

ÓRBITAS CONGELADAS (“FROZEN ORBITS”)

Paula Cristiane Pinto Raimundo¹ (UNESP, Bolsista PIBIC/CNPq)

Dr. Helio Koiti Kuga² (DMC/INPE)

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes³ (FEG/UNESP)

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho, é desenvolver um modelo para obter de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J_5 , através de um trabalho suplementar, refazendo-se o cálculo e incluindo tal perturbação. Os termos ímpares, que causam efeitos de longo período, dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”) cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1 (“China Brazil Earth Resources Satellite”). Tais órbitas mantêm (ou tentam manter) o perigeu e a excentricidade da órbita constantes, de forma que para uma dada latitude o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando os usuários através dessa regularidade. O desenvolvimento deste modelo permitirá obter previsões mais precisas para a evolução da órbita do CBERS-1 e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS). A solução dada por Brouwer em 1959 apresenta expressões analíticas explícitas, como função do tempo, para a variação dos elementos orbitais clássicos (a , e , i , ω , Ω , τ). Isto permite efetuar com certa facilidade, para diversos tipos de órbitas e condições iniciais, a análise sobre o comportamento temporal destes elementos keplerianos, bem como obter ordens de grandeza para as perturbações devidas ao geopotencial. Tais elementos keplerianos não são constantes no tempo devido aos vários efeitos perturbadores (distribuição não uniforme de massa da Terra, arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, geopotencial, etc.). Para o desenvolvimento deste projeto foram desenvolvidas as seguintes análises: Determinação de Órbitas (Problema Direto e Problema Inverso); Geopotencial; Introdução ao Problema Restrito de Três Corpos; Método da Variação das Constantes; Equações de Lagrange; Perturbações Seculares, de longo e de curto período; e Noções sobre a Teoria de Brouwer. Neste trabalho, foram desenvolvidos analiticamente os termos das perturbações de longo período até J_5 , através da manipulação algébrica da teoria de Brouwer. Este modelo foi codificado em computador, em linguagem Fortran. O programa foi testado para várias situações sendo confrontado com os dados existentes, fazendo-se, então, um teste da veracidade do desenvolvimento matemático. Pretende-se, após testes extensivos, validar “operacionalmente” o modelo para o satélite CBERS-1, visando tanto previsões orbitais quanto previsão de manobras, no Centro de Controle do INPE.

¹ Aluna do Curso de Licenciatura Plena em Física, UNESP/FEG – Campus de Guaratinguetá.

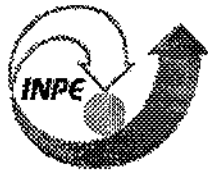
E-mail: paulacriz@hotmail.com

² Orientador, Tecnologista Senior da Divisão de Mecânica Espacial e Controle, INPE.

E-mail: bkk@dem.inpe.br

³ Co-orientador, Prof. Dr. da UNESP/FEG – Campus de Guaratinguetá.

E-Mail: rodolpho@feg.unesp.br



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

RELATÓRIO PARCIAL
ÓRBITAS CONGELADAS
(“FROZEN ORBITS”)

Bolsa PIBIC de Iniciação Científica

Bolsista: Paula Cristiane Pinto Raimundo, UNESP

Orientadores: Dr. Helio Koiti Kuga, INPE

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, FEG/UNESP

INPE
São José dos Campos
Janeiro / 2002

ÍNDICE

1. Resumo Inicial do Plano de Trabalho.....	pág.2
2. Introdução.....	pág.2
3. Metodologia.....	pág.2
1. Determinação de Órbitas: Problema Direto e Problema Inverso.....	pág.3
2. Geopotencial.....	pág.3
3. Introdução ao Problema Restrito de Três Corpos.....	pág.3
4. Método da Variação das Constantes e Equações de Lagrange.....	pág.4
4. Próximas Etapas.....	pág.5
5. Referências Bibliográficas.....	pág.5

1. RESUMO INICIAL DA PESQUISA

O presente trabalho tem por principal objetivo desenvolver formas explícitas para perturbações de longo período devidas ao geopotencial que permitirão obter previsões orbitais mais precisas da evolução da órbita do satélite CBERS-1 (“China Brazil Earth Resources Satellite”) e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS). Este modelo consiste em obter de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J5.

2. INTRODUÇÃO

A solução dada por Brouwer (1959), apesar de antiga, apresenta expressões analíticas explícitas, como funções do tempo, para a variação dos elementos orbitais (a , e , i , ω , Ω e τ). Isto permite efetuar com certa facilidade, para diversos tipos de órbitas e condições iniciais, a análise sobre o comportamento temporal dos elementos orbitais bem como obter ordens de grandeza para as perturbações orbitais devidas ao geopotencial. Na solução de Brouwer aparecem de forma explícita as expressões de longo período devidas a J2 e J4. As expressões devidas a J3 e J5 também podem ser obtidas, mas com um trabalho suplementar, refazendo-se o método incluindo tais perturbações. O principal objetivo deste projeto é obter de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J5. Estes termos dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”) cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1 (“China Brazil Earth Resources Satellite”). O desenvolvimento deste modelo permitirá obter previsões mais precisas da evolução da órbita do CBERS-1 e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS).

Caso o movimento orbital não fosse perturbado, as órbitas dos satélites artificiais terrestres seriam elipses de tamanhos e excentricidades constantes, em planos fixos e os satélites permaneceriam nestas órbitas indefinidamente. Entre os principais efeitos que fazem com que a órbita se altere estão a não homogeneidade da distribuição de massa da Terra, a atração do Sol e da Lua, a pressão de radiação solar direta e indireta, o arrasto atmosférico, forças devidas às marés terrestres, arrasto Poynting Robertson, efeito Yarkovsky, etc. Para o controle de algumas órbitas é importante também que alguns elementos fiquem “congelados” em uma determinada posição para facilitar manobras de ajuste. Em particular, para as manobras que vêm sendo efetuadas pelo INPE com o satélite CBERS-1, é de fundamental importância que o perigeu fique “congelado”, i. e. com valor aproximadamente constante.

3. METODOLOGIA

Durante um estágio orientado, realizado anteriormente ao período da bolsa, foram estudados princípios básicos da Mecânica Celeste. No estágio inicial estudou-se, entre outros assuntos, as Leis de Kepler, as Leis de Newton e o Problema dos Dois Corpos. A partir do início da bolsa, os seguintes tópicos foram estudados até o momento:

- DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS: PROBLEMA DIRETO E PROBLEMA INVERSO
- GEOPOTENCIAL
- INTRODUÇÃO AO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS
- MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

3.1 DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS: PROBLEMA DIRETO E PROBLEMA INVERSO

Nesta fase, aprendeu-se como obter a posição (\vec{r}) e a velocidade ($\dot{\vec{r}}$) de um satélite artificial a partir dos elementos orbitais ($a, e, i, \Omega, \omega, \tau$) e como obter o procedimento inverso (a partir dos elementos orbitais obter a posição e a velocidade).

3.2 GEOPOTENCIAL

Nesta fase, aprendeu-se a calcular a expressão para o potencial U , em um satélite que orbita em torno da Terra. Aqui, foram introduzidos os Polinômios de Legendre. A expressão obtida para o potencial em termos da latitude ϕ e da longitude λ foi a seguinte:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_{n,k} a_e^n}{r^n} P_{n,k}(\sin \phi) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) \right]$$

onde:

P_n e $P_{n,k}$: Polinômios de Legendre e Polinômios Associados de Legendre.

$J_n, J_{n,k}$ e $\lambda_{n,k}$: coeficientes que dependem das características da Terra.

a_e : raio equatorial da Terra.

r : distância do satélite ao centro da Terra.

3.3 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Nesta versão do problema de três corpos é suposto que existem dois corpos de massas finitas M_1 e M_2 e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível e que orbita o sistema formado pelos dois outros corpos (Szebehely, 1967). É um caso particular, porém, extremamente importante e mais rico em aplicações práticas que o problema geral dos três corpos.

Começaremos escrevendo as equações do movimento de um sistema geral de três corpos (as três massas são finitas). Sejam \vec{r}_1, \vec{r}_2 e \vec{r}_3 as posições baricêntricas das três massas envolvidas e m_1, m_2 e m_3 os valores da respectivas massas. Sendo assim, temos:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{-\vec{r}_3 + \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}$$

No entanto, nesta fase, enfatizei estudar como se comportaria um corpo m , de massa desprezível, na presença de dois outros corpos M_1 e M_2 , de massas finitas, sendo que as órbitas de M_1 e de M_2 em torno do centro de massa sejam circulares e que m mova-se apenas no plano da órbita de M_1 e de M_2 . Este problema é conhecido como problema restrito-plano-circular de três corpos e suas equações são:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}$$

3.4 MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES E EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Este método é usado para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias com pequenas perturbações. Ele será bastante utilizado para resolver as equações do movimento de um satélite artificial, considerando as perturbações (arrasto atmosférico, atração luni-solar, geopotencial, etc.). As equações do movimento de um satélite artificial sujeito a uma perturbação são dadas por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

Sabemos que a solução do sistema mostrado acima, sem o segundo membro, é um movimento kepleriano caracterizado pelos elementos clássicos a , e , i , Ω , ω e M . Essa solução é utilizada como a solução não perturbada. Temos, portanto, que resolver um sistema de equações diferenciais, ligando as derivadas dessas

quantidades com relação ao tempo às derivadas parciais da função perturbadora com relação aos elementos a , e , i , etc.

