



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **SIMULAÇÃO DE COMETAS CAPTURADOS UTILIZANDO O MODELO RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS**

*RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)*

Rubens Domicildes Neto (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: mec00074@feg.unesp.br

Dr. Antonio Fernando Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)  
E-mail: prado@dem.inpe.br

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (DMA/UNESP, Orientador)  
E-mail: rodolpho@feg.unesp.br

Maio de 2003

# SUMÁRIO

## 1. OBJETIVOS

## 2. INTRODUÇÃO

2.1. Origem dos Cometas

2.2. Localização dos Cometas no sistema solar

2.3. Evolução da órbita de um cometa

## 3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

## 4. TÉCNICA UTILIZADA PARA SIMULAR CAPTURAS

## 5. O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS EM TRÊS DIMENSÕES

## 6. CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS

## 7. RESULTADOS

6.1. Simulações para cometas que se aproximam de Júpiter

6.2. Simulações para cometas que se aproximam de Saturno

6.3. Comentários e observações

## 8. CONCLUSÃO

## 9. AGRADECIMENTOS

## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## 1. OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é analisar as possíveis alterações de órbita sofridas por um cometa devido às forças gravitacionais causadas por planetas e estrelas. Para simular as possíveis alterações que um cometa sofre iremos utilizar o caso restrito circular do problema dos três corpos.

## 2. INTRODUÇÃO

### 2.1. Origem dos cometas

O conhecimento que possuímos sobre a origem dos cometas é demasiadamente pequena, porém ao analisarmos suas composições químicas e propriedades orbitais é provável que eles tenham sido produtos da formação do sistema solar assim como os planetas, asteróides e o sol. A seguir temos uma representação dos componentes de um cometa (figura 1).

### 2.2. Localização dos cometas no sistema solar

Com base nas propriedades orbitais, admite-se que a maioria dos cometas de longo período (cometas cujo semi-eixo maior é igual a  $5,0 \times 10^4 \text{UA}^{(1)}$ ) estejam hibernando numa nuvem esférica ao redor do sistema solar, a qual possui um raio interno de  $5,0 \times 10^4 \text{UA}$  e externo de  $1,0 \times 10^6 \text{UA}$ , chamada de nuvem de Oort<sup>(2)</sup> (figura 2), esta nuvem abriga cerca de 10 bilhões de cometas.

Até 1980 pensava-se que os cometas de curto período também provinham da nuvem de Oort, porém estes possuem órbitas com afélios associados a Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, devido a isso foi proposto que os cometas de curto período provinham do cinturão de Kuiper<sup>(3)</sup> (figura 2), cuja borda estaria além de Netuno por volta de 35UA, estendendo-se até cerca de 130UA. Mas é entre 35 e 46UA que viriam os cometas de curto período. O cinturão de Kuiper abriga cerca de 10 trilhões de cometas.

(1) 1 unidade astronômica (UA) = 149 600 000 km

(2) Jan Hendrik Oort(1900 – 1992), astrônomo holandês.

(3) Gerald Peter Kuiper(1905 - ?), holandês, pioneiro da astronomia planetária e de infravermelhos nos EUA.

### Components Of Comets

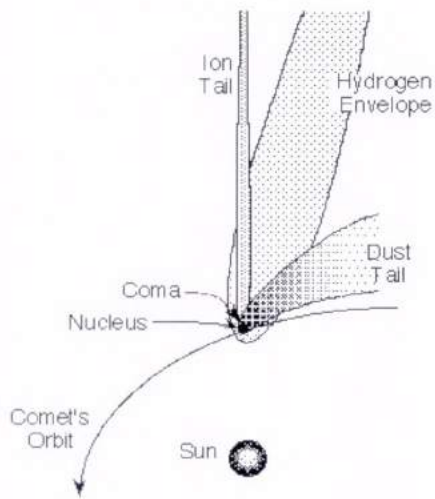


Figura 1: Componentes de um cometa.

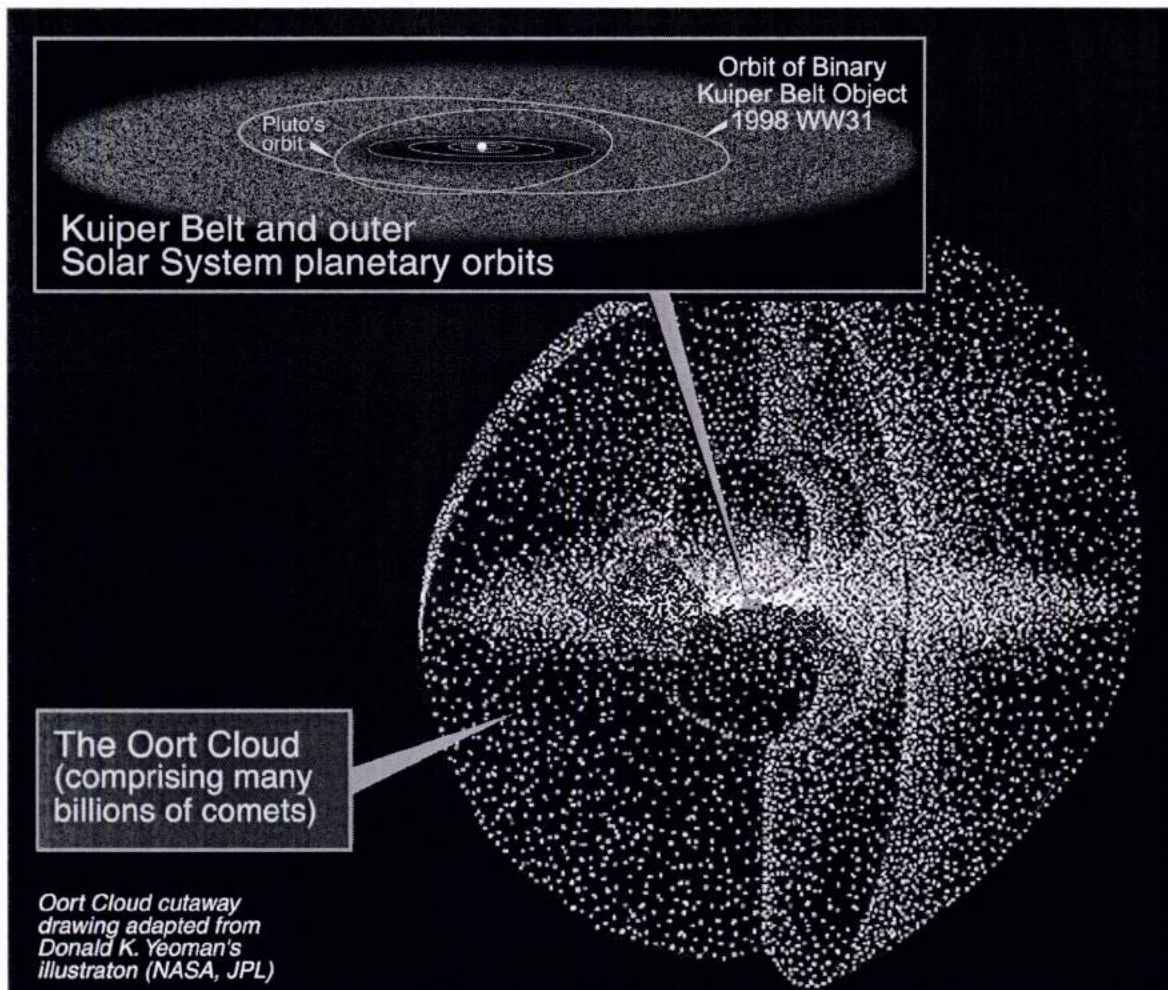


Figura 2: Representação da nuvem de Oort e do cinturão Kuiper.

### 2.3. Evolução da órbita de um cometa

Após ocorrer a saída de um cometa do cinturão de Kuiper ou da nuvem de Oort, devido às perturbações tanto dos planetas quando de outros corpos, podemos fazer um esquema da evolução da órbita desse cometa (Figura 3). Obviamente não consideraremos todas as possibilidades.

