



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-10087-PRE/5632

**EVOLUÇÃO ORBITAL DE ASTERÓIDES QUE SOFREM  
GRANDES APROXIMAÇÕES: O CASO VESTA-MAGNYA**

Rosana Aparecida Nogueira de Araújo\*  
Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

\*FEG-UNESP

Seminário de Iniciação Científica do INPE – SICINPE 2003.

INPE  
São José dos Campos  
2003

## APROXIMAÇÕES: O CASO VESTA-MAGNYA

Rosana Aparecida Nogueira de Araújo- FEG-UNESP

[fis00041@feg.unesp.br](mailto:fis00041@feg.unesp.br)

Antônio F. Bertachini de A. Prado- INPE

[prado@dem.inpe.br](mailto:prado@dem.inpe.br)

## RESUMO

Entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter, existe uma grande concentração de asteróides, a qual chamamos de *cinturão de asteróides*. As diversas colisões entre esses asteróides geram as conhecidas *famílias de asteróides* que apresentam elementos orbitais próprios similares, assim como perfis espectrais muito próximos entre si, reforçando a idéia de que a formação de uma família ocorre por disrupção de um corpo maior.

Por outro lado, existe um efeito de mistura entre as diversas classes de asteróides ocasionadas pelos encontros próximos entre eles, que essencialmente não é levado em consideração nos estudos de distribuição em função das classes ou das famílias de asteróide.

Recentemente foi verificado que o asteróide Magnya (1459) tem características similares aos corpos da família do asteróide Vesta (4), porém, ocupando uma localização orbital (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação) muito distante em comparação com os outros membros desta família. Estudos dinâmicos considerando os efeitos de uma colisão ou as regiões caóticas do espaço de fase mostraram-se inadequadas para justificar tal localização.

Neste trabalho nos propomos a testar uma possível explicação para a mudança de órbita do asteróide Magnya, que pertence à família do asteróide Vesta, e que por algum motivo passou dessa órbita próxima à de Vesta para uma outra muito distante.

Buscamos essa explicação, levando em consideração os efeitos de uma grande aproximação do Magnya com Vesta. A metodologia que foi usada envolve uma abordagem analítica considerando a técnica de "swing-by", bem como uma abordagem numérica do problema restrito de três corpos.

Utilizando essa metodologia, calculamos a variação de energia necessária para que houvesse tal mudança de órbita, e quais as possíveis variações que teriam ocorrido na eventualidade destes encontros próximos. Os valores encontrados foram, que a variação de energia necessária seria próxima a  $46,6 \text{ Km}^2/\text{s}^2$ , enquanto que ao calcular o valor de variação de energia através dos parâmetros que descrevem o swing-by encontramos valores máximos entre  $3,0$  e  $5,0 \text{ Km}^2/\text{s}^2$ .

Este resultado nos leva a concluir que tal mudança de órbita não foi ocasionada apenas por uma passagem muito próxima do Magnya com Vesta, ou seja, essa mudança de órbita não foi ocasionada apenas pelo swing-by, mas que o Magnya sofreu outras influências que proporcionaram tal mudança.

