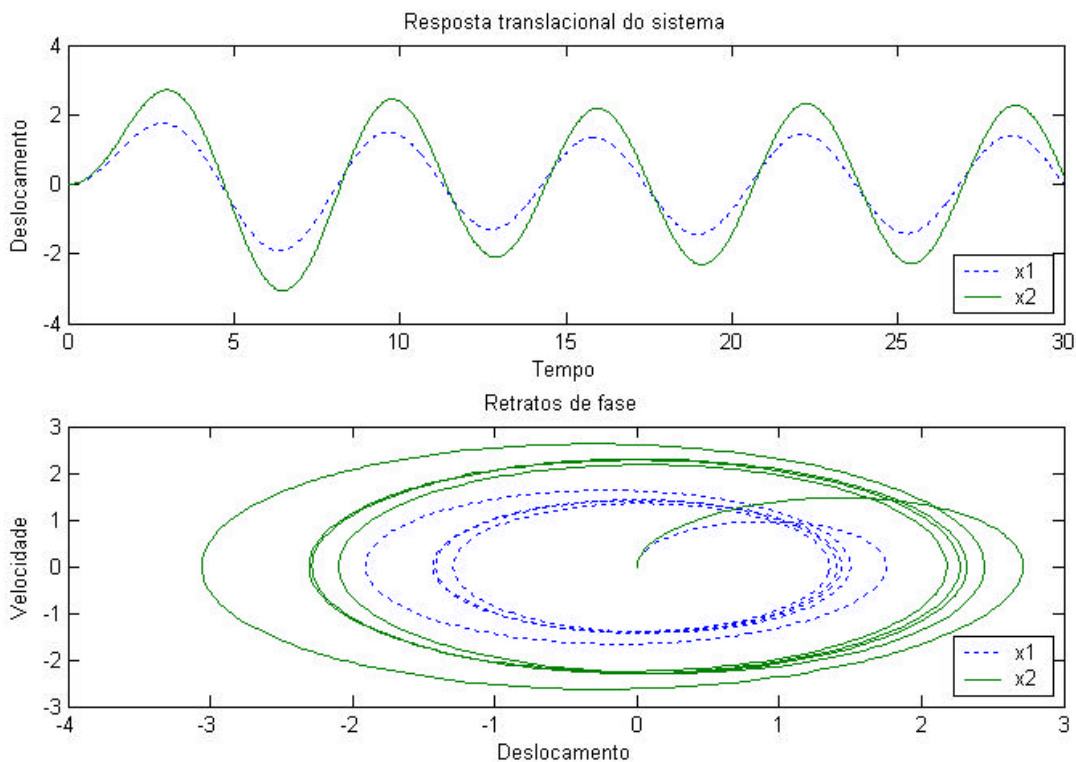


Figura 7: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 4º Caso

3.3 – Sistema com infinitos graus de liberdade

3.3.1 – Simulação de um sistema com infinitos graus de liberdade

Os modos naturais de vibração livre de uma membrana circular com borda fixa foram obtidos através da utilização de um modelo linear presente no livro de Magrab [2], que considera uma membrana circular de raio externo b , perfeitamente elástica, esticada com uma tensão constante por comprimento (T). O deslocamento transversal da membrana em qualquer ponto e em qualquer instante é dado por $w(r,\theta,t)$.

Fazendo-se $w(r,\theta,t) = W(r,\theta) e^{i\omega t}$,

a equação que governa o movimento transversal da membrana é

$$\nabla_{r\theta}^2 W(r,\theta) + \frac{\Omega^2}{b^2} W(r,\theta) = 0 \quad (3.0)$$

Assumindo a solução desta equação na forma

$$W(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) \sum_{j=0}^1 \theta_j(m\theta) \quad (3.1)$$

onde θ_j é dada por

$$\theta_j = \text{sen} \left(m\theta + j \frac{\theta}{2} \right) \quad m=0,1,2,\dots, \quad j=0,1,2,\dots, \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.0) têm-se

$$\frac{d^2}{dr^2} R_m + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R_m + \left(\frac{\Omega^2}{b^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R_m = 0, \quad m=0,1,2,\dots, \quad (3.3)$$

que possui a forma de uma equação de Bessel e cuja solução é dada por

$$R_m(r) = A J_m(\Omega r / b) \quad (3.4)$$

A condição de contorno para borda fixa é

$$W(r, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.5)$$

Substituindo (1.4) em (1.5) teremos a equação característica

$$J_m(\Omega_{mn}) = 0, \quad m=0,1,2,\dots, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (3.6)$$

onde Ω_{mn} corresponde à raiz da função de Bessel de primeira ordem J_m calculada considerando-se m diâmetros nodais e n círculos nodais.

O modo normal correspondendo a coordenada radial é então

$$R_{mn}(r) = J_m(\Omega_{mn}.r / b) \quad (3.7)$$

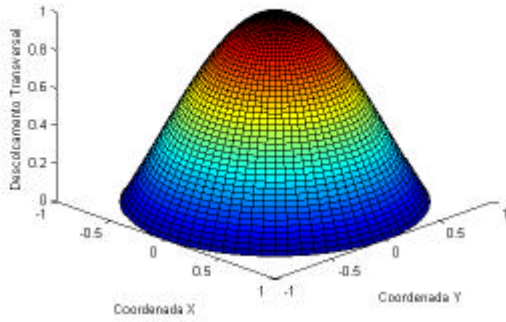
e o modo normal completo se torna

$$W_{mn, j}(r, \mathbf{q}) = J_m(\Omega_{mn}.r / b) \times q_j(m \mathbf{q}) \quad (3.8)$$
$$j=0,1,2,\dots, \quad m=0,1,2,\dots, \quad n=1,2,3,\dots,$$

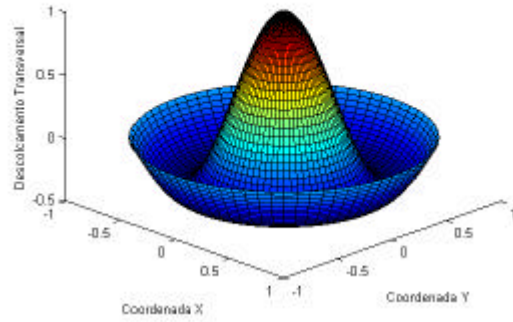
que descreve uma superfície modal em que o valor de m determina o número de diâmetros nodais e o valor de n determina o número de círculos nodais (incluindo o contorno). Quando $m=0$ não existem diâmetros nodais e os modos são simétricos, isto é, independentes de θ .

Alguns dos modos naturais obtidos através da simulação em Scripts do MatLab (arquivo sim3.m) são apresentados a seguir