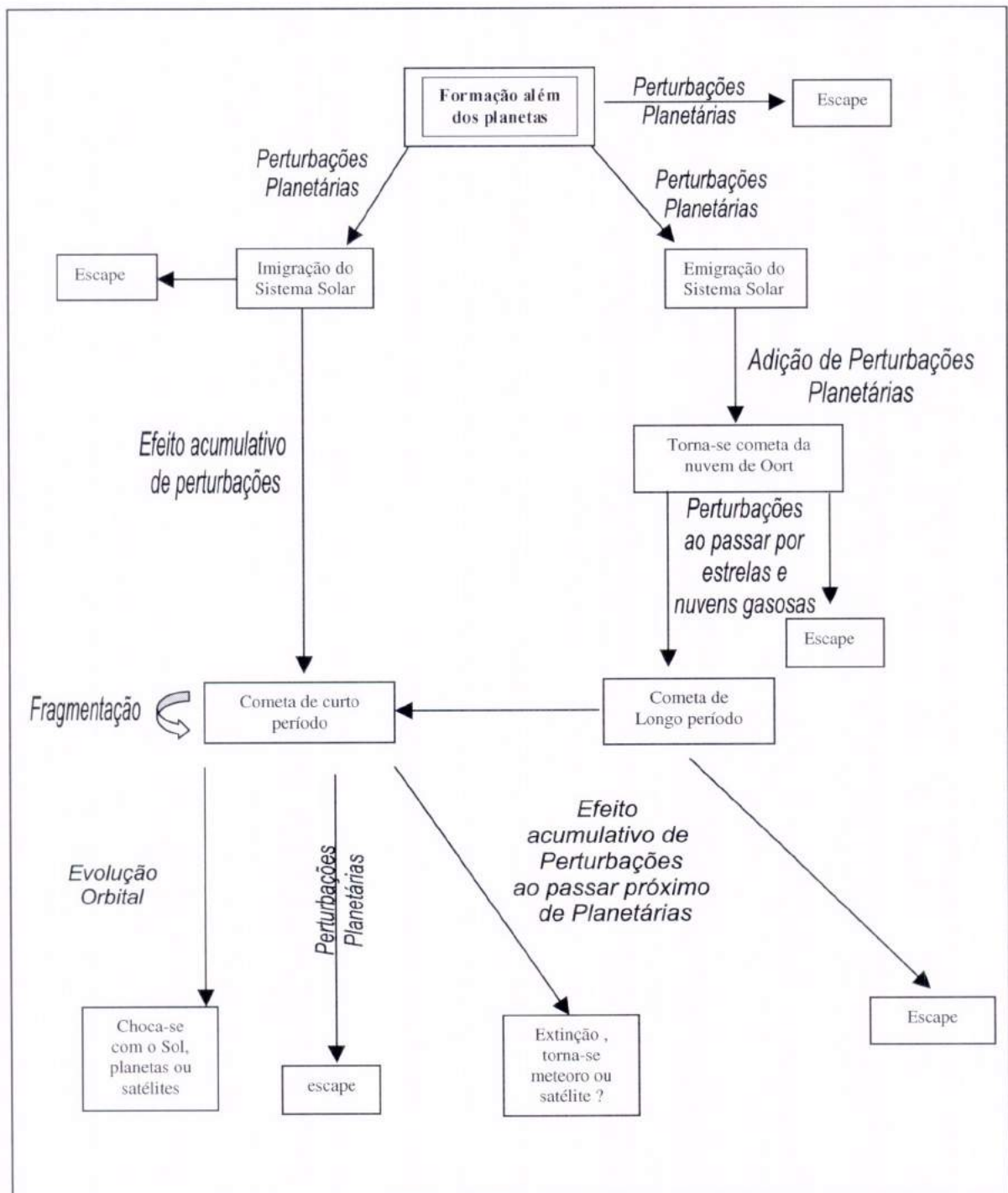


Figura 3: Representação da evolução orbital de um cometa.

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

A seguir iremos apresentar um pequeno exemplo ilustrativo do princípio básico do acréscimo e decréscimo de energia de um corpo em movimento quando perturbado por Júpiter ou Saturno. Ele justifica as seguintes conclusões: quando um cometa sofre uma interação com um planeta ou um corpo de grande massa que está se afastando, o cometa tende a ganhar energia, enquanto, se o planeta ou o corpo se aproximam, o cometa tende a perder energia. Suponha que Q seja um planeta e P um cometa com uma massa desprezível em relação à do planeta. Em outras palavras P não afeta o movimento de Q. O cometa P sofre uma interação gravitacional com o planeta Q. Para tratar corretamente este caso teremos que utilizar o problema restrito dos três corpos. Este exemplo ilustra a idéia básica do aumento e decréscimo de energia de um cometa durante sua passagem próxima a um planeta.

Q está localizado nas coordenadas  $(x_1(t), y_1(t))$ . A força utilizada é descrita pelo inverso da atração gravitacional do planeta ao quadrado tendo como potencial a função  $U = \mu/r$  ou como energia potencial  $V = -\mu/r$ . O sistema utilizado possui como referência o ponto O (Figura 4).

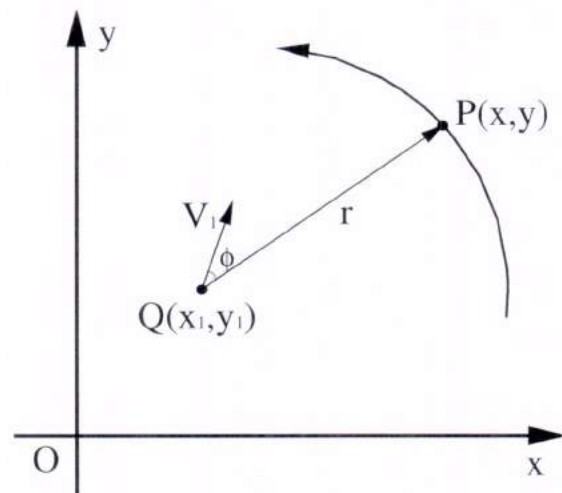


Figura 4. Interação gravitacional entre P e Q.

As equações do movimento do corpo P são:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\mu \frac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\mu \frac{y}{r^3} \quad (1)$$

onde,

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad (2)$$

A grande questão agora é como obter a variação da energia do corpo P. Para isso iremos utilizar a equação da energia dada a seguir:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(r(x, y, t)) \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \quad (4)$$

Entretanto, nós temos:

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = -(x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial t} - (y - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial t} = -(x - x_1) \dot{x}_1 - (y - y_1) \dot{y}_1 \quad (5)$$

Portanto, a equação da energia é:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} [(x - x_1) \dot{x}_1 + (y - y_1) \dot{y}_1] \quad (6)$$

Resumindo a equação da energia em função do tempo pode ser dada pelo produto entre o vetor posição  $\vec{r} = \overline{PQ}$  da partícula P pelo vetor velocidade absoluta  $V_1(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$  do corpo Q. Assim a equação da energia pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} r V_1 \cos(\phi) = -\frac{\mu V_1}{r^2} \cos(\phi) \quad (7)$$

A partir da equação (7) é possível se obter uma importante conclusão a respeito do acréscimo e decréscimo da energia da partícula P. A energia da partícula depende exclusivamente do fator  $\cos(\phi)$ , sendo assim podemos concluir que: quando  $\phi$  é menor que  $90^\circ$ , a energia decresce e quando  $\phi$  está acima de  $90^\circ$ , a energia aumenta. Esse resultado pode ser simplificado como: quando Q aproxima: E decresce, quando Q afasta: E aumenta.

#### 4. TÉCNICA UTILIZADA PARA SIMULAR CAPTURAS

A técnica utilizada para simular capturas é chamada de swing-by. Para a aplicação dessa técnica devemos adotar o modelo matemático que nos fornece melhores resultados, comumente se utiliza para realizar simulações o problema dos Dois Corpos, devido sua praticidade e rapidez de aplicação. Para objetivo de simular capturas de cometas devido às perturbações causadas pelo Sol e por um planeta (Júpiter ou Saturno), utilizaremos o modelo Restrito Circular do Problema dos Três Corpos. Para futuros trabalhos poderíamos simular a captura de cometas através do modelo Restrito Elíptico do Problema dos Três Corpos. A função principal de se realizar simulações através dos diversos modelos é compará-los concluindo-se posteriormente suas diferenças e semelhanças quanto aos resultados.

Determinaremos para uma grande variedade de condições iniciais quais as mudanças que o cometa irá sofrer após a captura. Para determinar uma condição inicial são necessárias cinco variáveis:  $V_p$ , velocidade do cometa no perigeu em relação ao planeta (Júpiter ou Saturno); os ângulos ( $\alpha$  e  $\beta$ ), os quais determinam a direção do cometa no perigeu em relação ao planeta utilizando-se três dimensões;  $r_p$ , representa a distância entre o cometa e o centro do planeta no momento em que o cometa se encontra no perigeu em relação ao planeta;  $\gamma$ , o ângulo entre o vetor velocidade no perigeu e a intersecção entre o plano horizontal que passa pelo perigeu e o plano perpendicular no perigeu que encontra  $\vec{V}_p$ . Para uma melhor visualização das variáveis, vide figura 4.

Com os valores das variáveis determinados, integramos numericamente as equações do movimento em relação ao tempo posterior e anterior em que são obtidas as condições iniciais, a uma distância suficiente do centro do planeta. Após determinadas as condições do cometa anterior e posterior caracterizados por A e B respectivamente, o efeito causado pelo planeta pode ser desconsiderado e podemos considerar um sistema formado apenas pelo Sol e o cometa, ou seja passamos a considerar um sistema de dois corpos. Para os pontos A e B podemos aplicar as fórmulas da mecânica celeste para Dois Corpos obtendo-se conseqüentemente a energia, o momento angular e a inclinação do cometa após o swing-by.

