



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-10076-PRE/5621

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DO CAOS

Arthur Rodrigues Lima*
Cleverson Maranhão Porto Marinho*
Elbert Einstein Neher Macau

*ITA – bolsista PIBIC/CNPq

Seminário de Iniciação Científica do INPE (SICIINPE).

INPE
São José dos Campos
2003



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DO CAOS

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)

Arthur Rodrigues Lima (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
Cléverson Maranhão Porto Marinho (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)
E-mail: arthur05@h8.ita.br
cleversonporto@directnet.com.br

Dr. Elbert Eintein N. Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)
E-mail: elbert@lac.inpe.br

Junho de 2003

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 2 – OBJETIVOS

CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

- 3.1 Iteração
- 3.2 Bifurcação
- 3.3 Universalidade
- 3.4 Atratores estranhos
- 3.5 Dimensão topológica
- 3.6 Dimensão fractal
- 3.7 A equação logística
- 3.8 Expoente de Lyapunov
- 3.9 Espaço de Lyapunov

CAPÍTULO 4 – SINCRONIZAÇÃO

- 4.1 Conceitos gerais em sincronização
- 4.2 Sincronização no oscilador de Chua
- 4.3 Estudo da estabilidade assintótica via função de Lyapunov

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

CAPÍTULO 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Introdução

Neste trabalho serão apresentados conceitos com os quais um iniciante no estudo da Teoria do Caos precisa se familiarizar. São conceitos com os quais irá lidar em todo o seu estudo nesta área, fundamentais para o entendimento de qualquer sistema que possa se comportar de maneira caótica. A iteração, os princípios de universalidade e os diagramas de bifurcação são alguns destes conceitos. Alguns conceitos matemáticos, como os de dimensão euclidiana, dimensão topológica são introduzidos, precedendo a apresentação do que seria a dimensão fractal. Para completar, é apresentado o expoente de Lyapunov, recurso de grande utilidade ao se manipular com sistemas que possam apresentar comportamento caótico.

Foram utilizados alguns softwares para a implementação de mapas iterativos, gerando tabelas de dados e/ou gráficos. São eles: Microcal Origin, Dynamics 2, bem como a implementação de programas em linguagem C, compilando com o Borland C++ 5.01.

A seguir será tratado o problema da sincronização utilizando o caos. Apresentar-se-á o método de Pecora e Carroll para a sincronização de sistemas caóticos, e a seguir aplicaremos este método no Oscilador de Chua, como uma ilustração da utilidade da teoria aqui desenvolvida.

2. Objetivos

Com este trabalho, pretende-se entender os conceitos principais da Teoria do Caos, para que num estudo subsequente possam ser aplicados os conceitos de sistemas caóticos no estudo de escoamentos turbulentos. Assim, procurou-se utilizar softwares para a implementação de mapeamentos iterativos de algumas funções, gerando gráficos de funções iteradas, diagramas de bifurcação, entre outros.

Além disso, pretende-se mostrar a grande utilidade do domínio do caos para o envio de informações, através da sincronização de dois osciladores. Para isso, foi implementado o método de Pecora e Carroll para a sincronização, aplicando diretamente no oscilador de Chua. Pretendeu-se além disso fazer um estudo da estabilidade assintótica, utilizando função de Lyapunov.

3. Fundamentação teórica

3.1 Iteração

Um dos maiores avanços em matemática neste século foi a compreensão de que mesmo os mais simples sistemas dinâmicos podem comportar-se de maneira extremamente imprevisível. Observe as funções reais:

$$y = x^2 + c \text{ e } x = y$$

Muitos universitários e mesmo alguns alunos do ensino médio podem identificar com sucesso que estas são a equação de uma parábola e de uma reta, respectivamente. Existem poucas equações mais simples que estas e, ainda assim, delas nós podemos obter alguns comportamentos um tanto complexos e interessantes. Muito da matemática popular atual pode ser ilustrado com estas duas equações.

Uma forma de interpretar as funções é como duas curvas no plano. Uma segunda maneira é como uma série de instruções:

1. Dado um número X , pegue o seu quadrado e adicione a constante C . Chame o resultado de Y .
2. Dado Y , não faça nada. Chame o resultado de X .
3. Repita o passo 1 com o valor encontrado no passo 2.

As duas primeiras instruções juntas formam um mapa de um número no outro:

$$f: x \rightarrow x^2 + c$$

Se nós fizermos isto para todos os números reais nós estaremos mapeando os números reais neles mesmos:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

A adição do terceiro passo resulta em um mapeamento iterado. Nós iremos usar o símbolo $f^n(x)$ para representar a enésima iteração do nosso valor original x . As instruções nos dizem para gerar uma série de números:

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$$

que nós chamaremos de órbita. O valor inicial " x " é chamado de "semente" da órbita. Note que não há nenhuma instrução dizendo-nos quando parar. Felizmente, os homens não são tão estúpidos como são as instruções dadas a eles. Em algum ponto nesta sequência, surgirá um padrão que irá nos permitir parar a iteração e fazer um julgamento. Se isto nos tomar muito tempo ou se simplesmente estivermos cansados de fazer todo este trabalho, podemos sempre passar isso para um computador. Vamos agora olhar o comportamento de algumas órbitas.

O parâmetro $c = 0$ é de longe o mais fácil de trabalharmos como $f: x \rightarrow x^2 + c$, irá nos fornecer os seguintes resultados:

$$f^n \rightarrow \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}, \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

Todas as órbitas se aproximam de zero ou infinito, exceto aquela que começa em $x = \pm 1$. Os pontos zero e infinito são chamados de pontos fixos atratores ou absorventes porque eles atraem as órbitas dos pontos ao redor deles, enquanto ± 1 são chamados pontos fixos repelentes ou fontes pela razão oposta.

Enquanto $c > 1/4$, a parábola fica inteiramente acima da linha diagonal e todos os valores iniciais serão levados para o infinito. Quando $c = 1/4$ a parábola e a diagonal interceptam-se em $1/2$. Pontos iniciais com valor absoluto maior que $1/2$ irão expandir para o infinito, enquanto aqueles no intervalo $0 \leq |x| \leq 1/2$ aproximam-se de $1/2$

assintoticamente. Depois de cerca de 700 iterações esses pontos terão alcançado 0.499 . Os resultados das primeiras 10 iterações para alguns valores iniciais são apresentados na tabela abaixo.

<p>As órbitas de seis valores iniciais</p> <p>$f: x \rightarrow x^2 + 1/4$</p> <p>Este mapa tem um ponto fixo.</p> <p>As órbitas que não divergem para o infinito são atraídas para +1/2.</p>					
±1	±0.75	±0.5	±0.25	±0.1	0
+1.25	+0.812	+0.5	+0.3125	+0.26	+0.25
+1.812	+0.910	+0.5	+0.3476562	+0.3176	+0.3125
+3.535	+1.078	+0.5	+0.3708648	+0.3508697	+0.3476562
+12.747	+1.412	+0.5	+0.3875407	+0.3731096	+0.3708648
+162.744	+2.246	+0.5	+0.4001878	+0.3892107	+0.3875407
+26485.994	+5.296	+0.5	+0.4101503	+0.4014850	+0.4001878
+701507907	+28.297	+0.5	+0.4182232	+0.4111902	+0.4101503
+4.921e+17	+800.985	+0.5	+0.4249107	+0.4190774	+0.4182232
+2.421e+35	+64158.262	+0.5	+0.4305491	+0.4256258	+0.4291070
+5.864e+70	+4.116e+11	+0.5	+0.4353725	+0.4311573	+0.4305491
.
.
.
Infinity	infinity	+1/2	+1/2	+1/2	+1/2

Os pontos fixos mudam a medida que o parâmetro muda, caindo de modo desprezível a medida que “c” torna-se menor. A parábola e a linha diagonal interceptam-se em dois pontos agora, as raízes da equação:

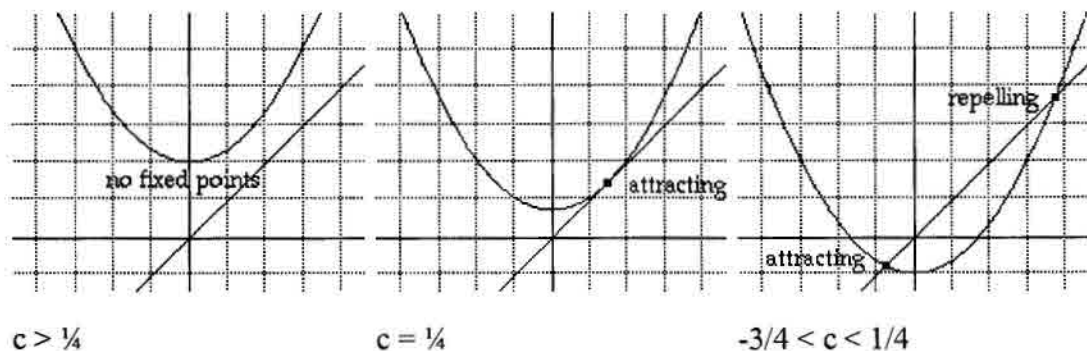
$$x^2 + c = x.$$

Sobre uma análise adicional, pode ser mostrado que a menor das duas raízes é um ponto fixo atrator e a maior das raízes é um ponto fixo repelente. Nós já mostramos isto para o caso especial onde $c = 0$, então vamos tentar com outro valor fácil. Quando o parâmetro $c = -3/4$ a equação agora tem raízes $-1/2$ e $+3/2$. Os resultados das primeiras dez iterações para alguns valores iniciais são apresentados na tabela abaixo.

Orbitas de seis valores iniciais					
$f: x \rightarrow x^2 - 3/4$					
Este mapa possui dois pontos fixos. As órbitas que não divergem para o infinito são repelidas de $+3/2$ e atraídas para $-1/2$.					
± 1.75	± 1.5	± 1	± 0.75	± 0.5	± 0.25
+2.31	+1.5	+0.25	-0.1875	-0.5	-0.6875
+4.59	+1.5	-0.6875	-0.71484375	-0.5	-0.2773437
+20.38	+1.5	-0.2773437	-0.2389984	-0.5	-0.6730804
+414.93	+1.5	-0.6730804	-0.6928797	-0.5	-0.2969627
+172173.29	+1.5	-0.2969627	-0.2699176	-0.5	-0.6618131
+2.964e+10	+1.5	-0.6618131	-0.6771444	-0.5	-0.3120033
+8.787e+20	+1.5	-0.3120033	-0.2947537	-0.5	-0.6525639
+7.721e+41	+1.5	-0.6525639	-0.6650421	-0.5	-0.3240428
+5.962e+83	+1.5	-0.3240428	-0.3077189	-0.5	-0.6449962
overflow	+1.5	-0.6449962	-0.6553090	-0.5	-0.3339798
.
.
.
infinity	+3/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

Como suspeitamos, $+3/2$, a maior das duas raízes é de fato um ponto fixo repelente, mas será $-1/2$ um atrator? A resposta é sim, se você esperar o suficiente. As órbitas aproximam-se de $-1/2$ oscilando entre dois valores em cada lado de $-1/2$, cada um que se aproxima desse valor assintoticamente. Esse comportamento pode ser visto na tabela acima e é uma indicação de coisas que virão.

Pontos fixos para alguns valores de parâmetro c



Para valores do parâmetro $c < -3/4$, órbitas que anteriormente teriam se aproximado da menor das duas raízes agora oscilam entre dois valores distintos. O ponto fixo atrator bifurcou-se ou dividiu-se e a órbita não é mais estável, mas é periódica, alternando entre dois valores. A medida que " c " se torna ainda mais negativo, outra bifurcação aparece e o período duplica para 4 e a seguir para 8, 16, 32, 64, etc. A distância entre bifurcações sucessivas, entretanto, aproximam-se de zero e o fazem de tal forma que a duplicação de período chega a um valor finito para $c < -1/4$. Após este valor, órbitas que eram anteriormente periódicas agora percorrem uma órbita não periódica sobre um intervalo finito entre $[-2, 2]$ e irão passar por cada local deste intervalo. Tal comportamento é chamado de ergótico e é uma característica do caos. Além disso, valores iniciais que estão inicialmente próximos um do outro irão, após algumas poucas iterações, seguir órbitas que são completamente diferentes. Este comportamento, que exibe sensível dependência às

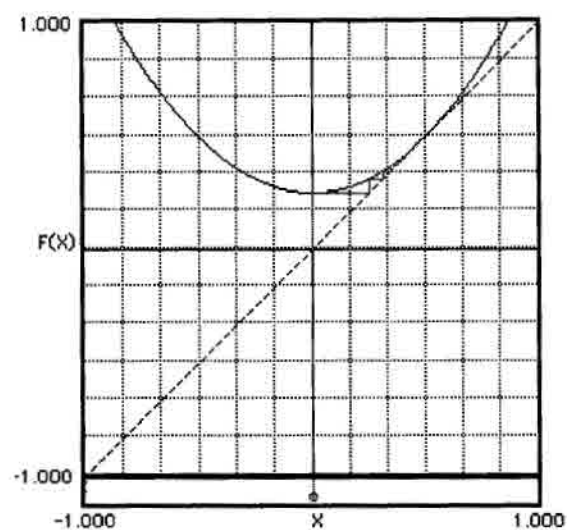
condições iniciais, é chamado caótico e os valores do parâmetro “c” sobre os quais este comportamento ocorre são chamados de regime caótico. A sequência das bifurcações levando a um regime caótico são chamadas de rota de duplicação de período para o caos. Nas seções seguintes, estas descrições serão conferidas graficamente.

3.2 Bifurcação

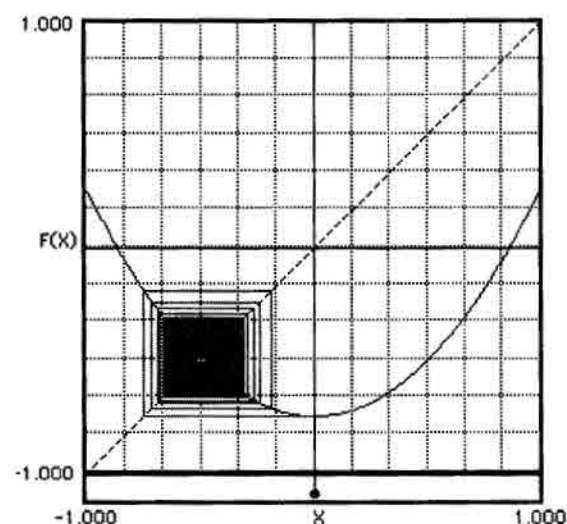
Uma aproximação mais intuitiva para as órbitas pode ser feita através da representação gráfica usando as seguintes regras:

1. Desenhar ambas as curvas nos mesmos eixos. Pegar um ponto no eixo X. Este ponto é nosso valor inicial.
2. Desenhar uma linha vertical deste ponto até interceptar a parábola.
3. Desenhar uma linha horizontal da interceptação até alcançar a linha diagonal.
4. Repetir o passo 2 com o novo

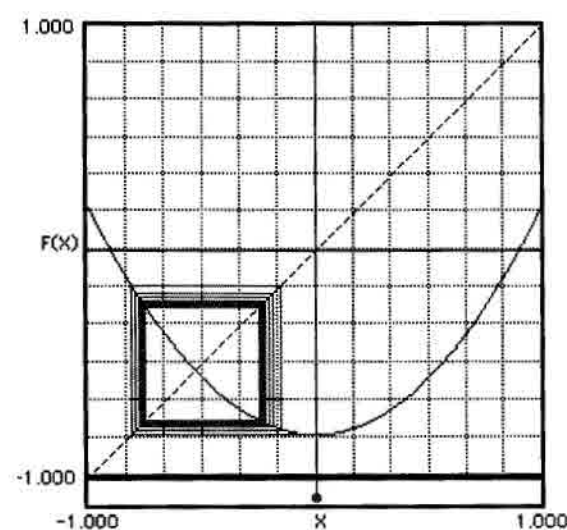
O que temos a seguir é uma série de gráficos detalhando alguns dos comportamentos descritos por agora. Devido a sua aparência, estes diagramas são comumente conhecidos como diagramas de teia (ou diagramas de teia de aranha).



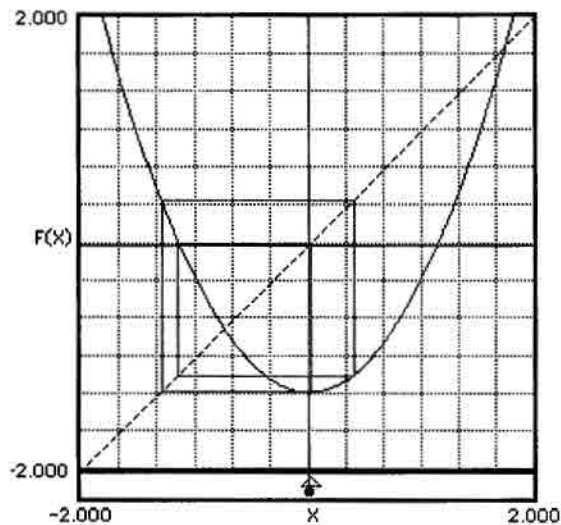
Este gráfico mostra o comportamento ponto fixo simples atrator do valor de parâmetro $c = 1/4$ para o valor inicial zero. Zero será usado como um valor inicial padrão para todos os diagramas seguintes porque ele é “bem comportado”. Note como as órbitas se movem para $1/2$. Um exame adicional mostra que esta aproximação é assintótica.