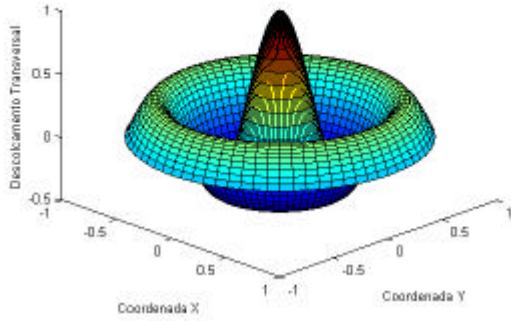
Modo 01



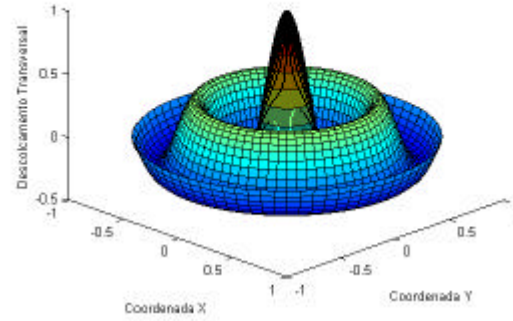
Modo 02



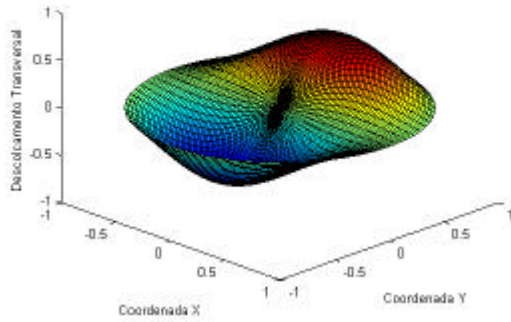
Modo 03



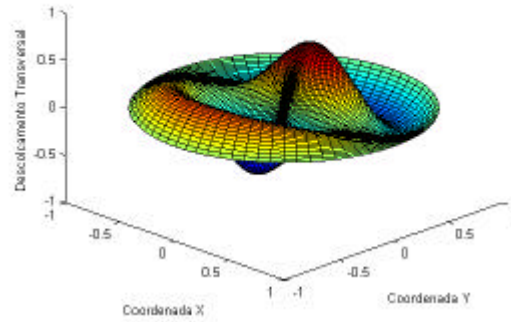
Modo 04



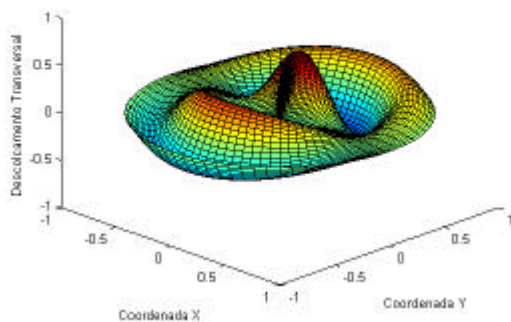
Modo 11



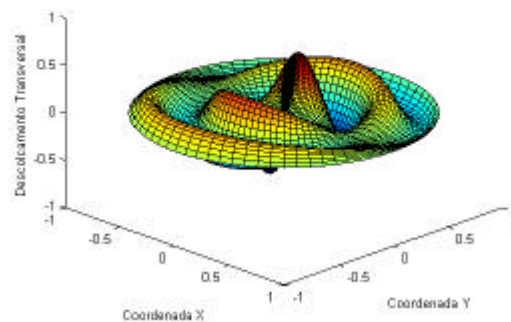
Modo 12



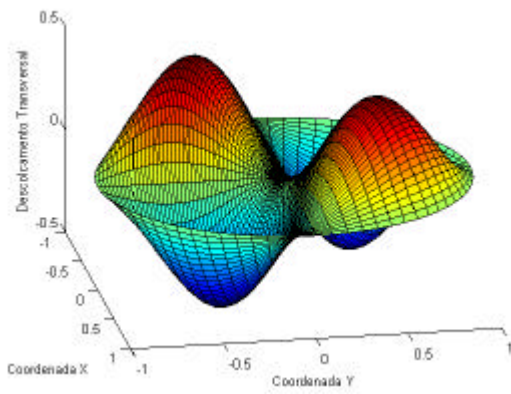
Modo 13



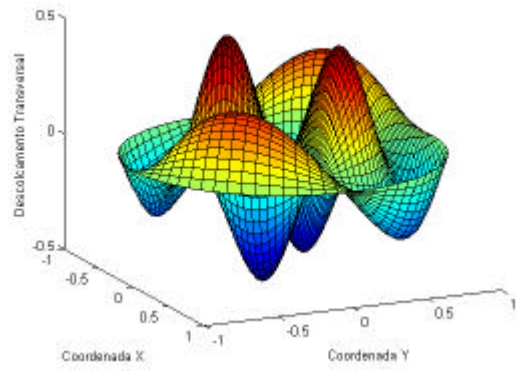
Modo 14



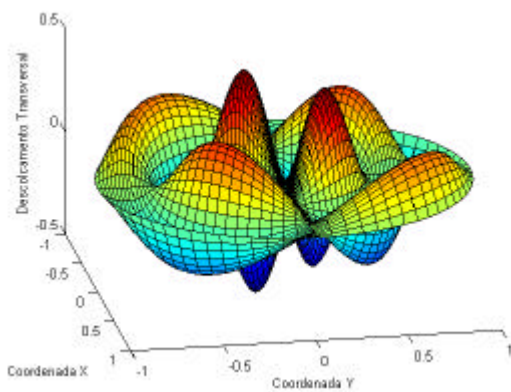
Modo 21



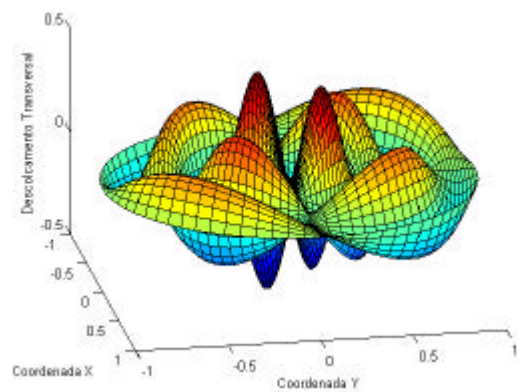
Modo 22



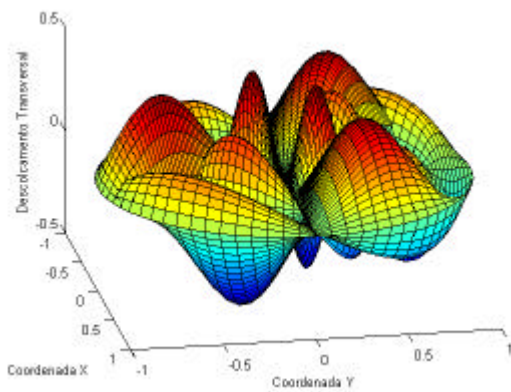
Modo 23



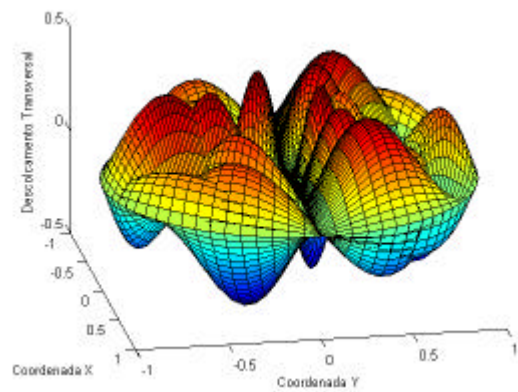
Modo 24



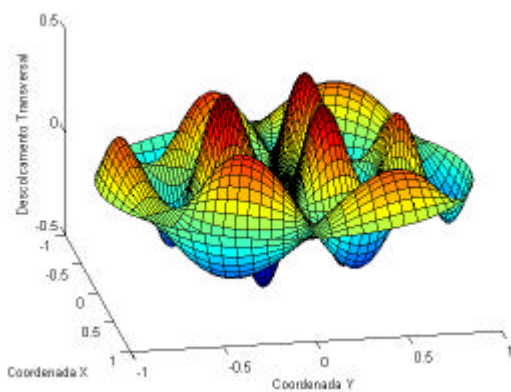
Modo 31



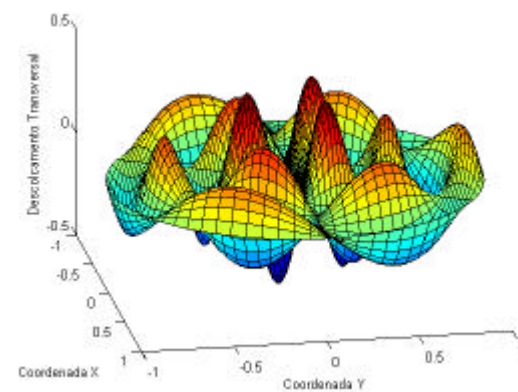
Modo 32



Modo 33



Modo 34



4 – Sistemas Não-Lineares

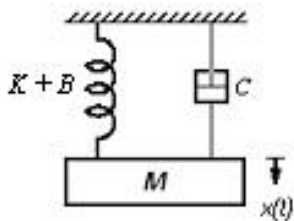
4.1 – Sistemas com um grau de liberdade

4.1.1 – Simulação de um sistema não-linear de um grau de liberdade

1º Caso: Sistema sem excitação. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm4.m)

Nesse caso o sistema não está sendo excitado por nenhuma força externa, conforme figura abaixo.

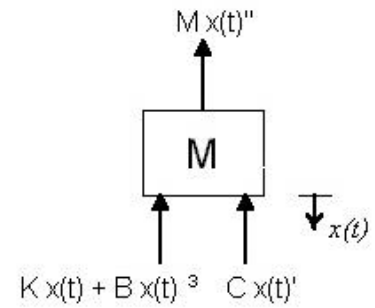
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + Cx(t)' + Kx(t) + Bx(t)^3 = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x(t)=1$, $x'(t)=0$

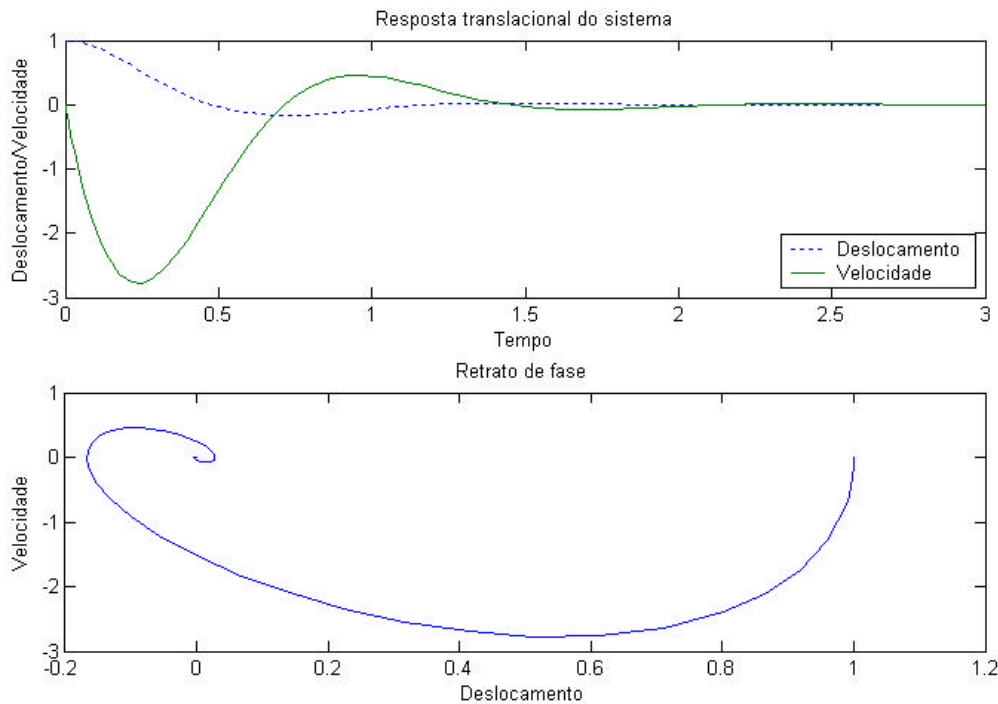
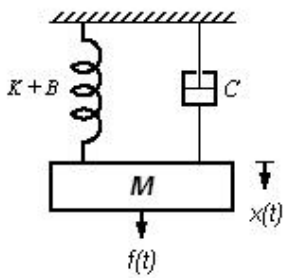


Figura 8: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 1º Caso

2º Caso : Excitação na massa. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm5.m)

Nesse caso a função de excitação $f(x)$ está sendo aplicada diretamente na massa M do sistema, conforme figura abaixo.

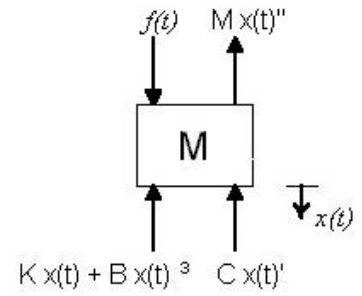
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + Cx(t)' + Kx(t) + Bx(t)^3 = f(t)$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x(t)=0$, $x'(t)=0$

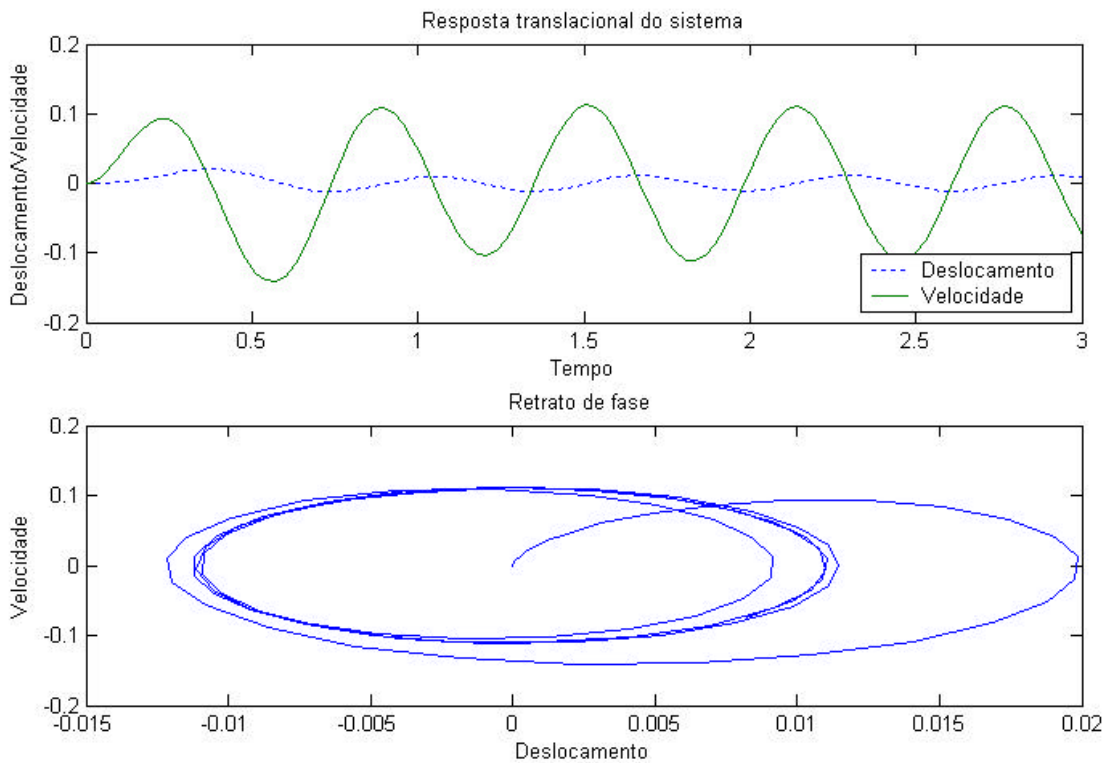
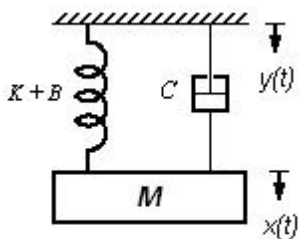


Figura 9: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 2º Caso

3º Caso : Excitação no suporte de fixação (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm6.m)

Nesse caso a função de excitação $f(x)$ está sendo aplicada diretamente no suporte de fixação do sistema, conforme figura abaixo.