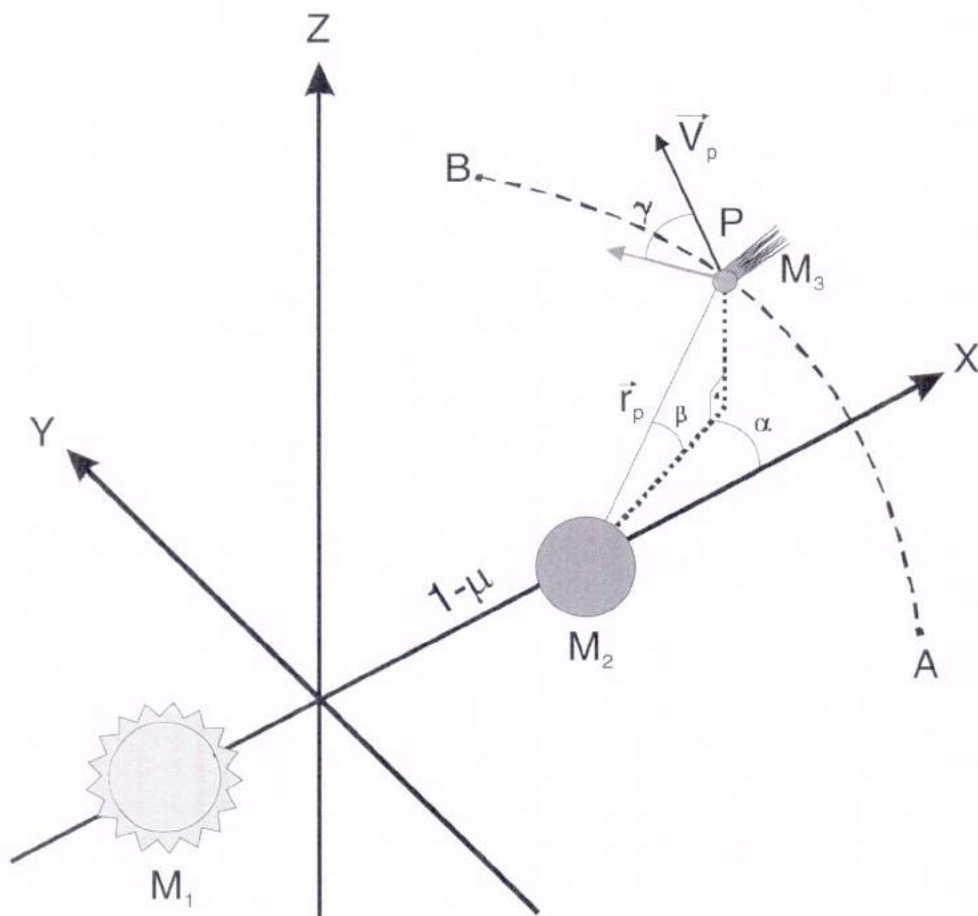


Figura 4: Swing-By em Três Dimensões.

Na Figura 4, assumimos que os corpos que compõem o sistema são: o Sol, o qual consideramos o corpo primário do sistema ( $M_1$ ); o planeta, podendo este ser Júpiter ou Saturno representado como o corpo secundário do sistema ( $M_2$ ); o cometa, sendo o corpo terciário ( $M_3$ ). Para efeitos de solução deste caso por meio do método restrito circular de Três corpos, consideraremos os corpos  $M_1$  e  $M_2$  com massas finitas determinadas, porém o cometa por possuir uma massa muito inferior aos outros iremos desconsiderar sua massa no desenvolvimento das soluções. Os pontos A e B são as posições extremas em que o cometa irá sofrer influência gravitacional do corpo  $M_2$ , para posições posteriores ou anteriores aos pontos B e A respectivamente a influência causada por  $M_2$ .



## 5. O PROBLEMA CIRCULAR DOS TRÊS CORPOS EM TRÊS DIMENSÕES

Existe uma série de sistemas de referência que podem ser usados para descrever o problema dos três corpos em três dimensões. Neste trabalho admitimos o sistema rotacional.

No sistema de referência rotacional, a origem é o centro de massa dos dois corpos primários (Sol e Júpiter ou Saturno). O eixo horizontal  $x$  é a linha que liga os dois corpos primários em qualquer instante. Este sistema rotaciona com uma velocidade angular variável de uma maneira em que os corpos primários estão sempre no eixo horizontal. O eixo vertical  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$ . Nesse sistema as posições dos primários são  $x_1 = -\mu$ ,  $x_2 = 1 - \mu$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ .

No sistema rotacional as equações de movimento de um cometa são as seguintes:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3} \quad (8)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \left( \frac{y}{r_1^3} \right) - \mu \left( \frac{y}{r_2^3} \right) \quad (9)$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \left( \frac{z}{r_1^3} \right) - \mu \left( \frac{z}{r_2^3} \right) \quad (10)$$

onde,  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias entre de  $M_1$  e  $M_2$ .

## 6. CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS

Os resultados das simulações são representados na forma de letras para determinar condições em que o cometa passa pelo perigeu em relação aos planetas Júpiter e Saturno.

A partir do momento em que o cometa sofre a influência gravitacional de um planeta seus parâmetros orbitais podem ser alterados, sendo assim associamos cada alteração a uma letra de A a P (Tabela 1).

Após serem classificadas todas as possíveis alterações de órbita, o próximo passo é associar cada letra a uma determinada posição em um diagrama bi-dimensional, o qual possui o ângulo  $\alpha$  (em graus) no eixo horizontal e o ângulo  $\beta$  (em graus) no eixo vertical. Cada diagrama é feito para valores fixos de  $r_p$  e  $v_p$ .

Tabela 1 – Regras de associação entre órbitas e letras

ANTES	DEPOIS			
	Elíptico Direto	Retrógrado Elíptico	Hiperbólico Direto	Hiperbólico Retrogrado
Elíptico Direto	A	E	I	M
Retrógrado Elíptico	B	F	J	N
Hiperbólico Direto	C	G	K	O
Hiperbólico Retrogrado	D	H	L	P

## 7. RESULTADOS

É importante enfatizar que todo o processo de associar cada letra a sua respectiva posição é efetuado por um programa desenvolvido em plataforma Fortran.

Os ângulos utilizados nos diagramas possuem uma escala de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  para o ângulo  $\beta$  e de  $180^\circ$  a  $360^\circ$  para o ângulo  $\alpha$ , para ambos os ângulos a variação foi de  $5^\circ$ . Para cada diagrama foi necessário fixar a velocidade  $v_p$  e a distância  $r_p$ .

Foram realizadas simulações com cometas em relação aos planetas Júpiter e Saturno. Para as simulações em relação aos planetas Júpiter e Saturno escolhemos os seguintes valores para  $r_p$ : 0.00476, 0.00675, 0.009, 0.015 e para  $v_p$ : 2.2, 2.6, 3.0 e 4.2. A partir da combinação dos valores de  $r_p$  e  $v_p$ , realizamos um total de 12 simulações para Júpiter e 9 para Saturno. Os valores para  $r_p$  e  $v_p$  diferentes dos apresentados anteriormente foram omitidos por apresentarem poucos resultados significativos em relação aos objetivos deste trabalho.

7.1. Simulações para cometas que se aproximam de Júpiter.

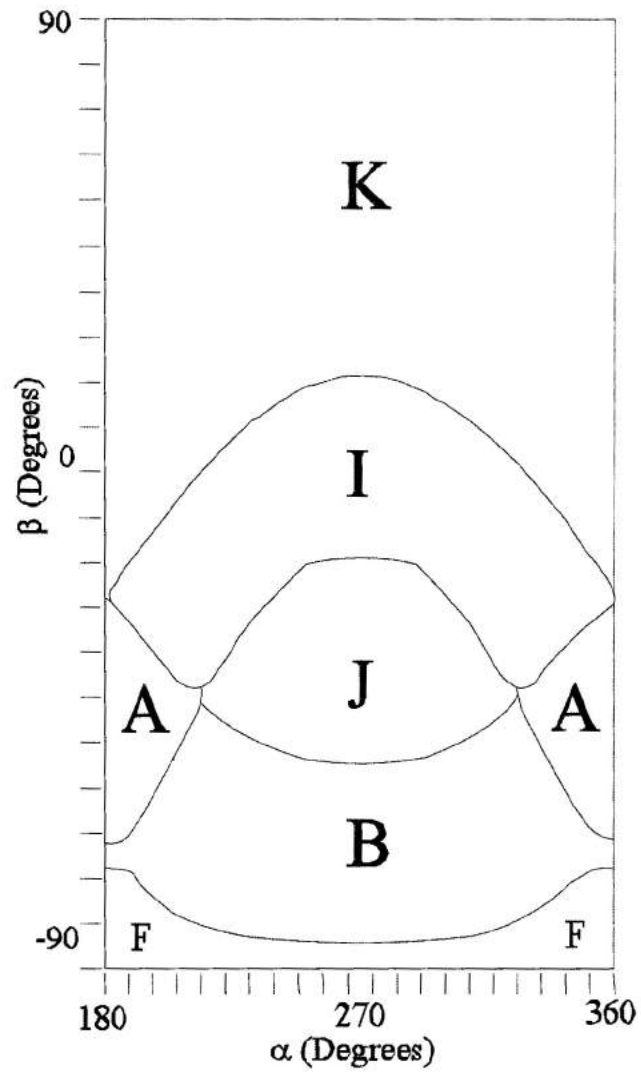


Figura 5. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $v_p=2.6$ .