As equações obtidas são as Equações de Lagrange da Mecânica Celeste cujo uso é bastante geral. Elas servem tanto para resolver o problema do movimento de um satélite artificial como para problemas de mecânica do sistema solar (movimento de planetas, da Lua, de satélites naturais).

Se a perturbação deriva de um potencial, teremos então:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{cos} i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{cos} i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

4. PRÓXIMAS ETAPAS

No momento, estão sendo estudadas as perturbações seculares e as perturbações periódicas de longo e de curto período, além de estar começando a reproduzir resultados apresentados no artigo *Orbit Analysis For SEASAT-A¹* (The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. XXVI, N° 4, pp. 315-342, Oct.-Dec., 1978).

Posteriormente a esta fase, serão desenvolvidas as fases finais do meu projeto de Iniciação Científica e são elas: noções sobre a teoria de Brouwer e Cálculo das perturbações de longo período até J5 pela teoria de Brouwer, sendo que deverá ser implementado um programa para o estudo das órbitas congeladas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bate, R. R., Mueller, D. D. and White, J. E., "Fundamentals of Astrodynamics", New York, Dover, 1971.

Brouwer, D., "Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag", Astron. Journal, Vol.64, #1274, 378, 1959.

Kovalevsky, J. : "Introduction to Celestial Mechanics", D. Reidel, Dordrecht, 1967.

Vilhena de Moraes, R. : "Trajetórias de Veículos Espaciais", Publicação Interna, ITA, São José dos Campos, 1980.

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e ao INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) pela oportunidade fornecida para que eu desenvolvesse este trabalho juntamente com Dr. Hélio Koiti Kuga e Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, que me orientaram neste trabalho de Iniciação Científica e aos quais eu também agradeço pela confiança em mim depositada.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	3
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	TÓPICOS ESTUDADOS ANTERIORMENTE AO PERÍODO DA BOLSA	4
2.1.1	AS LEIS DE KEPLER	4
2.1.2	AS LEIS DE NEWTON	4
2.1.3	O PROBLEMA DOS DOIS CORPOS	6
2.2	TÓPICOS ESTUDADOS NO PERÍODO DA BOLSA	10
2.2.1	DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS: PROBLEMA DIRETO E PROBLEMA INVERSO	10
2.2.2	EQUAÇÕES DE LAGRANGE	14
2.2.3	GEOPOTENCIAL	16
2.2.4	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	18
2.2.5	MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES	22
2.2.6	NOÇÕES SOBRE TERMOS SECULARES E DE LONGO E DE CURTO PERÍODO	24
2.2.7	NOÇÕES SOBRE A TEORIA DE BROUWER	24
3.	DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO	27
4.	RESULTADOS E ANÁLISES	32
5.	CONCLUSÕES	38
6.	ANEXOS	39
6.1	CRONOGRAMA DE TRABALHO REFERENTE AO PROJETO	39
6.2	PLANILHAS COM OS DADOS DE ORIGEM DOS GRÁFICOS 1 E 2 (CAPÍTULO 4)	41
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:	51

1. INTRODUÇÃO

A solução dada por Brouwer em 1959, apresenta expressões analíticas explícitas, como função do tempo, para a variação dos elementos orbitais clássicos (a , e , i , ω , Ω , τ). Isto permite efetuar com certa facilidade, para diversos tipos de órbitas e condições iniciais, a análise sobre o comportamento temporal destes elementos keplerianos, bem como obter ordens de grandeza para as perturbações devidas ao geopotencial. Tais elementos keplerianos não são constantes no tempo devido aos vários efeitos perturbadores (distribuição não uniforme de massa da Terra, arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, geopotencial, etc.). Para o desenvolvimento deste projeto foram desenvolvidas as seguintes análises: Determinação de Órbitas (Problema Direto e Problema Inverso); Geopotencial; Introdução ao Problema Restrito de Três Corpos; Método da Variação das Constantes; Equações de Lagrange; Perturbações Seculares, de longo e de curto período; e Noções sobre a Teoria de Brouwer. Na solução de Brouwer aparecem de forma explícita as expressões de longo período devidas a J_2 e J_4 . As expressões devidas a J_3 e J_5 também podem ser obtidas, mas com um trabalho suplementar, refazendo-se o método incluindo tais perturbações.

Caso o movimento orbital não fosse perturbado, as órbitas dos satélites artificiais terrestres seriam elipses de tamanhos e excentricidades constantes, em planos fixos e os satélites permaneceriam nestas órbitas indefinidamente. Entre os principais efeitos que fazem com que a órbita se altere estão a não homogeneidade da distribuição de massa da Terra, a atração do Sol e da Lua, a pressão de radiação solar direta e indireta, o arrasto atmosférico, forças devidas às marés terrestres, arrasto Poynting Robertson, efeito Yarkovsky, etc. Para o controle de algumas órbitas é importante também que alguns elementos fiquem “congelados” em determinados valores para facilitar manobras de ajuste. Em particular, para as manobras que vêm sendo efetuadas pelo INPE com o satélite CBERS-1 (“China Brazil Earth Resources Satellite”), é de fundamental importância que o perigeu fique “congelado”, i.e. com valor constante.

O principal objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um modelo para obter de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J_5 , através de um trabalho suplementar, refazendo-se o cálculo e incluindo tal perturbação. Os termos ímpares, que causam efeitos de longo período, dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”) cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1. Tais órbitas mantêm (ou tentam manter) o perigeu e a excentricidade da órbita constantes, de forma que para uma dada latitude o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando os usuários através dessa regularidade. O desenvolvimento deste modelo permitirá obter previsões mais precisas para a evolução da órbita do CBERS-1 e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS).

Neste trabalho, serão desenvolvidos analiticamente os termos das perturbações de longo período até J_5 , através da manipulação algébrica da teoria de Brouwer. Este modelo foi codificado em computador, em linguagem Fortran. O programa será testado para várias situações, fazendo-se, então, um teste da veracidade do desenvolvimento matemático. Pretende-se, após testes extensivos, validar “operacionalmente” o modelo para o satélite CBERS-1, visando tanto previsões orbitais quanto previsão de manobras, no Centro de Controle do INPE.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Durante um estágio orientado realizado anteriormente ao período da bolsa, foram estudados princípios básicos da Mecânica Celeste. No estágio inicial estudei, entre outros assuntos, as Leis de Kepler, as Leis de Newton e o Problema dos Dois Corpos. A partir do início da bolsa, os seguintes tópicos foram estudados por mim:

1. Determinação de órbitas: problema direto e problema inverso;
2. Geopotencial;
3. Introdução ao Problema Restrito de Três Corpos;
4. Método da Variação das Constantes;
5. Equações de Lagrange;
6. Perturbações Seculares de Longo e de Curto Período;
7. Noções sobre a teoria de Brouwer.

2.1 TÓPICOS ESTUDADOS ANTERIORMENTE AO PERÍODO DA BOLSA

Aqui, o objetivo é descrever resumidamente alguns princípios básicos de Mecânica Celeste. A referência básica foi o trabalho de Vilhena de Moraes (1978).

2.1.1 AS LEIS DE KEPLER

Farei uma breve introdução às Leis de Kepler, pois o que é realmente relevante para este projeto são as Leis de Newton, concluídas a partir destas leis.

Johanes Kepler (1571 – 1630), baseado nas observações de Tycho Brahe e após um minucioso estudo sobre o movimento dos planetas, concluiu:

- 1º) a) As trajetórias dos planetas em seus movimentos heliocêntricos são curvas planas e os planos que as contêm sempre passam pelo Sol.
b) A área varrida pelo raio vetor que liga o planeta ao Sol é proporcional ao tempo empregado para descrevê-la (Lei das Áreas).
- 2º) As trajetórias dos planetas são elipses nas quais o Sol sempre ocupa um dos focos.
- 3º) O quadrado dos tempos gastos pelos planetas para descreverem suas órbitas completas é proporcional aos cubos dos eixos máximos (Lei Harmônica).

2.1.2 AS LEIS DE NEWTON

Vejam os quais conclusões Isaac Newton (1643 – 1727) tirou destas leis quando procurou saber a que tipo de força estavam sujeitos os planetas, isto é, que tipo de forças produziram trajetórias que satisfizessem as Leis de Kepler.

Consideremos um planeta P , de massa m e a uma distância r do Sol. Pela 1ª Lei de Kepler, podemos considerar um sistema cartesiano, ortogonal, no plano da órbita e com centro no Sol, como mostra a figura (2.1.2.1):

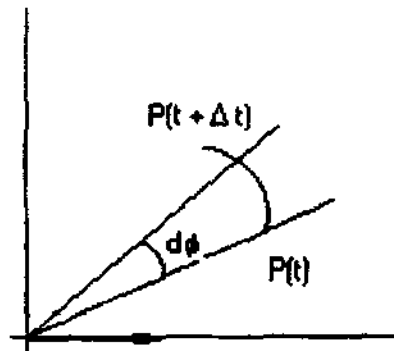


Figura (2.1.2.1) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Pela Lei das Áreas, temos:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\Phi = \text{constante} \cdot dt \quad (2.1.2.1)$$

E a força que age em cada instante sobre o planeta é dada por:

$$\vec{f} = m(\ddot{r} - r\dot{\Phi}^2) \frac{P-S}{r} \quad (2.1.2.2)$$

ou seja, “é uma força que tem sua linha de ação passando pelo centro do Sol”.