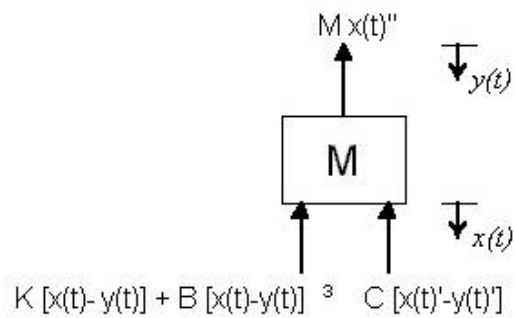
Modelo Físico do Sistema



Modelagem matemática:

$$Mx(t)'' + C[x(t)' - y(t)'] + K[x(t) - y(t)] + B[x(t) - y(t)]^3 = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1, x_1'(t)=0$

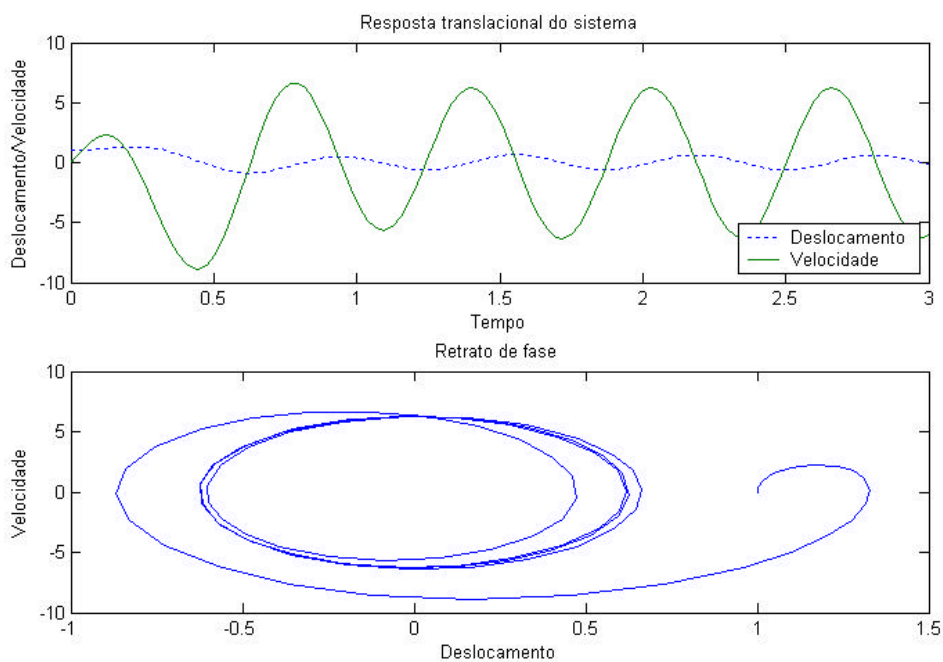


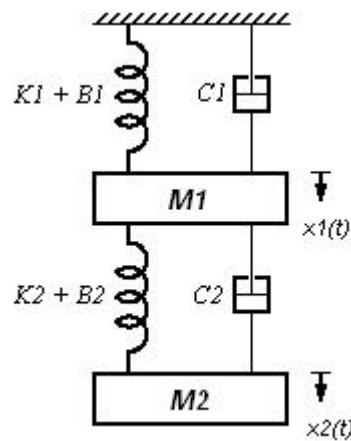
Figura 10: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de um grau de liberdade – 3º Caso

4.2 – Sistemas com dois graus de liberdade

4.2.1 – Simulação de um sistema não-linear com dois graus de liberdade

1º Caso: Sistema não excitado. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm11.m)

Modelo Físico do Sistema

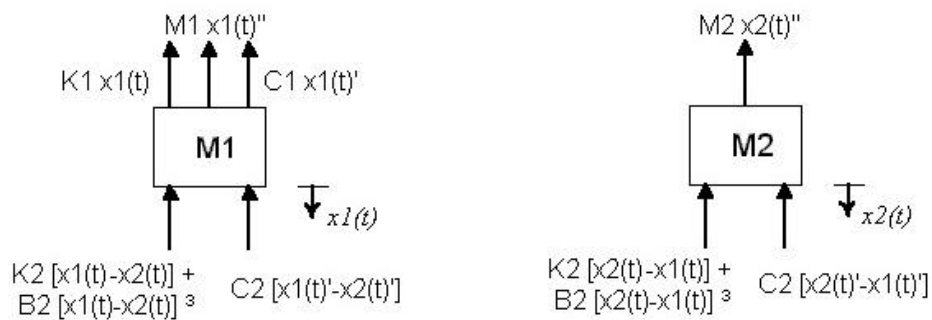


Modelagem matemática:

$$M1x1(t)'' + C1x1(t)' + K1x1(t) + B1x1(t)^3 + C2[x1(t)' - x2(t)'] + K2[x1(t) - x2(t)] + B2[x1(t) - x2(t)]^3 = 0$$

$$M2x2(t)'' + C2[x2(t)' - x1(t)'] + K2[x2(t) - x1(t)] + B2[x2(t) - x1(t)]^3 = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=2$ e $x_2'(t)=0$

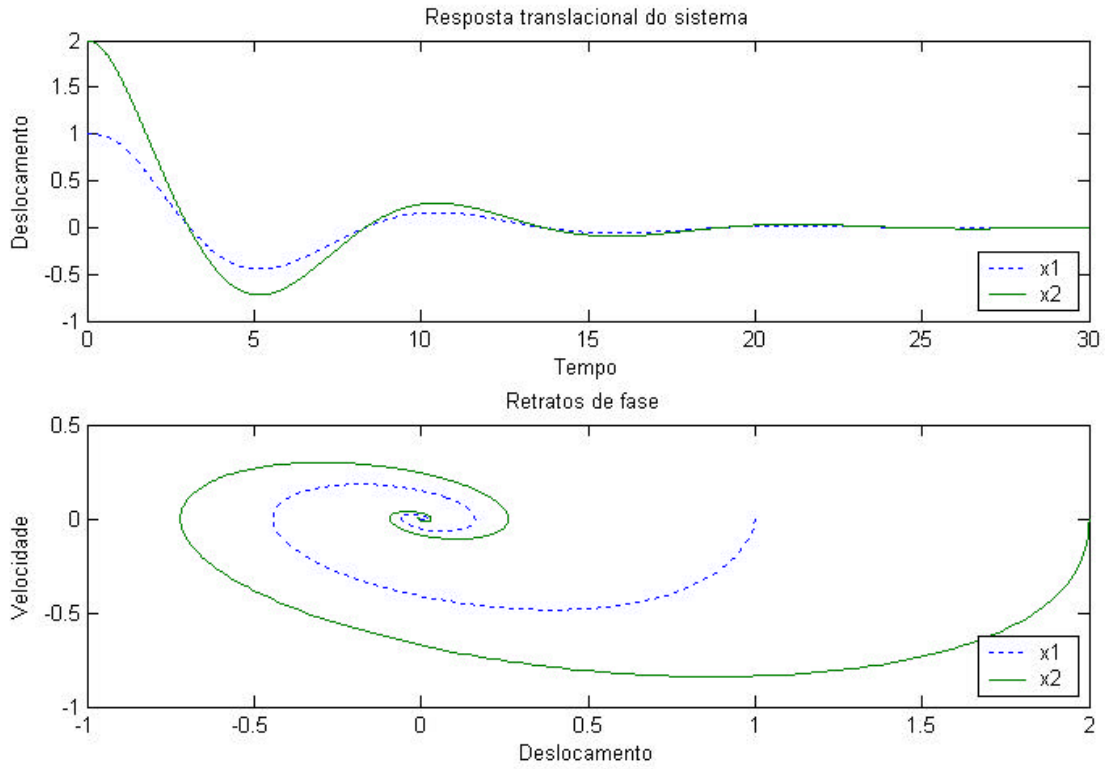
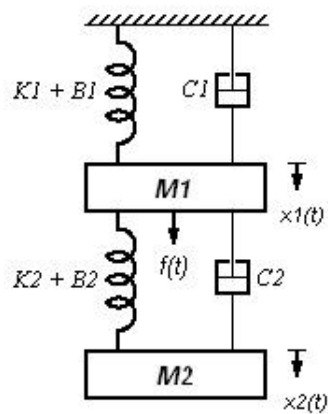


Figura 11: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 1º Caso

2º Caso: Excitação na massa 1. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm12.m)

Modelo Físico do Sistema

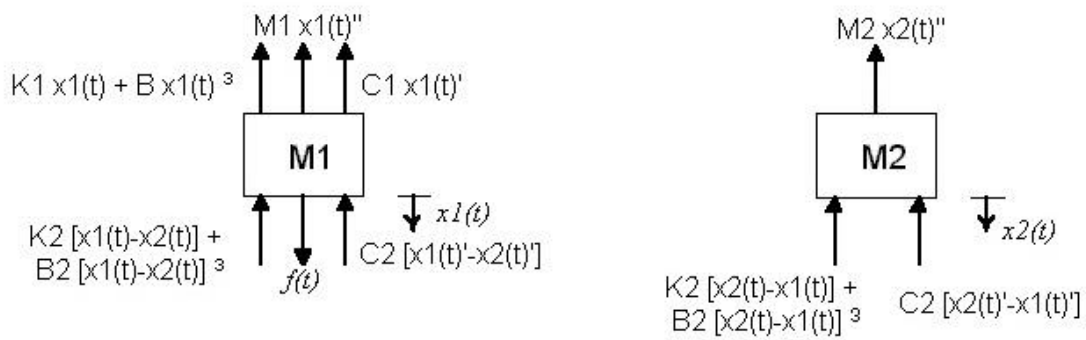


Modelagem matemática:

$$M_1 x_1(t)'' + C_1 x_1(t)' + K_1 x_1(t) + B_1 x_1(t)^3 + C_2 [x_1(t)' - x_2(t)'] + K_2 [x_1(t) - x_2(t)] + B_2 [x_1(t) - x_2(t)]^3 = f(t)$$

$$M_2 x_2(t)'' + C_2 [x_2(t)' - x_1(t)'] + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] + B_2 [x_2(t) - x_1(t)]^3 = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=1$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=2$ e $x_2'(t)=0$