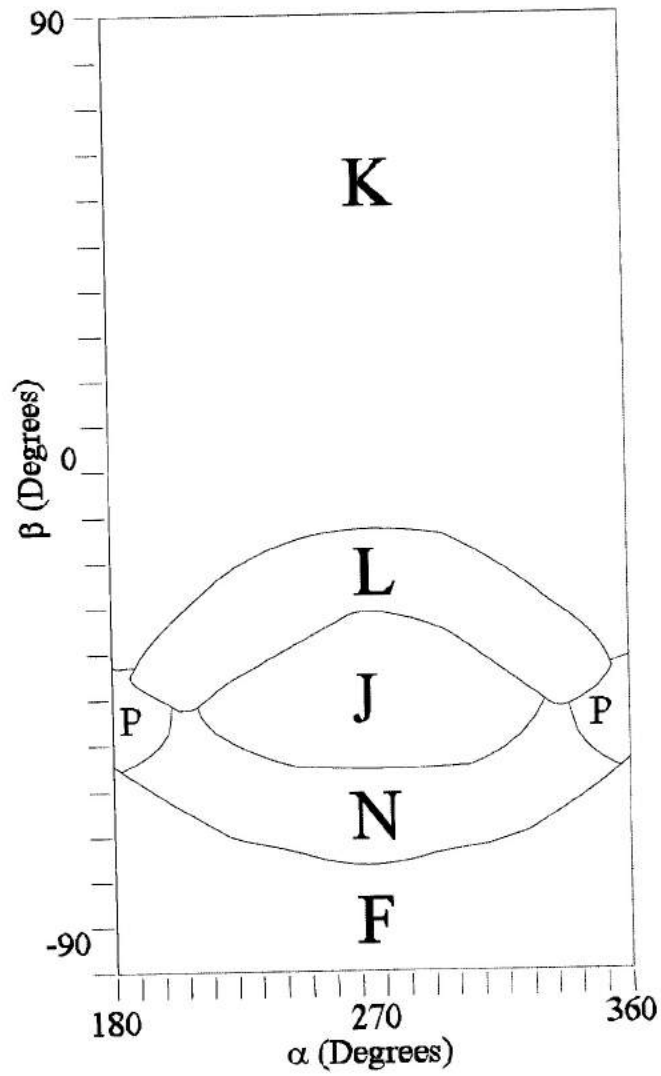


Figura 6. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $v_p=3.0$ .

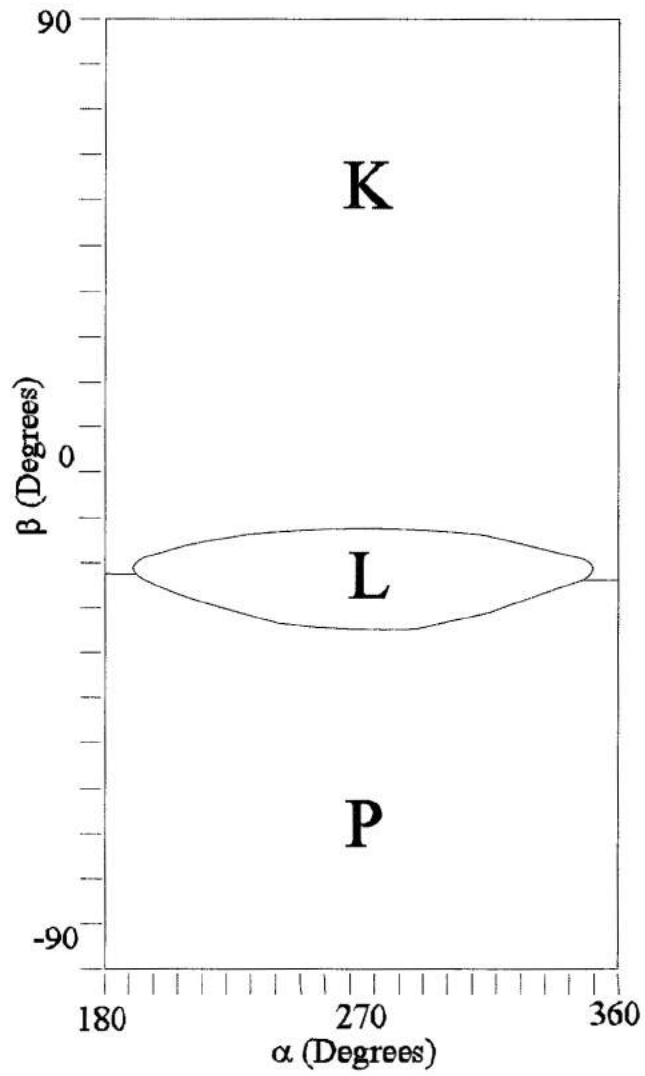


Figura 7. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $\nu_p=4.2$ .

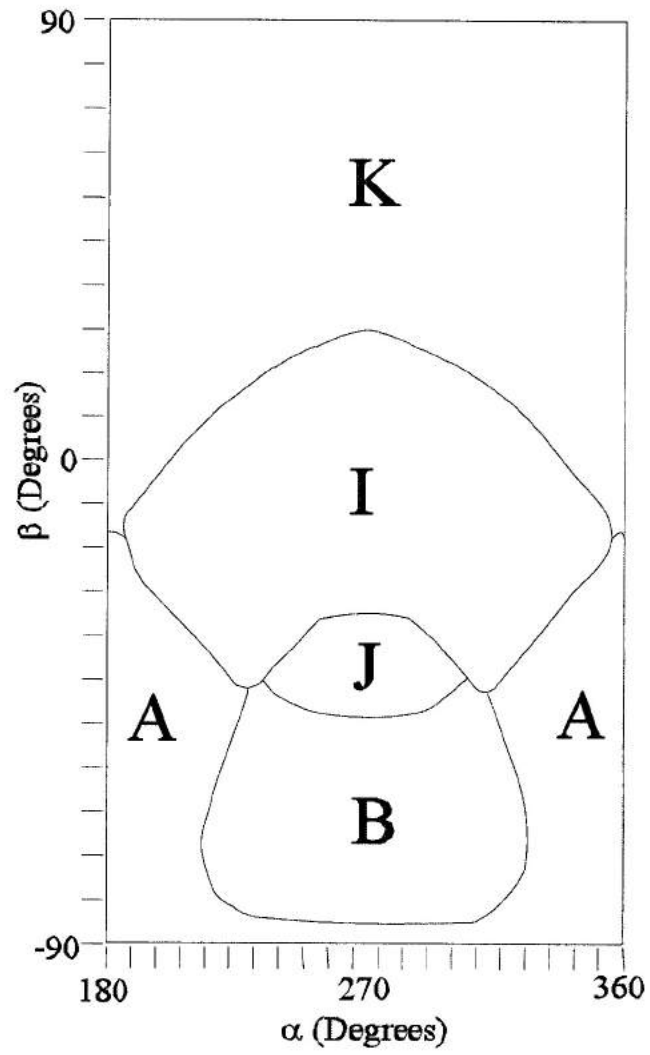


Figura 8. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $v_p=2.2$ .

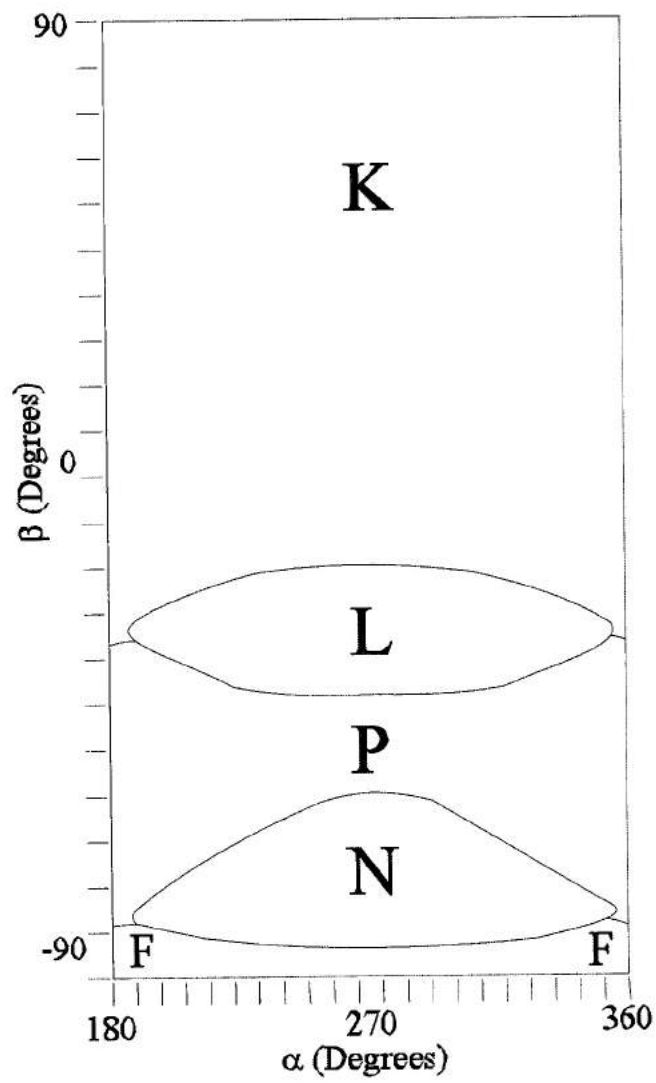


Figura 9. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $v_p=3.0$ .