Da 2ª lei, Newton concluiu que “a força é atrativa (dirigida para o Sol) e tem seu módulo inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol”, Conforme a equação (4.2.3), obtida através de diversos cálculos matemáticos:

$$\vec{f} = -\frac{m}{r^2} \left[\frac{C^2}{a(1-e^2)} \right] \frac{P-S}{r} \quad (2.1.2.3)$$

E da 3ª Lei de Kepler, podemos concluir que:

$$\mu = \mu'$$

o que significa dizer que a razão μ independe do planeta.

Temos então: “A força que age em cada instante sobre os planetas é central, com centro no Sol, inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias ao Sol, diretamente proporcional à massa do planeta e o coeficiente de proporcionalidade independe do planeta”.

Suponhamos agora um planeta de massa m , colocado na presença do Sol, de massa M . Pelo princípio de ação e reação, o planeta irá aplicar sobre o Sol uma força \vec{F} de mesmo módulo que a \vec{f} e de sentido contrário, conforme a figura (2.1.2.2):

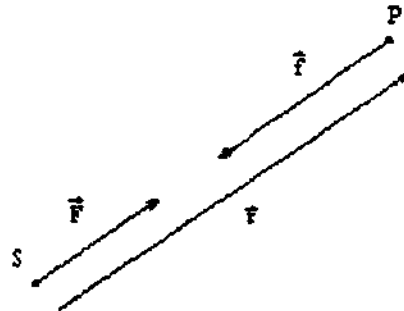


Figura (2.1.2.2) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Temos assim (podem ser encontradas em Vilhena de Moraes (1978)):

$$\vec{F} = -\frac{\mu' M}{r'^2} \frac{S-P}{r'} \quad (2.1.2.4) \quad \text{e} \quad \vec{f} = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{P-S}{r} \quad (2.1.2.5)$$

e, portanto:

$$\mu' M = \mu m \quad (2.1.2.6)$$

isto é, a razão

$$G = \frac{\mu'}{m} = \frac{\mu}{M} \quad (2.1.2.7)$$

independe do Sol e dos planetas, pois μ'/m só depende do planeta P e μ/M só depende do Sol (as constantes μ e μ' dependem do centro de forças).

A constante G é chamada constante da gravitação universal e \vec{f} pode ser escrita sob a forma:

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1.2.8)$$

que é chamada Lei da Gravitação Universal.

2.1.3 O PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

Enunciaremos o conhecido “Problema dos Dois Corpos”: considerem-se em um sistema de referência Galileano dois pontos materiais P_1 e P_2 de massas, respectivamente, m_1 e m_2 e que se atraem de acordo com a Lei de Newton, isto é, a força que m_j exerce sobre m_i é dada por:

$$\vec{f}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{P_i - P_j}{r^3} \quad (2.1.3.1)$$

onde i e j variam de 1 a 2 ($i \neq j$) e r , módulo de \vec{r} , é a distância de P_i a P_j . Determinar o movimento de P_i e P_j .

Se chamarmos de \vec{r}_1 a posição de P_1 e \vec{r}_2 a posição de P_2 , teremos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{P_1 - P_2}{r} \quad (2.1.3.2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \frac{P_2 - P_1}{r} \quad (2.1.3.3)$$

Estas equações formam um sistema de 6 equações diferenciais de 2ª ordem, ou seja, um sistema de 12 equações diferenciais de 1ª ordem, cuja solução completa exige 12 constantes de integração.

Seis destas constantes podem ser obtidas observando que o segundo membro das equações (2.1.3.2) e (2.1.3.3) são iguais e de sinal contrário.

Mas, por definição, a posição do centro de massa do sistema formado pelos pontos P_1 e P_2 é dada por:

$$\vec{r}_g = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.3.4)$$

logo,

$$\vec{r}_g = \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{A}t + \vec{B}) \quad (2.1.3.5)$$

isto é, o centro de massa do sistema está se movendo em movimento retilíneo uniforme; \vec{B} é a posição inicial e \vec{A} é a velocidade.

Chamaremos de \vec{r}'_1 e de \vec{r}'_2 , respectivamente, a posição de P_1 e de P_2 em relação ao centro de massa, como mostra a figura (2.1.3.1):

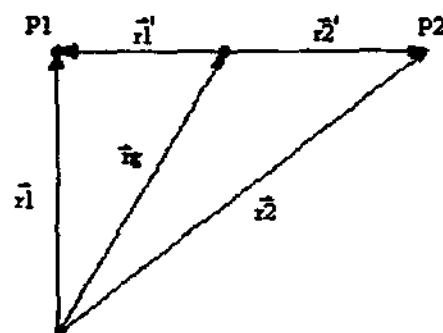


Figura (2.1.3.1) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Teremos então:

$$\ddot{\vec{r}}_1' = -\frac{Gm_2}{r^2} \frac{(\ddot{\vec{r}}_1' - \ddot{\vec{r}}_2')}{r} \quad (2.1.3.6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2' = -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{(\ddot{\vec{r}}_2' - \ddot{\vec{r}}_1')}{r} \quad (2.1.3.7)$$

Se colocarmos a origem do sistema de referência no centro de massa, a equação (2.1.3.4) nos dará (podem ser encontradas em Vilhena de Moraes (1978)):

$$r^2 = r_1'^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2 \quad (2.1.3.8)$$

$$\ddot{\vec{r}}_1' = -G \frac{m_1^3}{r_1'^2 (m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_1'}{r_1'} \quad (2.1.3.9)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2' = -G \frac{m_2^3}{r_2'^2 (m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_2'}{r_2'} \quad (2.1.3.10)$$

Sendo o movimento plano, trabalharemos no próprio plano e, portanto, expressaremos $\dot{\vec{r}}$ da seguinte maneira:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} e^{i\phi} \vec{i} + r \dot{\phi} e^{i\phi} \vec{i} \quad (2.1.3.11)$$

e, conseqüentemente:

$$\left(\dot{\vec{r}} \right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (2.1.3.12)$$

Substituindo este valor em equações estudadas anteriormente, obtém-se:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + E \right) \quad (2.1.3.13)$$

onde E é a energia específica $\left(E = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \right)$, podemos eliminar $\dot{\phi}$ através da integral das áreas, obtendo:

$$\phi - \omega = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{C}{\sqrt{-C^2 \xi^2 + 2(\mu \xi + E)}} d\xi \quad (2.1.3.14)$$

onde ω é uma constante de integração. E após algum desenvolvimento algébrico com o segundo membro da equação (2.1.3.14), teremos como resposta:

$$\phi - \omega = \arccos \left(\frac{-\frac{\mu}{C} + C\xi}{\sqrt{2E + \frac{\mu^2}{C^2}}} \right) \quad (2.1.3.15)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} \left[1 + \sqrt{2 \frac{EC^2}{\mu^2} + 1} \cos(\phi - \omega) \right] \quad (2.1.3.16)$$

que é equivalente a

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \omega)} \quad (2.1.3.17)$$

que é a equação de uma cônica em coordenadas polares onde: p é o semi *lactus rectum*; a é o semi-eixo maior; e é a excentricidade da cônica; e $(\phi - \omega)$ é o ângulo polar.

Da equação (2.1.3.16) podemos observar que

- Se $E < 0$, então $e < 1$, isto é, a cônica será uma elipse.
- Se $E = 0$, então $e = 1$, isto é, a cônica será uma parábola.
- Se $E > 0$, então $e > 1$, isto é, a cônica será uma hipérbole.

Em geral, escolhemos para τ o instante de passagem pelo pericentro. Já a constante ω fixa a posição da cônica no plano da órbita, enquanto a e e fixam a forma e o tamanho dos elementos geométricos.

No caso geral (sistema de referência não colocado no plano da órbita), precisamos de mais dois elementos (duas constantes de integração) para fixar o plano.

Concluimos então que o movimento de P_2 em relação a P_1 será uma cônica e que P_1 sempre ocupará um dos focos. Conforme as condições iniciais do movimento, a órbita será elíptica, parabólica ou hiperbólica.

2.2 TÓPICOS ESTUDADOS NO PERÍODO DA BOLSA

A partir do início da bolsa, os seguintes tópicos, descritos abaixo resumidamente, foram estudados por mim.

2.2.1 DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS: PROBLEMA DIRETO E PROBLEMA INVERSO

O movimento elíptico é descrito por um sistema de 6 equações diferenciais, e portanto, uma órbita elíptica é completamente descrita por seis parâmetros independentes. Estes parâmetros são, por exemplo, as condições iniciais do movimento, isto é, as coordenadas retangulares x_0 , y_0 e z_0 e as componentes do vetor velocidade em $t = 0$, v_{x0} , v_{y0} e v_{z0} .

Existe também um outro conjunto de 6 parâmetros independentes que descrevem completamente a órbita, que serão mostrados na figura (2.2.1.1) e há uma correspondência biunívoca entre estes dois conjuntos de parâmetros.