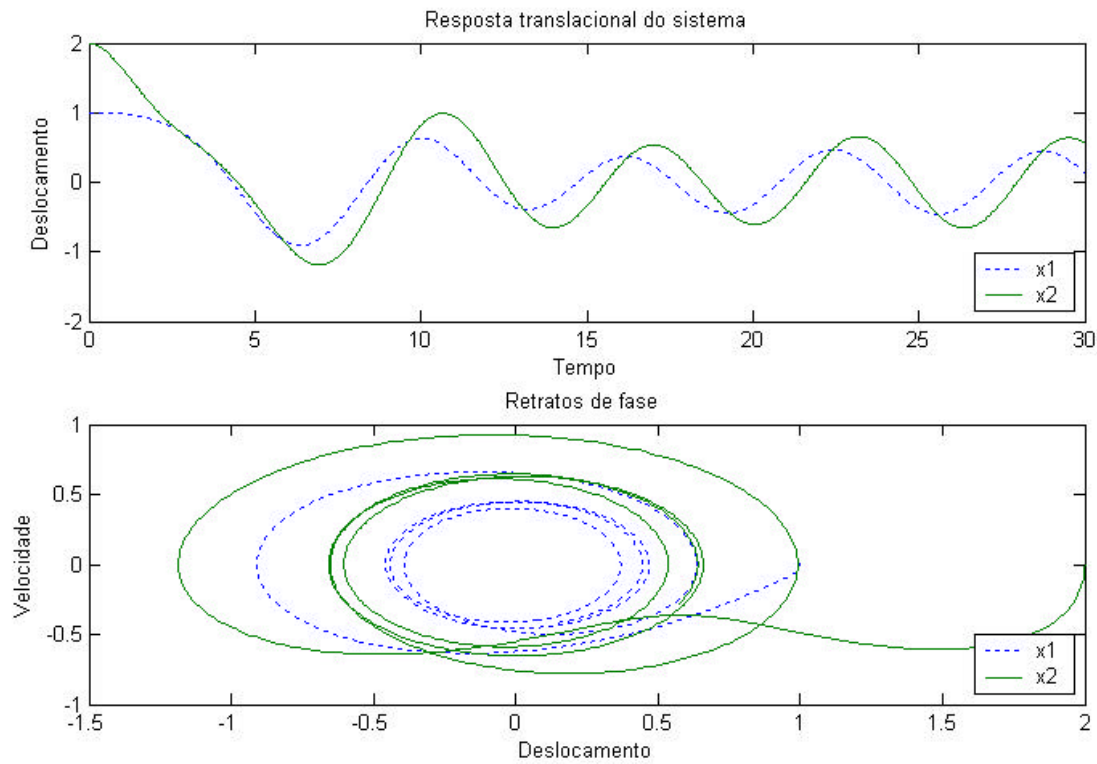
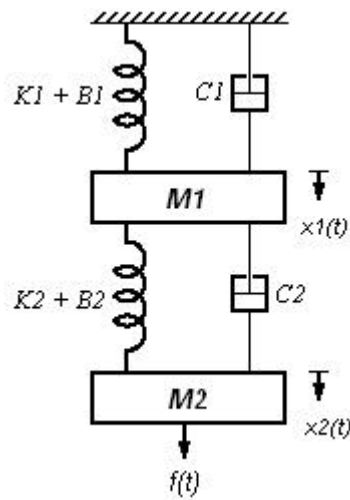


Figura 12: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 2º Caso

Modelo Físico do Sistema

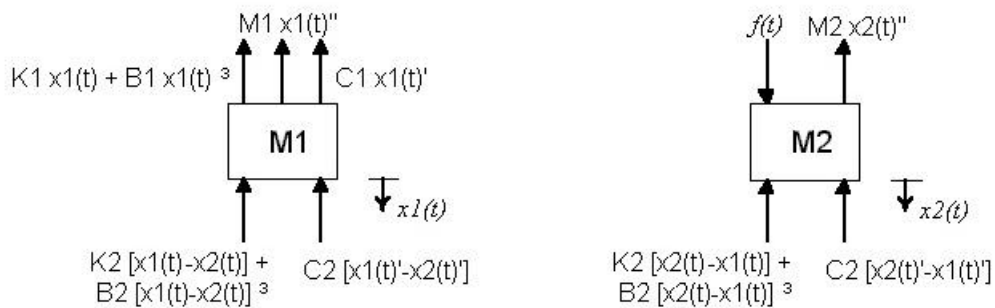


Modelagem matemática:

$$M1x1(t)'' + C1x1(t)' + K1x1(t) + B1x1(t)^3 + C2[x1(t)' - x2(t)'] + K2[x1(t) - x2(t)] + B2[x1(t) - x2(t)]^3 = 0$$

$$M2x2(t)'' + C2[x2(t)' - x1(t)'] + K2[x2(t) - x1(t)] + B2[x2(t) - x1(t)]^3 = f(t)$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x_1(t)=0$, $x_1'(t)=0$, $x_2(t)=0$ e $x_2'(t)=0$

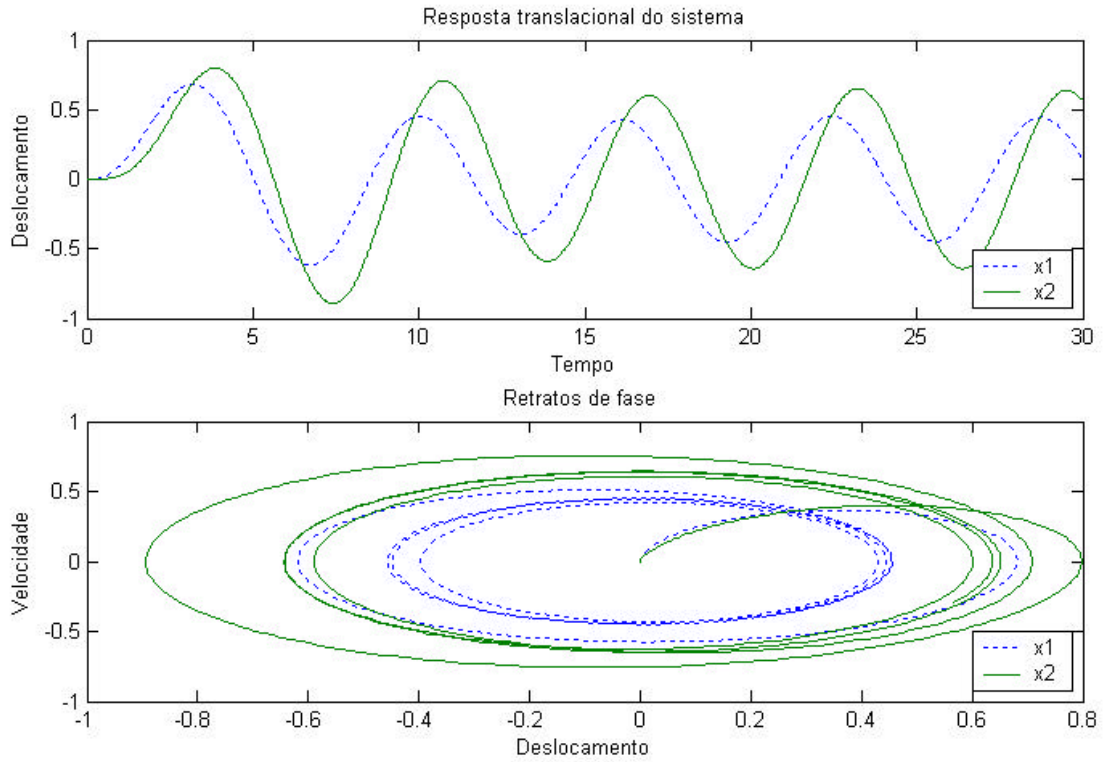
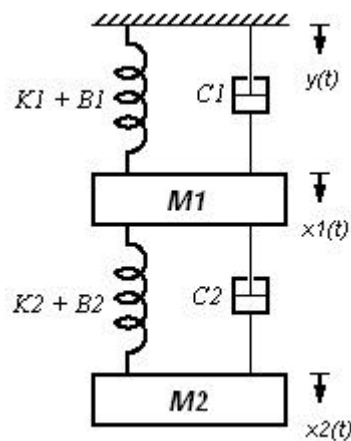


Figura 13: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 3º Caso

4º Caso: Excitação no suporte de fixação dos conjuntos. (Modelo matemático usado na simulação: arquivo mm14.m)

Modelo Físico do Sistema

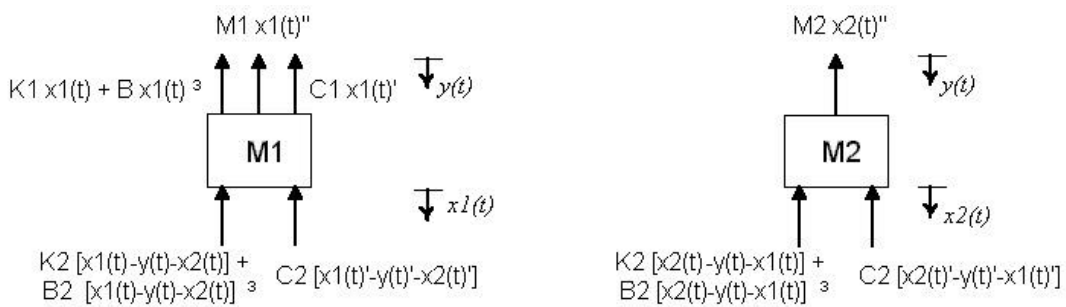


Modelagem matemática:

$$M1x1(t)'' + C1x1(t)' + K1x1(t) + B1x1(t)^3 + C2[x1(t)' - y(t)' - x2(t)'] + K2[x1(t) - y(t) - x2(t)] + B2[x1(t) - y(t) - x2(t)]^3 = 0$$

$$M2x2(t)'' + C2[x2(t)' - y(t)' - x1(t)'] + K2[x2(t) - y(t) - x1(t)] + B2[x2(t) - y(t) - x1(t)]^3 = 0$$

Diagrama de Corpo Livre



Resposta do sistema considerando as condições iniciais $x1(t)=1$, $x1'(t)=0$, $x2(t)=2$ e $x2'(t)=0$