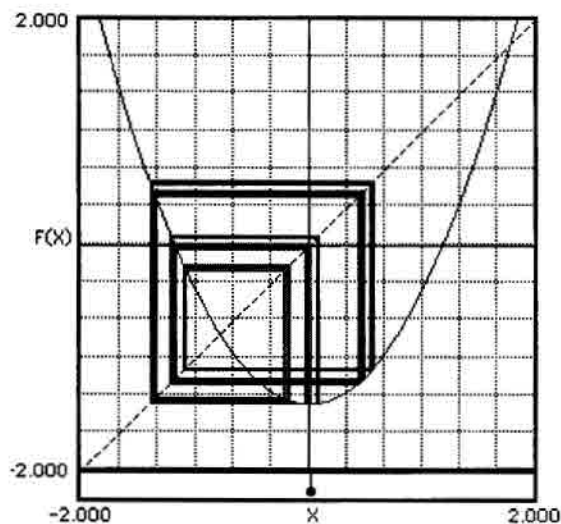
Neste gráfico, o valor do parâmetro c escolhido foi $c = -3/4$. Note como a órbita aproxima-se do ponto fixo atrator de lados opostos. Após mais de 1000 iterações, ainda há um buraco visível no centro. A órbita ainda não terá alcançado o seu valor final.



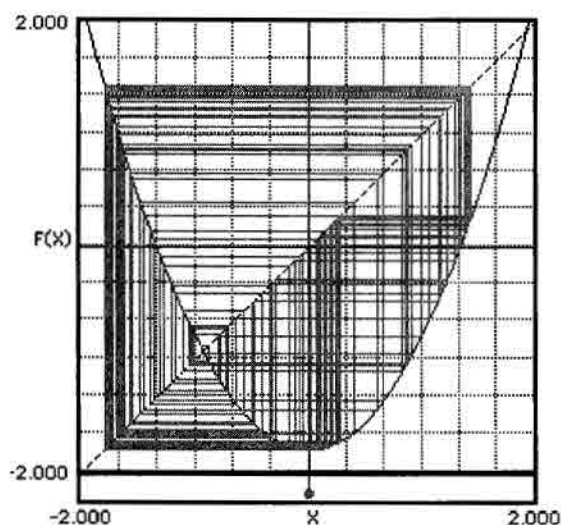
Quando $c = -13/16$ a órbita fixa-se em um ciclo de período dois, alternando entre $-3/4$ e $-1/4$.



Aqui nós vemos um ciclo de período quatro. Quando $c = -1/3$, a órbita oscila entre os valores -1.2996224637 , 0.3890185483 , -1.1486645691 , e 0.0194302923 . Este fixa-se mais rapidamente. Após apenas 100 iterações, já é visto completamete.



Esta órbita foi desenhada usando um valor do parâmetro $c = -1.4015$. Embora pareça similar ao diagrama anterior, as iterações parecem nunca se repetir. Em vez disso, elas variam no interior das bandas. Minúsculos ajustes nas condições iniciais dão órbitas que são obviamente diferentes. Em $c = -1.4$, a órbita tinha um período 32, agora a órbita tem um período infinito.

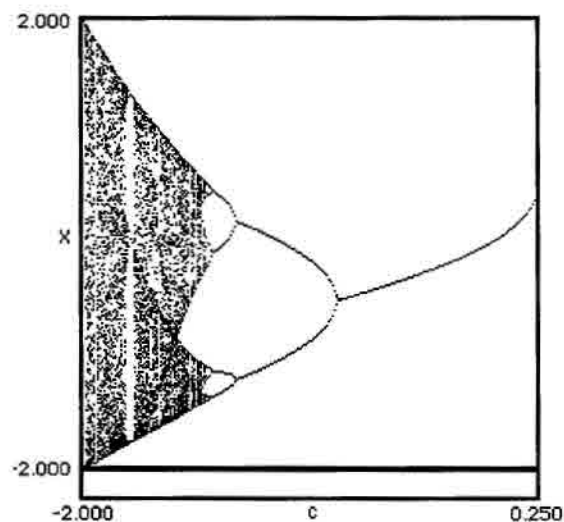


Se não for caos, eu não sei o que é. Em $c = -1.8$, a órbita cobre toda a região de um subintervalo de $[-2, 2]$. Esta figura mostra apenas um pequeno subconjunto de todos os pontos que a órbita vai eventualmente visitar.

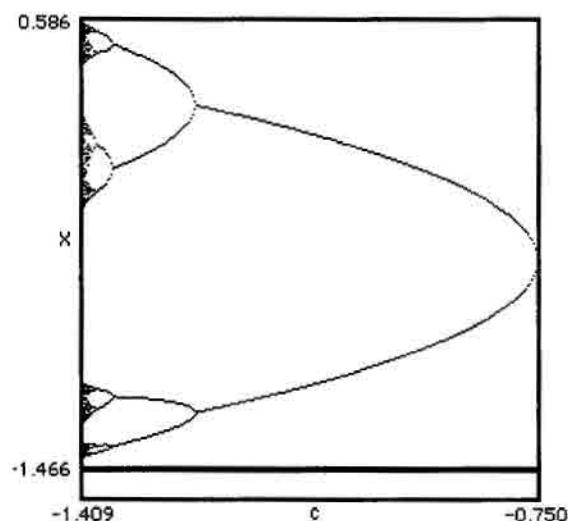
Um modo de ver o comportamento geral do mapa

$$f: x \rightarrow x^2 + c$$

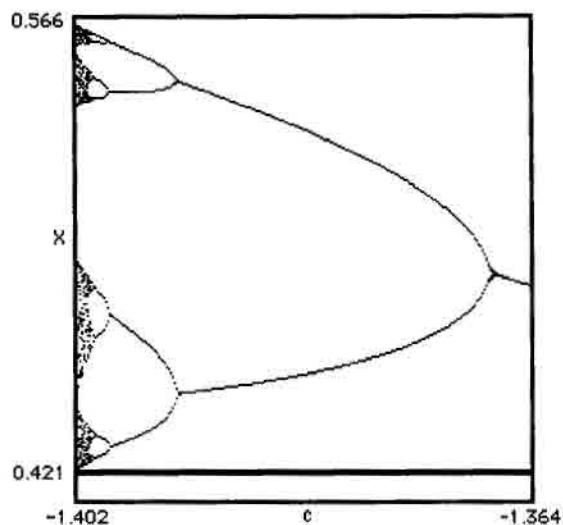
é plotar as órbitas em função do parâmetro “c”. Nós não iremos plotar todos os pontos de uma órbita, apenas aqueles mais indicativos. As primeiras centenas de iterações serão descartadas permitindo que a órbita se estabeleça em seu comportamento característico. Tal diagrama é chamado de diagrama de bifurcação pois ele mostra as bifurcações das órbitas (além de outras coisas).



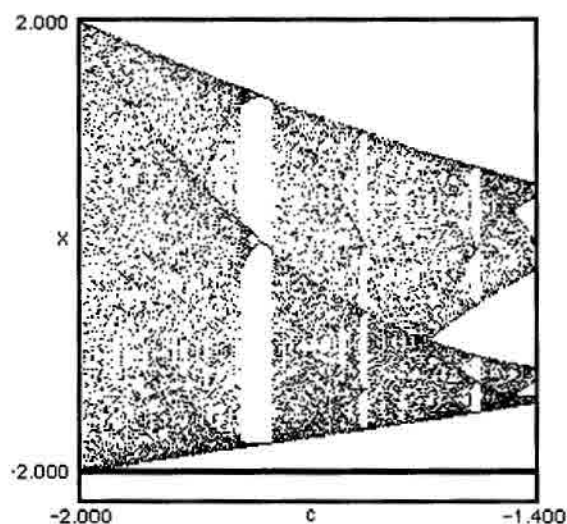
Aqui nós vemos todo o diagrama de bifurcação. Valores de parâmetro fora do intervalo $[-2, 1/4]$ não foram incluídos pois suas órbitas vão para o infinito. Note como um único ponto fixo atrator bifurca-se repetidamente e então se torna caótico. Note também a janela para $c = -1.8$. Iremos examinar estas áreas com maiores detalhes.



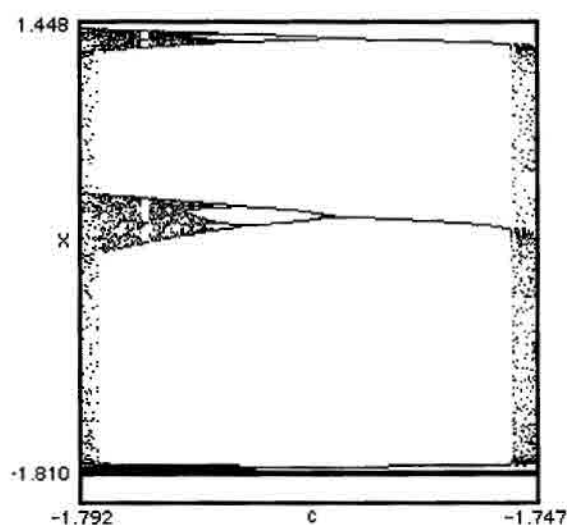
Aqui nós vemos uma ampliação da região de duplicação de período. Note as sucessivas bifurcações.



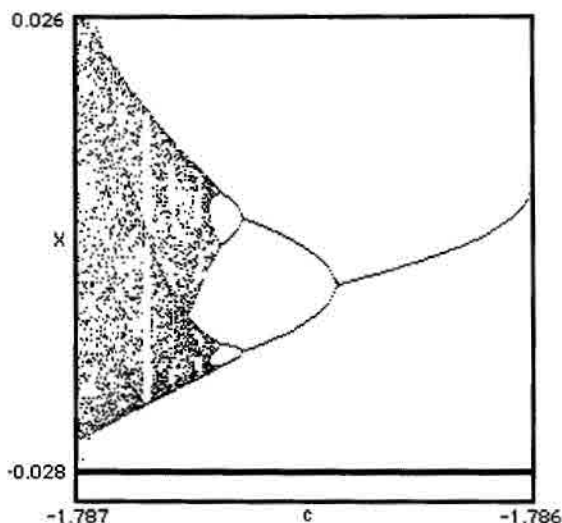
Dando um zoom na região superior da esquerda nós vemos uma repetição da estrutura em larga escala. A região de duplicação de período exibe *auto semelhança*, isto é, as pequenas regiões exibem-se de modo similar às grandes regiões. Essa propriedade pode ser vista em outras partes do diagrama.



Aqui nós vemos uma ampliação do regime caótico. Note as janelas de periodicidade no meio do caos. Vamos dar zoom na maior delas.



A estrutura da janela repete a estrutura global do diagrama de bifurcação. O regime de duplicação de período é o mesmo, mas multiplicado por três, isto é, 3, 6, 12, 24, 48... Ao invés de 1, 2, 4, 8, 16.... Note a janela no interior de cada lobo. A perspectiva é um pouco achatada, a medida que a janela cobre uma região que é mais alta que larga.



Esta é uma ampliação centrada no meio da maior janela no lobo central. Note a escala. Nós aumentamos em 1000 vezes. O diagrama é surpreendentemente similar ao original. A medida que as coisas mudam, elas parecem continuar iguais.

3.3 Universalidade

Como foi mostrado nos diagramas, subregiões no interior do diagrama de bifurcação mostram-se extraordinariamente similares umas às outras e ao diagrama como um todo. Esta *auto semelhança* foi mostrada repetir mesmo nas melhores resoluções. Tal comportamento é característico de entidades geométricas denominadas fractais (um tópico ao qual irei recorrer em capítulos posteriores) e é bastante comum em mapas iterados. Na região de duplicação de período, por exemplo, toda a região que começa na primeira bifurcação " λ_1 " [lambda um] parece a mesma da região começando na segunda bifurcação " λ_2 " [lambda dois], que parece a mesma região começando na terceira bifurcação " λ_3 " [lambda três], e assim por diante. É interessante que a distância entre os sucessivos pontos de bifurcação " λ_n " [lambda n] diminuem geometricamente num padrão que a razão entre os intervalos

$$\delta = \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\Delta_{n+1} - \Delta_n} \text{ [delta]}$$

aproxima-se de um valor constante a medida que "n" tende ao infinito. Esta constante, chamada constante de Feigenbaum, aparece repetidamente em figuras com *auto semelhança* e tem aproximadamente o valor de:

4.669201609102990671853203820466201617258185577475768632745651
 343004134330211314737138689744023948013817165984855189815134
 408627142027932522312442988890890859944935463236713411532481
 714219947455644365823793202009561058330575458617652222070385
 410646749494284981453391726200568755665952339875603825637225

Não apenas a constante de Feigenbaum reaparece em outras figuras, mas da mesma forma várias outras características do diagrama de bifurcação. De fato, surpreendentemente diagramas similares podem ser gerados a partir de qualquer função suave, unidimensional e não monotônica mapeada em si mesma. Um círculo, elipse, seno ou qualquer outra função com um máximo local irão produzir um diagrama de bifurcação com duplicação de período cuja razão aproxima-se de δ [delta]. Juntamente com uma segunda constante " α " [alfa], o fator de escala " δ " [delta] demonstra a universalidade previamente desconhecida na matemática: a universalidade métrica. O comportamento de um mapa quadrático é típico de vários sistemas dinâmicos. Um ano após a descoberta deles, a rota de duplicação de período para o caos e as constantes alfa e delta apareceram em uma grande variedade de equações usadas para descrever escoamento hidrodinâmico. Isto não deveria ser muito surpreendente se não fosse pelo fato de que as constantes de Feigenbaum foram originalmente derivadas de um modelo matemático de populações animais. No segmentado e fragmentado mundo da moderna ciência, físicos da hidrodinâmica e biólogos populacionais raramente interagem entre si. A descoberta que um sistema de cinco equações diferenciais descrevendo a turbulência poderiam exibir o mesmo comportamento fundamental de um mapa unidimensional de uma parábola mapeada nela mesma foi um dos eventos chave na história da matemática.

Este capítulo foi dedicado à exploração de simples mapas unidimensionais iterativos

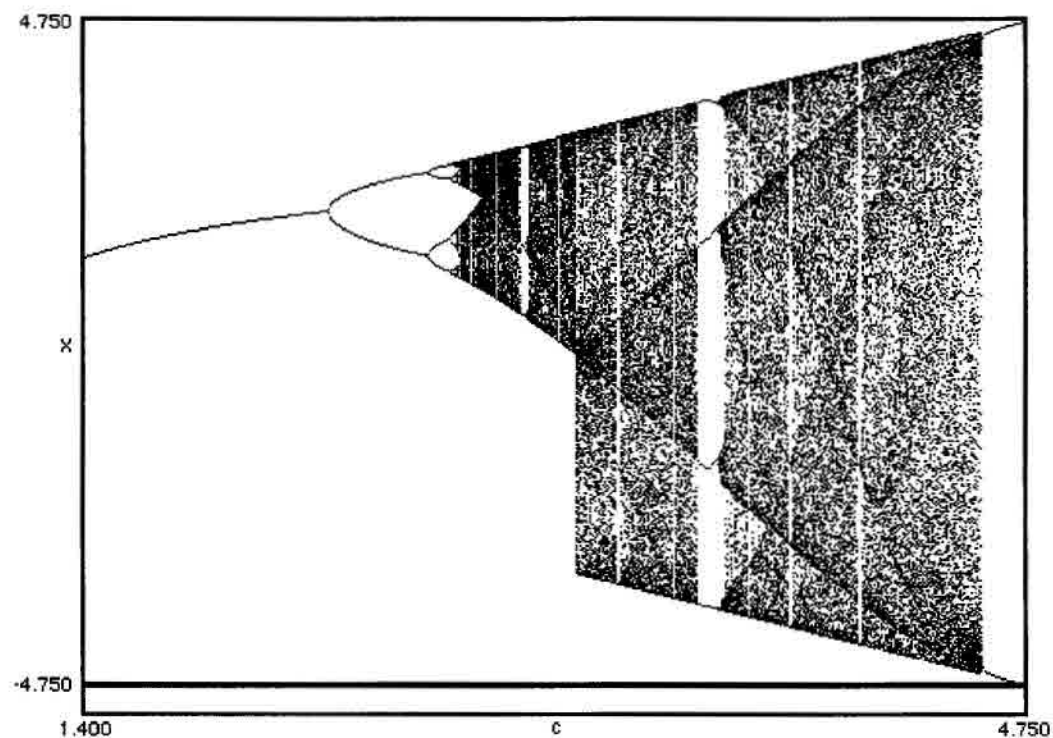
$$f: x \rightarrow x^2 + c$$

onde " x " e " c " eram números reais. A declaração feita é que este comportamento deste sistema é típico para qualquer função suave, unidimensional e não-monotônica quando

mapeada em si mesma. Vários livros sobre caos mencionam como as constantes de Feigenbaum e a rota de duplicação de período para o caos aparecem em outros mapas unidimensionais, mas poucos apresentam exemplos. Deste modo, eu achei necessário explorar o comportamento de funções adicionais para ver se tais resultados são realmente universais. Os resultados foram um tanto interessantes e completamente inesperados. Vamos ver os diagramas de bifurcação para alguns outros mapas.