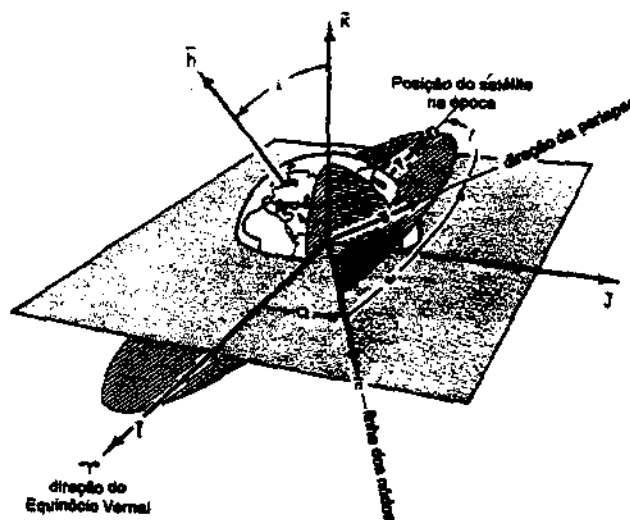


Figura (2.2.1.1) – Fonte: Vieira Neto (2002)

Os elementos orbitais a , e , i , ω , Ω , τ são chamados elementos orbitais do satélite ou elementos keplerianos da órbita do satélite e são o outro conjunto de parâmetros que descrevem completamente a órbita. São eles:

- a : semi-eixo maior
- e : excentricidade
- i : inclinação do plano orbital
- Ω : longitude do nodo ascendente
- ω : argumento do perigeu
- τ : tempo do pericentro

Queremos agora determinar a posição e a velocidade do satélite como função do tempo, dados seus elementos keplerianos. Em outras palavras, dados os elementos orbitais, qual relação nos fornece posição e velocidade do satélite?

Na análise que faremos, o plano de referência será o plano do equador.

Consideremos um sistema de coordenadas $Uuv\omega$ centrado no centro da Terra, com o eixo u dirigido para latitude 0° e o eixo v dirigido para latitude 0° e longitude 90° (pólo norte). A relação entre este sistema e o sistema inercial $Xxyz$ com o eixo x dirigido para o equinócio vernal (ponto γ), o eixo $y = 90^\circ$ no equador e a direção do pólo norte é dada por:

$$X = L_{xU} U \quad (2.2.1.1)$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad L_{xU} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.2.1.2)$$

e θ é o ângulo entre o equinócio e o meridiano de Greenwich, chamado de Tempo Sideral de Greenwich.

Para determinarmos a relação entre o sistema X e o sistema $\sum \xi\eta\tau$ com o eixo ξ dirigido para o perigeu, η no plano orbital e τ normal ao plano orbital, conforme a figura (2.2.1.2), precisamos efetuar uma rotação sobre z de um ângulo igual a Ω . Chamaremos $L(\Omega)$ a matriz que representa esta rotação:

$$L(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos\Omega \cos\omega - & -\cos\Omega \text{sen}\Omega - & \text{sen}\Omega \text{sen}i \\ \text{sen}\omega \cos i \text{sen}\Omega & \text{sen}\Omega \cos i \cos\omega & \\ \text{sen}\Omega \cos\omega + & -\text{sen}\Omega \text{sen}\omega + & -\cos\Omega \text{sen}i \\ \cos\Omega \cos i \text{sen}\omega & \cos\Omega \cos\omega \cos i & \end{bmatrix} \quad (2.2.1.3)$$

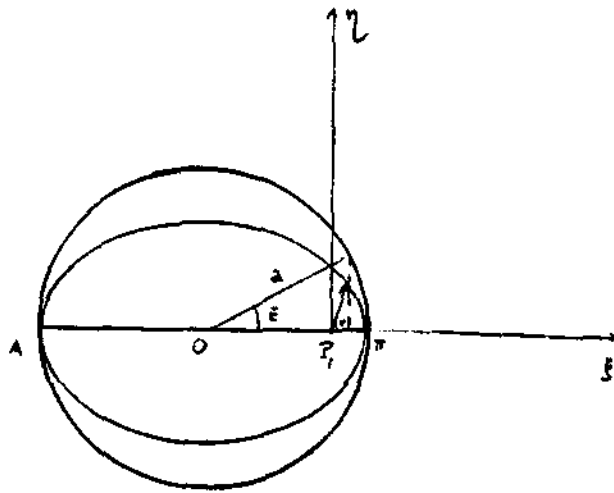


Figura (2.2.1.2) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

Podemos então escrever (podem ser encontradas em Vilhena de Moraes (1978)):

$$r = a[\cos E - e]\vec{i} + \sqrt{1 - e^2} \sin E \vec{j} \quad (2.2.1.4)$$

onde

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (2.2.1.5)$$

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}; \quad (2.2.1.6)$$

$$\vec{j} = \begin{bmatrix} -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\ -\sin \omega \sin \Omega - \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin i \end{bmatrix}. \quad (2.2.1.7)$$

sendo \vec{i} e \vec{j} ortonormais.

Para obtermos \dot{r} em função dos elementos keplerianos basta observar que o único elemento dependente do tempo é E, e derivando a equação de Kepler, obtemos:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} \quad (2.2.1.8)$$

ou, devido à igualdade $r = a(1 - e \cos E)$:

$$\dot{E} = \frac{an}{r} \quad (2.2.1.9)$$

teremos, finalmente:

$$\vec{r} = a \left[-\text{sen } E\vec{i} + \sqrt{1-e^2} \cos E\vec{j} \right] \frac{an}{r} \quad (2.2.1.10)$$

As relações que acabamos de obter permitem-nos encontrar as condições iniciais do movimento $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ a uma dada época $t = t_0$, a partir dos elementos orbitais $a, e, i, \omega, \Omega, \tau$; o processo é unívoco. Inverteremos o problema neste momento, ou seja, determinaremos os elementos orbitais a partir das condições iniciais.

Consideremos o vetor:

$$\vec{C} = \frac{1}{2}(\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0) \quad (2.2.1.11)$$

cujas componentes são:

$$C_1 = \frac{1}{2}(y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0) = C \text{sen } i \text{sen } \Omega \quad (2.2.1.12)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0) = -C \text{sen } i \cos \Omega \quad (2.2.1.13)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0) = C \cos i \quad (2.2.1.14)$$

Delas, podemos calcular:

$$i = \text{arctg} \frac{\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)}}{C_3} \quad (2.2.1.15) \quad \text{e} \quad \Omega = \text{arctg} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \quad (2.2.1.16)$$

Além disso, por meio de estudos preliminares, podemos determinar::

$$a = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \quad (2.2.1.17) \quad \text{e} \quad e = \sqrt{1 - \frac{P}{a}} \quad (2.2.1.18)$$

Para obtermos a anomalia verdadeira v podemos substituir os valores de e e a (encontrados) e o de r_0 (dado) na equação da elipse e tirar:

$$e \cos v = \frac{P}{r_0} - 1 \quad (2.2.1.19)$$

Obtido o valor de v no instante t_0 , o valor da anomalia excêntrica E_0 neste instante pode ser obtido por:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) \quad (2.2.1.20)$$

e então, com a equação de Kepler:

$$n(t_0 - \tau) = E_0 - e \operatorname{sen} E_0 \quad (2.2.1.21)$$

podemos determinar τ .

Falta determinar apenas a posição do perigeu e , para tanto, precisamos somente lembrar que:

$$z = r \cdot \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen}(\omega + v) \quad (2.2.1.22)$$

de onde concluímos que:

$$\omega = \operatorname{arcsen} \frac{z_0}{r_0 \operatorname{sen} i} - v_0 \quad (2.2.1.23)$$

2.2.2 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Do estudo do problema dos dois corpos é conhecido que as coordenadas e as componentes da velocidade permitem a determinação de um único conjunto de seis elementos orbitais, que não variam neste problema.

Em várias aplicações, costuma-se também utilizar a anomalia média M ao invés de o tempo de passagem do pericentro.

O problema dos dois corpos pode ser considerado uma primeira idealização para movimento de um satélite artificial. No movimento real, os elementos orbitais, que correspondem a coordenadas e componentes da velocidade dadas em um sistema de referência, variam com o tempo. Ao invés de calcular as coordenadas e velocidades perturbadas podemos obter equações que dão as variações dos elementos orbitais.

As equações do movimento de um satélite artificial, considerando perturbações, podem ser colocadas na seguinte forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} \quad (2.2.2.1)$$

onde a segunda parcela do primeiro termo corresponde ao problema dos dois corpos. No segundo membro, foi suposto que as componentes da aceleração possam ser escritas como a derivada de uma função perturbadora R , produzida por todas as outras forças do movimento. R é a função perturbadora do movimento dada e função de x , y , z e t , contendo ainda um pequeno parâmetro.

Tais equações foram montadas considerando-se que a massa central está colocada na origem do sistema de coordenadas.

Para resolver as equações (2.2.2.1), utiliza-se o Método da Variação das

Constantes. Sabemos que a solução do sistema sem o segundo membro é um movimento kepleriano caracterizado por a, e, i, Ω, ω e M . Essa solução é utilizada como a solução não perturbada conhecida. Temos, portanto, que resolver um sistema de equações diferenciais, ligando as derivadas dessas quantidades com relação ao tempo às derivadas parciais da função perturbadora com relação aos elementos a, e, i , etc.