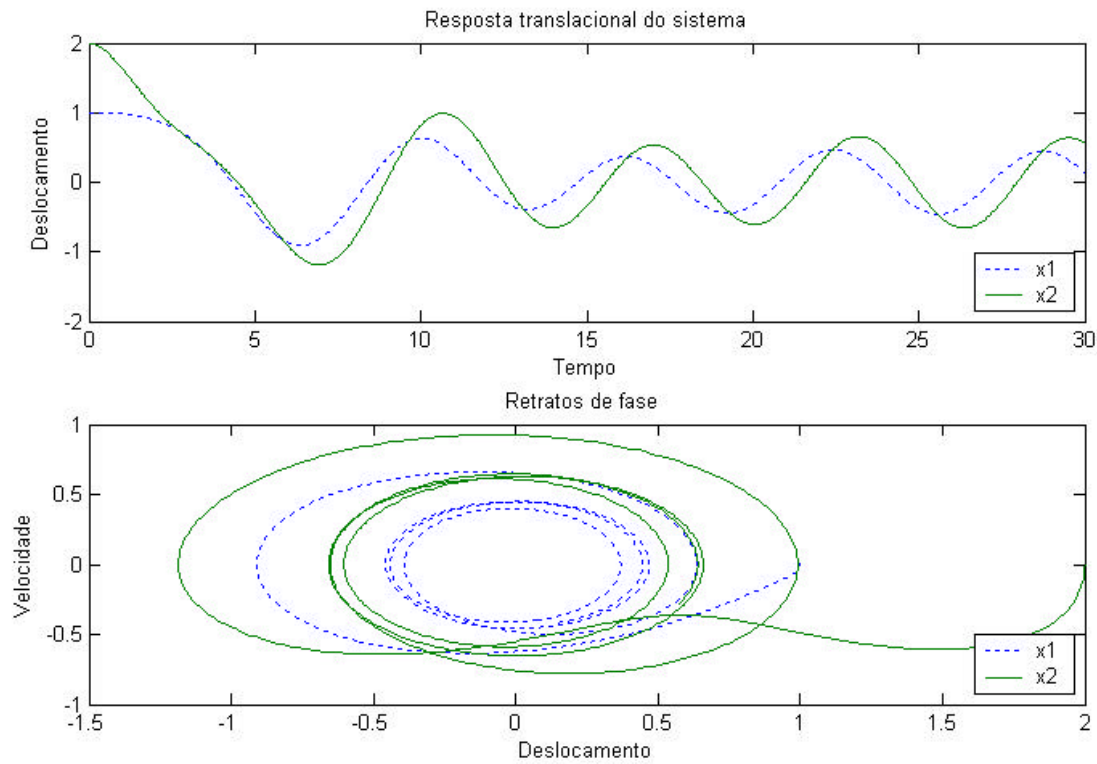


Figura 14: Resposta translacional e retrato de fase do sistema de dois graus de liberdade – 4º Caso

5 - Equações de Movimento de Placas Circulares em coordenadas Cilíndricas

Considerando um elemento cortado da placa por dois planos radiais e por duas superfícies cilíndricas adjacentes. As coordenadas polares r e θ são consideradas na superfície central da placa antes da deformação e o eixo z na direção da espessura. Pelo uso das equações de transformação e a regra de diferenciação parcial, as seguintes relações são apresentadas:

$$\begin{aligned}
 ()_{,x} &= ()_{,r} \\
 ()_{,xx} &= ()_{,rr} \\
 ()_{,y} &= ()_{,q} \\
 ()_{,xy} &= \frac{1}{r} ()_{,r} - \frac{1}{r^2} ()_{,qq} \\
 ()_{,xy} &= \frac{1}{r} ()_{,rq} - \frac{1}{r^2} ()_{,q}
 \end{aligned} \tag{5.00}$$

em que o ângulo polar θ foi considerado igual à zero. Como a posição do eixo x é arbitrário, o resultado obtido pode ser aplicado para qualquer linha radial da placa.

As forças “inplane”, momentos de torção e forças de cisalhamento transversal em coordenadas polares são definidos por:

$$\begin{aligned}
 [N_r, N_q, N_{rq}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [s_r, s_q, s_{rq}] dz \\
 [Qr, Qq] &= \int_{-h/2}^{h/2} [s_{rq}, s_{zq}] dz \\
 [M_r, M_q, M_{rq}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [s_r, s_q, s_{rq}] k dz
 \end{aligned} \tag{5.01}$$

em que σ_r e σ_θ são as tensões normais e $\sigma_r\theta$, σ_{zr} e $\sigma_{z\theta}$ são as tensões de cisalhamento. Essas componentes de tensão associados com as coordenadas cilíndricas são idênticas às tensões em coordenadas cartesianas retangulares σ_x , σ_y , σ_{xy} , σ_{zx} e σ_{zy} , respectivamente, se o raio r é coincidente ao eixo x ($\theta = 0$).

No caso de placas isotrópicas os momentos de torção e as forças de cisalhamento transversal associadas às coordenadas cilíndricas são dadas pelas equações

$$\begin{aligned}
M_r &= -D \left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,qq} \right) \\
M_q &= -D \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,qq} + \nu w_{,rr} \right) \\
M_{rq} &= -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} w_{,rq} - \frac{1}{r^2} w_{,q} \right)
\end{aligned} \tag{5.02}$$

$$\begin{aligned}
Q_r &= -D(\nabla^2 w)_{,r} \\
Q_q &= -\frac{D}{r}(\nabla^2 w)_{,q}
\end{aligned} \tag{5.03}$$

onde $\nabla^2 () = ()_{,rr} + \frac{1}{r} ()_{,r} + \frac{1}{r^2} ()_{,qq}$ é o operador Laplaciano (5.04)

As forças ‘inplane’ expressas em função de tensão são dadas por

$$\begin{aligned}
N_r &= \frac{h}{r} F_{,r} + \frac{h}{r^2} F_{,qq} \\
N_q &= h F_{,rr} \\
N_{rq} &= \frac{h}{r^2} F_{,q} - \frac{h}{r} F_{,rq} = -h \left(\frac{1}{r} F_{,q} \right)_{,r}
\end{aligned} \tag{5.05}$$

sendo que F é a função de tensão de Airy.

Então as equações dinâmicas de von Kármán para placas não lineares em coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\mathbf{r}}{D} w_{,tt} = \frac{q(r, \mathbf{q}, t)}{D} + \frac{h}{D} \left[w_{,rr} \left(\frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,qq} \right) + F_{,rr} \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,qq} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} w_{,q} \right)_{,r} \left(\frac{1}{r} F_{,q} \right)_{,r} \right] \tag{5.06}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F = E \left[\left(\frac{1}{r} w_{,rq} - \frac{1}{r^2} w_{,q} \right)^2 - w_{,rr} \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,qq} \right) \right] \quad (5.07)$$

Uma vez a solução dessas equações ter sido obtida, os momentos de torção e as forças da membrana e cisalhamento podem ser encontradas das equações (5.02) à (5.05) e as tensões em um ponto genérico da placa em coordenadas cilíndricas, das equações

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_r &= \frac{N_r}{h} + \frac{12M_r}{h^3} z \\ \mathbf{s}_q &= \frac{N_q}{h} + \frac{12M_q}{h^3} z \\ \mathbf{s}_{rq} &= \frac{N_{rq}}{h} + \frac{12M_{rq}}{h^3} z \\ \mathbf{s}_{zr} &= \frac{3Q_r}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \\ \mathbf{s}_{zq} &= \frac{3Q_q}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.08)$$

Note que

$$\begin{aligned} u^o_{,x} &= u_{r,r} \\ u^o_{,y} &= \frac{1}{r} (u_{r,q} - u_q) \\ v^o_{,x} &= u_{q,r} \\ v^o_{,y} &= \frac{1}{r} (u_r + u_{q,q}) \end{aligned} \quad (5.09)$$

e as relações deformação-deslocamento

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^0 &= u_{r,r} + \frac{1}{2} w^2_{,r} \\ \mathbf{e}_q^0 &= \frac{1}{r} (u_r + u_{q,q}) + \frac{1}{2r^2} w^2_{,q} \\ \mathbf{e}_{rq}^0 &= \frac{1}{r} (u_{r,q} - u_q) + u_{q,r} + \frac{1}{r} w_{,r} w_{,q} \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que \mathbf{e}_r^0 , \mathbf{e}_q^0 , \mathbf{e}_{rq}^0 , u_r e u_q são deformações e deslocamentos da superfície de referência em $z=0$ (plano central da placa) no sistema de coordenadas esféricas.

A solução completa das equações de *von Karman* dependem das condições de contorno ao longo da placa e das condições iniciais. A condição de contorno considerada neste trabalho descreve uma situação de liberdade de movimento da placa circular em que a borda da mesma é móvel ao longo do plano da placa, ou seja, a placa encontra-se simplesmente suportada.

5.1- Excitação harmônica em placas circulares de borda livre

Considera-se a vibração de uma placa circular excitada por uma força harmônica $q_0 \cos(\omega t)$. No caso de modos simétricos de vibração, tensões e deslocamentos são independentes do ângulo polar θ . As equações de movimento da placa são obtidas a partir das equações de von Kàrmàn. O resultado é

$$\begin{aligned}
 L(w, F) &= D \nabla^2 \nabla^2 w + \mathbf{r} w_{,tt} - \frac{h}{r} (F_{,r} w_{,r})_{,r} - q_0 \cos \omega t = 0 \\
 \nabla^2 \nabla^2 F &= -\frac{E}{r} w_{,r} w_{,rr} \\
 \text{onde} & \\
 \nabla^2(\) &= \frac{1}{r} [r(\)_{,r}]_{,r}
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Condição de contorno para a placa simplesmente suportada:

$$w = w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} = 0 \quad \text{para } r = a
 \tag{5.12}$$

Para soluções aproximadas desse tipo de problema o método Garlekin fornece a equação em função do tempo. A condição de contorno é satisfeita expressando-se a deflexão na forma separável

$$w = h \mathbf{f}(t) (1 + b \mathbf{x}^2 + c \mathbf{x}^4)
 \tag{5.13}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{r}{a} \\ b &= -\frac{6+2\nu}{5+\nu} \\ c &= -\frac{1+\nu}{5+\nu} \end{aligned} \quad (5.14)$$

em que f é uma função não conhecida com seu máximo sendo a deflexão máxima não dimensional definida por wm/b em que b e c são constantes dadas pelas expressões acima.

Evidentemente, a equação (2.3) produz o primeiro modo, fundamental, de vibração da placa.

Aplicando o método *Garlekin* à equação (2.3) a seguinte condição é obtida

$$\int_0^a L(w, F) wr dr = 0 \quad (5.15)$$

Fazendo $\nu=0,3$ e integrando, resultará em uma equação diferencial ordinária em função do tempo

$$r h \mathbf{f}_{,tt} + \frac{E h^4}{a^4} [2,242 \mathbf{f} + 0,591 \mathbf{f}_3] = 1,560 q_0 \cos(\omega t) \quad (5.16)$$

5.2- Análise da dinâmica não-linear de placas circulares com borda livre

O estudo da dinâmica não linear de placas circulares foi realizado com base no modelo descrito anteriormente, através da simulação das soluções das equações (5.13) e (5.16), sendo que para resolução da equação diferencial ordinária foi empregado o método de Range-Kutta.

A simulação da resposta do sistema foi realizada através de Scripts do MatLab (arquivos sim4.m e mm15.m). A resposta do movimento transversal de cada ponto da placa é apresentado a seguir.