Diagrama de bifurcação

$$x \rightarrow c.\text{sen}x$$

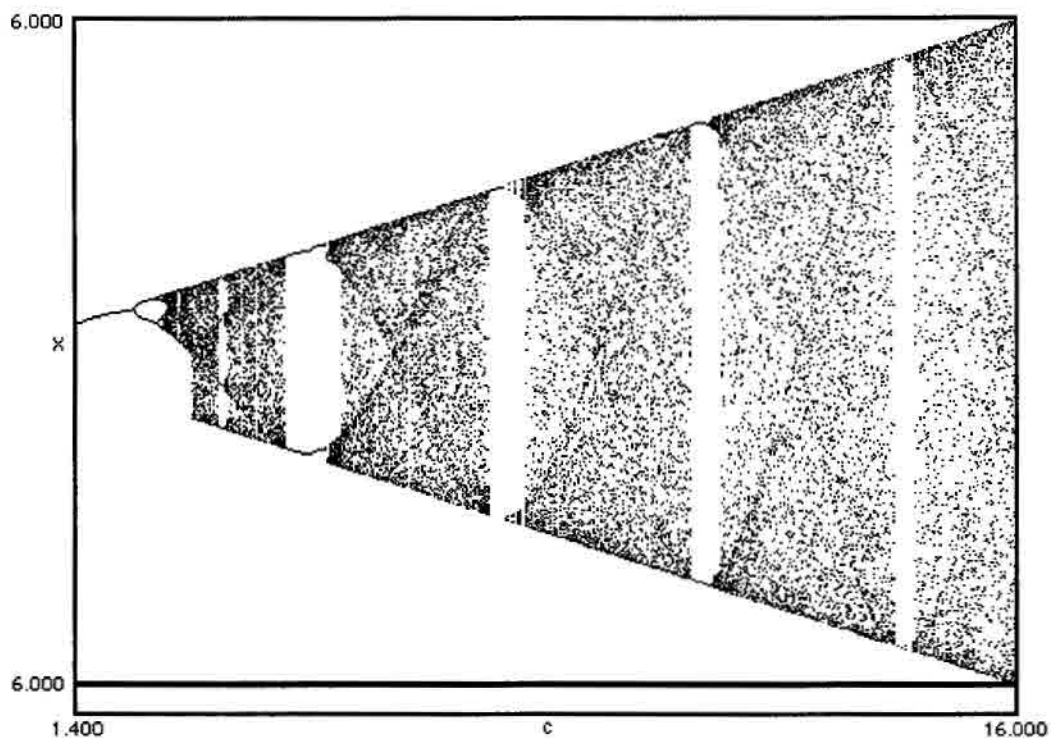


A estrutura do diagrama de bifurcação é similar àquele onde $f: x \rightarrow x^2 + c$, com um caminho de duplicação de período para o caos e uma região ergótica com estranhas janelas periódicas. No caso quadrático, o diagrama de bifurcação era finito e terminava em um valor de parâmetro além do qual todas as órbitas escapavam para o infinito. No caso senoidal, entretanto, o mapa continua com um abrupto impacto no regime caótico. Esta região é pontuada com janelas quase-periódicas; sendo a mais proeminente um ciclo de

período quatro. O regime caótico amplia-se e então termina em um ciclo de período dois, cada lado que bifurca-se. Novamente, a região ergótica colide e o padrão se repete *ad infinitum* como mostrado abaixo.

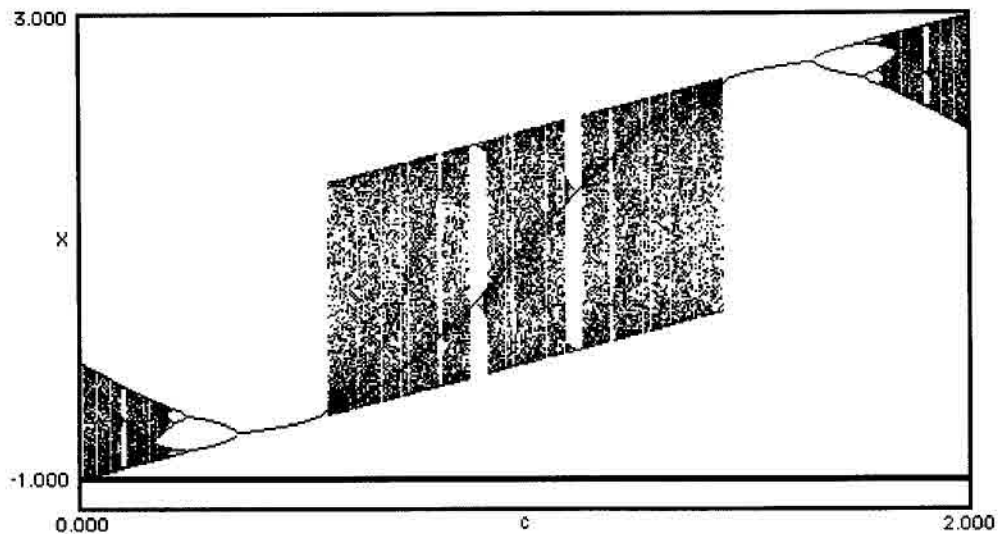
Diagrama de bifurcação num intervalo maior

$$x \rightarrow c.\text{sen}x$$

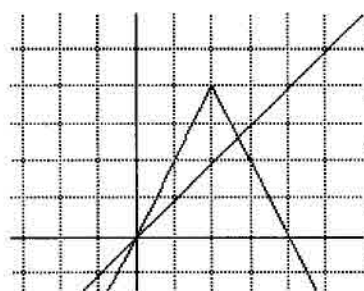


Como uma variação neste tema, eu tentei plotar o mapa de $f: x \rightarrow \text{sen}x + c$. Esta é mais parecida com um mapa quadrático no qual o parâmetro sobe ou desce a função sem mudar a forma do mapa. Como esperado, as órbitas forneceram um diagrama de bifurcação quase idêntico ao encontrado para um mapa quadrático, mas com um pouco de de curvatura.

Diagrama de bifurcação de $f: x \rightarrow \text{sen}\pi x + c$



Novamente, nós vemos uma mudança abrupta em relação ao comportamento característico do mapa quadrático para uma ampla região ergótica. Assim como com o mapa senoidal anterior, esta região ergótica extra tem janelas de igual periodicidade. (note como as janelas mais largas são abertas em um lado). Esta região termina com um outro diagrama de bifurcação similar ao quadrático, rotacionado de 180 graus em relação ao primeiro. O comportamento do diagrama no intervalo $[2, 4]$ é idêntico àquele entre $[0, 2]$, apenas mudado duas unidades para cima. Desse modo, o intervalo $[0, 2]$ é característica dos restantes valores de parâmetro e podem ser usados como uma célula unitária. O diagrama completo corre diagonalmente passando pela origem transversalmente de “menos infinito” para “mais infinito”.

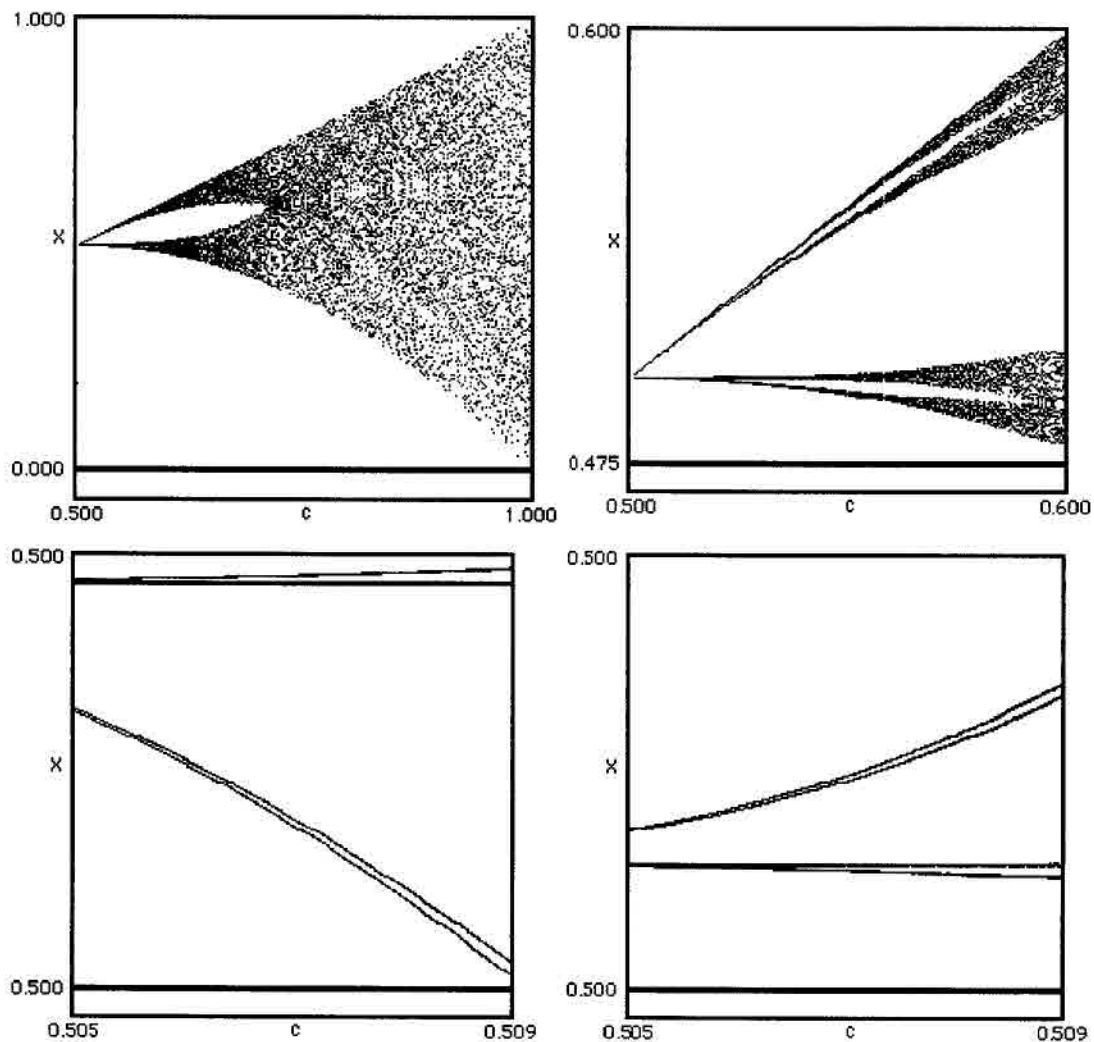


E quanto a uma função não monotônica que não é suave? A função $f: x \rightarrow c \cdot (1 - 2|x - 0.5|)$ é chamada de “função barraca” por razões óbvias. Para valores de parâmetro no intervalo $[0, 1/2]$ todas as órbitas bem comportadas caminham para o zero, enquanto parâmetros maiores levam todas as órbitas para o infinito. O primeiro diagrama abaixo mostra as órbitas no intervalo $[1/2, 1]$, onde o comportamento pode ser chamado de “interessante”. Enquanto há uma similaridade superficial para com vários dos mapas anteriores (os dois braços ergóticos fundindo-se em um, por exemplo) este não apresenta duplicação de período ou janelas. O que parece ser

linhas simples passam a ser, num exame mais detalhado, pares de linhas. Quando estes são examinados mais detalhadamente, eles também tornam-se pares de linhas e assim por diante. Órbitas nas regiões não ergóticas não são periódicas mas tendem a agrupar-se e desse modo parecem ter igual periodicidade. Não há bifurcação com este mapa. Aquelas órbitas que não são estáveis nem ergóticas mais provavelmente formam um Conjunto de Cantor. Eu ainda tenho que achar alguma menção deste surpreendente e curioso mapa na literatura popular.

Diagrama de bifurcação para a Função Barraca com sucessivas ampliações

$$f: x \rightarrow c \cdot (1 - 2|x - 0.5|)$$



3.4 Atratores estranhos

O próximo passo lógico é estender os conceitos de sistemas iterados para mapas multidimensionais. Dados os resultados das explorações anteriores, agora podemos assumir que muitos dos comportamentos encontrados em mapas quadráticos irão ter seu análogo em dimensões maiores e desse modo nós não precisamos introduzir um vocabulário inteiramente novo.

Seja

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

um mapa de ordem n -upla dos números reais neles mesmo. Pegue os resultados e jogue-os de volta no mapa repetidamente. Por motivo de conveniência, vamos chamar as ênuplas de “pontos”, e o \mathbb{R}^n de “espaço de dimensão n ”. Este procedimento gera uma órbita de pontos:

$$p, f(p), f^2(p), f^3(p), \dots, f^n(p), \dots$$

em nosso espaço, para um valor inicial “ p ”. O comportamento das órbitas em dimensões maiores é similar àquele unidimensional. Vamos observar algumas das possibilidades em duas dimensões.

É bem fácil imaginar mapas que ilustram pontos fixos atratores e repelentes. Por exemplo,

$$f: (x, y) \rightarrow (x/2, y/2)$$

leva todos os pontos assintoticamente para a origem, enquanto

$$f: (x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

leva todos os pontos para o infinito. O mapa

$$f: (x, y) \rightarrow (-y, x)$$

irá levar cada ponto em sua própria órbita de período quatro ao redor da origem. Gerar um mapa que produz seu próprio e único ciclo de período n foi um pouco mais difícil. Um candidato é:

$$f: (x, y) \rightarrow (\cos y^{-1}, \sin y^{-1})$$

que parece levar os valores iniciais a um ciclo de período 11, mas eu não tenho toda a certeza. Esta área da matemática é altamente dependente da computação, e eu não tenho um programa de computador para gerar mapas bidimensionais iterados arbitrários à minha disposição (apesar de eu poder fazer isto em uma calculadora programável).

Em dimensões maiores, entretanto, atração e repulsão não estão limitadas a pontos. Um mapa iterativo pode cair em qualquer estrutura possível naquela dimensão. Atratores e repelentes podem formar linhas, superfícies, volumes e seus análogos em dimensões maiores. Por exemplo, o mapa bidimensional:

$$f: (x, y) \rightarrow (x, y/2)$$

atrai todos os pontos assintoticamente ao eixo x . Da mesma forma, um mapa bidimensional pode agir como um repelente. Tal caso é o do mapa:

$$f: (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy).$$

Pontos no interior do círculo unitário levam à origem, enquanto aqueles que estão fora levam para o infinito. Pontos no círculo permanecem lá e desse modo para este mapa o círculo unitário pode ser considerado um repelente fixo.

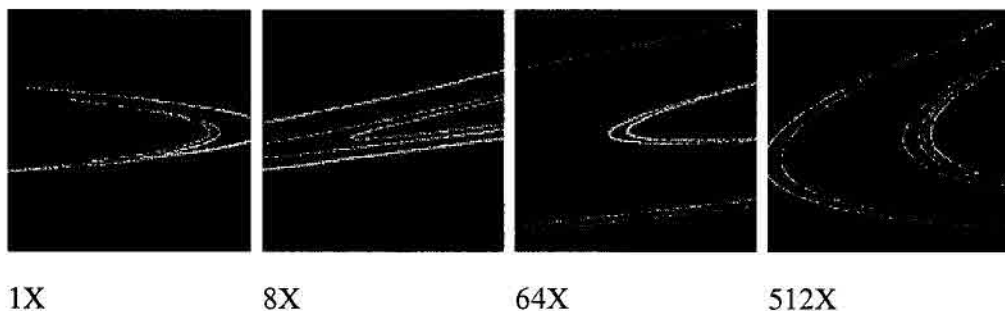
Para comparação, observe este sistema de funções iteradas

$$x \rightarrow by \quad \text{e} \quad y \rightarrow 1 + x - ay^2$$

onde “a” e “b” são constantes de valores 1.4 e 0.3 respectivamente. (Outros valores também são possíveis. Estes apenas ajudam a fazer uma boa representação). Aqueles valores iniciais que não escapam para o infinito caem na bizarra criatura mostrada abaixo. Este é um

exemplo de um atrator estranho, o atrator de Hénon, nomeado assim por seu descobridor, Michel Hénon. Apesar de composto por linhas, órbitas nesta criatura não escoam continuamente, mas saltam de uma posição para outra. Quando desenhado, o atrator parece se materializar “saindo do nada”. Isto também é caótico. Todos os valores iniciais que convergem para o atrator o fazem de maneiras diferentes. Pontos distintos que estão inicialmente separados por uma distância infinitesimal irão eventualmente divergir e evoluir separadamente. O atrator de Hénon também mostra uma grande quantidade de estruturas finas (uma quantidade infinita, para ser mais exato). Sucessivas ampliações mostram um grau ainda maior de detalhes. Qualquer seção transversal através de um braço do atrator de Henon é equivalente a um conjunto de Cantor do terço médio. O que parece ser linhas torna-se um conjunto de linhas quando ampliados. Quando estas linhas são ampliadas, elas também passam a ser grupos de linhas. E assim por diante.