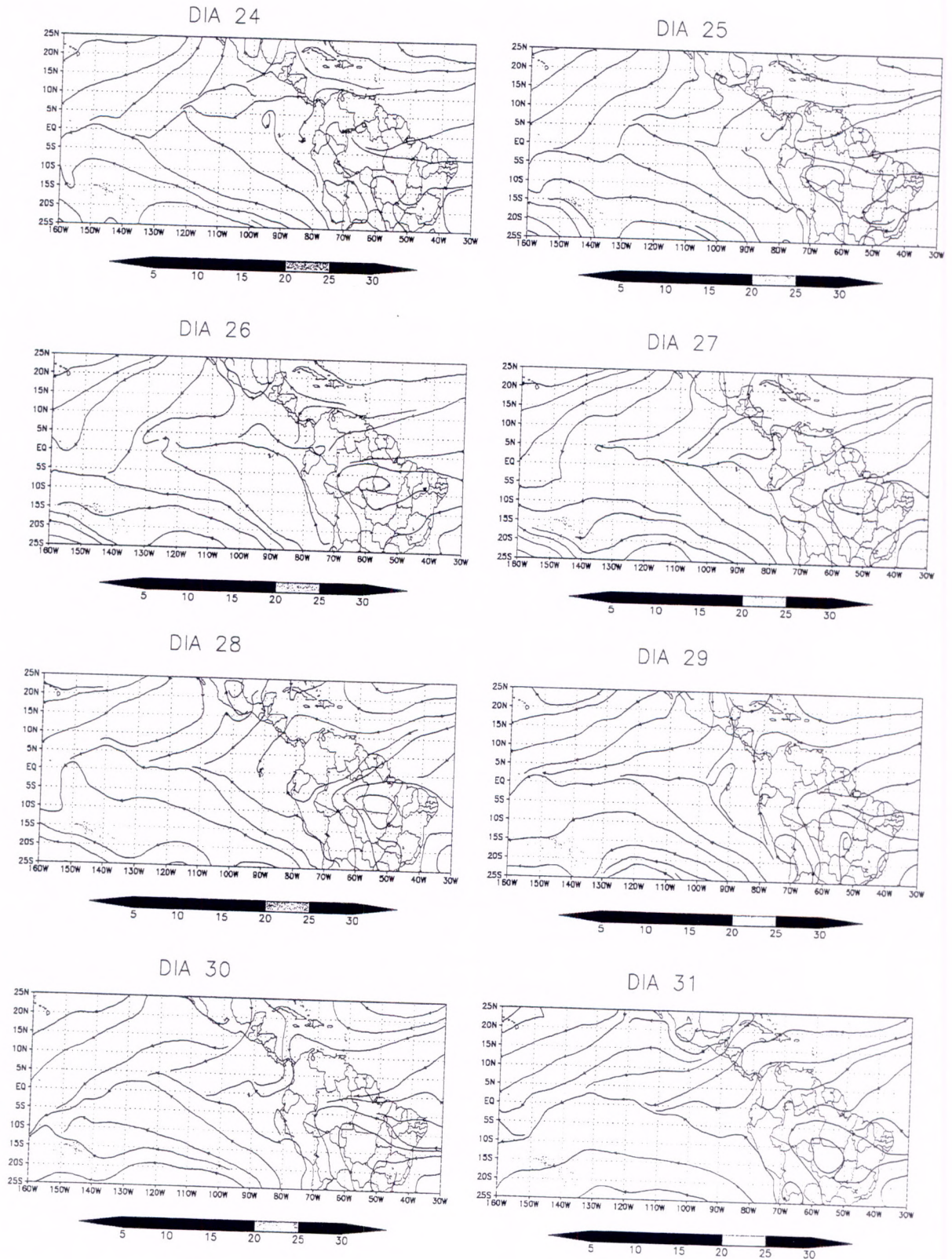


Fig. 3.7 – Campo de vento (linhas de corrente) em 925 hPa para o Episódio El Niño (24 a 31 de dezembro de 1997)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **EVOLUÇÃO ORBITAL DE ASTERÓIDES QUE SOFREM GRANDES APROXIMAÇÕES: O CASO VESTA-MAGNYA**

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
(PIBIC/CNPq/INPE)

Rosana Ap.<sup>da</sup> Nogueira de Araújo (FEG-UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [fis00041@feg.unesp.br](mailto:fis00041@feg.unesp.br)

Dr. Antônio F. Beratchini de A. Prado (INPE, Orientador)  
E-mail: [prado@dem.inpe.br](mailto:prado@dem.inpe.br)

### COLABORADORES

Dr. Othon Cabo Winter (FEG-UNESP)

Maio de 2003

## SUMÁRIO

**INTRODUÇÃO:** (INTRODUÇÃO, OBJETIVOS DO TRABALHO)

### **CAPÍTULO 1 –INTRODUÇÃO TEÓRICA**

- 1.1 A manobra assistida por gravidade (manobra de *swing-by*)
- 1.2 Descrição matemática do *swing-by*
- 1.3 Mudança de órbita devido ao *swing-by*