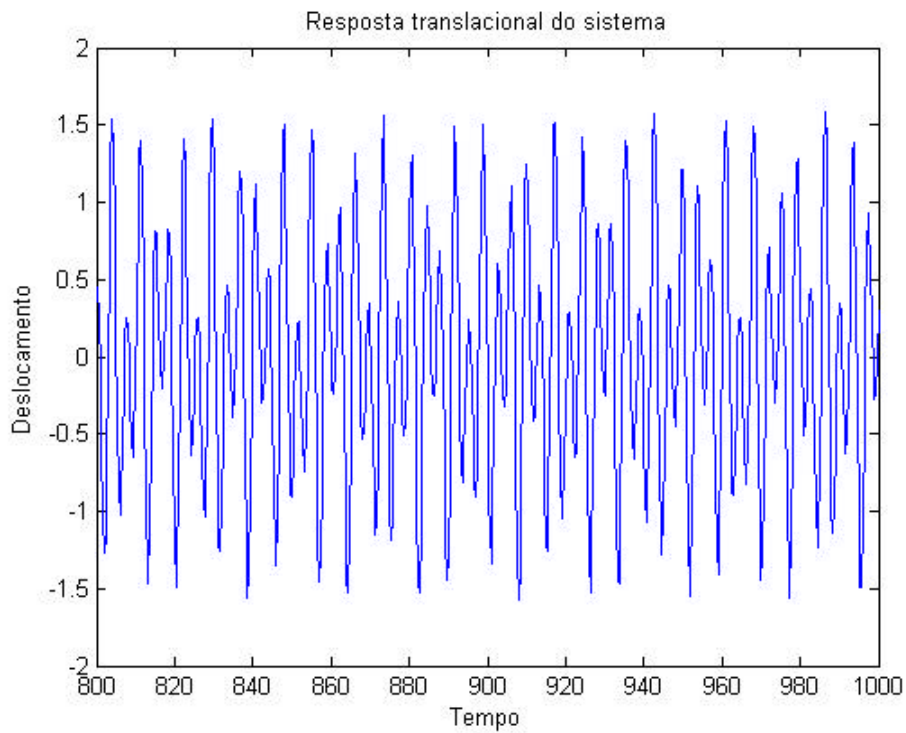


Figura 15: Resposta do movimento transversal – últimos 2000 pontos analisados

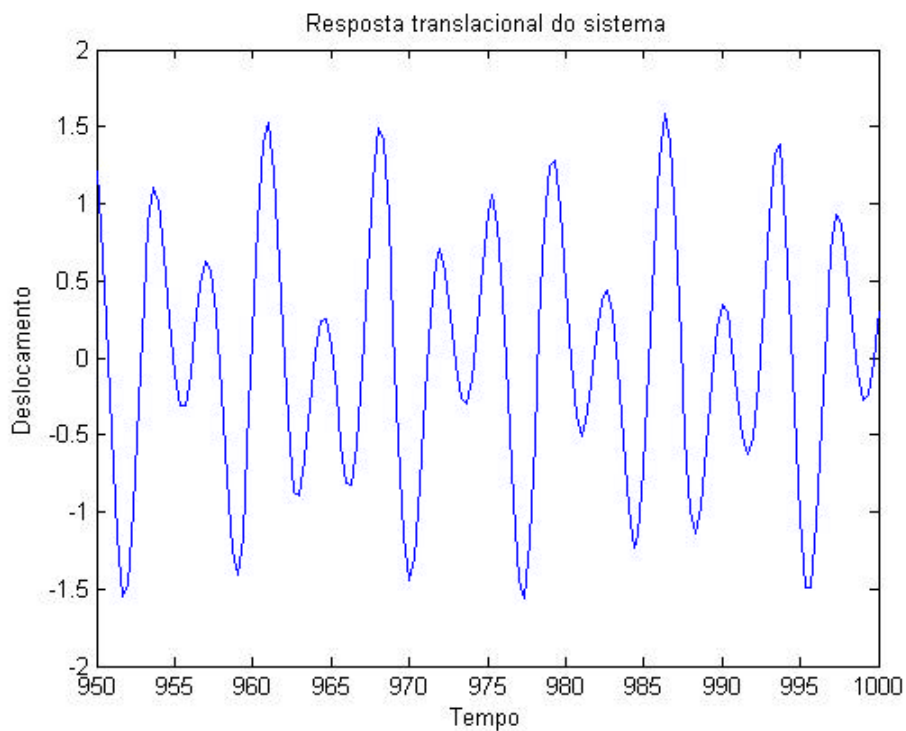


Figura 16: Resposta do movimento transversal – últimos 500 pontos analisados

Como considera-se uma placa isotrópica, ou seja, cada ponto da placa apresenta as mesmas propriedades materiais, a resposta acima representa o comportamento do movimento transversal em função do tempo de cada ponto da placa.

As amplitudes de vibração dos diferentes pontos da placa são definidas considerando-se a posição espacial de cada ponto. Assim, a resolução da equação (5.13), variando-se a coordenada cilíndrica radial r de 0 até a , resulta em uma configuração de deformação da estrutura que é analisada em um determinado instante de tempo.

A simulação da configuração de deformação da estrutura para um determinado instante de tempo foi realizada através de Scripts do MatLab (arquivos sim5.m e mm15.m). Algumas configurações obtida são dadas a seguir:

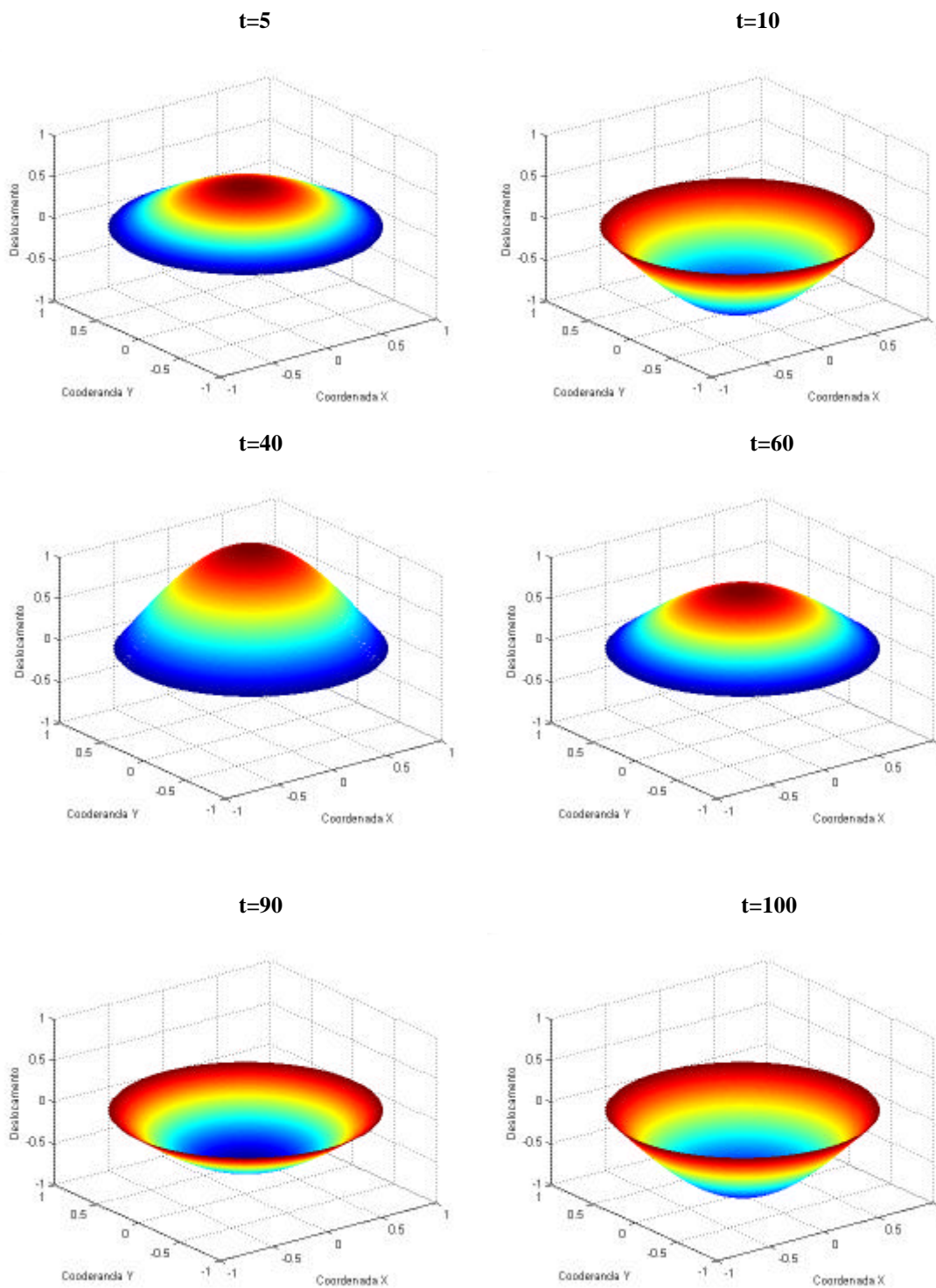


Figura 17: Configurações de deformação da placa nos instantes $t=5, 10, 40, 60, 90$ e 100 .

Variando-se um dos parâmetros de controle da equação (5.16) pode-se investigar a ocorrência de fenômenos típicos de oscilações não lineares. No presente trabalho, a amplitude e a frequência da função de excitação foram os parâmetros escolhidos para se realizar tal tarefa.

A simulação da resposta do sistema com relação à variação da amplitude da função de excitação foi realizada através de Scripts do MatLab (arquivos sim6.m e mm15.m)

Com a variação da amplitude no intervalo de 0 a 1 com passo 0.1, ou seja, 10 amplitudes analisadas, e resolução de 10000 pontos no intervalo de tempo de 0 a 1000, obteve-se