O atrator de Hénon em ampliações sucessivas



Algumas criaturas bizarras também podem ser geradas usando números complexos. Tente voltar no tempo e lembrar da primeira vez que você aprendeu sobre raízes quadradas. A maioria das pessoas foi ensinada que não é possível achar raiz quadrada de um número negativo. E mesmo sabendo que sua calculadora irá provavelmente concordar com esta afirmação, isto não é verdade. A verdade não é que a resposta não pode ser achada, mas sim que ela não pode ser expressada em termos dos então chamados números reais do nosso dia a dia. Para resolver este problema, uma nova classe de números foi postulada. Estes foram

impropriamente chamados de números imaginários. Eu digo impropriamente porque o termo imaginário implica que estes números não existem realmente ou que eles são algo inferior aos números reais. Eu penso que teria sido melhor chamá-los de “números extraordinários” para distingui-los dos “números ordinários” que nós associamos aos tipos ordinários de cálculo. Até porque, com que frequência um ser humano comum precisa achar a raiz quadrada de um número negativo?

Nomes infelizes à parte, incluir os números imaginários à matemática faz esta área toda se tornar mais interessante. Um número que é parcialmente real e parcialmente imaginário é dito Complexo. Números complexos podem ser representados como a soma de duas partes ou como um par coordenado onde “i” é igual à raiz quadrada da unidade negativa.

$$z = x + iy = (x, y)$$

Deste modo, um mapa complexo iterado

$$f(z) \rightarrow z$$

é equivalente a um mapa bidimensional

$$f(x,y) \rightarrow (x,y)$$

que apenas tem que seguir as regras da aritmética complexa. Comece com uma função complexa ou apenas pegue uma velha função real e use como valor inicial um número complexo , jogue os resultados novamente e novamente na função, e plote a órbita resultante em um plano real-imaginário.

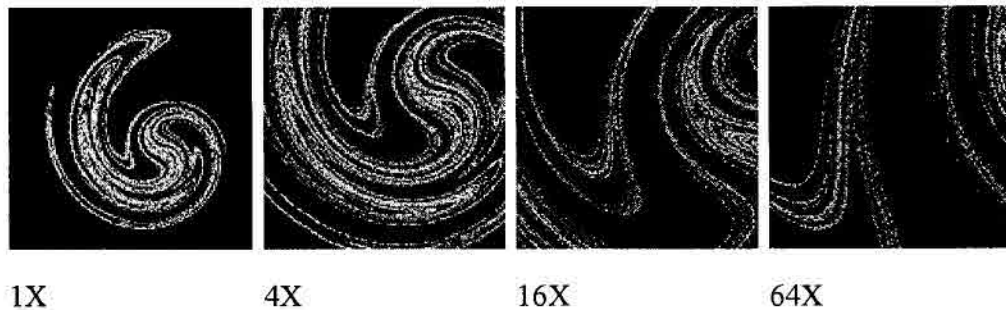
Quando este processo é aplicado à função

$$f: z \rightarrow a + b.z.\exp\left\{i\left[k - \frac{p}{1+|z|^2}\right]\right\}$$

surge um atrator estranho – o atrator de Ikeda. Com uma escolha conveniente dos parâmetros todos os tipos de diferentes padrões de entrelaçamento podem ser feitos. O

exemplo mostrado abaixo é remanescente das turbulências encontradas no rastro de ascensão de fumaça ($a = 0.85$, $b = 0.9$, $k = 0.4$, $p = 7.7$). Assim como o atrator de Hénon, o atrator de Ikeda mostra uma estrutura fina que nunca termina. Isto é o que torna estes objetos “estranhos”.

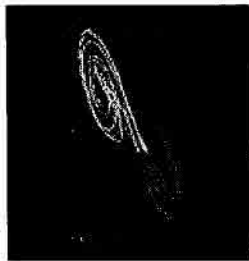
O atrator de Ikeda com sucessivas ampliações



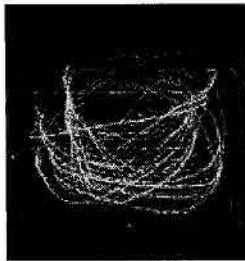
Apesar de elas parecerem apenas figuras bonitas, todos os atratores estranhos nesta página tem sua origem no estudo de sistemas físicos reais ou idealizados. O atrator de Hénon vem do estudo de perturbações em órbitas de asteróides e o de Ikeda vem de um sistema óptico não linear. Os sistemas estudados por Hénon e Ikeda eram bidimensionais, mas não há razão para que os sistemas físicos ou os atratores estranhos que devem surgir deles devam ser limitados a duas dimensões.

Alguns atratores estranhos tridimensionais com suas origens físicas.

Caixas de contorno e sombras foram colocadas para realçar sua aparência tridimensional.



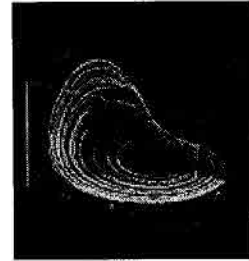
Chua
(circuito eletrônico)



Duffing
(oscilador não linear)



Lorenz
(convecção
atmosférica)



Rössler
(cinética química)

O mais famoso atrator estranho é sem dúvidas o atrator de Lorenz – uma figura tridimensional cuja projeção no plano lembra uma borboleta, ou uma máscara. O atrator de Lorenz, assim chamado devido ao seu descobridor ser Edward N. Lorenz, vem de um modelo matemático para a atmosfera.

Imagine uma camada retangular de ar aquecido por baixo e resfriado por cima (pelas fronteiras, mantidas a temperaturas constantes). Esta é a nossa atmosfera, na sua descrição mais simples. A parte inferior é aquecida pela Terra e a parte superior é resfriada pelo vácuo do espaço. No interior desta fatia, o ar quente sobe e o ar frio desce. Neste modelo, assim como na atmosfera, se desenvolvem células de convecção, transferindo calor de baixo para cima.

O estado da atmosfera neste modelo pode ser completamente descrito por três variáveis temporais:

"x" o escoamento convectivo

"y" a distribuição horizontal de
temperatura

"z" a distribuição vertical de
temperatura

Com três parâmetros descrevendo o caráter do próprio modelo:

" σ " [sigma] a razão da viscosidade com a condutividade térmica

" ρ " [rho] a diferença de temperatura entre topo e fundo da camada

" β " [beta] a razão entre largura e altura da camada

E três equações diferenciais ordinárias descrevendo as leis apropriadas de dinâmica de fluidos:

$$dx/dt = \sigma (y-x)$$

$$dy/dt = \rho x - y - xz$$

$$dz/dt = xy - \beta z$$

Apesar de bastante simplificado, nós temos aqui um modelo que é ainda impossível de resolver analiticamente e tedioso de se resolver numericamente. Ele iria requerer um exército de estudantes graduados rabiscando centenas de páginas de papel e trabalhando contra o tempo. Ele provavelmente não teria sido resolvido em 1960 se não fosse pelo fato de que Lorenz tinha algo melhor do que um exército de calculistas humanos – o impropriamente chamado Royal McBee – um recente computador eletrônico cujos tubos de vácuo podiam fazer sessenta multiplicações por segundo, sem ter que parar para descansar e sem reclamar de fim de expediente. O Royal McBee tornou possível fazer cálculos numéricos que seriam cruéis e penosos para os calculistas humanos. Um homem podia configurá-lo de manhã e deixá-lo executando por horas ou dias, imprimindo soluções para análise posterior. Foi assim que Lorenz descobriu o Caos.

No curso desta exposição eu queria examinar algumas das soluções com mais detalhe. Eu tinha um pequeno computador em meu escritório então eu digitei algumas das condições intermediárias que o computador havia imprimido como novas condições iniciais para começar outra computação, e então eu saí por alguns instantes. Quando eu voltei eu encontrei que a solução não era a mesma que a primeira que eu havia encontrado. O computador estava se comportando de maneira diferente. Eu suspeitei em um problema no computador, primeiramente. Mas rapidamente eu vi que a razão era que os números que eu digitei não eram os mesmos dos originais. Estes eram números arredondados. E a pequena diferença entre algo retido às seis casas decimais e arredondado para três casas havia

aumentado com o decorrer dos dois meses de simulação de clima, até que a diferença era tão grande como o próprio sinal. E para mim isto implicava que se a atmosfera real se comportava neste método então nós simplesmente não poderíamos fazer previsões para dois meses a frente. Pequenos erros de observação iriam ampliar-se até tornarem-se grandes.

Para economizar papel, o computador estava instruído a arredondar as soluções antes de imprimí-las. Desse modo, uma solução como 0.506127 era impressa como 0.506. Ainda em 1960 os computadores davam respostas com mais dígitos significativos que eram requeridos para a maioria dos problemas. Um erro de uma parte em quatro mil deveria dificilmente ser significativa. Tolerâncias não são nunca tão pequenas assim na construção ou manufatura, ou na vida em geral. Se você construiu sua casa usando uma vara métrica cujo comprimento era de 999.7 milímetros, sua casa irá cair? Isto será questionado? Você irá algum dia perceber alguma coisa errada nela?

Quando se trata do clima, a resposta para a última questão seria “sim”. Após tempo suficiente, um pequeno erro introduzido ao se tirar dígitos após a terceira casa se tornam um erro tão grande como a escala de possíveis soluções para o sistema. Lorenz chamou isso de “Efeito Borboleta”, ou mais propriamente, isto ficou conhecido como o Efeito borboleta como o resultado de um acidente em divulgação.

Bem, isto veio realmente de um artigo que eu li chamado “Pode o bater de asas de uma borboleta no Brasil causar um tornado no Texas?” (na verdade, alguém havia dito este título a mim. Eu provavelmente teria pego uma gaivota ao invés de uma borboleta. Mas, dá na mesma.). Eu disse, no início da conversa que isto não era realmente suposto ser uma pergunta importante. E se isso for mesmo verdade, então certamente se o bater de asas de uma borboleta pode causar um tornado, então uma borboleta poderia ter o igual efeito em evitar um tornado que ocorreria. Então a questão real era: Influências bem pequenas podem levar em mudanças muito grandes com o passar do tempo? Mas é aparentemente por causa do título deste artigo que este efeito se tornou conhecido como “efeito borboleta”.

Uma borboleta foi escolhida pois os seus efeitos na dinâmica atmosférica devem com certeza ser pequenos, e um tornado foi escolhido devido à sua grandeza meteorológica.

Perturbações extremamente pequenas em um sistema vão resultar em um resultado tão grande como a diferença entre a ocorrência ou não de um tornado. O que é informalmente conhecido como Efeito borboleta é mais propriamente conhecido como Sensível dependência às condições iniciais (usualmente abreviada como sensível dependência). Esta é uma característica essencial de um sistema caótico. Dependência sensível é o caos.

Sensível dependência às condições iniciais é ilustrada com as equações de Lorenz. Quando os resultados da décima primeira iteração foram truncados as equações evoluíram em várias maneiras diferentes.

Condição inicial	
Tempo	Temperatura
1	10.338268
2	-5.380525
3	10.017644
4	-5.322683
5	-14.052872
6	2.757209
7	-7.552990
8	6.621076
9	-8.084304
10	[omitida]
11	-9.952578
12	-5.981163
13	-13.023813
14	0.041168
15	9.314363
16	4.558919
17	7.375924

Valor truncado intermediário Usado como condição inicial	
Tempo	Temperatura
1	-
2	-
3	-
4	-
5	-
6	-
7	-
8	-
9	-
10	-
11	-9.952000
12	-6.120309
13	-12.646284
14	-0.724073
15	11.848833
16	-1.204758

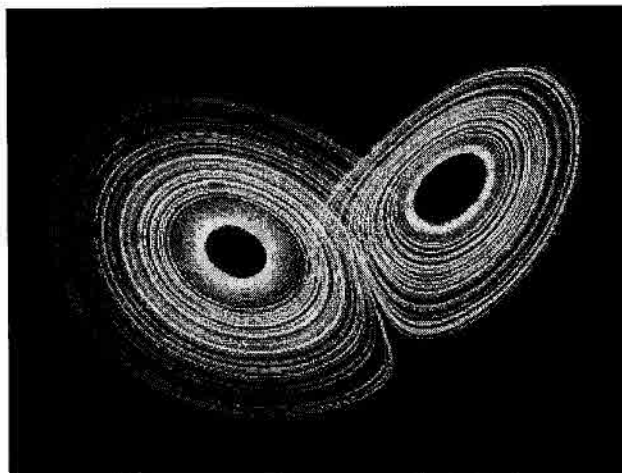
18	-14.856846	17	6.826824
19	-0.246566	18	13.773982
		19	1.474239

Na verdade, o sistema de equações de Lorenz usado pode também exibir outros tipos de comportamento que não são caóticos. Dada uma certa combinação dos parâmetros, algumas órbitas irão assentar após iterações suficientes num valor fixo – finito ou infinito. Você não ouve falar dessas soluções pois a maioria das pessoas iriam concordar que elas não podem representar nenhum sistema climático real. As soluções de interesse do sistema de Lorenz são as ergóticas – aquelas que visitam cada ponto de uma região, ou, mais precisamente, aquelas que irão eventualmente se tornar arbitrariamente próximas de qualquer ponto no interior de uma região. Mudanças climáticas reais. Elas nunca param, e nunca se repetem. Com certeza existem dias parecidos, mas eles nunca são exatamente iguais. O modelo de Lorenz é um sucesso pelo fato de que existem resultados que são similares, mas eles nunca se repetem.

O clima real também é limitado; isto é, existem limites para os tipos de clima que são esperados, enquanto a terra, o sol e a atmosfera nunca tiverem experimentado mudanças em suas características. Os trópicos podem ficar quentes, mas eles nunca irão se tornar quentes o suficiente para derreter chumbo. Tempestades de vento podem ser rigorosas, mas elas nunca irão exceder a velocidade do som. Se o modelo de Lorenz é meticoloso, ele deve exibir esses tipos de comportamento. O problema é, como nós podemos determinar se é este o caso? A resposta é não olhar o número puramente, mas olhar a plotagem dos valores que emergem.

O atrator de Lorenz é de fato limitado. A forma para a qual todas as órbitas convergem parece algo como a borboleta do artigo de Lorenz apresentado no Texas. De qualquer forma, ele também parece com uma máscara, como a imagem abaixo ilustra.

O atrator de Lorenz



Enquanto o atrator assemelha-se a dois discos fundidos, sua estrutura verdadeira é bem mais complexa. Relembre como os números gerados por Lorenz com o Royal McBee eram ergódicos (aproximavam-se de qualquer valor possível) e não periódicos (nunca se repetiam). Assim como o que parecem ser linhas no atrator de Hénon passam a ser pares de linhas, o que parecem ser discos no atrator de Lorenz passam a ser camadas de discos. O atrator de Lorenz é menos parecido com dois CDs fundidos e mais parecido a duas massas folhadas assadas juntas. Uma figura geométrica desta espécie, com um infinito grau de detalhamento é chamada de fractal. (esta é uma definição informal, por agora. Uma definição mais formal será vista em um capítulo posterior) Fractais são a segunda característica essencial do caos. Sensível dependência, vamos lembrar, é a primeira. Caos sempre resulta na formação de um fractal, mas nem todos os fractais estão associados ao caos. Provavelmente, o correto é dizer que caos faz fractais.

Uma massa folhada, a propósito, é feita começando com uma bola de massa de farinha, passando o rolo em uma superfície plana, dobrando então como um jornal, passando o rolo novamente, dobrando o que resulta, e assim por diante. O equivalente matemático ao rolar e dobrar, rolar e dobrar, é a origem da sensível dependência do atrator de Lorenz da mesma forma que no mais simples mapa quadrático (o qual nós revimos em seções anteriores deste capítulo). Imagine uma mancha de corante colocada sobre uma superfície de massa folhada. Após poucas repetições do processo de dobrar e rolar, é fácil ver como a inicialmente pequena mancha irá ter se estendido tanto que ocupará uma área bem maior e

depois de dobrada várias vezes ocupará praticamente toda a superfície. Duas manchas de corante na massa que estavam inicialmente próximas uma da outra podem, após um determinado número de repetições, ter uma separação entre elas tão grande quanto o permitido pelo tamanho da massa. Ou, na linguagem técnica apropriada de Lorenz, “até que a diferença seja tão grande quanto o próprio sinal”. Quando transferimos esse raciocínio para o clima, estamos tratando do efeito borboleta – o bater de asas de uma borboleta na América do Sul pode fazer a diferença entre causar ou não um tornado no Texas algum tempo depois.

Infelizmente, a habilidade para determinar se uma coisa irá passar a acontecer ou não é impossível de se dizer. Todas as medidas serão incertas, de algum modo (se essa incerteza está no terceiro dígito, ou no bilionésimo dígito, isto não importa) e todos os erros irão se amplificar a ponto de se tornarem tão longos a ponto da previsão se tornar inútil. Todas elas!