### **CAPÍTULO 2 –O caso Vesta- Magnya**

- 2.1 Dados dos asteroídes
- 2.2 Cálculo da variação de energia
- 2.3 Cálculo da variação de momento angular

### **CAPÍTULO 3 – RESULTADOS E ANÁLISES**

- 3.1 Anexo I- programa no software Mathematica
- 3.2 Anexo II- tabelas de resultados

### **CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**

## Introdução

Entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter, existe uma grande concentração de asteróides, a qual chamamos de *cinturão de asteróides*. As diversas colisões entre esses asteróides geram as conhecidas *famílias de asteróides* que apresentam elementos orbitais próprios similares, assim como perfis espectrais muito próximos entre si, reforçando a idéia de que a formação de uma família ocorre por disrupção de um corpo maior.

Por outro lado, existe um efeito de mistura entre as diversas classes de asteróides ocasionadas pelos encontros próximos entre eles, que essencialmente não é levado em consideração nos estudos de distribuição em função das classes ou das famílias de asteróide.

Recentemente foi verificado que o asteróide Magnya (1459) tem características similares aos corpos da família do asteróide Vesta (4), porém, ocupando uma localização orbital (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação) muito distante em comparação com os outros membros desta família. Estudos dinâmicos considerando os efeitos de uma colisão ou as regiões caóticas do espaço de fase mostraram-se inadequadas para justificar tal localização.

Neste trabalho é proposto levar em consideração os efeitos de uma grande aproximação do asteróide Magnya com o asteróide Vesta para explicar a sua distante localização orbital. A metodologia a ser abordada envolve uma abordagem analítica considerando a técnica de "*swing-by*", bem como uma abordagem numérica do problema restrito de três corpos.

O trabalho foi desenvolvido da seguinte forma: na primeira parte, foi feito um estudo teórico sobre a técnica da manobra assistida por gravidade (*swing-by*). Este estudo teórico inclui a parte matemática que descreve a mudança de órbita devido ao à manobra (seções 1.2 e 1.3). A seguir, com alguns dados dos asteróides que nos propomos estudar (seção 2.1) foi feito o cálculo da variação de energia e do momento angular, quando da mudança da órbita.

Na segunda parte do trabalho, foi desenvolvido um programa no software MATHEMATICA que permitiu o cálculo dos parâmetros que descrevem o *swing-by*, bem como da máxima variação de energia e momento angular obtida através dessa manobra.

## Capítulo 1- Introdução teórica.

### 1.1-A manobra assistida por gravidade (manobra de swing-by).

A manobra assistida por gravidade, ou manobra de swing-by tem sua importância justificada pelo enorme número de sua aplicação em missões que voaram ou irão voar usando esta técnica. Um exemplo bem sucedido foi o das missões Voyager, que voaram para os planetas exteriores (a partir de Júpiter) do sistema solar com o uso de swing-bys sucessivos nos planetas visitados, onde ganharam energia.

A mecânica celeste do swing-by já é conhecida pelos astrônomos há cerca de 150 anos. O mecanismo completo do swing-by foi entendido por Laplace, e posteriormente algumas equações analíticas para os efeitos do swing-by foram derivadas por pesquisadores, que produziram resultados numéricos neste tópico.

A manobra de swing-by também mostra ser de grande importância em missões espaciais devido à economia de combustível que esta proporciona, causando grande impacto no custo final da missão. A redução de custos é atualmente uma das grandes preocupações dos programas espaciais do mundo.

A seguir, será mostrada toda a parte matemática, bem como os parâmetros envolvidos na manobra de swing-by. Será adotado o mesmo procedimento de Prado (2001).

### 1.2-Descrição Matemática do Swing-by.

O estudo de uma missão total pode ser simplificado, se dividida em várias etapas, e em cada uma dessas etapas o modelo mais simples de dois corpos for utilizado. Vamos considerar que o sistema é formado por três corpos sendo eles:  $M_1$ , um corpo massivo no centro do sistema cartesiano;  $M_2$ , um corpo menor em uma órbita Kepleriana em torno de  $M_1$ ; e  $M_3$ , um corpo com massa infinitesimal ou uma partícula que está viajando em uma órbita genérica ao redor de  $M_1$ , quando faz um encontro com  $M_2$ , alterando assim a sua órbita. Esse fenômeno é chamado de manobra de swing-by, e de acordo com estas hipóteses, as órbitas de  $M_1$  e de  $M_2$  não se alteram. A figura abaixo descreve o evento e mostra algumas das variáveis envolvidas.