As equações obtidas são as Equações de Lagrange da Mecânica Celeste cujo uso é bastante geral. Elas servem tanto para resolver o problema do movimento de um satélite artificial como para problemas de mecânica do sistema solar (movimento de planetas, da Lua, de satélites naturais). As equações, dadas aqui sem demonstração (podem ser encontradas em Kovalevsky (1967)), são:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

observa-se que, nas três primeiras equações, aparecem as derivadas de R com relação à Ω, ω e M ; enquanto nas três últimas equações não aparecem essas derivadas, mas sim, as derivadas com relação a a, e, i . As variáveis a, e, i são chamadas de variáveis métricas; e Ω, ω e M de variáveis angulares.

Em lugar dos elementos osculadores (elementos instantâneos obtidos com o auxílio das fórmulas do problema não perturbado), tomemos como variáveis as ditas variáveis de Delaunay, que estão ligadas aos elementos keplerianos pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \\ l &= M = n(t-t_0) & g &= \omega & h &= \Omega \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

Efetuada as mudanças de variáveis definidas pelas fórmulas (2.2.2.3) nas

equações de Lagrange, obtém-se o sistema:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}; \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}; \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \quad (2.2.2.4)$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}; \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}; \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}$$

com:

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R$$

Tal forma, dita Equações de Lagrange na forma Hamiltoniana, é amplamente empregada.

2.2.3 GEOPOTENCIAL

Seja o potencial correspondente a um campo de forças igual a F , isto é, $F = \nabla U$. Para um sólido constituído por elementos infinitesimais, esse potencial pode ser expresso, conforme a figura (2.2.3.1), por:

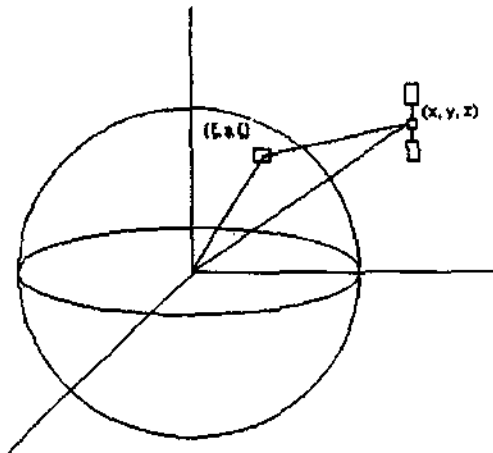


Figura (2.2.3.1) – Fonte: Vilhena de Moraes (1978)

$$U(x, y, z) = \iiint_V G \frac{dm}{R} = \iiint_V G \frac{\sigma d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \quad (2.2.3.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal, $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ é a densidade variável e a integral é estendida sobre todo o volume V .

Em coordenadas esféricas o volume unitário é: $\rho^2 \cos\phi' d\phi' d\lambda' d\rho$. Assim, o

potencial será expresso por:

$$U(r, \phi, \lambda) = \iiint G \frac{dm}{R} = \iiint G \frac{\sigma \rho^2 \cos \phi' d\phi' d\lambda' d\rho}{R} \quad (2.2.3.2)$$

Como $\frac{r}{\rho} < 1$, vamos expandir $\frac{1}{R}$ nas vizinhanças de $\frac{r}{\rho} = 0$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\rho}{r} \cos \psi + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \psi \right] + \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left[-\frac{3}{2} \cos \psi + \frac{5}{2} \cos^3 \psi \right] + \left(\frac{\rho}{r}\right)^4 \left[\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \psi + \frac{35}{8} \cos^4 \psi \right] + \dots \right\} \quad (2.2.3.3)$$

onde:

$$P_0(\cos \psi) = 1$$

$$P_1(\cos \psi) = \cos \psi$$

$$P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$$

$$P_3(\cos \psi) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \psi - 3 \cos \psi)$$

$$P_4(\cos \psi) = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \psi - 30 \cos^2 \psi + 3)$$

Outros termos são gerados por:

$$nP_n(\cos \psi) = (2n-1) \cos \psi P_{n-1}(\cos \psi) - (n-1)P_{n-2}(\cos \psi) \quad (2.2.3.4)$$

Deste modo, podemos escrever $\frac{1}{R}$ da seguinte maneira:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) \quad (2.2.3.5)$$

Substituindo $\frac{1}{R}$ na integral de U, obteremos:

$$U = G \frac{\sigma}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \iiint \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \rho^2 P_n(\cos \psi) \cos \phi' d\phi' d\lambda' d\rho \quad (2.2.3.6)$$

em que (ρ, ϕ', λ') são as coordenadas do elemento infinitesimal de massa dm . É necessário, agora, expressar ψ em termos de ϕ e λ .

Mostra-se que (pode ser encontrada em Morando (1974)):

$$P_n(\cos\psi) = \left\{ \begin{array}{l} P_n(\text{sen } \phi)P_n(\text{sen } \phi') + \\ + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{n,k}(\text{sen } \phi)P_{n,k}(\text{sen } \phi') \cos k(-\lambda') \end{array} \right\} \quad (2.2.3.7)$$

sendo que os $P_{n,k}(x)$ são os polinômios generalizados de Legendre.

Para o caso de um satélite artificial da Terra, o potencial é dado por:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n a_e^n}{r^n} P_n(\text{sen } \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{J_{n,k} a_e^n}{r^n} P_{n,k}(\text{sen } \phi) \cos k(\lambda - \lambda_{n,k}) \right] \quad (2.2.3.8)$$

sendo que $\mu = GM$; J_n e $J_{n,k}$ estão associados à distribuição de massa da Terra; e a_e é o raio médio da Terra.

Supondo que a Terra tem uma distribuição de massa simétrica em relação ao Equador, então:

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\text{sen } \phi) \right\} \quad (2.2.3.9)$$

em que G é a constante gravitacional, M é a massa de Terra, J_n são constantes e $P_n(\text{sen } \phi)$ é o polinômio de Legendre de grau n e argumento $(\text{sen } \phi)$, sendo que ϕ é a latitude geocêntrica. O primeiro termo em U representa o potencial básico da esfera terrestre: o termo em J_2 , o segundo harmônico, representa o efeito do achatamento da Terra; o terceiro harmônico (termo J_3) representa uma ligeira assimetria em relação ao Equador, conhecido como efeito “formato de pêra”.

2.2.4 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Nesta versão do problema de três corpos é suposto que existem dois corpos de massas finitas M_1 e M_2 e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível e que orbita o sistema formado pelos dois outros corpos. É um caso particular, porém, extremamente importante e rico em aplicações práticas que o problema geral dos três corpos.

Começaremos escrevendo as equações do movimento de um sistema geral de três corpos (as três massas são finitas). Sejam \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 as posições baricêntricas das três massas envolvidas e m_1 , m_2 e m_3 os valores da respectivas massas. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\
\ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\
\ddot{\vec{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}
\end{aligned} \tag{2.2.4.1}$$

onde G é a constante universal da gravitação.

Agora, faremos a descrição do problema restrito-plano-circular de três corpos, que pode ser assim formulado: “Deseja-se conhecer o movimento de um corpo M_3 , de massa desprezível, em torno de um sistema composto por M_3 e duas outras massas finitas M_1 e M_2 . Assume-se que apenas forças gravitacionais atuem no sistema, que as órbitas de M_1 e M_2 em torno do centro de massa sejam circulares e que M_3 se mova apenas no plano da órbita de M_1 e M_2 ”.

A seguir, efetuaremos a aproximação $m_3 \rightarrow 0$ nas duas primeiras equações de (2.2.4.1). Isto feito, resta-nos:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\
\ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}
\end{aligned} \tag{2.2.4.2}$$

A terceira equação permanece inalterada. A transformação do sistema de equações (2.2.4.1) para o sistema (2.2.4.2) fornece-nos a solução completa do sistema para os corpos M_1 e M_2 , que é dada pelo problema de dois corpos.

Trabalharemos agora com esta última equação, para obtermos um resultado em forma mais adequada. Assuma que as órbitas circulares de M_1 e M_2 tenham raios a e b respectivamente, como mostra a figura (2.2.4.1):

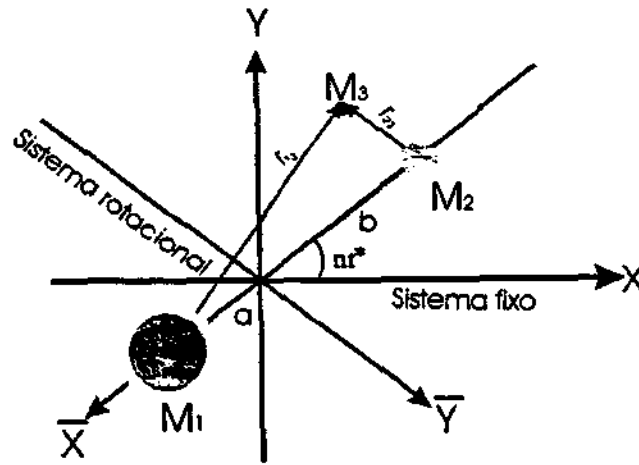


Figura (2.2.4.1) – Fonte: Prado (2001)

Nesta figura, $x - y$ é um sistema de coordenadas inerciais; $\bar{x} - \bar{y}$ é um sistema que gira com velocidade angular n , de forma a acompanhar o movimento de M_1 e M_2 , e t^* é o tempo. Isto é, M_1 e M_2 ficam fixos neste sistema de referência.