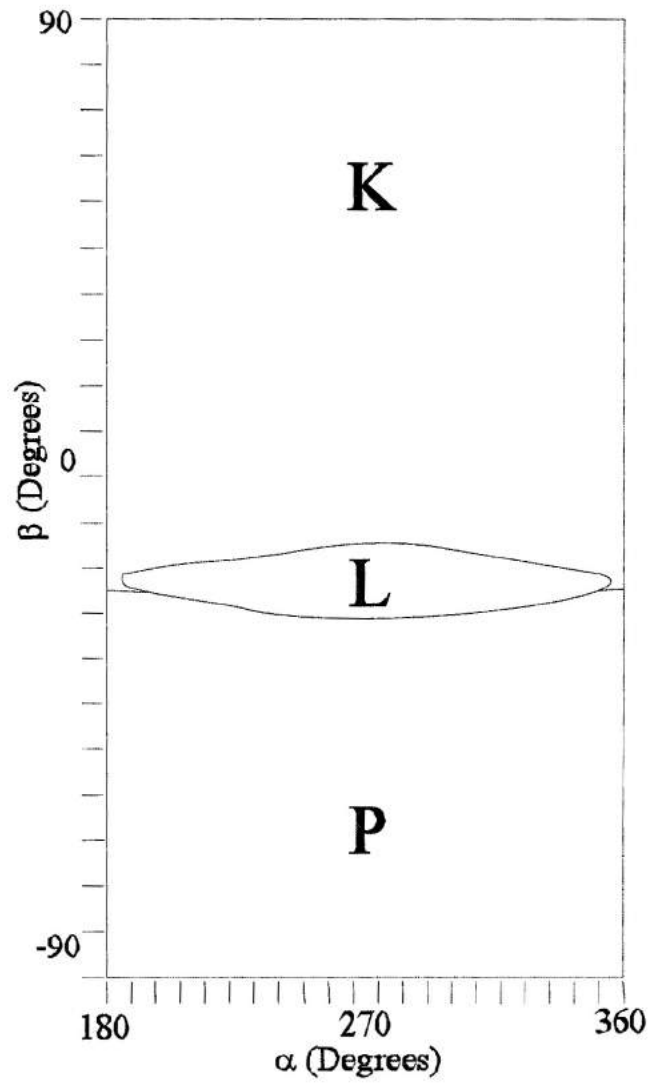


Figura 10. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $v_p=4.2$ .



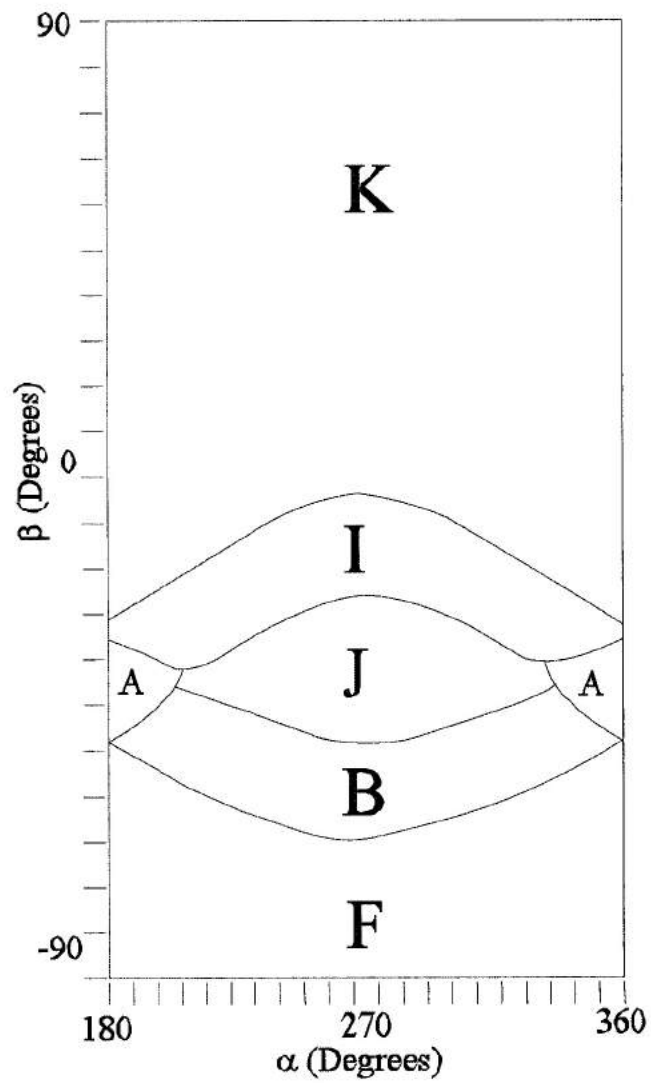


Figura 11. Simulação para  $r_p=0.009$  e  $v_p=2.2$ .

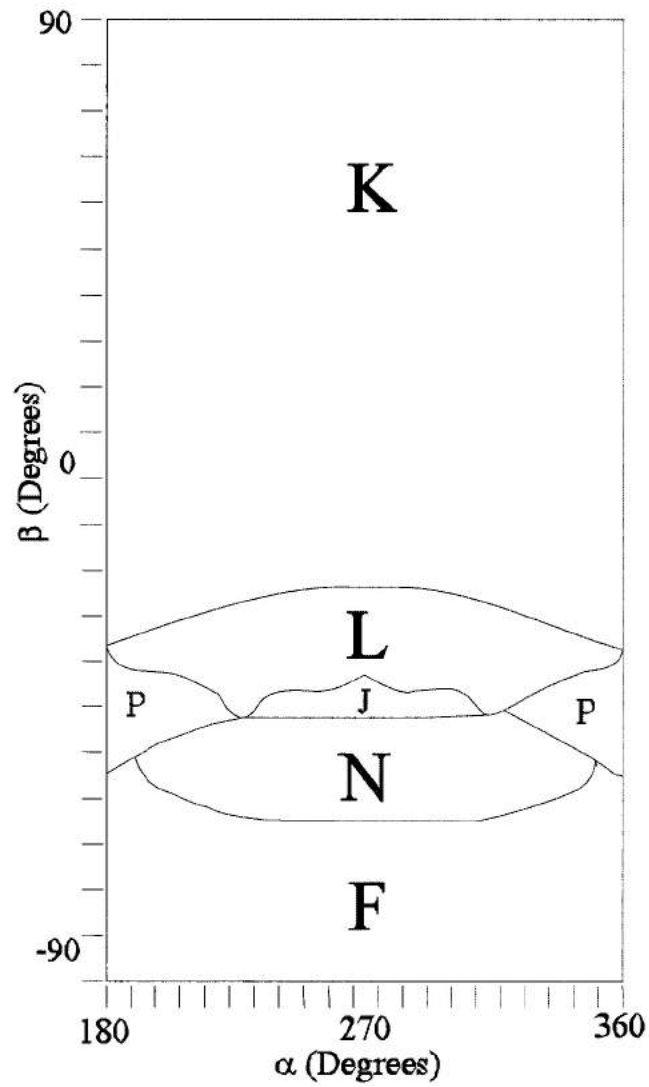


Figura 12. Simulação para  $r_p=0.009$  e  $v_p=2.6$ .