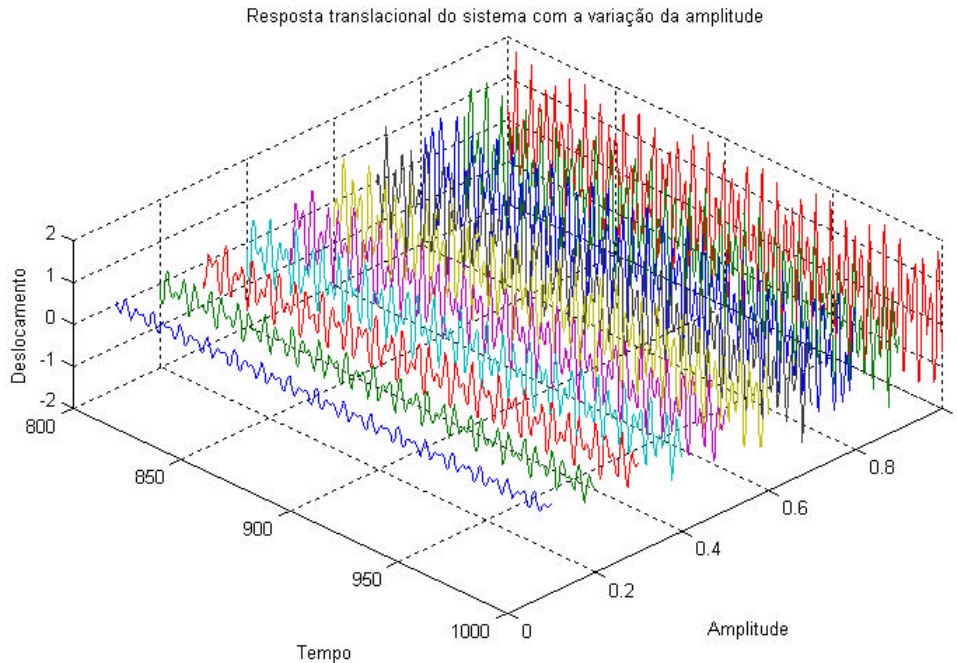


Figura 18: Resposta – amplitude entre 0 e 1 – passo 0,1 - últimos 2000 pontos

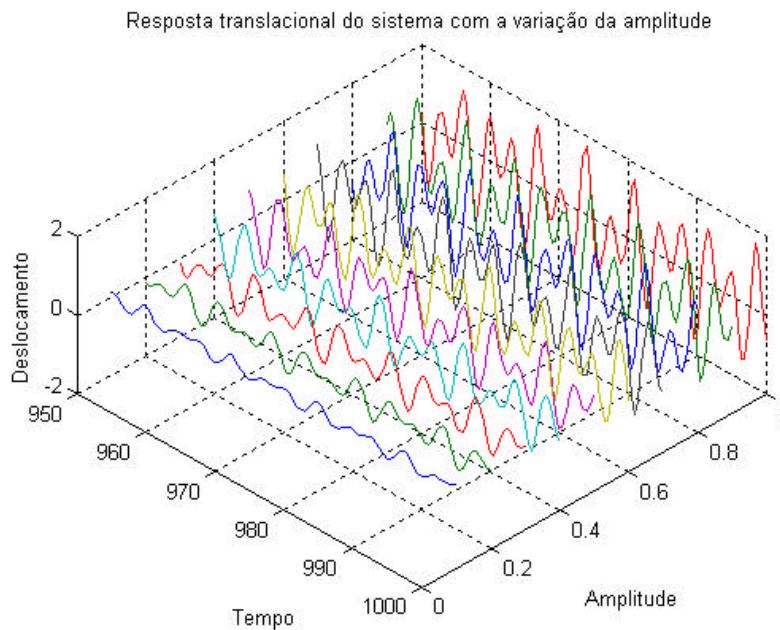


Figura 19: Resposta - amplitude entre 0 e 1 – passo 0,1 - últimos 500 pontos

A simulação da resposta do sistema com relação às amplitudes normalizadas da função de excitação foi realizada através de Scripts do MatLab (arquivos sim7.m e mm15.m)

A normalização das amplitudes em relação ao valor da maior amplitude resulta na figura a seguir:

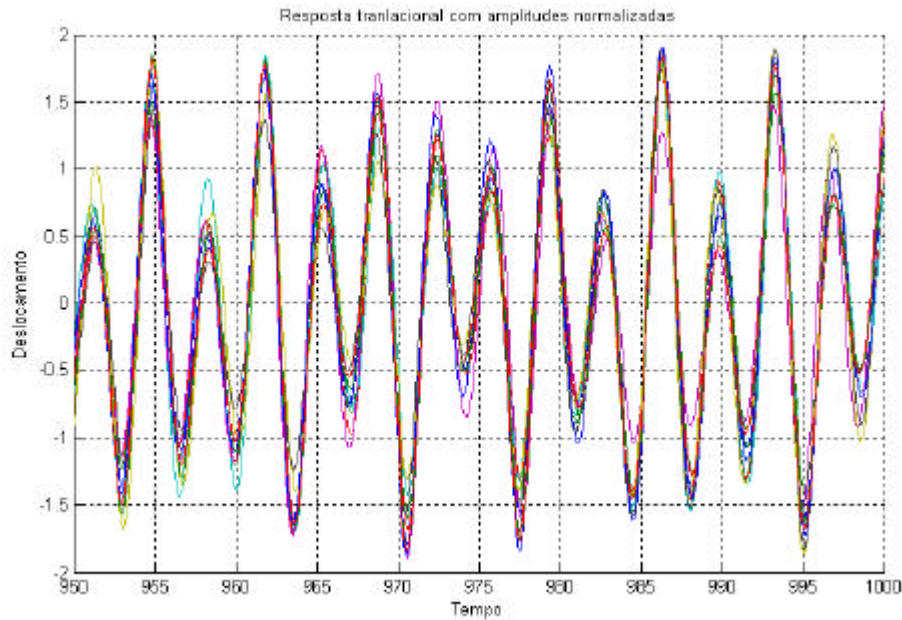


Figura 20: Resposta considerando 10 amplitudes normalizadas

Observa-se o comportamento não-linear da resposta do movimento transversal de cada ponto da placa através desse gráfico, em que as respostas obtidas em função de cada uma das amplitudes normalizadas foi subtraída da resposta de referência (obtida em função da amplitude de referência) resultando em dez sinais variando com o tempo.

Com a variação da amplitude no intervalo de 0 a 1 com passo 0.333, ou seja, 3 amplitudes analisadas, e resolução de 10000 pontos no intervalo de tempo de 0 a 1000, obteve-se

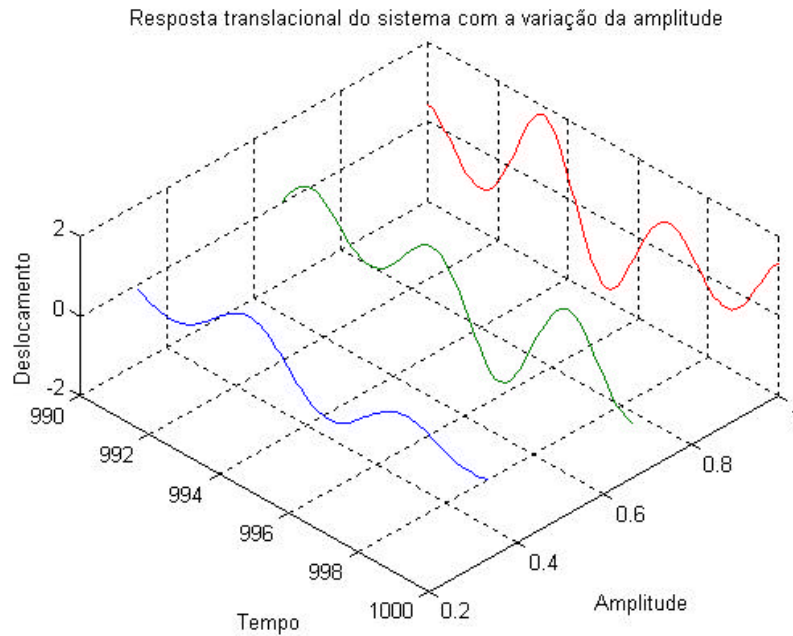


Figura 21: Resposta – amplitude entre 0 e 1 - passo 0,333

A normalização das amplitudes em relação ao valor da maior amplitude resulta em

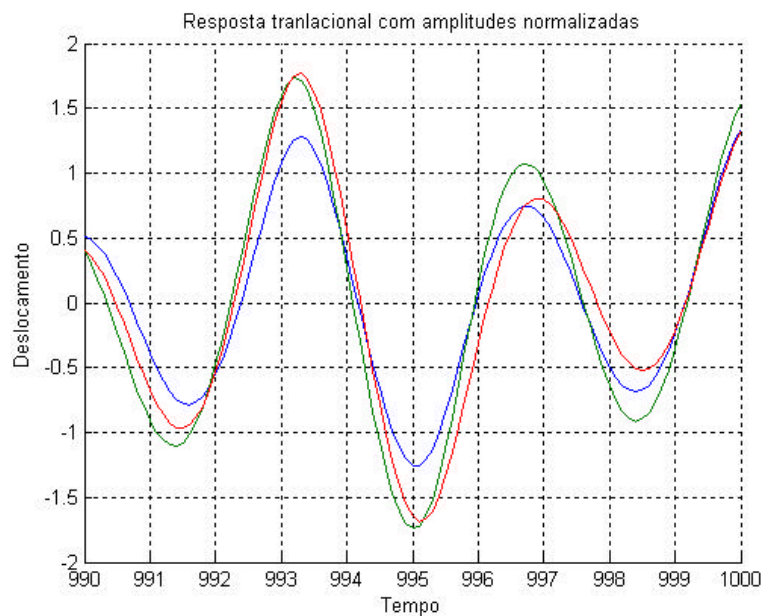


Figura 22: Resposta considerando 3 amplitudes normalizadas

Observa-se o comportamento não-linear da resposta do movimento transversal de cada ponto da placa através desse gráfico, em que as respostas obtidas em função de cada uma das amplitudes normalizadas foi subtraída da resposta de referência (obtida em função da amplitude de referência) resultando em três sinais variando com o tempo.

A simulação da resposta do sistema com relação à variação da frequência da função de excitação foi realizada através de Scripts do MatLab (arquivos sim8.m e mm15.m)

Com a variação da frequência no intervalo de 0 a 1 com passo 0.1, ou seja, 10 frequências analisadas, e resolução de 10000 pontos no intervalo de tempo de 0 a 1000, obteve-se

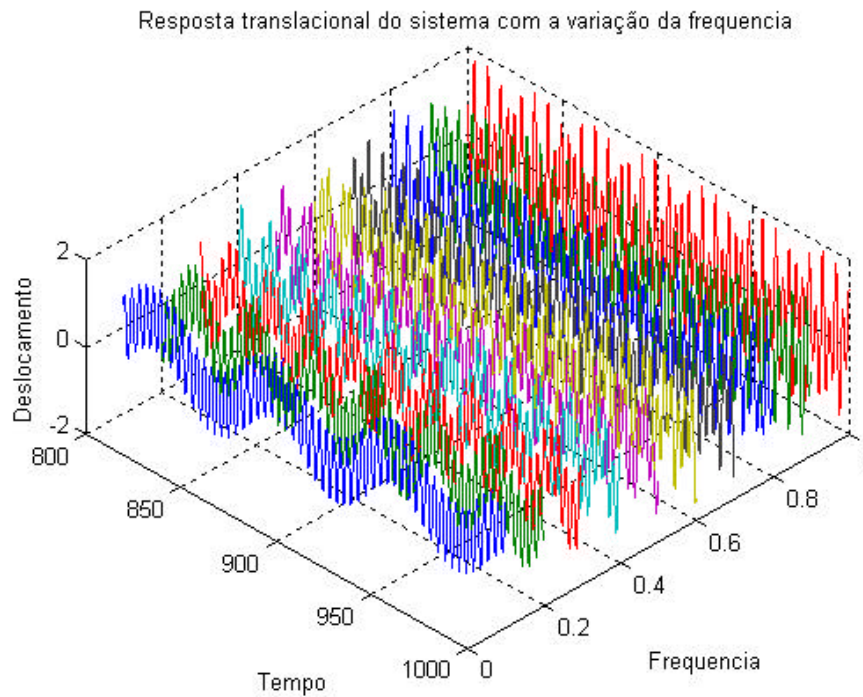


Figura 23: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,1 – últimos 2000 pontos