Para simplificar as equações de movimento, é interessante o uso de quantidades adimensionais. Para isto, definiremos as seguintes grandezas:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}; y = \frac{\bar{y}}{L}; t = nt^*; r_1 = \frac{r_{13}}{L}; r_2 = \frac{r_{23}}{L}; \mu_1 = \frac{m_1}{m}; \mu_2 = \frac{m_2}{m}; F_a = \frac{F}{L^2 n^2} \quad (2.2.4.3)$$

onde:

$$F = \frac{n^2}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + G \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right)$$

m_1 : massa do corpo M_1

m_2 : massa do corpo M_2

L : distância entre os dois primários ($a + b$)

n : velocidade angular dos dois primários

m : massa total do sistema ($m_1 + m_2$)

Com isso, as equações de movimento do corpo M_3 ficam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \end{aligned} \quad (2.2.4.4)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

onde:

Ω_x : derivada de Ω em relação a x

Ω_y : derivada de Ω em relação a y

E a integral de Jacobi (uma constante do problema restrito de três corpos) fica:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2F_a - C \quad (2.2.4.5)$$

Note que, ao escolhermos o sistema adimensional acima, ficam implícitas as seguintes regras:

- 1ª) A unidade de distância passa a ser a distância entre M_1 e M_2 ;
- 2ª) A unidade de massa toma-se $m = m_1 + m_2$;
- 3ª) A velocidade angular do movimento de M_1 e de M_2 passa a ser unitária;
- 4ª) A constante gravitacional toma-se $G = 1$;
- 5ª) O período do movimento angular de M_1 e de M_2 passa a ser 2π .

Podemos também definir μ como sendo a massa do menor primário. A massa do maior primário será $\mu_1 = 1 - \mu$. Com isso, teremos:

$$\Omega = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$
$$r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 \quad (2.2.4.6)$$

$$r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2$$

Existem diferentes formas de se definir o potencial Ω e as constantes de integração.

Para a versão em três dimensões desse problema, temos as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{r_2^3}$$
$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} \quad (2.2.4.7)$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}$$

Os pontos Lagrangianos são os chamados pontos de equilíbrio do problema restrito dos três corpos. São pontos para os quais a equação $\Omega_x = \Omega_y = 0$ é satisfeita. Olhando as equações (2.2.4.3) vemos que uma partícula, colocada num ponto de equilíbrio com velocidade inicial nula, irá permanecer nesse ponto indefinidamente. Efetuando então as derivadas, temos:

$$\Omega_x = x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} = 0$$

$$\Omega_y = y \left(1 - \frac{(1-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0$$

(2.2.4.8)

Podemos então observar dois tipos de solução:

1. Quando $y = 0$ a segunda equação fica satisfeita, e a primeira equação se transforma em uma equação em x . Resolvendo-se essa equação obtém-se os três pontos de equilíbrio colineares (L_1, L_2, L_3), cujas posições dependem do valor de μ . As posições aproximadas estão mostradas na figura 2.2. Diferentes autores usam diferentes formas de nomear esses três pontos com os nomes L_1, L_2, L_3 e a escolha feita aqui é baseada na ordem em que as curvas de velocidade atingem os pontos Lagrangianos.
2. Quando $y \neq 0$, o único modo de satisfazer a segunda equação é fazer $r_1 = r_2 = 1$. Essa solução também satisfaz a primeira equação. Isso nos fornece mais dois pontos de equilíbrio (chamados de L_4 e L_5), que são os pontos triangulares, pois junto com M_1 e M_2 formam um triângulo equilátero.

Não existe mais nenhuma solução para essa dupla de equações, e o número total de pontos de equilíbrio é então cinco.

2.2.5 MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES

O método da variação das constantes arbitrárias foi desenvolvido inicialmente por Euler, em seguida trabalhado por Lagrange, que lhe deu fundamentos sólidos e por Laplace, que determinou com rigor as derivadas dos elementos keplerianos.

Considere um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que define n funções x_1, x_2, \dots, x_n de uma variável independente t . Seja este sistema escrito sob a forma (pode ser encontrada em Ferraz Melo, 1972):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (2.2.5.1)$$

Admita-se conhecida a solução geral deste sistema, em função de n constantes arbitrárias C_1, C_2, \dots, C_n . Seja esta solução:

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{C}, t) \quad (2.2.5.2)$$

Considere agora um novo sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem cujos segundos membros diferem dos segundos membros das equações

precedentes por um termo aditivo que será suposto pequeno, relativamente às funções $f_i(\bar{x}, t)$. Seja este novo sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) + \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (2.2.5.3)$$

O método de Lagrange da Variação das Constantes Arbitrárias consiste em considerar, em $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{C}, t)$, a quantidade \bar{C} como uma função vetorial incógnita da variável t e não mais como um vetor constante. Procuramos determiná-la de maneira que $\bar{x} = \bar{\varphi}[\bar{C}(t), t]$ satisfaça ao novo sistema de equações diferenciais.

Derivando a função acima:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \quad (2.2.5.4)$$

e devendo ela satisfazer ao novo sistema de equações diferenciais, segue-se que:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, t) + \bar{g}(\bar{x}, t) \quad (2.2.5.5)$$

Cabe lembrar que $\bar{\varphi}$ não é uma função qualquer, pois para que \bar{C} seja constante, ela deve satisfazer ao sistema não perturbado, ou seja:

$$\frac{d\bar{\varphi}(\bar{C}, t)}{dt} = \left[\frac{d\bar{\varphi}(\bar{C}, t)}{d\bar{C}} \right] \dot{\bar{C}} = \bar{c} \dot{\bar{C}} = \bar{f}(\bar{x}, t) \quad (2.2.5.6)$$

de onde resulta:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \dot{\bar{C}} = \bar{g}[\bar{\varphi}(\bar{C}, t), t] \quad (2.2.5.7)$$

sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que define a função $\bar{C}(t)$.

Vale ressaltar que $\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}}$ não pode ser nulo, senão $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{C}, t)$ não seria mais a solução do problema não perturbado, como foi suposto inicialmente. Podemos, então, representar o sistema de equações de perturbação da seguinte maneira:

$$\dot{\bar{C}} = \left[\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{C}} \right]^{-1} \bar{g}[\bar{\varphi}(\bar{C}, t), t] = \bar{G}(\bar{C}, t) \quad (2.2.5.8)$$

e estando este sistema resolvido, teremos a solução perturbada do sistema.

2.2.6 NOÇÕES SOBRE TERMOS SECULARES E DE LONGO E DE CURTO PERÍODO

Suponhamos a função perturbadora sob a forma:

$$R = \sum C \cos D \quad (2.2.6.1)$$

com $C = C(a, e, i)$ (ou $C = C(L, G, H)$, onde L , G e H são variáveis de Delaunay, as quais vimos com maior ênfase na seção 2.2.2) e $D = \alpha M + \beta \omega + \gamma \Omega$, (ou $D = \alpha l + \beta g + \gamma h$, onde l , g e h também são variáveis de Delaunay, vistas anteriormente), com $(\alpha, \beta$ e γ inteiros).

Distinguem-se em R três tipos de termos:

1. O termo não periódico, que escreveremos R_S e chamaremos de termo secular.
2. Os termos periódicos nos quais $\alpha = 0$, que escreveremos R_{LP} e chamaremos de termos a longo período, visto que a evolução dos ângulos ω e Ω é extremamente lenta quando comparada à evolução da anomalia média M .
3. Os termos periódicos nos quais $\alpha \neq 0$, que escreveremos R_{CP} e chamaremos de termos de curto período.

2.2.7 NOÇÕES SOBRE A TEORIA DE BROUWER

Ao contrário dos casos dos corpos naturais suas distâncias entre si são muito grandes em relação aos seus tamanhos, os satélites artificiais estão tão próximos que os termos secundários do geopotencial não podem ser desprezados. As imprecisões nas observações do movimento de corpos naturais eram tais que uma teoria aproximada era suficiente para descrever os desvios observados. Em contrapartida, a precisão das observações dos satélites artificiais terrestres é muito alta, e por esta razão, o estudo do movimento de satélites em um campo potencial de um corpo praticamente esférico se desenvolveu particularmente forte desde o lançamento do primeiro satélite.

Desta forma, se as forças que agem sobre um satélite são de origem gravitacional, dependendo apenas do potencial U do planeta, as equações do movimento são todas dadas por (podem ser encontradas em Kovalevsky (1967)):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x} ; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y} ; \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.2.7.1)$$

onde $U = \frac{kM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} J_{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right]$ e J_{2n} é o coeficiente do polinômio de Legendre P_{2n} .