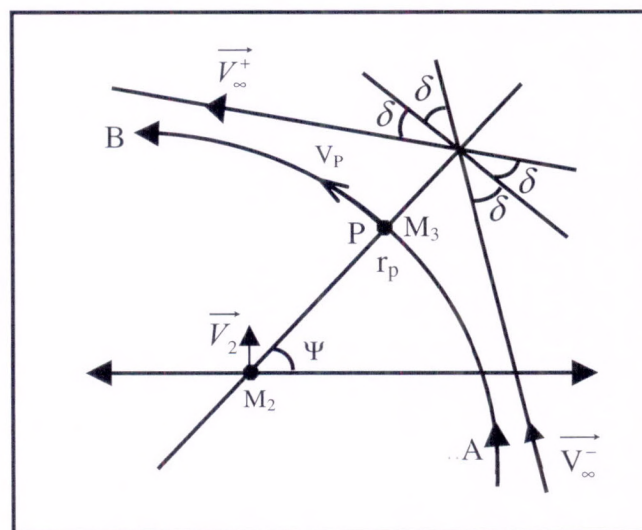


Figura 1. Descrição geométrica da técnica swing-by.

Observando a figura 1, percebemos que algumas variáveis específicas são envolvidas na manobra.  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_\infty$  são respectivamente as velocidades do corpo  $M_2$  e  $M_3$ . As duas velocidades são em relação ao corpo  $M_1$ , que está no centro do sistema cartesiano.

Antes do encontro com o corpo  $M_2$ , o corpo  $M_3$  tem uma velocidade relativa ao  $M_2$ , a qual representamos por  $\vec{V}_\infty^-$ . Após o encontro, o corpo  $M_3$  tem a direção de sua velocidade alterada, mas a magnitude se mantém constante. Essa nova direção do vetor velocidade é representada por  $\vec{V}_\infty^+$ .

Como é possível observar na figura 1, os vetores velocidades formam entre si um ângulo  $2\delta$ , ou seja,  $\delta$  é a metade do ângulo de curvatura.

E por fim, outras duas variáveis envolvidas são:  $r_p$ , que é a distância do encontro mais próximo (ponto P), e o ângulo  $\Psi$ , que é o ângulo formado entre a linha do periapse (linha que conecta  $M_2$  a P) e a linha  $M_1$ - $M_2$ .

Assim, podemos concluir que os três parâmetros que definem o fenômeno de mudança de órbitas devido ao swing-by são: a magnitude da velocidade de  $M_3$ , no infinito, antes ou depois da passagem próxima ( $V_\infty$ ), a distância do periapse ( $r_p$ ) e o ângulo de aproximação ( $\Psi$ ).

Uma expressão para  $\delta$  pode ser obtida usando, em primeiro lugar, a teoria das órbitas hiperbólicas, e é facilmente encontrada na literatura sendo dada por:

$$\text{sen}(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}}$$

onde  $\mu_2 = M_2 = Gm_2$ , sendo G a constante universal de gravitação.

Utilizando o método aproximado conhecido na literatura como patched conics (método da aproximação por cônicas) as seguintes etapas para uma manobra de swing-by completa:

i) Na primeira etapa, o efeito gravitacional de  $M_2$  é desconsiderado, e o movimento de  $M_3$  em torno de  $M_1$  é tomado como sendo uma órbita Kleperiana;

ii) Na segunda etapa supõe-se que  $M_3$  entra na esfera de influência de  $M_2$ . Então, a velocidade  $\vec{V}_\infty^-$  é calculada a partir da equação abaixo:

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_i - \vec{V}_2$$

A velocidade  $\vec{V}_\infty^+$ , que é a velocidade de  $M_3$  no instante que ele cruza a esfera de influência de  $M_2$  e a abandona para retornar a uma órbita em torno de  $M_1$ , é dada por:  $\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_0 - \vec{V}_2$

iii) O swing-by está completo quando o corpo  $m_3$  atinge uma nova órbita ao redor do Sol.