3.5 Dimensão topológica

Por definição, o conjunto vazio (\emptyset) e somente o conjunto vazio deve ter dimensão -1 . A dimensão em qualquer outro espaço será definida como uma unidade maior do que a dimensão do objeto que poderia ser usado para separar completamente qualquer parte do primeiro espaço do resto. Não é necessário nada para separar uma parte de um conjunto numerável do resto do conjunto. Desde que nada (\emptyset) tem dimensão -1 , qualquer conjunto numerável tem a dimensão 0 ($-1 + 1 = 0$). Da mesma forma, uma linha tem dimensão 1 , desde que ela pode ser separada por um ponto ($0 + 1 = 1$), um plano tem dimensão 2 , já que ele pode ser separado por uma linha ($1 + 1 = 2$), e um volume tem dimensão 3 , já que pode ser separado por um plano ($2 + 1 = 3$). Entretanto, nós temos que modificar um pouco esta definição.

Seguramente um conjunto numerável pode ser separado por nada, mas ele também pode ser separado por outro conjunto numerável, ou uma linha, ou um plano. Pegue os números racionais, por exemplo. Eles formam um conjunto numerável infinito. Ao colocar este

conjunto na reta dos números reais, nós poderíamos separar um ponto de qualquer outro com um número irracional. Este conjunto tem dimensão zero, o que daria aos racionais a dimensão 1. Ao colocar este conjunto no plano coordenado, nós poderíamos também usar uma reta qualquer com uma interceptação no eixo x . Isto daria aos racionais a dimensão 2 ($1+1=2$). Nós poderíamos também usar planos, se nós colocássemos o conjunto em um espaço euclidiano e assim por diante. Eu acho que ficaria tudo bem se nós utilizássemos o mínimo valor e o chamássemos de dimensão do espaço.

E quanto aos nossos espaços compostos (\times) e $(\cdot \blacksquare)$? Nós queremos que o primeiro tenha dimensão 1 e o segundo dimensão 2. O espaço em forma de cruz não é problema. A menor entidade dimensional necessária para separá-lo seria um ponto, mesmo que na interseção. O ponto e o quadrado cheio é um pouco mais desafiador. Nós precisamos distinguir entre dimensão local e dimensão global. Se nós usássemos a última definição e aplicássemos no conjunto como um todo, então o este espaço teria dimensão zero. Se, entretanto, nós examinarmos este espaço região por região, nós observaremos que a parte do ponto em dimensão zero, enquanto qualquer parte do quadrado tem dimensão 2. Este é um exemplo de dimensão local. A dimensão global de todo o espaço deve ser bidimensional, então nós precisamos modificar nossa definição levemente. A dimensão de um espaço deve ser o máximo de suas dimensões locais, onde a dimensão local é definida como uma unidade a mais que a dimensão do mais simples objeto dimensional capaz de separar qualquer vizinhança do espaço em duas partes.

A medida definida acima é chamada de dimensão topológica de um espaço. Uma propriedade topológica de uma entidade é aquela que permanece invariante num contínuo, a cada transformação ou homeomorfismo. Um homeomorfismo pode ser melhor visto como uma deformação suave de um espaço em outro, sem rompê-lo, perfurá-lo ou uni-lo. Ao longo de todo o processo, a dimensão topológica não se altera. Uma esfera é topologicamente equivalente a um cubo, desde que um pode ser deformado no outro de tal maneira. Similarmente, uma linha pode ser comprimida e estendida repetidamente até perder todo o seu caráter retilíneo, mas ainda assim manterá a dimensão topológica 1. Observe o exemplo abaixo.

1. Comece com um segmento de linha. Divida-a em 3 terços. Coloque o vértice de um triângulo equilátero no terço médio.
2. Copie toda a curva e a reduza a um terço do seu tamanho original. Coloque estas curvas reduzidas no lugar dos lados da curva anterior.
3. Volta ao passo 2 e repita-o.

O resultado é o “Litoral de Koch”, que se desenvolve em algo como o abaixo:

O litoral de Koch



Em cada iteração, o tamanho da curva aumenta em um fator de $4/3$. A repetição infinita deste procedimento leva o tamanho da curva ao infinito. A área abaixo da curva, entretanto, é dada pela série:

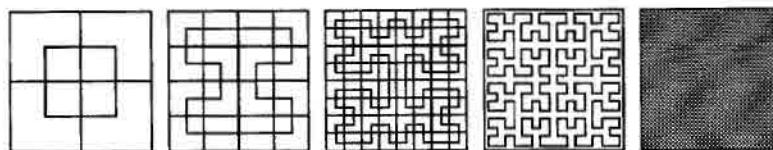
$$1 + (4/9) + (4/9)^2 + (4/9)^3 + \dots$$

que converge para $9/5$ (assumindo que a área abaixo da primeira curva é 1). Estes resultados não são usuais, mas não são tão excêntricos. Isto já não é o caso da próxima curva.

1. Pegue um quadrado unitário, chame-o de célula.
2. Divida cada célula em 4 cópias idênticas em miniatura da célula original
3. Desenhe uma linha começando em uma célula tal que ela passa através de todas as outras células unitárias até retornar para a posição inicial. (também confira se a linha não desvia-se muito da iteração anterior da curva)
4. Retorne ao passo 2 e repita.

O resultado é algo como os diagramas abaixo. (linhas das células foram omitidas na terceira iteração, para maior clareza. O último diagrama representa um resultado hipotético de uma iteração infinita.)

Curva Monstro de Peano (uma variação da versão de Hilbert)



Esta curva enrola-se tanto que terá um comprimento infinito. Mais notável é que ela irá visitar cada ponto no quadrado unitário. Deste modo, existe então uma transformação contínua dos pontos no intervalo unitário com os pontos no plano unitário. Em outras palavras, um objeto com dimensão topológica 1 pode ser transformado em um objeto com dimensão topológica 2 através de um procedimento que não deveria permitir tal ocorrência. Simplesmente curvar e esticar deveria deixar a dimensão topológica imutável. Esta é a curva Monstro de Peano, assim chamada devido a sua natureza monstruosa ou patológica. Desde que não existam coisas como monstros, nós não devemos ter medo. As curvas de Koch e Peano promovem questionamentos sobre o significado de dimensão, o que será respondido na próxima seção.

3.6 Dimensão fractal

Realmente havia uma razão para temer entidades patológicas como o litoral de Koch e a curva monstro de Peano. Estas eram criações tão retorcidas que elas não se adaptam à matemática contemporânea. Felizmente, a matemática foi fortalecida pelo estudo destes monstros, e não destruída por eles. O que não mata, fortalece.

Pegue o litoral de Koch e examine-o através de lentes mal focalizadas. Ele parecerá ter um certo comprimento. Vamos chamar de 1 unidade. Melhore o foco um pouco, e então você poderá ver detalhes que são $1/3$ maiores que aqueles vistos com a primeira aproximação. A curva agora é quatro vezes maior, ou seja, tem 4 unidades. Dobre a resolução pelo mesmo fator. Usando um foco que revela detalhes $1/9$ do primeiro nos dá um litoral 16 vezes maior, e assim por diante. Tal atividade sugere a existência de uma característica quantificável.

Para ser um pouco mais preciso, cada espaço que se sente “real” tem, associado a isso, um senso de distância entre quaisquer dois pontos. Em um segmento de linha como o

litoral de Koch, nós arbitrariamente escolhemos o tamanho de um lado da primeira iteração como uma unidade de comprimento. No plano coordenado euclidiano, a distância entre dois pontos é dada pelo teorema de Pitágoras:

$$s^2 = x^2 + y^2.$$

Na relatividade, a distância entre dois eventos quaisquer no espaço-tempo é dada pelo tempo próprio:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Tal distância estabelece relações que são chamadas métricas, e um espaço que tem uma métrica associada é chamada espaço métrico. Um dos mais famosos e não euclidiano espaço métrico é o métrico Manhattan (ou métrica taxista). Qual a distância entre a esquina entre as ruas 33ª e 1ª da esquina entre as 69ª e a 5ª? Resposta: 36 quadras e 4 avenidas, ou 40 unidades. (nós temos que contornar a realidade um pouco e assumir que estas quadras da cidade são quadradas, e não retangulares). Métricas são também usadas para criar vizinhanças em um espaço. Pegue um ponto em um espaço métrico. Este ponto mais todos os outros distando um valor menor ou igual uma certa distância compreendem uma região do espaço chamado de bola fechada. O termo bola é usado porque tais regiões tem a forma de bola em um espaço coordenado com a métrica usual, mas qualquer forma é possível. Em um espaço euclidiano tridimensional nós teríamos bolas, enquanto em um espaço bidimensional com a métrica de Manhattan eles seriam quadrados.

Quantos discos são necessários para cobrir o litoral de Koch? Bem, isto depende do tamanho deles, é claro. Um disco com diâmetro 1 é suficiente para cobrir tudo, e 4 discos com dimensão 1/3, 16 discos com dimensão 1/9, 64 discos com dimensão 1/27, e assim por diante. Em geral, são necessários 4^n discos de raio $(1/3)^n$ para cobrir o litoral de Koch. Se nós aplicarmos este procedimento para qualquer entidade em qualquer espaço métrico nós podemos definir uma quantidade que é equivalente a uma dimensão. A dimensão de Hausdorff-Besicovitch de um objeto em um espaço métrico é dada pela fórmula:

$$D \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log \left(\frac{1}{\lambda} \right)}$$

onde $N(h)$ é o número de discos de tamanho h necessários para cobrir o objeto. Deste modo o litoral de Koch tem uma dimensão de Hausdorff-Besicovitch que é o limite da sequência:

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \frac{\log 64}{\log 27}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507\dots$$

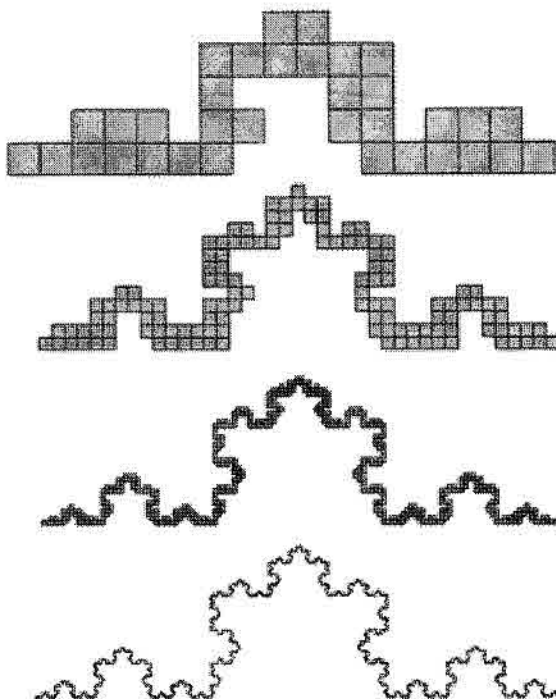
Isto realmente é uma dimensão? Aplique este procedimento ao segmento de linha unitário. É necessário 1 disco de diâmetro 1, dois discos de diâmetro 1/2, 4 discos de diâmetro 1/4, e assim por diante, para cobrir o segmento de linha unitário. No limite, nós achamos a dimensão de:

$$\frac{\log 2^n}{\log 2^n} = \frac{n \log 2}{n \log 2} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

Isto concorda com a dimensão topológica do espaço.

O problema agora é, como nós devemos interpretar um resultado como 1.261859507...? Isto não concorda com a dimensão topológica de 1, mas também não é 2. O litoral de Koch é algo entre uma linha e um plano. Sua dimensão não é um número inteiro, mas uma fração. Isto é um fractal. Na verdade, fractais podem ter dimensões de números inteiros, então isto é um pouco ambíguo. Uma melhor definição é que um fractal é qualquer entidade cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica ($D > D_T$). Desse modo, a curva de Peano que preenche o espaço é também um fractal, como nós esperávamos. Ainda que sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch é um número inteiro ($D = 2$), sua dimensão topológica ($D_T = 1$) é estritamente menor que isto. O monstro foi domesticado.

Contornando o litoral de Koch com quadrados (uma forma de determinar sua dimensão)



Deveria ser possível usar métodos analíticos como aqueles descritos acima em todos os tipos de objetos fractais. Se isto é conveniente ou simples, é outro problema. Fractais produzidos por procedimentos de escala iterativa simples, como o litoral de Koch, são muito fáceis de manusear analiticamente. Conjuntos de Julia e Mandelbrot, fractais produzidos por um mapa iterado de uma função complexa contínua, são outro problema. Não há uma estrutura fractal óbvia para o mapa quadrático, nenhuma sugestão que uma curva monstruosa espreita ali dentro, e não há um modo simples de extrair uma dimensão fractal exata. Se existem técnicas analíticas para calcular a dimensão fractal de um conjunto de Julia arbitrário, eles estão bem escondidos. Uma pequena e rápida pesquisa na literatura popular não revela nada na facilidade ou impossibilidade desta tarefa. Existem, entretanto, técnicas experimentais.

Pegue qualquer objeto geométrico plano de extensão finita (fractal ou outro caso) e cubra com um único e fechado disco. Qualquer tipo de disco irá servir, então para facilitar nossa vida nós iremos usar um quadrado; o disco da métrica de Manhattan em um plano. Recorde sua dimensão e chame-a de "h". Repita o procedimento com um quadrado menor. Grave sua dimensão e o número de quadrados " $N(h)$ " necessários para cobrir o objeto. Repita com quadrados ainda menores, até você ter encontrado o limite do seu poder de resolução, como mostrado na figura à direita. Plote os resultados em um gráfico com " $\log N(h)$ " no eixo vertical, e com " $\log (1/h)$ " no eixo horizontal. A inclinação da melhor reta dos seus dados será uma aproximação da dimensão de Hausdorff-Besicovitch para um objeto. A seguir temos os resultados de uma pequena amostra de experimentos usando esse método de contagem de quadrados. Eu penso que com um pouco mais de refinamento, os desvios poderiam estar abaixo de 5%.

Litoral de Koch

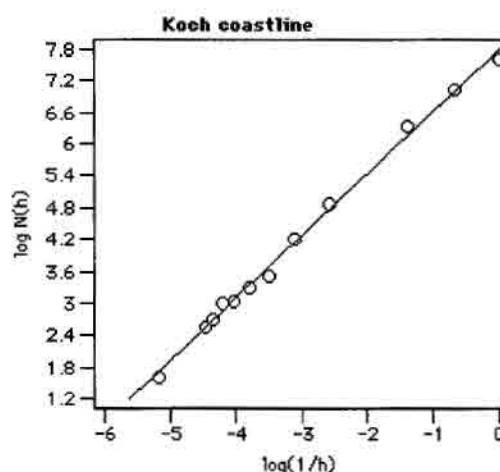


Dimensão (experimental) = 1.18

dimensão (analítica) = 1.26

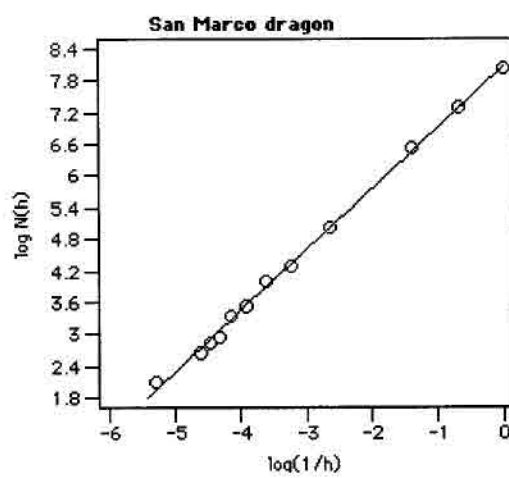
desvio = 6%

$\log (1/h)$	$\log N(h)$
0	7.60837
-0.69315	7.04054
-1.38629	6.32972
-2.56495	4.85981
-3.09104	4.21951
-3.49651	3.52636
-3.78419	3.29584
-4.00733	3.04452
-4.18965	2.99573
-4.34381	2.70805
-4.47734	2.56495



-5.17615 1.60944

$\log(1/h)$	$\log N(h)$
0	8.02355
-0.69315	7.29438
-1.38629	6.52209
-2.63906	5.03044
-3.21888	4.29046
-3.61092	4.00733
-3.91202	3.52636
-4.12713	3.33220
-4.31749	2.94444
-4.46591	2.83321
-4.60517	2.63906
-5.29832	2.07944

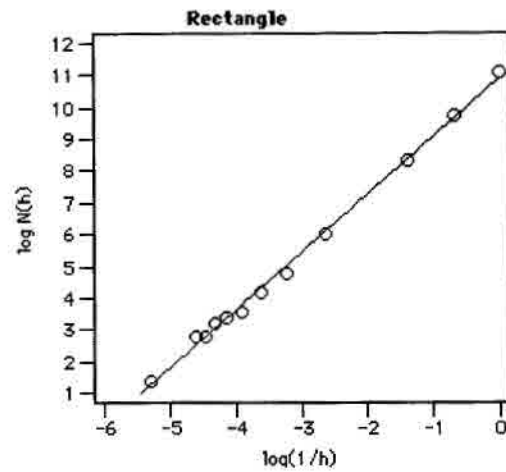


Retângulo

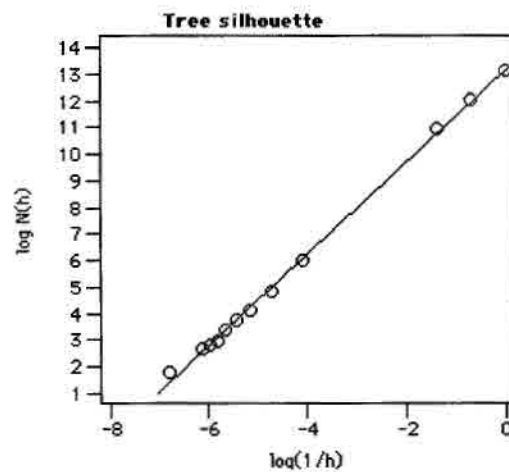


Dimensão (experimental) = 1.82
 dimensão (analítica) = 2.00
 desvio = 9%

$\log(1/h)$	$\log N(h)$
0	11.0904
-0.69315	9.71962
-1.38629	8.31777
-2.63906	5.99146
-3.21888	4.79579
-3.61092	4.15888
-3.91202	3.58352
-4.12713	3.40120
-4.31749	3.21888
-4.46591	2.77259
-4.60517	2.77259
-5.29832	1.38629



$\log(1/h)$	$\log N(h)$
0	13.1055
-0.69315	12.0209
-1.38629	10.9253
-4.06044	5.99894
-4.71850	4.82831
-5.12396	4.14313
-5.41165	3.73767
-5.63479	3.36730
-5.81711	2.94444



-5.97126 2.83321

-6.10479 2.63906

-6.79794 1.79176

Apesar deste capítulo estar acabando, esta não é a última palavra em dimensão. Um estudo de doze definições de dimensão apareceu em 1981 (veja Harrison) e um livro inteiro em *Teoria da Dimensão* foi escrito em 1941 (Hurewicz & Wallman). Os tópicos de caos, fractais e dimensão são ricos e estranhos. Eles são imensamente interessante, e sérias considerações devem ser dadas à incorporá-los à matemática de graduação. Eu posso facilmente visualizar estes três tópicos como os temas centrais do final do ano de um curso de matemática, incorporando básicos e avançados tópicos, bem como eventos atuais na ciência e aplicações computacionais.