Resgataremos agora, para resolver as equações (2.2.7.1), as variáveis de Delaunay (obtidas na seção 2.2.2), que são obtidas a partir de um sistema Hamiltoniano e definidas em termos dos elementos orbitais. Relembrando-as:

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \\
l &= M = n(t-t_0) & g &= \omega & h &= \Omega
\end{aligned}
\tag{2.2.7.2}$$

E resolvendo através de um sistema de equações canônicas e com o uso das variáveis de Delaunay (2.2.7.2), obteremos o seguinte sistema, equivalente ao sistema (2.2.7.1):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial l}; \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial g}; \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial h}
\tag{2.2.7.3}$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial L}; \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial G}; \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial H}$$

onde

$$\Phi = \frac{\mu}{2a} + R \quad \text{e} \quad R = U - \frac{kM}{r}$$

De qualquer modo, além das forças de origem gravitacional, um satélite é perturbado pelo Sol e pela Lua e é freado pelo atrito com a alta atmosfera, que é muito difícil de ser analisado, visto que a densidade atmosférica varia com a temperatura, iluminação, atividade solar, etc. Um satélite artificial também é alvo de perturbações devidas à pressão de radiação solar, aos efeitos eletromagnéticos, ao impacto de meteoritos, etc.

Nós nos concentraremos aqui apenas nos efeitos do geopotencial, a causa primária das perturbações de um satélite de órbita alta. O estudo detalhado deste movimento permite descrever métodos aplicáveis a muitos outros problemas na Mecânica Celeste.

As equações (2.2.7.3), onde Φ é uma função das seis variáveis de Delaunay, serão resolvidas por uma série de transformações variáveis, com o auxílio de uma determinada função. Aplicando transformações canônicas, vemos que se considerarmos um novo sistema de variáveis L', G', H', l', g' e h' , e uma determinada função $S(L', G', H', l', g', h')$ teremos que:

$$L = \frac{\partial S}{\partial l}; \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}; \quad H = \frac{\partial S}{\partial h}; \quad l' = \frac{\partial S}{\partial L'}; \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}; \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}
\tag{2.2.7.4}$$

onde o sistema de novas equações é canônico e a nova Hamiltoniana Φ' , expressa em novas variáveis, permanece inalterada, ou seja:

$$\Phi(L, G, H, l, g, h) = \Phi'(L', G', H', l', g', h')
\tag{2.2.7.5}$$

e

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial \Phi'}{\partial l'}; \quad \frac{dG'}{dt} = \frac{\partial \Phi'}{\partial g'}; \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial \Phi'}{\partial h'}$$

(2.2.7.6)

$$\frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial\Phi'}{\partial L'}; \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial\Phi'}{\partial G'}; \quad \frac{dH'}{dt} = -\frac{\partial\Phi'}{\partial h'}$$

Desde que S seja qualquer função, podemos impor certas condições. No método que estamos analisando, introduzido por Von Zeipel e desenvolvido por Brouwer, a condição é que Φ' deve ser tal que independa de uma das variáveis angulares de que Φ dependa. Se esta condição puder ser satisfeita, e isto for demonstrado, poderemos eliminar uma das variáveis angulares da Hamiltoniana. Se esta operação se repetir inúmeras vezes, todas as variáveis angulares serão eliminadas de Φ uma por uma, e a Hamiltoniana final Φ'' será uma função apenas de L'' , G'' e H'' .

As três primeiras equações finais serão:

$$\frac{dL''}{dt} = \frac{\partial\Phi''}{\partial l''}; \quad \frac{dG''}{dt} = \frac{\partial\Phi''}{\partial g''}; \quad \frac{dH''}{dt} = \frac{\partial\Phi''}{\partial h''} \quad (2.2.7.7)$$

o lado direito vale zero e, conseqüentemente, L'' , G'' e H'' serão constantes na solução. Colocando estes resultados em $\frac{\partial\Phi''}{\partial L''}$, $\frac{\partial\Phi''}{\partial G''}$ e $\frac{\partial\Phi''}{\partial H''}$, nós encontraremos que $\frac{dl''}{dt}$, $\frac{dg''}{dt}$ e $\frac{dh''}{dt}$ são constantes. Nesta solução, l'' , g'' e h'' serão funções lineares no tempo.

Nós podemos retornar às variáveis iniciais L , G , H , l , g e h com o auxílio de várias equações do tipo (2.2.7.4), que definem cada variável indeterminada.

3. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

O objetivo deste projeto de pesquisa consistia em desenvolver um modelo para obter de forma explícita as perturbações nos elementos orbitais “congelados” devidas ao geopotencial até o termo J5.

Neste trabalho, foram desenvolvidos analiticamente os termos das perturbações de longo período (cujos efeitos são gerados pelos termos ímpares) até J5, através de manipulação algébrica da teoria de Brouwer.

As equações já existentes (Cutting et. al., 1978) foram previamente analisadas através de um modelo codificado em computador, em linguagem Fortran, para dados do artigo “Orbit Analysis for SEASAT-A” (Cutting et. al., 1978) e cujos dados obtidos como resultado foram plotados com o auxílio do editor de gráficos MS-Excel, para que se pudesse entender qual a natureza das “órbitas congeladas” (“frozen orbits”), pois tais órbitas mantêm (ou tentam manter) o perigeu e a excentricidade da órbita constantes, de forma que para uma dada latitude o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando os usuários através dessa constância. Esta característica é de fundamental importância para usuários das imagens obtidas pela câmara CCD a bordo deste tipo de satélites, já que imagens de datas diferentes podem ser comparadas para a mesma latitude, para utilizações tais como previsão de safras, queimadas, localização de aeroportos clandestinos, e outras. O satélite CBERS-1 tem como elementos orbitais nominais a excentricidade $e = 0.0011$ e argumento do perigeu $\omega = 90^\circ$. No caso deste projeto de pesquisa, trabalhamos com o congelamento de órbita que ocorre quando o argumento do perigeu vale 90° e percebemos, através de gráficos, que a órbita começa a querer escapar da sua trajetória inicial para valores de argumento do perigeu mais distantes de 90° e tende a se manter confinada quando estes valores estão mais próximos de 90° .

Após a análise dos termos cuja perturbação tinha a ordem de grandeza de J3 (já existentes), o que fizemos foi uma extensa manipulação algébrica das equações do artigo “Solution of the Problem of an Artificial Satellite Theory without Drag” (Brouwer, 1959), encontrando os termos em J5 que complementam as equações do artigo “Orbit Analysis for SEASAT-A” (Cutting et. al., 1978). Todas as passagens desta manipulação não foram colocadas, visto que não houve uso de nenhum instrumental matemático mais complexo que derivada de 1ª ordem. Mostraremos agora apenas o raciocínio utilizado para a obtenção destas equações.

Partindo da seguinte equação do artigo do Brouwer:

$$g'' = \frac{3}{2} n_0 t \gamma_2' (-1 + 5 \cos^2 i) + \frac{1}{4} \frac{\gamma_3'}{\gamma_2'} \left(\frac{\text{sen} I''}{e''} - \frac{e'' \theta^2}{\text{sen} I''} \right) \cos g'' \quad (3.1)$$

onde as seguintes constantes são definidas no referido artigo:

$$\gamma_2' = \frac{K_2}{a^{n^2} \eta^4} \qquad \gamma_3' = \frac{A_{3,0}}{a^{n^3} \eta^6}$$

$$a'' = a$$

$$e'' = e$$

$$n_0 = n$$

$$I'' = i$$

$$\eta = (1 - e''^2)^{1/2} = (1 - e^2)^{1/2}$$

$$G'' = \omega$$

$$\theta = \cos I'' = \cos i$$

Obteremos a seguinte equação:

$$\omega = 6nt \frac{K_2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) + \frac{1}{4} \frac{A_{3,0}}{a(1-e^2)K_2} \left(\frac{\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i}\right) \cos \omega \quad (3.2)$$

E do artigo de Cutting et. al., temos que:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left\{1 + \frac{J_3R_T}{2J_2a(1-e^2)} \left(\frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i}\right) \text{sen} \omega\right\} \quad (3.3)$$

Sabemos que ω (argumento do perigeu) é uma função linear do tempo definida como $\omega = \omega_0 + n_\omega t$ e, portanto, se derivarmos o primeiro termo de (3.2), teremos:

$$\dot{\omega} = 6n \frac{K_2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) = n_\omega \quad (3.4)$$

Comparando este resultado com o primeiro termo da equação (3.3), concluímos que:

$$K_2 = \frac{J_2 R_T^2}{2} \quad \text{e} \quad n_\omega = \frac{3nJ_2 R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \quad (3.5)$$

Agora, se desenvolvermos o segundo membro da equação (3.2), obteremos:

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{4} n_\omega \frac{A_{3,0}}{a(1-e^2)K_2} \left(\frac{\text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i}\right) \text{sen} \omega \quad (3.6)$$

onde K_2 e n_ω foram obtidos em (3.5).