Essa nova órbita de  $M_3$  apresenta diferenças em relação à sua órbita anterior. O estudo dessas diferenças será feito a seguir. A primeira quantidade importante que pode ser calculada é a variação de velocidade  $\Delta\vec{V} = \vec{V}_0 - \vec{V}_i$ , que representa as diferenças entre as velocidades inerciais antes e depois do swing-by. A partir de um diagrama de vetores de velocidades envolvidas no swing-by (Figura 2), é possível provar que tal variação é dada por:

$$\Delta V = |\Delta\vec{V}| = 2|\vec{V}_\infty| \text{sen}(\delta) = 2V_\infty \text{sen}(\delta) \quad (1)$$

e que  $\Delta\vec{V}$  faz um ângulo  $\Psi + 180^\circ$  com a linha que une  $M_1$  e  $M_2$ .



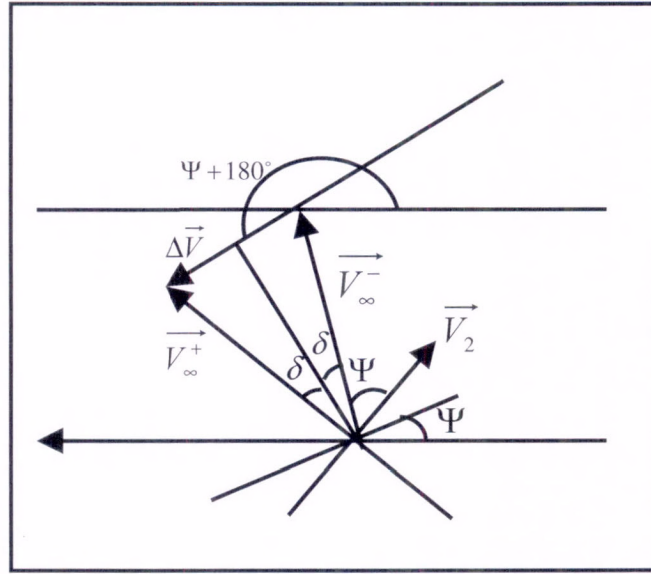


Figura2. Vetores velocidade envolvidos no swing-by.

As componentes para o incremento de velocidades podem ser obtidas a partir dessa geometria; são elas:

$$\Delta \dot{X} = -2V_{\infty} \text{sen}(\delta) \cos(\Psi)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_{\infty} \text{sen}(\delta) \text{sen}(\Psi)$$

A segunda quantidade importante a ser obtida é a variação do momento angular C. Partindo de sua definição, é possível obter a expressão  $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$ . Combinando esse resultado com a expressão de  $\Delta \dot{Y}$  têm-se:

$$\omega \Delta C = -2V_2 V_{\infty} \text{sen}(\delta) \text{sen}(\Psi) \quad (2)$$

A terceira e última quantidade derivada é a variação de energia, o que pode ser feito, subtraindo a energia após e antes do encontro, sendo assim podemos dizer que:

$$E_+ = \frac{1}{2} \left[ \left( \dot{X} + \Delta \dot{X} \right)^2 - \left( \dot{Y} + \Delta \dot{Y} \right)^2 \right]$$

$$E_- = \frac{1}{2} \left( \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right)$$

Realizando a subtração, temos:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_{\infty} \text{sen}(\delta) [V_{\infty} \text{sen}(\delta) - (\dot{X} \cos(\Psi) - \dot{Y} \text{sen}(\Psi))]$$

Simplificando a equação acima, obtemos a relação para o cálculo da variação final de energia, que é dada por:

$$\Delta E = -2V_2 V_{\infty} \text{sen}(\delta) \text{sen}(\Psi) \quad (3)$$

Observando a equação para a variação da energia, chega-se a algumas conclusões importantes. Os parâmetros  $|\vec{V}_\infty|$  e  $|\vec{V}_2|$  são magnitudes de vetores e portanto são quantidades positivas. Da mesma forma,  $\text{sen}(\delta)$  também é positivo, isto porque  $0^\circ < \delta < 90^\circ$ . Assim, o único parâmetro que afeta o sinal de  $\Delta E$  é o  $\text{sen}(\Psi)$ .