3.7 A equação logística

A equação logística simples é uma fórmula para aproximação de uma população animal ao longo do tempo. Várias espécies animais são férteis apenas por um breve período durante o ano, e os jovens nascem em uma estação particular, então após um tempo eles estão prontos para comer comida sólida e farão isso plenamente. Por esta razão, o sistema deve ser melhor descrito por uma equação diferencial discreta do que por uma equação diferencial contínua. Desde que nem todos os animais existentes irão reproduzir (uma porção deles são machos, além de tudo), nem toda fêmea será fértil, nenhuma concepção terá sucesso, e nem toda gravidez será levada com sucesso; o aumento da população irá ser alguma fração da presente população. Portanto, se " A_n " é o número de animais este ano, e " A_{n+1} " é o número no próximo ano, então:

$$A_{n+1} = rA_n$$

Onde " r " é a razão de crescimento ou fecundidade, que irá aproximar a evolução da população. Este modelo produz um crescimento exponencial sem limite. Desde que toda população é limitada por razões físicas do meio onde vivem, alguma consideração deve ser feita para restringir este crescimento. Se existe uma capacidade de suporte do ambiente,

então a população não pode exceder esta capacidade. Se elas o fizerem, a população se tornará extinta. Isto pode ser modelado multiplicando a população por um número que se aproxima de zero à medida que a população se aproxima de seu limite. Se nós normalizarmos o “ A_n ” para esta capacidade, então o fator $(1 - A_n)$ irá satisfazer-nos, e a equação logística resultante se torna:

$$A_{n+1} = rA_n(1 - A_n)$$

Ou em forma funcional:

$$f(x) = rx(1 - x).$$

A equação logística é parabólica, assim como mapa quadrático, com $f(0) = f(1) = 0$ e um máximo em $x = 1/2$ com altura $r/4$. Variando o parâmetro, muda-se a altura da parábola, mas mantêm-se a largura imutável. (isto é diferente do mapa quadrático, o qual mantém sua forma global e translada para cima ou para baixo). O comportamento do sistema é determinado seguindo a órbita para um valor inicial. Todas as condições iniciais levam eventualmente para três tipos de comportamento:

1. **Fixo:** A população se aproxima de um valor estável. Isto pode ser feito aproximando assintoticamente de um lado de um jeito como um oscilador harmônico super amortecido ou assintoticamente de ambos os lados, assim como um oscilador harmônico sub amortecido. Começando em um valor inicial que é um ponto fixo é como começar um oscilador harmônico simples do equilíbrio e com velocidade zero. A equação logística difere-se do oscilador harmônico simples na existência de eventuais pontos fixos. É impossível para um OHS chegar à sua posição de equilíbrio em um intervalo de tempo finito (apesar de que ele chegará bem perto).
2. **Periódico:** A população alterna entre dois ou mais valores fixos. Desse modo, isto pode ser feito aproximando assintoticamente em uma direção ou de lados opostos de maneira alternada. A natureza da periodicidade é mais rica na equação logística do que em um OHS. Por um lado, órbitas periódicas podem ser estáveis ou instáveis. Um OHS não iria nunca estacionar em um estado periódico a menos que

forçado a ele. No caso do oscilador amortecido, o sistema estava saindo de um estado periódico para o conforto do equilíbrio. Segundo, um estado periódico com múltiplos máximos e/ou mínimos podem surgir de sistemas de OHSs acoplados (pêndulos conectados ou combinados, por exemplo, ou vibrações em um meio contínuo). Por fim, a periodicidade é discreta; isto é, não há valores intermediários.

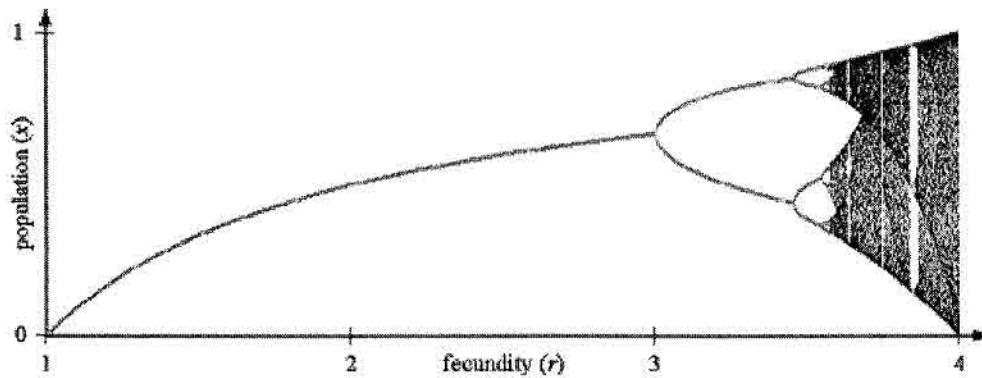
3. **Caótico:** A população irá eventualmente visitar cada ponto em um subintervalo de $(0, 1)$. Aninhado entre os pontos que ele visitará, existe um conjunto numerável infinito de pontos fixos e periódicos de todos os períodos. Os pontos são equivalentes ao conjunto de Cantor do terço médio e são completamente instáveis. Isto é altamente apreciável que qualquer população real deva começar com um destes valores. Além disso, órbitas caóticas exibem dependência sensível das condições iniciais, tal que qualquer dois pontos muito próximos iriam eventualmente divergir suas órbitas para qualquer separação arbitrária possível.

O comportamento da equação logística é mais complexa que o oscilador harmônico simples. O tipo da órbita depende do parâmetro de razão de crescimento, mas de um modo isto não pode ser usado para afirmações de “menor que”, “maior que”, “igual a”. O melhor modo de visualizar o comportamento das órbitas como uma função da razão de crescimento é com o diagrama de bifurcação. Pegue um valor conveniente inicial, gere uma grande quantidade de iterações, descarte as primeiras e plote o resto como função do fator de crescimento. Para valores de parâmetro onde a órbita é fixa, o diagrama de bifurcação irá se reduzir a uma linha simples; para valores periódicos, um grupo de linhas. E para valores caóticos, uma mancha cinza de pontos.

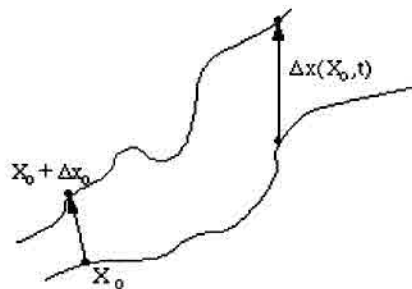
Desde os primeiros dois capítulos deste trabalho nós estamos cheios de diagramas de bifurcações e comentários sobre eles, eu não irei dizer mais muito sobre a estrutura do diagrama e localizar as propriedades mais proeminentes. Existem dois pontos fixos nesta função: 0 e $1 - 1/r$, o primeiro sendo estável no intervalo $(-1, +1)$ e o segundo no intervalo $(1, 3)$. Um ciclo estável de período 2 começa em $r = 3$, seguido por um ciclo estável de período 4 em $r = 1 + \sqrt{6}$. O período continua dobrando em intervalos sempre menores, até perto de $r = 3.5699457...$ onde o regime caótico começa. No interior do regime caótico existem várias janelas com outros períodos que não são potências de 2, mais notavelmente

uma larga janela de período 3 começando em $r = 1 + \sqrt{8}$. Quando a razão de crescimento excede 4, todas as órbitas divergem para o infinito e os aspectos da modelagem desta função se tornam inúteis.

Diagrama de bifurcação da equação logística



3.8 Expoente de Lyupanov



Descrições do tipo da que foi dada no último parágrafo são não naturais e desajeitadas. Seria bom ter uma medição simples que pudesse discriminar entre os tipos de órbitas da mesma maneira que se faz com o oscilador harmônico.

Considere dois pontos no espaço

$$X_0 \quad \text{e} \quad X_0 + \Delta x_0$$

Cada um deles irá gerar uma órbita naquele espaço, usando alguma equação ou sistema de equações. Estas órbitas podem ser pensadas como funções paramétricas de uma variável, por exemplo o tempo. Se nós usarmos uma das órbitas como referência, então a separação entre duas órbitas irá também ser uma função do tempo. Por causa da dependência sensível que pode surgir em algumas porções de um sistema (como na equação logística), esta separação é também uma função do local do valor inicial e tem a forma de $\Delta x(X_0, t)$. Em um sistema com pontos fixos atratores ou pontos atratores periódicos, $\Delta x(X_0, t)$ diminui assintoticamente com o tempo. Se um sistema é instável, como alfinetes equilibrados pela ponta, então as órbitas divergem exponencialmente por um tempo, mas eventualmente se assentam. Para pontos caóticos, a função $\Delta x(X_0, t)$ irá se comportar erraticamente. Desse modo, é útil estudar a razão exponencial média de divergência de duas órbitas inicialmente próximas, usando a fórmula

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\Delta x_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta x(X_0, t)|}{|\Delta x_0|}$$

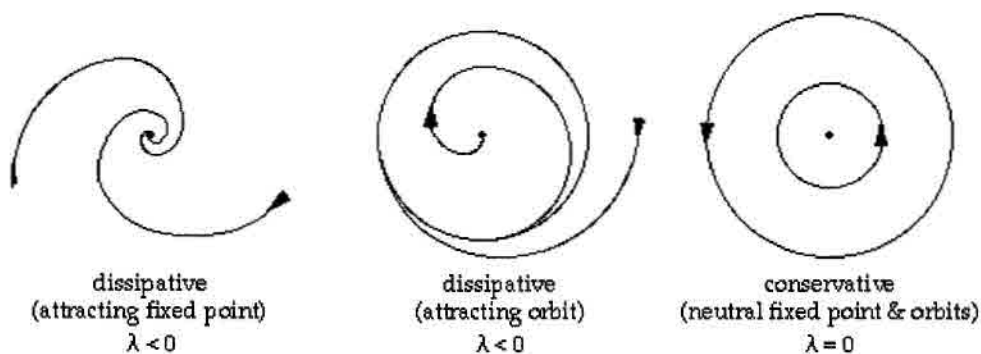
Este número, chamado expoente de Lyapunov, " λ " [lambda], é útil para distinguir entre vários tipos de órbitas. Ele serve tanto para sistemas discretos como para contínuos.

- $\lambda < 0$ A órbita atrai para um ponto fixo estável, ou uma órbita periódica. Expoentes de
[lambda] Lyapunov negativos são uma característica de sistemas dissipativos ou não-conservativos (o oscilador amortecido, por exemplo). Tais sistemas exibem estabilidade assintótica, quanto mais negativo o expoente, maior a estabilidade. Pontos fixos superestáveis e pontos periódicos superestáveis tem um expoente de Lyapunov $\lambda = -\infty$. Isto é algo similar para um oscilador harmônico criticamente amortecido no qual o sistema vai para o ponto de equilíbrio tão rápido quanto possível.
- $\lambda = 0$ A órbita é um ponto fixo neutro (ou um ponto fixo eventual). Um expoente de
[lambda] Lyapunov nulo indica que o sistema é de algum modo um regime permanente. Um sistema físico com expoente nulo é conservativo. Tais sistemas exibem estabilidade de Lyapunov. Pegue o caso de dois OHS com diferentes

amplitudes. Devido à frequência ser independente da amplitude, um retrato da fase dos dois osciladores seria um par de círculos concêntricos. As órbitas nesta situação manteriam uma separação constante, como duas manchas de sujeira fixadas em um lugar em um disco rotativo.

$\lambda > 0$ A órbita é instável e caótica. Pontos próximos, não importa quão próximos, irão divergir para qualquer separação arbitrária. Todas as vizinhanças na fase-espço irão eventualmente ser visitados. Estes pontos são ditos instáveis. Para um sistema discreto, as órbitas irão parecer como neve em um aparelho de televisão. Isto não impede que uma organização, como um padrão possa surgir. Desse modo a neve deve ser um pouco granulosa. Para um sistema contínuo, a fase-espço seria um confuso mar de linhas onduladas, como um pote de espaguete. Um exemplo físico pode ser encontrado no movimento Browniano. Apesar de ser um sistema determinístico, não há ordem que as órbitas seguem. o the orbit that ensues.

Algumas órbitas com seus expoentes de Lyapunov



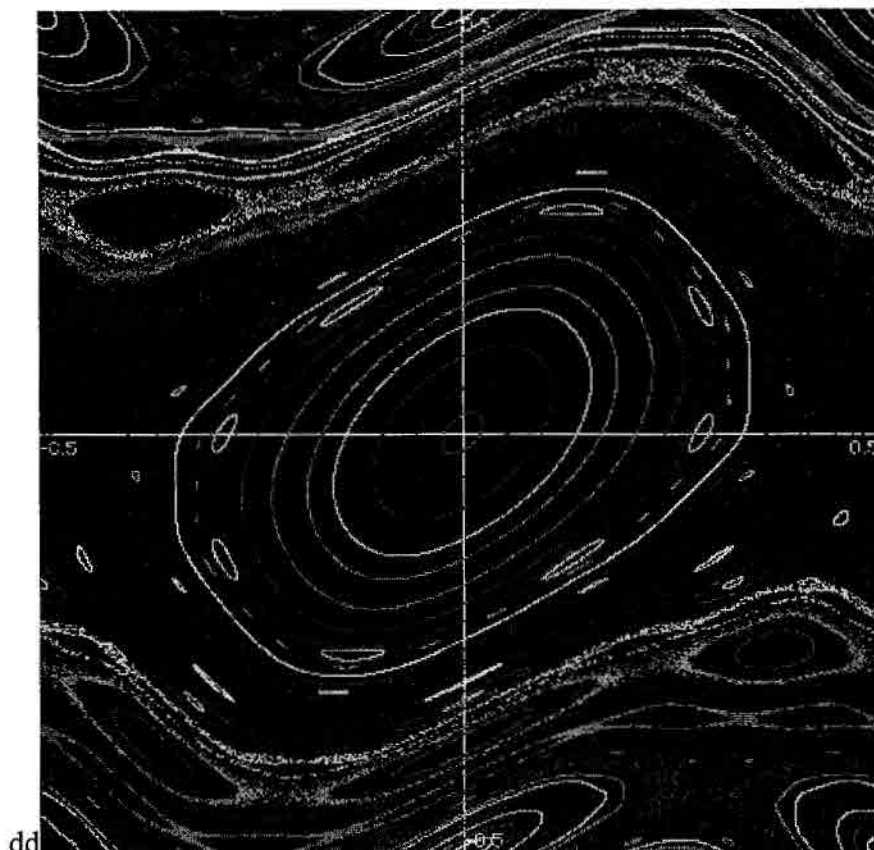
No diagrama abaixo podemos ver ambas órbitas estável e instável como exibidas em um sistema dinâmico discreto, o chamado mapa padrão, também conhecido como mapa de

Cirikov-Taylor. As voltas próximas correspondem a regiões estáveis com pontos fixos ou pontos periódicos fixos em seus centros. As regiões nebulosas são instáveis e caóticas.