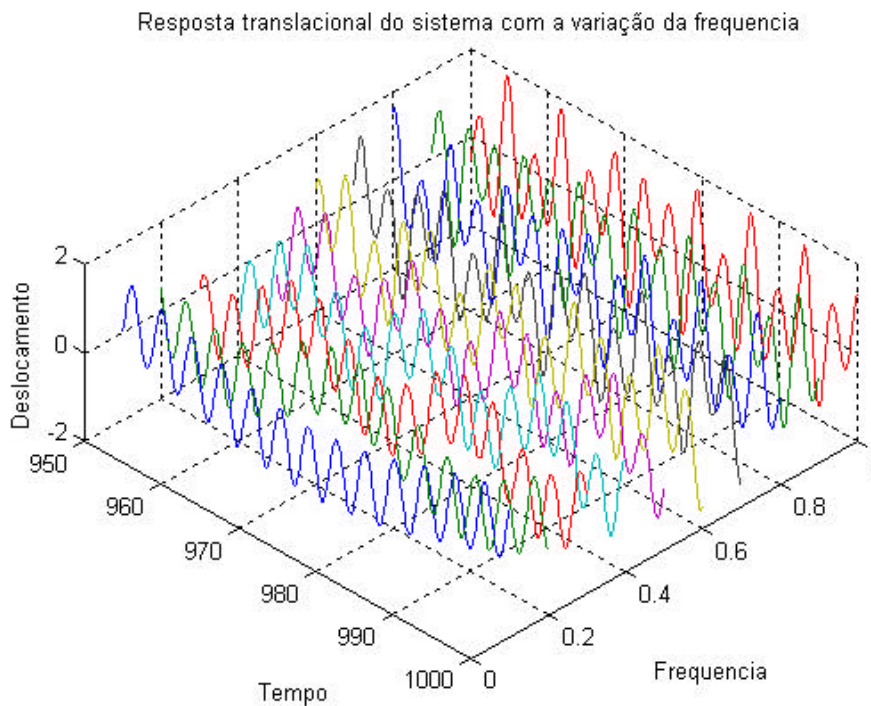


Figura 24: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,1 – últimos 500 pontos

Com a variação da frequência no intervalo de 0 a 1 com passo 0.333, ou seja, 3 frequências analisadas, e resolução de 10000 pontos no intervalo de tempo de 0 a 1000, obteve-se

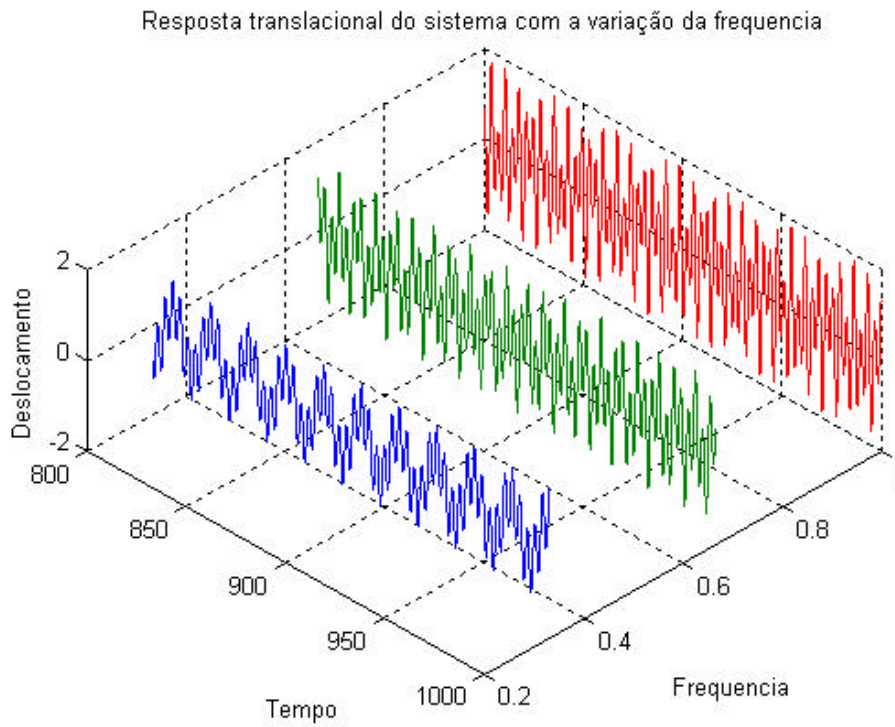


Figura 25: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,333 – últimos 2000 pontos

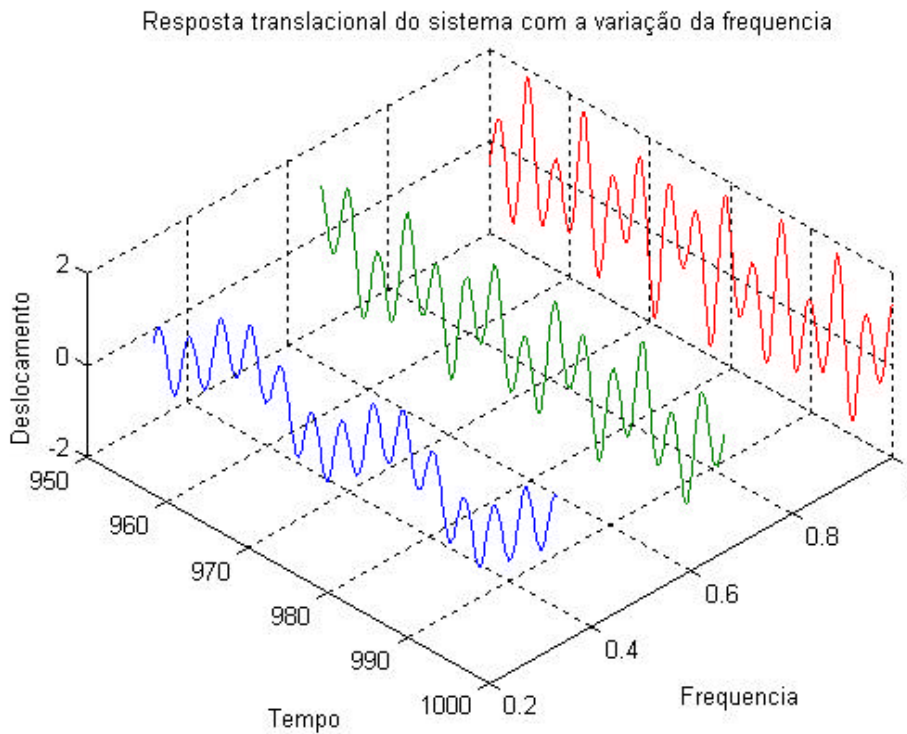


Figura 26: Resposta – frequência entre 0 e 1 - passo 0,333 – últimos 500 pontos

6 – Conclusão

Como etapa inicial, foi feita uma pesquisa sobre oscilações não-lineares e análise da dinâmica não-linear de placas circulares através das bibliotecas do INPE, UNESP e internet. Logo após, foram feitas simulações de sistemas vibratórios, lineares e não-lineares, com um, dois e infinitos graus de liberdade, utilizando-se de Scripts do MatLab. Através dessas simulações verificamos o comportamento dinâmico de sistemas massa-mola-amortecedor sujeitos à diferentes excitações, além de obtermos os modos naturais da vibração livre linear de membranas circulares com borda fixa.

Foi identificado um modelo de vibração forçada não-linear de placas circulares com borda livre, através do qual obteve-se a resposta do movimento transversal de cada ponto da placa. Variou-se alguns parâmetros de controle, no caso amplitude e frequência da função de excitação, afim de se investigar o comportamento dinâmico não-linear da placa. Contudo, nenhum ponto de bifurcação foi encontrado durante as simulações executadas, o que se pôde observar claramente foi a resposta não linear do movimento transversal da placa, tendo como base a comparação entre as respostas obtidas com a variação da amplitude e frequência de excitação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Timoshenko, S., **Theory of Plates and Shells**, McGraw-Hill, c1959
- [2] Magrab, E. B., **Vibrations of elastic structural members**, Sijthoff & Noordhoff, 1979
- [3] Leissa, A.W., **Vibration of Plates** NASA Spec. Public; 1969
- [4] Leissa, A.W., **Plate Vibration Research, 1976-1980: Complicating Effects**, *Shock Vib. Digest* 13(9) (1981) 11-22
- [5] Leissa, A.W., **Recent studies in plate vibrations: 1981-85, Part I. Classical Theory**, *Shock Vib. Digest* 19(2) (1987) 11-18
- [6] Leissa, A.W., **Recent studies in plate vibrations: 1981-85, Part II. Complicating Effects**, *Shock Vib. Digest* 19(3) (1987) 10-24
- [7] Leissa, A.W., **Singularity considerations in membrane, plate and shell behaviors**, *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 3341-3353
- [8] Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., **Research on thick plate vibration: A Literature Survey**, *Journal of Sound and Vibration* 180(1) (1995) 163-176
- [9] Liew, K. M., Yang, B., **Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of circular plates: a polynomials-Ritz analysis**, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175 (1999) 189-201
- [10] Kang, Jae-Hoon, **Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation**, *Computers and Structures* 81 (2003) 1663-1675
- [11] Sathyamoorthy, M, **Nonlinear vibrations of plates: an update of recent research**, *Applied Mechanical Review Part 2* 49 (1996) S55-S62.
- [12] Wu, T.Y., Liu, G.R., **Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by generalizad differential quadrature rule**, *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 7967-7980
- [13] Ribeiro, P., Petyt, M., **Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method**, *Composite Structures* 46 (1999) 197-208
- [14] S. Sridhar, D. T. Mook and A. H. Nayfeh, **Nonlinear resonances in the forced responses of plates. Part I: symmetric responses of circular plates**, *Journal of Sound and Vibration* 41 (1975) 359-373.
- [15] S. Sridhar, D. T. Mook and A. H. Nayfeh, **Nonlinear resonances in the forced responses of plates. Part II: asymmetric responses of circular plates**, *Journal of Sound and Vibration* 59 (1978) 159-170.
- [16] J. Hadian and A. H. Nayfeh, **Modal interaction in circular plates**, *Journal of Sound and Vibration* 142 (1990) 279-292.

- [17] H. Nayfeh and S. A. Nayfeh, **On nonlinear modes of continuous systems**, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Vibration and Acoustics* 116 (1994) 129-136.
- [18] H. Nayfeh and B. Balachandran, **Modal interactions in dynamical and structural systems**, *Applied Mechanical Review Part 2* 42 (1989) S175-S201.
- [19] Chia, C. Y. and Sathyamoorthy, M., **Nonlinear vibration of circular plates with transverse shear and rotatory inertia**, *Journal of Sound and Vibration* 78 (1981) 131-137
- [20] Dumir, P. C. and Singal, L., **Nonlinear analysis of thick circular plates**, *Journal of Engineering Mechanics* 112 (1986) 260-272
- [21] Reddy, J. N., **Refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation**, *International Journal of Solids and Structures* 20(3) (1984) 881-896
- [22] K. Yasuda and T. Asano, **Nonlinear forced oscillations of a rectangular membrane with degenerated modes**, *Bulletin of JSME* 29 (1986) 3090-3095.
- [23] Y. Chia, 1980, **Nonlinear Analysis of Plates**, New York: McGraw-Hill.
- [24] Yeh, Y.L., Chen, C.K., Lai, H.Y., **Chaotic and bifurcation dynamics of a simply-supported thermo-elastic circular plate with variable thickness in large deflection**, *Chaos, Solutions and Fractals* 15 (2003) 811-829
- [25] Touzé, C., Thomas, O., Chaigne, A., **Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I: theory**, *Journal of Sound and Vibration* 258(4) (2002) 649-676
- [26] Thomas, O., Touzé, C., Chaigne, A., **Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part II: experiments**, *Journal of Sound and Vibration* 265(5) (2003) 1075-1101.