Para valores de  $\Psi$  entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , a variação de energia é negativa (decrece em energia) e, para valores de  $\Psi$  entre  $180^\circ$  e  $360^\circ$ , a variação de energia é positiva (aumenta em energia). Sendo assim:

- Para  $0^\circ < \Psi < 180^\circ$  (o swing-by ocorre na frente de  $M_2$ ), há um decréscimo na energia de  $M_3$  com uma perda máxima quando  $\Psi$  for igual a  $90^\circ$  ( $\Delta \vec{V}$  oposto a  $\vec{V}_2$ ).

- Para  $180^\circ < \Psi < 360^\circ$  (o swing-by ocorre atrás de  $M_2$ ), há um aumento na energia de  $M_3$ , com um ganho máximo quando  $\Psi$  for igual a  $270^\circ$  ( $\Delta \vec{V}$  na direção de  $\vec{V}_2$ ).

A figura 2, mostra como é possível obter um aumento de velocidade, e portanto, de energia a partir de uma passagem perto de um corpo celeste.

### 1.3- Mudança de órbita devido ao swing-by.

O swing-by é uma manobra que acontece quando um corpo  $M_3$  (veículo espacial, asteróide, etc...) passa próximo a um corpo de massa maior  $M_2$  (planeta, por exemplo) o qual orbita o corpo principal  $M_1$  (ex: Sol), e tem assim sua trajetória alterada em relação ao corpo de massa maior.

O objetivo aqui será o de calcular a nova trajetória, a partir da anterior e dos parâmetros que descrevem o swing-by. Vamos supor que  $M_1$  seja o Sol, que  $M_2$  é um planeta, e que  $M_3$  seja um asteróide (a figura 3 mostra as órbitas dos corpos envolvidos, assim como os pontos de encontro). Será suposto que a distância  $r_p$  pode ser controlada, mas que os parâmetros  $\Psi$  e  $|\vec{V}_\infty|$  são obtidos a partir da órbita inicial e da órbita do planeta (tomada como circular). Sendo assim, os parâmetros que descrevem o swing-by são:

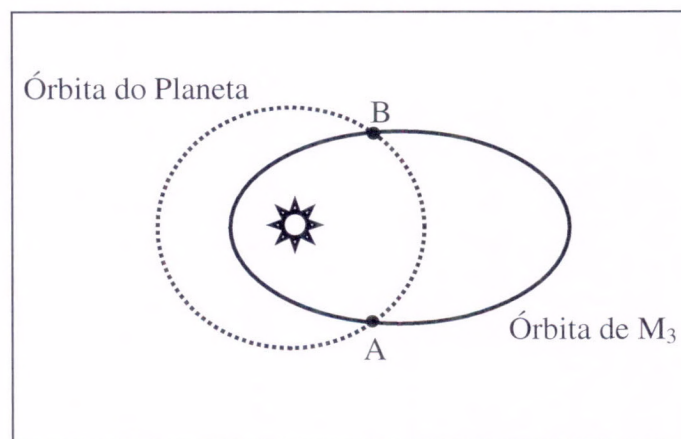


Figura 3. Órbitas envolvidas na manobra.

- *Magnitude da velocidade de  $M_3$  com relação a  $M_1$  ( $\vec{V}_i$ ).*

Nesse instante, a distância entre o asteroide e o Sol é igual à distância entre o Sol e o planeta (tomada como constante). Assim, desconsiderando o efeito gravitacional do planeta, temos:

$$|\vec{V}_i| = \sqrt{\mu_s \left( \frac{2}{r_{sp}} - \frac{1}{a} \right)} \quad \text{onde } r_{sp} \text{ é a distância planeta-Sol.}$$

- *Anomalia verdadeira de  $M_3$  no instante do encontro.*

Para calcular a anomalia verdadeira de  $M_3$ , basta utilizar a expressão  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ . Fazendo  $r = r_{sp}$ , temos:

$$r_{sp} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Da expressão acima, obtemos o ângulo  $\theta$  (anomalia verdadeira):

$$\cos\theta = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1-e^2)}{r_{sp}} - 1 \right)$$

Essa expressão fornece duas possíveis soluções (valor positivo e negativo), isso por que o encontro pode acontecer tanto no ponto A quanto no ponto B da figura 3.