Amostra de órbitas do mapa padrão

$$(x, y) \rightarrow (x + y, y - 0.971635 \sin(2\pi x)/2\pi)$$

Diferentes órbitas estão assinaladas com cores diferentes



Uma diversão interessante. Pegue qualquer pequeno volume arbitrário na fase-espaco de um sistema caótico. Pontos adjacentes, não importa quão perto, irão divergir para qualquer distância arbitrária e todos os pontos irão traçar órbitas que eventualmente visitam cada região do espaço. Entretanto, o volume envolvido é igual ao volume original. Apesar de seu comportamento peculiar, sistemas caóticos são conservativos. O volume é preservado, mas a forma não. Será que isto implica que as propriedades topológicas irão permanecer constantes? Irá o volume enviar pseudópodes conectados e envolver como uma ameba, vaporizar como o líquido ejetado de um vidro de perfume, ou espumar como um pedaço de queijo suíço e formar ainda mais poros? Minha intuição é que a topologia

permanece constante. O volume original irá dobrar repetidamente sobre si mesmo, até adquirir uma forma com infinitos detalhes. Fim da brincadeira.

Dada esta nova medida, vamos aplicá-la à equação logística e ver se ela funciona. A forma limite da equação é um tanto abstrata para minha inteligência. Felizmente, uma aproximação existe. O expoente de Lyapunov pode ser também encontrado usando a fórmula:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 \left| \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \right|$$

que no caso da equação logística se torna:

$$\lambda \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 |r - 2rx_n| \quad \text{onde} \quad x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

Este número pode ser calculado usando uma calculadora programável para um grau razoável de precisão, escolhendo um valor suficientemente grande para “N”. Eu calculei alguns expoentes de Lyapunov em uma calculadora programável para pontos interessantes no diagrama de bifurcação. Os resultados estão listados na tabela abaixo e concordam com as órbitas.

Expoentes de Lyapunov calculados para alguns valores da equação logística quando N = 4000 e x ₀ = 1/2		
r	λ [lambda]	Comentários
1	-0.005112...	Início em ponto fixo estável
1.99	-6.643...	
1.999	-9.965...	
2	Erro na calculadora*	Ponto fixo superestável
2.001	-9.965...	
2.01	-6.643...	
3	-0.003518...	Início de ciclo estável de período 2

3.236067977...	-19.43...*	ciclo superestável período 2 ($1+\sqrt{5}$)
3.449489743...	-0.003150...	Início de ciclo estável de período 4 ($1+\sqrt{6}$)
3.5699456720	-0.002093...	Início do caos (<u>Hofstadter</u>)
3.56994571869	+0.001934...	Início do caos (<u>Dewdney</u>)
3.828427125...	-0.003860...	Início do ciclo estável de período 3 ($1+\sqrt{8}$)
3.9	+0.7095...	Volta ao caos
4	+2	Fim do caos

*Analiticamente, $\lambda = -\infty$ nos locais superestáveis (veja abaixo)

Voce pode ver que existem algumas discordâncias na origem a partir da qual exatamente começa o regime caótico. Note também que devido à calculadora apenas aproximar o valor $1+\sqrt{5}$, o expoente de Lyapunov para o ciclo superestável de período 2 é apenas um número negativo relativamente alto, e não o infinito negativo, como era esperado.

Falando de discordância, o periódico *Scientific American* que me fez começar todo este estudo contém o seguinte parágrafo:

Eu encorajo os leitores a usar o algoritmo acima para calcular o expoente de Lyapunov para r igual a 2. Então compare o resultado com aquele obtido para $r = 3$. O primeiro número deve ser negativo, indicando um sistema estável, e o segundo deve ser positivo, um aviso do caos.. (Dewdney 179)

Bem, eu tentei usar estes números na equação:

$$\lambda \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log_2 |r - 2rx_n| \quad \text{onde} \quad x_n = rx_{n-1}(1-x_{n-1})$$

mas eu continuei recebendo uma mensagem de erro para $r = 2$. Estúpido que sou, passei vários minutos procurando por um erro no código, não percebendo que o erro estava nas instruções. Neste valor de r , o sistema rapidamente se assenta no ponto fixo $\frac{1}{2}$, o que faz

$$r - 2rx = (2) - 2(2)(1/2) = 0$$

Nenhuma calculadora pode achar o logaritmo de zero, então o programa falha. A equação logística é superestável neste ponto, o que faz o expoente de Lyapunov ser igual a infinito negativo (o limite da função log quando a variável se aproxima de zero).

Há um segundo erro na hipótese que $r = 3$ está no regime caótico. Esta é realmente a localização da primeira bifurcação. Checar os fatos é vital, quando escrevemos para um público. Você já encontrou os erros neste livro?

3.9 Espaço de Lyapunov

Nós vimos como a equação logística pode exibir comportamento remanescente de um oscilador harmônico simples (estados de equilíbrio, periodicidade dependente do parâmetro, estabilidade de Lyapunov) e um oscilador harmônico amortecido (estabilidade assintótica, super, sub e criticamente amortecido). Que analogia, se existe, há entre o oscilador harmônico forçado e os sistemas dinâmicos discretos? A equação logística é muito mais rica que um oscilador harmônico, a medida que ela pode exibir também um comportamento caótico. Uma exploração sobre a equação logística forçada deveria da mesma forma trazer coisas interessantes.

A equação diferencial para um oscilador harmônico amortecido era forçada pela adição de uma força dependente do tempo. De maneira similar, uma modificação na população dependente do tempo poderia ser passada para o lado esquerdo da equação logística. A que isto iria corresponder em nosso modelo é incerto. Indivíduos estariam entrando ou deixando nossa população com uma certa regularidade. Isto implica a existência de alguma fonte externa para a população local. Tal comportamento é o caso para alguns grupos de animais. Quando um grupo tem muitos membros, alguns deles (geralmente os machos servis) deixam o bando para entrar para outros grupos. Este é um modo de forçar a equação logística, mas não o que vai ser discutido neste capítulo.

Um segundo modo de olhar os componentes de amortecimento e de força no oscilador harmônico é como uma modificação da energia do sistema. Forçando um oscilador

aplicando uma força dependente do tempo e amortecendo-o ao aplicar uma força dependente da velocidade é realizar um trabalho no sistema e mudar sua energia dinamicamente. O termo dissipativo reduz a energia do sistema, enquanto o termo da força pode tanto aumentar como diminuir esta energia. Na equação logística $f(x) = rx(1 - x)$ nós vamos simular isto forçando o parâmetro de crescimento “ r ” de uma maneira dependente do tempo.

Suficientemente interessante, este método de forçar um sistema dinâmico através de uma variação de seu parâmetro foi primeiro estudada em sistemas contínuos. Pegue o exemplo de um balanço. Como podemos forçá-lo a oscilar? O método tradicional é se inclinando para frente ou para trás no banco, nos pontos extremos do arco. Isto é equivalente a aplicar uma força dependente do tempo para o balanço e é de uso limitado para amplitudes largas. O segundo método é sentar no banco e oscilar para cima e para baixo acocorando-se. Isto é equivalente a forçar o oscilador variando o seu parâmetro mais importante – o comprimento efetivo. Este método sozinho não irá começar o balançar, mas qualquer pequeno desvio da posição de equilíbrio será rapidamente amplificado. Uma vez eu vi esta demonstração por um professor universitário em um grande salão de conferência. Ele era capaz de aumentar a amplitude a ponto onde ele estava quase paralelo ao chão nas extremidades do ciclo. Isto o levou a 12 ou 15 pés acima do chão após cerca de meia dúzia de balançadas.

Desde que o parâmetro de crescimento sempre procura aumentar a população, ele se difere da força utilizada no oscilador forçado. Entretanto, o termo $(1-x)$ age como um fator de amortecimento, para restringir a média de variação da população. Isso se difere do fator de amortecimento “gama” do oscilador harmônico, no qual seu poder de diminuir o crescimento é absoluto. Como o fator de crescimento está dentro dos limites de comportamento realístico, a população não pode exceder a capacidade máxima suportada pelo meio ambiente.

Como nós faremos agora em relação a forçar o parâmetro dependente do tempo da equação diferencial? Assim como com o oscilador harmônico forçado, o componente dependente do tempo da equação logística forçada irá imitar a solução de uma equação

logística simples. Em um sistema dinâmico discreto, a periodicidade existe como um conjunto de “n” valores discretos sequenciados que o sistema irá percorrer repetidamente:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

A equação logística forçada na forma diferencial é desse modo escrita como:

$$A_{n+1} = r_{n \bmod p} A_n (1 - A_n)$$

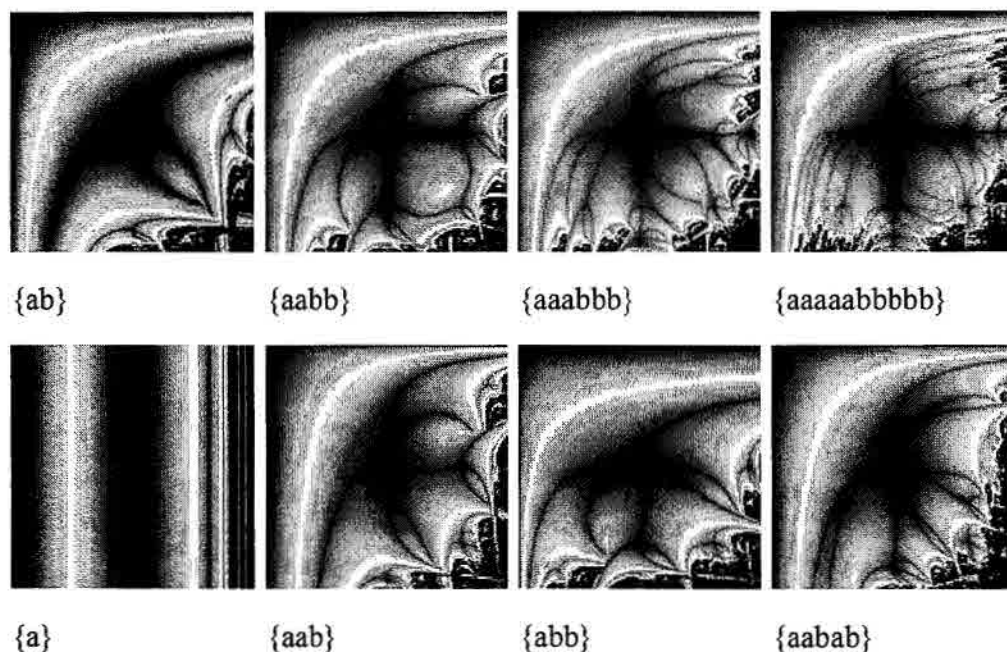
Onde r_0, r_1, \dots, r_{p-1} são os parâmetros e “p” é o período.

Nós estamos prontos agora para estudar o comportamento da equação logística forçada. Nós iremos fazer isso examinando o expoente de Lyapunov do sistema como uma função da sequência de parâmetros. Por simplicidade nós devemos nos limitar a apenas dois valores de parâmetro distintos; chamemos de “a” e “b”. Desse modo $\{ab\}$, $\{aab\}$, $\{abaabab\} = \{(aba)^2b\}$ são todas as sequências aceitáveis $\{r_n\}$ enquanto $\{abc\}$ não é. Esta restrição nos permite plotar esta informação graficamente. Se deixarmos “a” e “b” serem os eixos em algum espaço de parâmetro (chamemos de espaço de Lyapunov) nós podemos então calcular o expoente para todas as combinações permitidas de parâmetros (aqueles no intervalo (0, 4)). O expoente de Lyapunov $\lambda(a, b)$ agora se comporta como um campo escalar, como a temperatura ou altitude, e pode ser mostrado da mesma maneira. Para cada valor nós iremos utilizar uma cor específica. O esquema de cores usado irá ser aquele escolhido por Mario Markus em seu artigo de 1990 *Computers in Physics*. Pintaremos de branco todos os pontos onde λ é nulo, e de preto todos os pontos onde λ é maior que zero. Isto mostra os pontos culminantes da transição da ordem para o caos. Para pontos onde λ é menor que zero nós pintamos com uma sombra cinza tal que valores próximos a zero são quase brancos, enquanto os mais próximos a $\lambda = -\infty$ são praticamente negros. Pintamos de preto novamente qualquer ponto onde $\lambda = -\infty$ (i.e., os pontos e ciclos superestáveis).

Uma coleção de diagramas de Lyapunov é apresentado abaixo. Note que a medida que o número de termos na sequência aumenta, o mesmo ocorre com o número de braços superestáveis se encontrando em um ponto. Note também que sequências assimétricas

produzem diagramas assimétricos. Mais difícil de perceber, mas intuitivamente óbvio é que cada diagrama tem a mesma seção transversal através da diagonal $a = b$. Quando isto acontece, a situação se reduz a um diagrama de bifurcação.

A equação logística forçada no espaço de Lyapunov



O diagrama abaixo é uma ampliação no espaço de Lyapunov para a sequência $\{ab\}$. O primeiro instante corresponde à janela com $(0, 0)$ no canto superior esquerdo, e $(4, 4)$ no inferior direito. As regiões negras abaixo e à direita são caóticas, enquanto a maior listra negra é a família de pontos superestáveis. O centro do "x" é o ponto $(2, 2)$. Outras listras correspondem a famílias de ciclos superestáveis de período n . Vemos no meio do regime caótico algumas ilhas estáveis de estranha múltipla periodicidade. Novamente, note que a natureza de auto-semelhança das ilhas para com toda a figura. O borrão na última figura tem a mesma configuração do espaço inteiro assim como seu próprio atol de ilhotas estáveis.

A propriedade mais impressionante destes diagramas é a sua aparência tridimensional. A estrutura na última figura, quando observada com mais detalhe, parece com uma gota sólida e os braços superestáveis parecem cruzar um ao outro. Quando a sequência é invertida para $\{ba\}$, os braços que se cruzam se invertem. Nestes locais, nós temos a coexistência de dois atratores, cada um deles deve ter um período diferente. Markus encontrou níveis extremamente altos de interligação de base em sequências mais complicadas. O destino final de uma órbita (isto é, para qual base será atraída) depende de qual valor de parâmetro nós começamos. Não há analogia entre este comportamento é o oscilador harmônico forçado (apesar de que isto não impede que este comportamento seja encontrado em outro sistema contínuo). Nós descobrimos um novo tipo de fenômeno.

Em alguns casos de sobreposição, um braço é acompanhado pelo que parece ser uma sombra. Novamente, revertendo a sequência, ou começando a sequência com o segundo termo no lugar do primeiro a direção da sobreposição será revertida. Isto é mais extremo que apenas escolher entre uma base e outra, já que isto inclui pontos que irão mudar de ordem (branco ou cinza) para o caos (preto). Markus descobriu que por mudanças randômicas entre duas sequências pareadas (por exemplo, entre $\{ab\}$ e $\{ba\}$ ou $\{abaabb\}$ e $\{baabba\}$) órbitas nestas regiões iriam caminhar para um atrator superestável ao invés de ir pro regime caótico. Graficamente, as sombras iriam desaparecer e o diagrama iria obter uma aparência indistinta, hibridizada. Este fenômeno é chamada de ordem “induzida por barulho”. Caos não randômico produz estabilidade. A verdade é mais estranha que a ficção.

4. Sincronização

4.1 Conceitos gerais em sincronização

Nesta seção apresentar-se-á o método de Pecora e Carroll [12] para sincronização de sistemas dinâmicos caóticos.

Seja um sistema de dimensão n da forma

$$\dot{x} = f(x(t)), (1.3)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Assume-se que o estado pode ser dividido em dois componentes $x = (x_D, x_R)^T$. A parte D é chamada de subsistema diretor e a R , subsistema resposta. Desta forma, a equação (1.3) é reescrita da seguinte forma

$$\dot{x}_D = g(x_D, x_R), (m - dimensional) \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_R = h(x_D, x_R), (n - dimensional) \quad (1.5)$$

onde $x_D = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $x_R = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)^T$, $g = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$, $h = [f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)]^T$ e $m + k = n$.

Pecora e Carroll [12] fizeram uma cópia do subsistema resposta x'_R e utilizaram as variáveis x_D do sistema original para dirigi-la. As equações resultantes são

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_D &= g(x_D, x_R) \\ \dot{x}_R &= h(x_D, x_R) \end{aligned} \right\} \text{sistema diretor, (1.6)}$$

$$\dot{x}'_R = h(x_D, x'_R), \text{ subsistema resposta. (1.7)}$$

Sob certas circunstâncias, à medida que o tempo passa, as variáveis x'_R convergem assintoticamente para x_R . Fica evidente que o sistema diretor controla o subsistema resposta através das componentes x_D . As condições iniciais dos dois não precisam ser exatamente as mesmas.