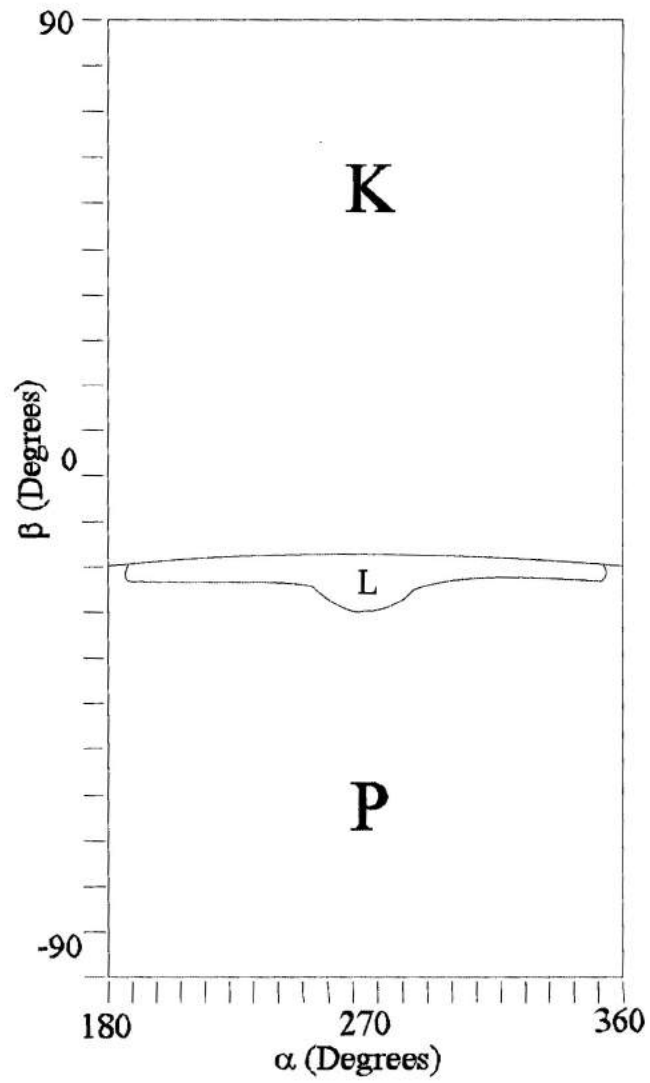


Figura 12. Simulação para  $r_p=0.009$  e  $v_p=4.2$ .

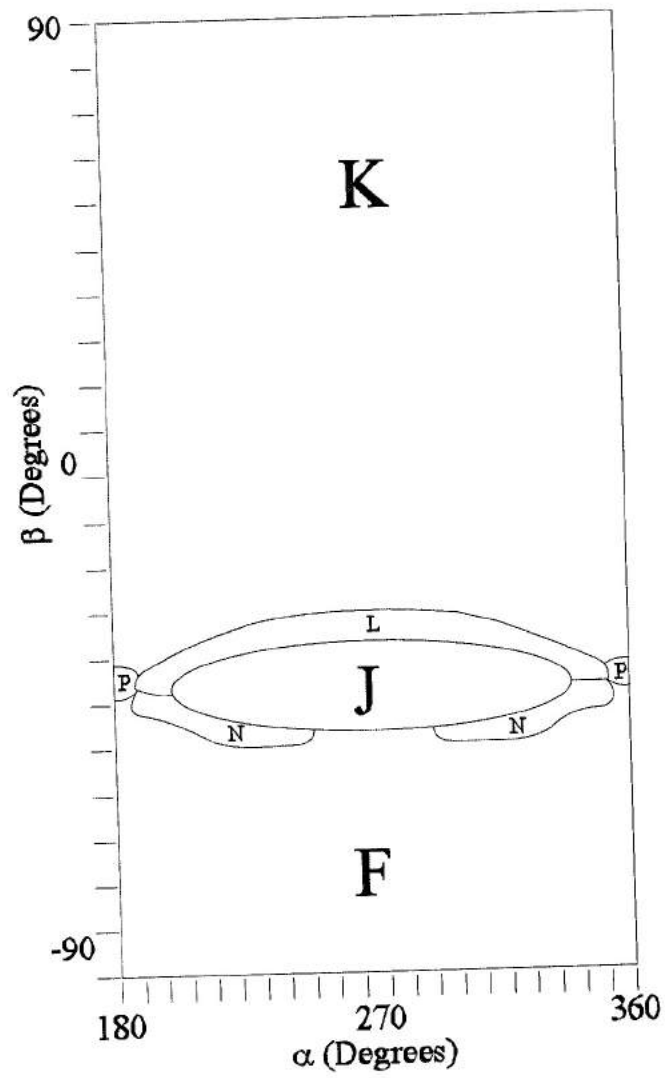


Figura 13. Simulação para  $r_p=0.015$  e  $v_p=2.2$ .

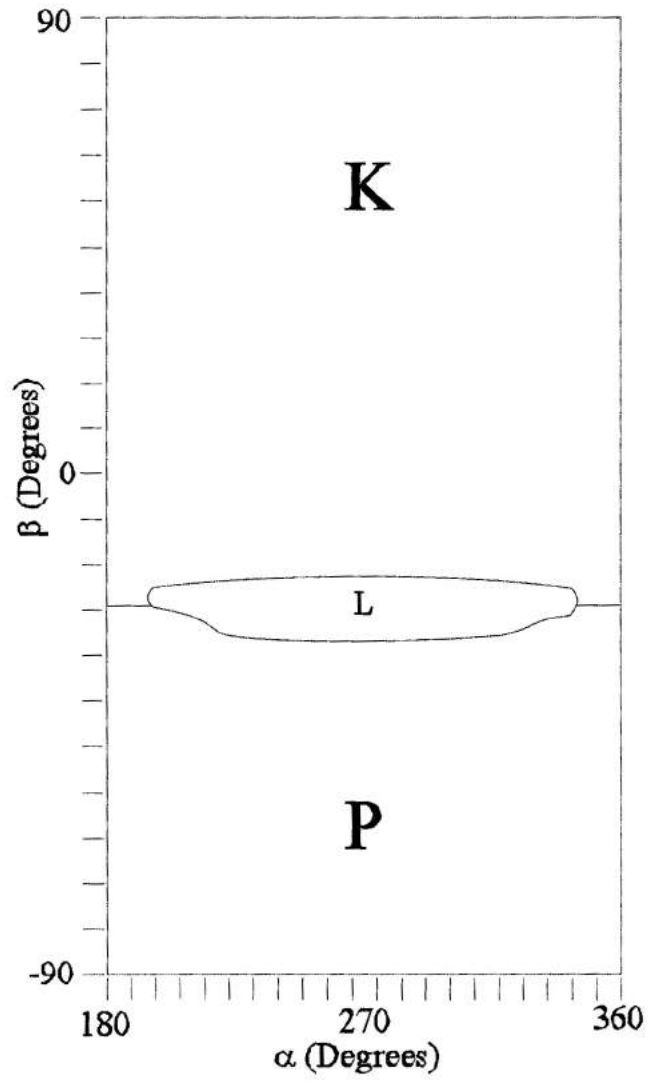


Figura 14. Simulação para  $r_p=0.015$  e  $v_p=3.0$ .

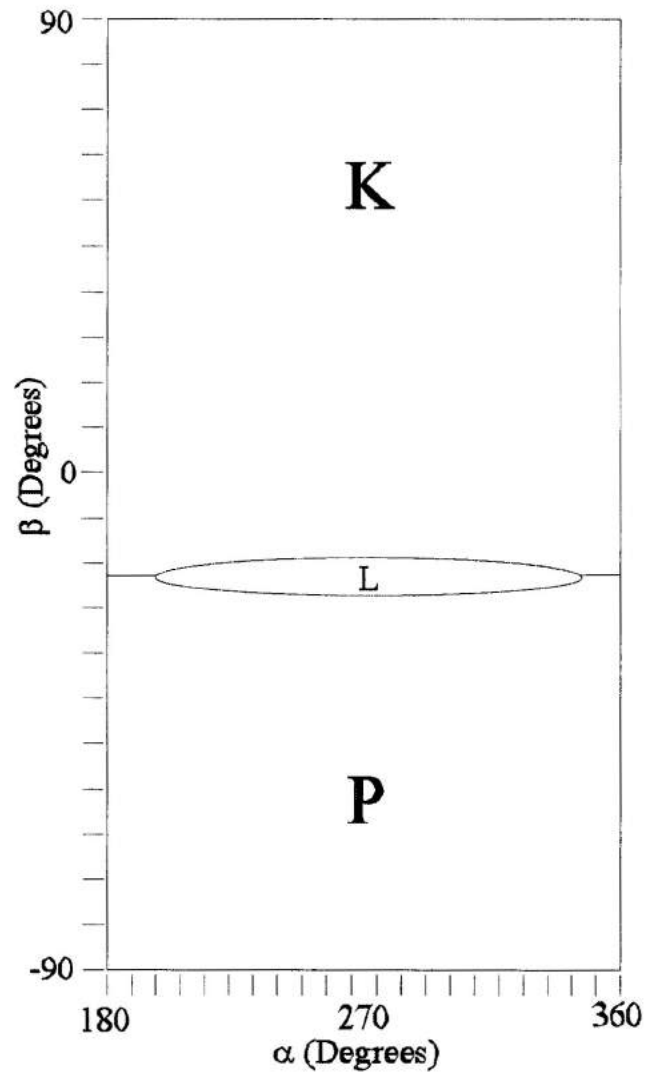


Figura 15. Simulação para  $r_p=0.015$  e  $v_p=4.2$ .