- *Ângulo entre a velocidade inercial de  $M_3$  antes do encontro com o planeta e a velocidade do planeta ( $\gamma$ ).*

Esse ângulo é dado por:

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

Esse ângulo  $\gamma$  pode assumir dois valores defasados de  $180^\circ$ , isto por que a órbita pode ser tanto horária quanto anti-horária.

#### *Magnitude da velocidade de $M_3$ com relação ao planeta ( $V_\infty^-$ )*

A figura 4 ajuda a entender a soma vetorial envolvida. Conhecendo-se velocidade do planeta ( $V_2$ ) e a magnitude de  $|\vec{V}_i|$ , podemos aplicar a lei dos cossenos para obter a grandeza procurada.

Assim :

$$|\vec{V}_\infty^-| = \sqrt{V_i^2 + V_2^2 - 2V_i V_2 \cos \gamma}$$

- *Ângulo entre a velocidade inercial de  $M_3$  e a velocidade do planeta ( $\beta$ )*

Aplicando a lei dos cossenos com os lados  $V_2$  e  $V_\infty^-$ , a partir da figura 4, podemos obter o ângulo procurado.

$$V_i^2 = V_2^2 + V_\infty^{-2} - 2V_2V_\infty^- \cos \beta \quad \text{então:}$$

$$\cos \beta = -\frac{V_i^2 - V_2^2 - V_\infty^{-2}}{2V_2V_\infty^-}$$

Existem duas possibilidades para o sinal de  $\beta$ . Essas possibilidades estão relacionadas com a posição relativa entre  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_i$  (encontro ocorrido no ponto A da figura 3) ou a situação denominada  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_i$ , correspondente ao encontro no ponto B da figura 3.

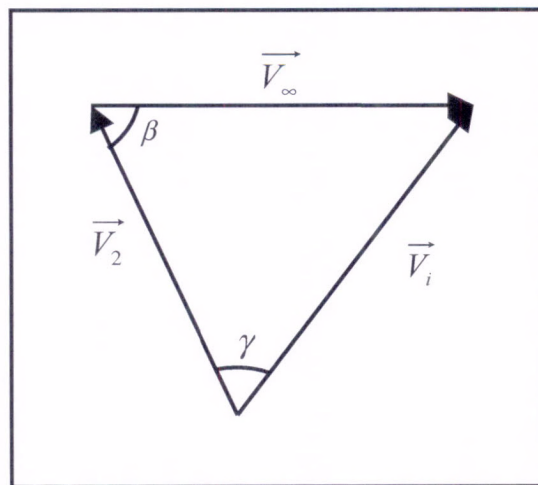


Figura 4. Soma vetorial envolvida no swing-by.

- *Ângulo de deflexão ( $\delta$ )*

Esse valor representa metade da rotação do vetor velocidade devido ao *swing-by* e isso faz com que ele esteja limitado ao primeiro quadrante (a máxima rotação é de  $180^\circ$ ) e não será necessário analisarmos quadrantes para esse valor. Porém essa rotação pode ser horária ou anti-horária. O ângulo de deflexão é dado por:

$$\text{sen}(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}}$$

- *Ângulo de aproximação ( $\Psi$ )*

O ângulo de aproximação é o ângulo entre os vetores  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_p$  no caso de uma rotação anti-horária e entre o vetor  $\vec{V}_2$  e o vetor  $-\vec{V}_p$ , no caso de uma rotação horária (onde  $\vec{V}_p$  é a velocidade no perigeu, e a rotação é sempre medida no sentido anti-horário a partir de  $\vec{V}_2$ ). A figura 5 explica essa diferença.  $L_1$  e  $L_2$