Se todos os expoentes de Lyapunov do subsistema resposta forem menores que zero, depois de um período transitório, ter-se-á $x'_R(t) \rightarrow x_R(t)$. Esses são chamados de expoentes condicionais de Lyapunov (ECL's). Se pelo menos um deles for positivo, o sincronismo não ocorre. Se os dois sistemas estiverem sincronizados, a diferença entre as variáveis, $x_R^*(t) = x'_R(t) - x_R(t)$, tenderá assintoticamente para zero, isto é, $x_R^*(t) \xrightarrow{t \uparrow \infty} 0$.

Portanto, tem-se que

$$\dot{x}_R^*(t) = \dot{x}_R'(t) - \dot{x}_R(t) = h(x_D, x_R') - h(x_D, x_R). \quad (1.8)$$

Quando o subsistema é linear, verifica-se que

$$\dot{x}_R^*(t) = Ax_R^*(t), \quad (1.9)$$

onde A é uma matriz $(k \times k)$ e a parte real de cada autovalor de A é, por definição, o ECL procurado.

Se todos os ECL's forem negativos, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x_R^*(t) = 0$. Por outro lado, se existir algum ECL maior que zero, não haverá sincronismo. No caso de se ter um ou mais ECL's iguais a zero e os demais negativos, as trajetórias dos subsistemas entram em sincronismo, mas separadas por uma distância fixa que depende das condições iniciais.

Quando o subsistema resposta é não-linear, necessita-se recorrer a métodos numéricos para determinar os ECL's.

4.2 Sincronização no oscilador de Chua

Usando o método de Pecora e Carroll introduzido na seção 1.2, pode-se mostrar a sincronização caótica no sistema de Chua. Sejam as equações 2.4 e 2.5, e os seguintes valores para os parâmetros $\alpha = 10$, $\beta = 14,87$, $a = -1,27$, $b = -0,68$. Como foi mencionado, uma condição necessária para que ocorra o sincronismo é que os ECL's do subsistema resposta não sejam positivos. Para verificar se isso acontece, serão considerados três tipos de sistemas diretor-resposta:

Tabela 2: Sistema diretor-resposta

Caso	Sinal Diretor	Resposta	Subsistema
------	---------------	----------	------------

(a)	X	(y, z)	linear
(b)	Y	(x, z)	não-linear
(c)	Z	(x, y)	não-linear

(a) x como sinal diretor: As equações de estado para esse sistema diretor-resposta são

$$\text{diretor} \begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = (x - y + z) \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$\text{resposta} \begin{cases} \dot{y}' = (x - y' + z') \\ \dot{z}' = -\beta y' \end{cases}. \quad (3.2)$$

Se forem definidas variáveis tais que $y^* = y - y'$, $z^* = z - z'$, obtém-se a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Os autovalores dessa matriz são $-0,5 \pm 0,5i\sqrt{4\beta - 1}$, e a solução é dada por

$$y^*(t) = z^*(t) = e^{-t/2} \left(C \cos\left(\frac{\sqrt{4\beta - 1}}{2}t\right) + D \sin\left(\frac{\sqrt{4\beta - 1}}{2}t\right) \right), \quad (3.4)$$

onde C e D são constantes de integração. Os ECL's são $(-0.5, -0.5)$, e é fácil ver que $\lim_{t \rightarrow \infty} y^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z^*(t) = 0$. Observe a Fig. 3.1 e note que, apesar dos dois sistemas partirem de condições iniciais diferentes, o sincronismo ocorre em pouco tempo.

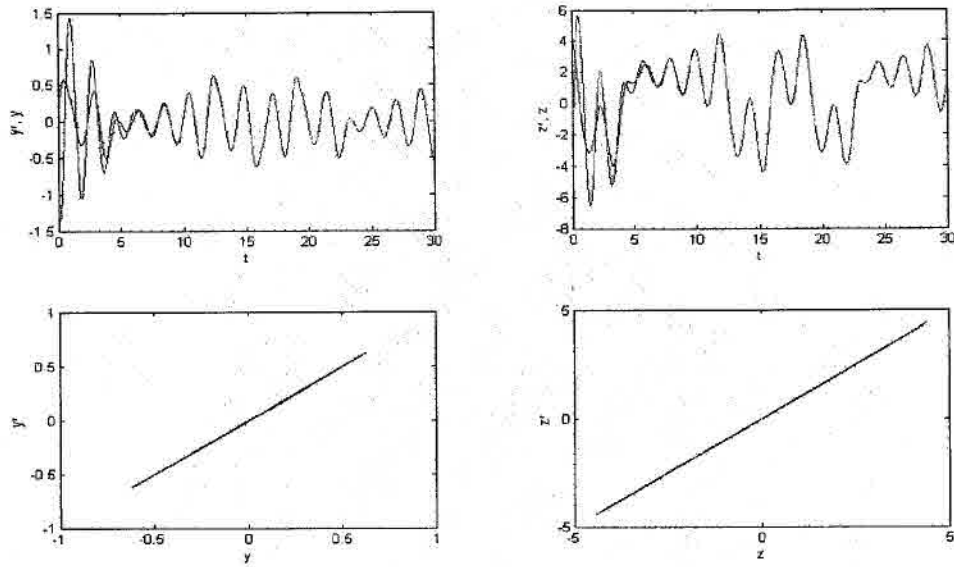


Fig. 3.1 – Sincronização em que x atua como sinal diretor; y, z - azul, y', z' - verde.

(b) y como sinal diretor: As equações de estado para esse sistema diretor-resposta são

$$\text{diretor} \begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \\ \dot{y} = (x - y + z) \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$\text{resposta} \begin{cases} \dot{x}' = (y - x' + g(x')) \\ \dot{z}' = -\beta y \end{cases}. \quad (3.6)$$

Usando um método numérico, é possível obter os autovalores para o subsistema não-linear em (3.6). Os ECL's correspondentes são $(-2,5 \pm 0,05, 0)$. Note na Fig. 3.2 que os subsistemas atingem o sincronismo; como um dos autovalores é igual a zero, $z(t)$ e $z'(t)$ permanecem separados por uma distância constante $\Delta z = |z(0) - z'(0)|$.

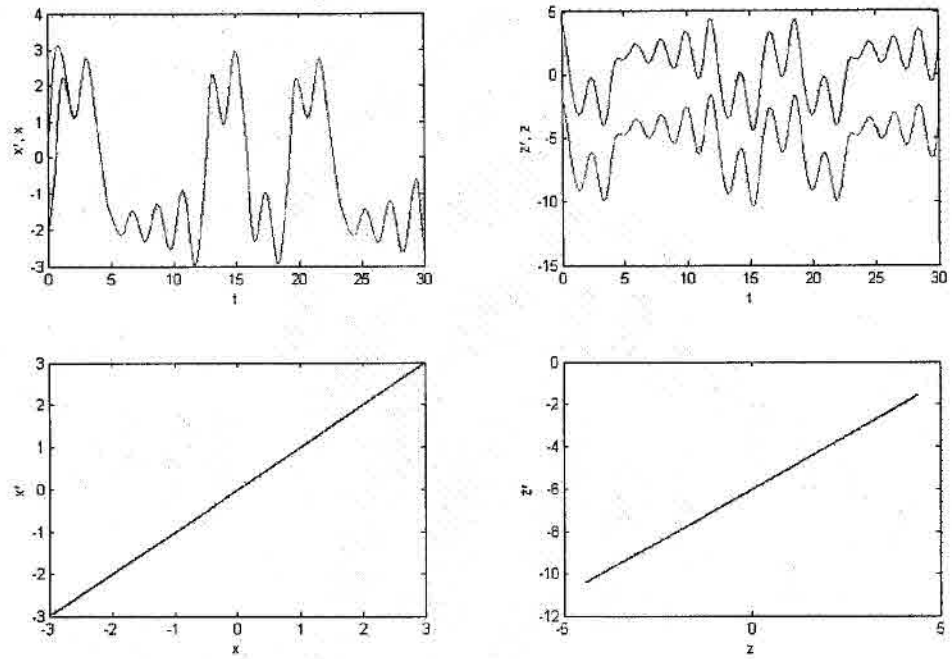


Fig. 3.2 – Sincronização em que y atua como sinal diretor; x, z - azul, x', z' - verde.

(c) z como sinal diretor: As equações de estado para esse sistema diretor-resposta são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - g(x)) \\ \text{diretor } \dot{y} &= (x - y + z) \quad , \quad (3.7) \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{resposta } \dot{x}' &= \alpha(y' - x' + g(x')) \\ \dot{y}' &= x' - y' + z \end{aligned} \quad (3.8)$$

Novamente, utilizando-se um método numérico, são obtidos os seguintes ECL's para o subsistema em (3.8): $(-5,42 \pm 0,02, 1,23 \pm 0,03)$. Veja na Fig. 3.3 que não ocorre o sincronismo entre os dois subsistemas, já que um dos ECL's é maior que zero.

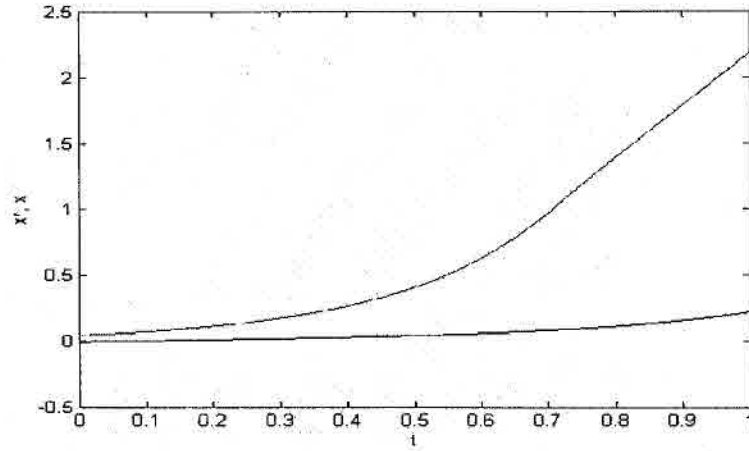


Fig. 3.3 – Trajetórias resultantes quando z atua como sinal diretor; x - azul, x' - verde.

4.3 Estudo da estabilidade assintótica via função de Lyapunov

Como condição necessária e suficiente para a sincronização de osciladores periódicos e caóticos, He e Vaidya [17] desenvolveram um critério baseado na estabilidade assintótica de sistemas dinâmicos. Os dois pesquisadores aplicaram o segundo método de Lyapunov ao oscilador de Chua para analisar se a origem do plano de fase era um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema definido por $y^* = y - y'$, $z^* = z - z'$,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $\beta > 0$. Antes de aplicar essa abordagem, considere a definição e o teorema abaixo.

Definição: Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x(t))$, $x \in R^n$. $E: R^n \rightarrow R$ é chamada de função de Lyapunov para \bar{x} se existir uma vizinhança $B(\bar{x}, \epsilon)$ tal que

1. $E(\bar{x}) = 0$ e $E(x) > 0$, $\forall x \in B(\bar{x}, \epsilon)$ e $x \neq \bar{x}$;

2. $E(x(t))$ possui derivadas parciais contínuas em relação a x ;
3. $\dot{E}(x(t)) \leq 0, \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.

Teorema: (Segundo Método de Lyapunov) Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x(t))$, $x \in R^n$. Se existir uma função de Lyapunov para \bar{x} , então \bar{x} é um ponto de equilíbrio estável. Se $\dot{E}(x) < 0, \forall x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ e $x \neq \bar{x}$, então \bar{x} é assintoticamente estável.

Para que se possa utilizar o teorema acima, considere (3.9) e a seguinte candidata a função de Lyapunov para $\bar{x} = 0$

$$E = \frac{1}{2} \left[(\beta y^* - z^*)^2 + \beta y^{*2} + (1 + \beta) z^{*2} \right]. \quad (3.10)$$

Vê-se que (3.10) satisfaz as condições (1) e (2) da definição em toda a bacia de atração do atrator. Seja $B(0, \varepsilon)$ a maior bola que pode ser tomada dentro da bacia de atração do atrator caótico de Chua. Para garantir a estabilidade assintótica, basta verificar se $\dot{E}(x) < 0$ em $B(0, \varepsilon)$. Desta forma,

$$\dot{E} = (\beta \dot{y}^* - \dot{z}^*)(\beta y^* - z^*) + \beta \dot{y}^* y^* + (1 + \beta) \dot{z}^* z^* \Rightarrow$$

$$\dot{E} = -\beta(y^{*2} + z^{*2}) < 0, \forall (y^*, z^*) \in B(0, \varepsilon) \text{ e } (y^*, z^*) \neq (0, 0).$$

Sendo assim, do teorema acima segue que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em $B(0, \varepsilon)$, ou melhor, $\lim_{t \rightarrow \infty} y^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} z^*(t) = 0$. Portanto, há o sincronismo entre os dois subsistemas (3.1) e (3.2) se a componente x for usada como sinal diretor.

5. Conclusão e trabalhos posteriores

Ao final deste trabalho, vemos que o estudo do caos é uma área bastante ampla, com diversas aplicações em eletrônica – como foi visto – mas também em vários outros ramos da ciência, como na Engenharia Aeronáutica. Sabemos que é de suma importância entender os motivos que levam um escoamento laminar a se tornar turbulento, e como isto ocorre. Além disso, é muito importante também saber lidar com o escoamento turbulento, cujo comportamento é obviamente caótico. Este é o rumo que este trabalho pretende tomar, em seu futuro próximo.

Porém, mesmo mudando o rumo deste trabalho, vemos que os conceitos básicos de sistemas caóticos apresentados acima continuarão sendo a base teórica para o desenvolvimento deste novo estudo. O que nos permite afirmar isto é a existência da universalidade nos sistemas caóticos, como foi exposto acima. Isso permitirá adiantar boa parte deste novo estudo, pois as características básicas de caos (dependência sensível, dimensão fractal, auto semelhança, rota de bifurcação, etc) continuarão sendo as nossas guias.

6. Referências bibliográficas

- [1] M. S. Batista, E. E. N. Macau, C. Grebogi, Y. –C. Lai e E. Rosa, *Phys. Rev. E.* **62** (2000) 4835.
- [2] J. Singer, Y. Wang e H. H. Bau, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1999) 1123.
- [3] B. A. Huberman e E. Lumer, *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37**, (1990) 547.
- [4] E. Ott, C. Grebogi e J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, (1990) 1196.
- [5] G. Chen e X. Dong, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3**, (1993) 1363.
- [6] V. V. Aleixeev e A. Y. Loskutov, *Sov. Phys. Dokl.* **32**, (1987) 1346.

- [7] A. S. Pikovsky, *Radiophys. Quantum Elect.* **27**, (1984) 390.
- [8] K. Wiesenfeld e B. McNamara, *Phys. Rev.* **A33**, (1986) 629.
- [9] P. Bryant e K. Wiesenfeld, *Phys. Rev.* **A33**, (1986) 2525.
- [10] Y. Braiman e I. Goldhirsch, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1991) 6483.
- [11] S. Rajasekar e M. Lakshmanan, *Physica* **D67**, (1993) 282.
- [12] L. M. Pecora e T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, (1990), 821.

- [13] S. Hayes, C. Grebogi e E. Ott, "Communication with Chaos". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 3031-3034, 1993.

- [14] P. Cvitanović, G. Gunaratne e I. Procaccia, *Phys. Rev. A* **38**, 1503 (1988); P. Grassberger, H. Kantz e U. Moenig, *J. Phys. A* **22**, 5217 (1989).
- [15] D. P. Lathrop e E. J. Kostelich, *Phys. Rev. A* **40**, 4028 (1989); L. Flepp, R. Holzner, E. Brun, M. Finardi e R. Badii, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2244 (1991).
- [16] M. P. Kennedy, *IEEE Trans. Circ. Syst.* **I40**, (1993) 640; 657.
- [17] R. He e P. G. Vaidya, *Phys. Rev.* **A46**, (1992) 7387.
- [18] Carroll, T. L., "Synchronizing chaotic systems using filtered signals." *Phys. Rev. E*, vol. 50, pp. 2580-2587, 1994.
- [19] A. V. Oppenheim, K. M. Cuomo, R. J. Baron e A. E. Fredman, "Channel Equalization for Communication with Chaotic Signals." in *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, R. A. Katz, Ed., AIP Press, 1996, pp. 289-301.
- [20] Carroll, T. L., "Communication with use of filtered, synchronized, chaotic signals." *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 42, pp. 105-110, (1995).
- [21] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications." *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 65-68, 1993.
- [22] U. Parlitz, L. Kokarev, T. Stojanovski e H. Preckel, "Encoding messages using chaotic synchronization." *Phys. Rev. E*, vol. 53, pp. 4351-4361, 1996.
- [23] A. R. Volkovskii e N. F. Rulkov, "Synchronous chaotic response of a nonlinear oscillator system as principle for the detection of the information component of chaos." *Tech. Phys. Lett.*, vol. 19, pp. 97-99, 1993.
- [24] G. Elert, "The Chaos Hypertextbook", www.hypertextbook.com/chaos, 2003.