7.2. Simulações para cometas que se aproximam de Saturno.

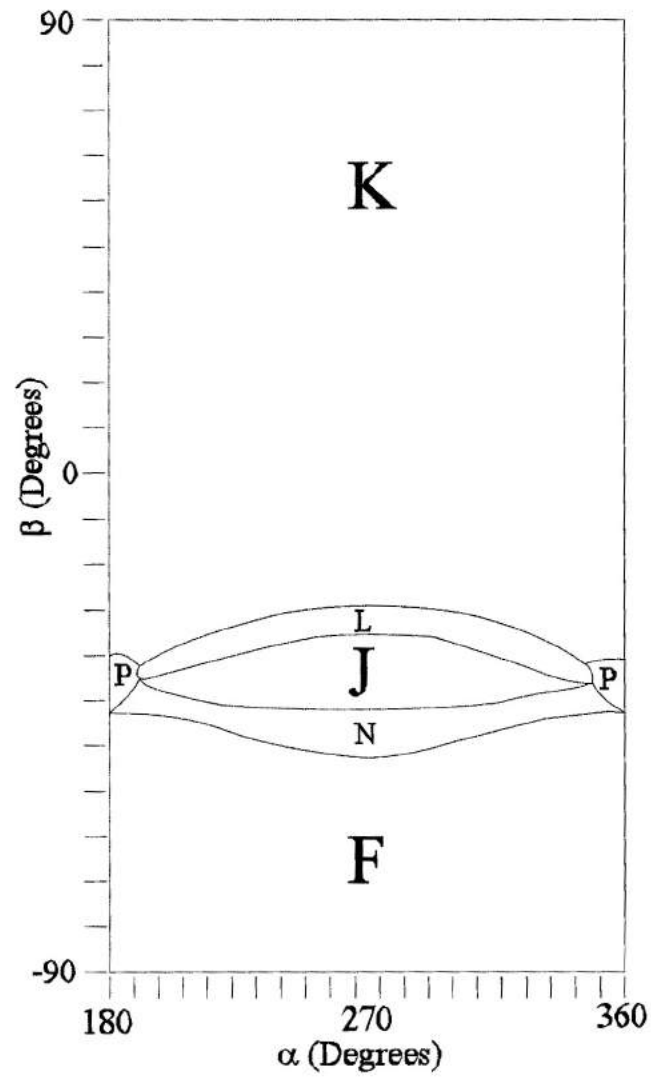


Figura 16. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $v_p=2.2$ .

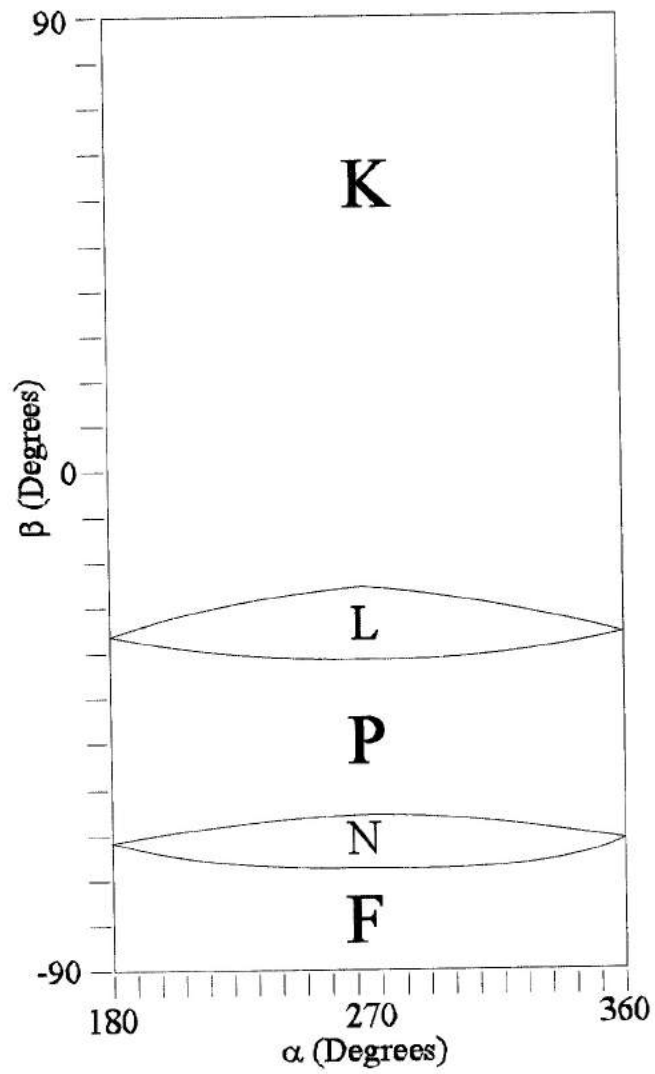


Figura 17. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $v_p=2.6$ .



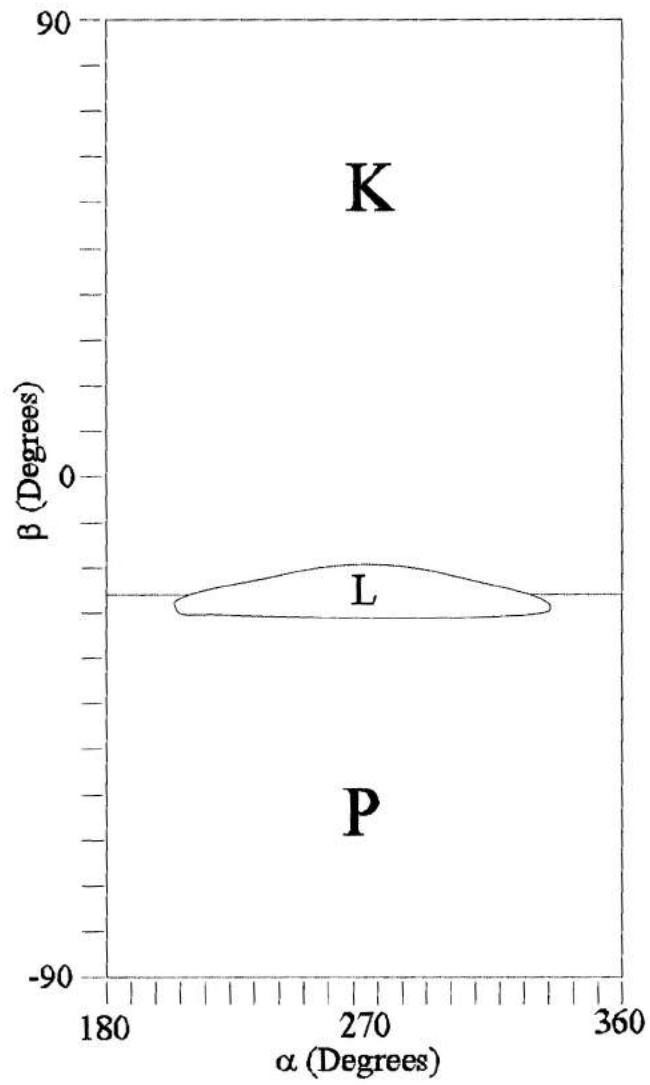


Figura 18. Simulação para  $r_p=0.00476$  e  $v_p=3.4$ .

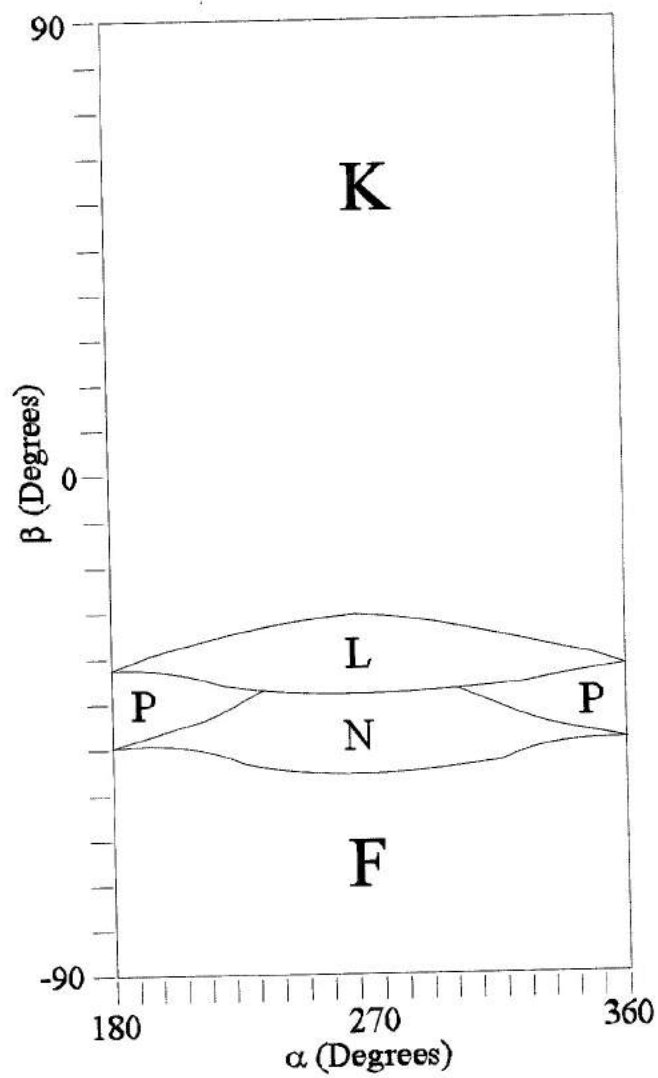


Figura 19. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $v_p=2.2$ .

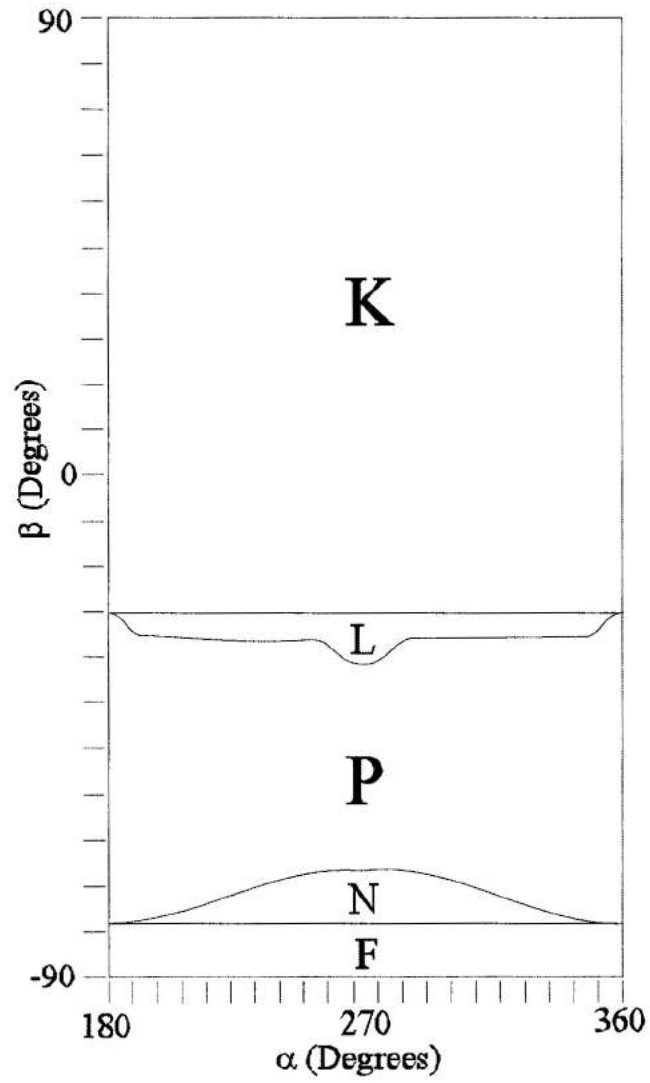


Figura 20. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $\nu_p=2.6$ .

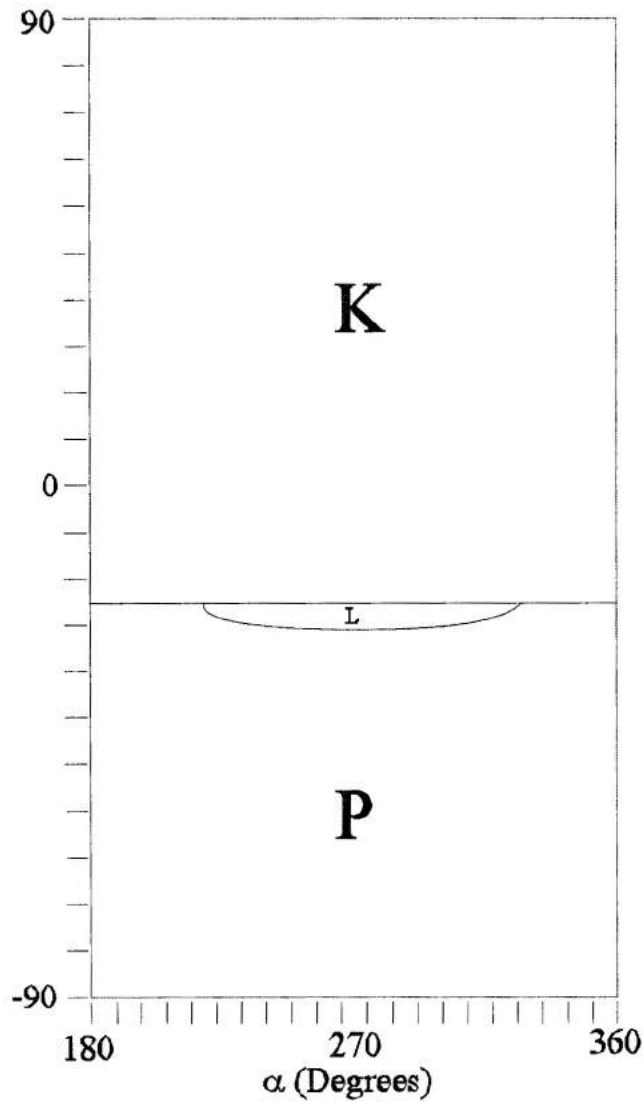


Figura 21. Simulação para  $r_p=0.00675$  e  $v_p=3.4$ .

## 5. O PROBLEMA CIRCULAR DOS TRÊS CORPOS EM TRÊS DIMENSÕES

Existe uma série de sistemas de referência que podem ser usados para descrever o problema dos três corpos em três dimensões. Neste trabalho admitimos o sistema rotacional.

No sistema de referência rotacional, a origem é o centro de massa dos dois corpos primários (Sol e Júpiter ou Saturno). O eixo horizontal  $x$  é a linha que liga os dois corpos primários em qualquer instante. Este sistema rotaciona com uma velocidade angular variável de uma maneira em que os corpos primários estão sempre no eixo horizontal. O eixo vertical  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$ . Nesse sistema as posições dos primários são  $x_1 = -\mu$ ,  $x_2 = 1 - \mu$ , e  $y_1 = y_2 = 0$ .

No sistema rotacional as equações de movimento de um cometa são as seguintes:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3} \quad (8)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \left( \frac{y}{r_1^3} \right) - \mu \left( \frac{y}{r_2^3} \right) \quad (9)$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \left( \frac{z}{r_1^3} \right) - \mu \left( \frac{z}{r_2^3} \right) \quad (10)$$

onde,  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias entre de  $M_1$  e  $M_2$ .

## 6. CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS

Os resultados das simulações são representados na forma de letras para determinar condições em que o cometa passa pelo perigeu em relação aos planetas Júpiter e Saturno.

A partir do momento em que o cometa sofre a influência gravitacional de um planeta seus parâmetros orbitais podem ser alterados, sendo assim associamos cada alteração a uma letra de A a P (Tabela 1).

Após serem classificadas todas as possíveis alterações de órbita, o próximo passo é associar cada letra a uma determinada posição em um diagrama bi-dimensional, o qual possui o ângulo  $\alpha$  (em graus) no eixo horizontal e o ângulo  $\beta$  (em graus) no eixo vertical. Cada diagrama é feito para valores fixos de  $r_p$  e  $v_p$ .

# SIMULAÇÃO DE COMETAS CAPTURADOS UTILIZANDO O MODELO OK

## RESTRITO CIRCULAR DE TRÊS CORPOS

Rubens Domicildes Neto (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: mec00074@feg.unesp.br

Dr. Antonio Fernando Bertachini de A. Prado (DMC/INPE, Orientador)

E-mail: prado@dem.inpe.br

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes (DMA/UNESP, Orientador)

E-mail: rodolpho@feg.unesp.br

### RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar as possíveis alterações de órbita sofridas por um cometa devido as forças gravitacionais causadas por planetas e estrelas. Para simular as alterações orbitais que um cometa sofre utilizamos o caso restrito circular do problema dos três corpos, como modelo matemático. Com o intuito de simular capturas de cometas devido às perturbações causadas pelo Sol e por um planeta (Júpiter ou Saturno), utilizamos a técnica de swing-by, essa técnica consiste em simular a passagem de um cometa próximo a um planeta avaliando-se as possíveis variações de energia sofridas pelo cometa. A função principal de se realizar simulações através da técnica de swing-by é comparar as possíveis condições iniciais que um cometa deve se aproximar do planeta para ser capturado ou sofrer um escape em relação ao sistema solar. Para determinar uma condição inicial são necessários cinco parâmetros: velocidade do cometa no perigeu em relação ao planeta (Júpiter ou Saturno); os ângulos ( $\alpha$  e  $\beta$ ), os quais determinam a direção do cometa no perigeu em relação ao planeta utilizando-se três dimensões; a distância entre o cometa e o centro do planeta no momento em que o cometa se encontra no perigeu em relação ao planeta e o ângulo entre o vetor velocidade no perigeu e a intersecção entre o plano horizontal que passa pelo perigeu e o plano perpendicular no perigeu que encontra a velocidade do cometa. Os resultados das simulações são representados na forma de diagramas compostos por letras, as quais classificam o tipo de alteração orbital sofrida pelo cometa, com esses diagramas podemos obter para determinadas condições o tipo de alteração orbital sofrida pelo cometa.