Comparando (3.6) com o segundo termo de (3.3), encontramos que:

$$A_{3,0} = -J_3 R_T^3$$

Agora que encontramos o valor de K_2 e $A_{3,0}$ e que sabemos que $\omega = \omega_0 + n_\omega t$, podemos acrescentar à equação (3.2) o termo de longo período devido a J_5 . Só trabalharemos com este termo daqui em diante:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 \gamma_5'}{64 \gamma_2'} \left[\left(\frac{\eta^2 \text{seni}}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{seni}} \right) (4 + 3e^2) + e \text{seni} (26 + 9e^2) \right] \times \\ \left(1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{15 \gamma_5'}{32 \gamma_2'} e \cos^2 i \text{seni} (4 + 3e^2) \times \\ \left[3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \left[\frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right] \right] \end{array} \right\} \cos \omega \quad (3.7)$$

onde a seguinte constante está definida no próprio artigo do Brouwer:

$$\gamma_5' = \frac{A_{5,0}}{a^{15} \eta^{10}}$$

Substituindo-a em (3.7), juntamente com o valor de K_2 em termos de J_2 :

$$\omega = \frac{2A_{5,0}}{J_2 R_T^2 a^3 (1 - e^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{64} \left[\left(\frac{\eta^2 \text{seni}}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{seni}} \right) (4 + 3e^2) + e \text{seni} (26 + 9e^2) \right] \times \\ \left(1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{15}{32} e \cos^2 i \text{seni} (4 + 3e^2) \times \\ \left[3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \left[\frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right] \right] \end{array} \right\} \cos \omega \quad (3.8)$$

Derivando (3.8), teremos:

$$\dot{\omega} = -n_\omega \frac{A_{5,0}}{J_2 R_T^2 a^3 (1 - e^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{64} \left[\left(\frac{\eta^2 \text{seni}}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{seni}} \right) (4 + 3e^2) + e \text{seni} (26 + 9e^2) \right] \times \\ \left(1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \frac{15}{32} e \cos^2 i \text{seni} (4 + 3e^2) \times \\ \left[3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \left[\frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right] \right] \end{array} \right\} \text{sen} \omega \quad (3.9)$$

Este termo ainda não existe no artigo de Cutting et. al. (1978); porém, analisando os termos nele existentes, podemos definir $A_{5,0}$ em termos de J_5 , por analogia, e depois fazer o teste da veracidade do termo obtido, em programa codificado em computador, utilizando linguagem Fortran.

Sabemos que $K_2 = \frac{J_2 R_T^2}{2}$, $A_{3,0} = -J_3 R_T^3$ e que $a^n (1 - e^2)^n$ e R_T^n seguem a ordem de J_n , ou seja, para J_2 temos um termo em denominador igual a $a^2 (1 - e^2)^2$ e um termo em numerador igual a R_T^2 e para J_3 o termo em denominador é $a^3 (1 - e^2)^3$ e o termo

em numerador é R_T^3 . Temos também que J_3 , perturbação de ordem ímpar, é acrescida de um sinal negativo. Desta forma, concluímos que:

$$A_{5,0} = -J_5 R_T^5$$

o que nos fornece para a equação (3.9) o seguinte:

$$\dot{\omega} = \frac{3nJ_2 R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \frac{J_5 R_T^3}{J_2 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{5}{64} \left[\left(\frac{\eta^2 \text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. (4 + 3e^2) + e \text{sen} i (26 + 9e^2) \right] \times \right. \\ \left. \left(1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \right. \\ \left. \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen} i (4 + 3e^2) \times \right. \\ \left. \left(3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \right\} \text{sen} \omega \quad (3.10)$$

E, incluindo a equação (3.10) na equação (3.3), encontramos a solução final, incluindo o termo em J_5 de forma explícita, obtido a partir de manipulação algébrica das equações da teoria de Brouwer. A solução final é:

$$\dot{\omega} = \frac{3nJ_2 R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i\right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{J_3 R_T}{2J_2 a(1-e^2)} \times \left(\frac{\text{sen}^2 i - e^2 \cos^2 i}{e \text{sen} i} \right) \text{sen} \omega + \\ \frac{J_5 R_T^3}{J_2 a^3 (1-e^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{5}{64} \left[\left(\frac{\eta^2 \text{sen} i}{e} - \frac{e \cos^2 i}{\text{sen} i} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. (4 + 3e^2) + e \text{sen} i (26 + 9e^2) \right] \times \right. \\ \left(1 - 9 \cos^2 i - \frac{24 \cos^4 i}{1 - 5 \cos^2 i} \right) - \\ - \frac{15}{32} e \cos^2 i \times \text{sen} i (4 + 3e^2) \times \\ \left(3 + \frac{16 \cos^2 i}{1 - 5 \cos^2 i} + \frac{40 \cos^4 i}{(1 - 5 \cos^2 i)^2} \right) \end{array} \right\} \text{sen} \omega \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

O mesmo processo foi feito para encontrar o termo em J_5 de $\frac{de}{dt}$, pois a excentricidade é o outro elemento frozen com o qual estamos trabalhando neste projeto de pesquisa. Partindo da seguinte equação do artigo do Brouwer (já substituindo os valores de todas as constantes que foram citadas anteriormente):

$$e = \left[\frac{1}{4} \frac{A_{3,0}}{aK_2} \text{seni} + \frac{5}{64} \frac{A_{2,0}}{a^3(1-e^2)^3 K_2} \text{seni}(4+3e^2) \left(\frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \right] \text{sen}\omega \quad (3.12)$$

Não esquecendo como ω é definido e que n_ω se mantém constante, ao derivar (3.12), obteremos:

$$\dot{e} = -\frac{3nJ_2R_T^2}{a^2(1-e^2)^2} \left(1 - \frac{5}{4} \text{sen}^2 i \right) \left[\begin{array}{l} \frac{J_3R_T}{2J_2a} \text{seni} + \frac{5}{32} \frac{J_5R_T^3}{J_2a^3(1-e^2)^3} \times \\ \text{seni}(4+3e^2) \left(\frac{1-9\cos^2 i - 24\cos^4 i}{1-5\cos^2 i} \right) \end{array} \right] \cos\omega \quad (3.13)$$

As equações (3.11) e (3.13) foram testadas em programa codificado em computador, em linguagem Fortran, e os resultados delas obtidos foram comparados com os resultados para as mesmas equações incluindo somente os termos até J3. Os resultados serão apresentados no capítulo seguinte.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

Incluir os termos em J_5 nas perturbações devidas ao geopotencial indica que esperamos obter maior precisão dos elementos “congelados” argumento do perigeu e excentricidade, ou seja, esperamos, antes de tudo, uma maior capacidade de previsão na variação destes elementos, quando comparadas à variação incluindo somente os termos até J_3 .

A seguir, serão mostrados os gráficos com as curvas obtidas para diversas condições iniciais do argumento do perigeu. A elaboração destes gráficos foi baseada nos dados obtidos como resultado da codificação em computador, em linguagem Fortran, das equações (3.11) e (3.13), do capítulo 3. Na obtenção dos dados utilizados para a elaboração do Gráfico 1 não incluímos os termos em J_5 . Tais termos só foram incluídos no programa para obtenção dos dados relacionados ao Gráfico 2.

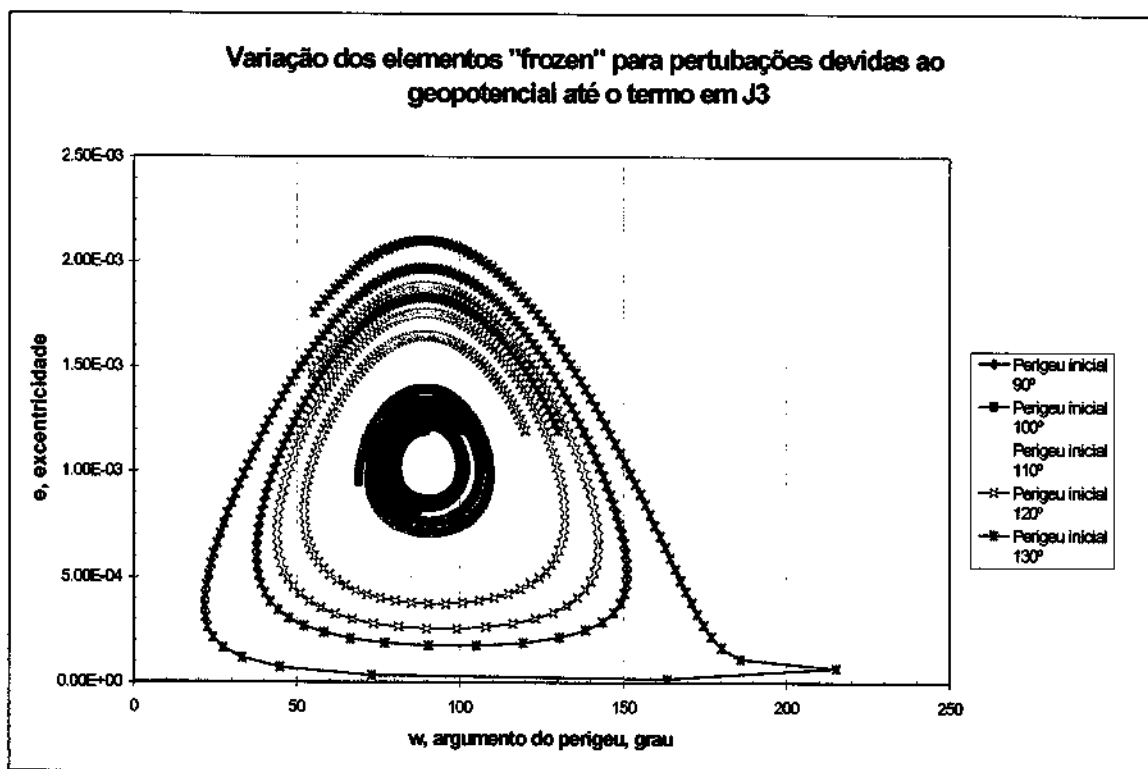


Gráfico 1 – Mostra o comportamento da excentricidade e do argumento do perigeu para diversas condições iniciais e só inclui perturbações até a ordem de J_3 .

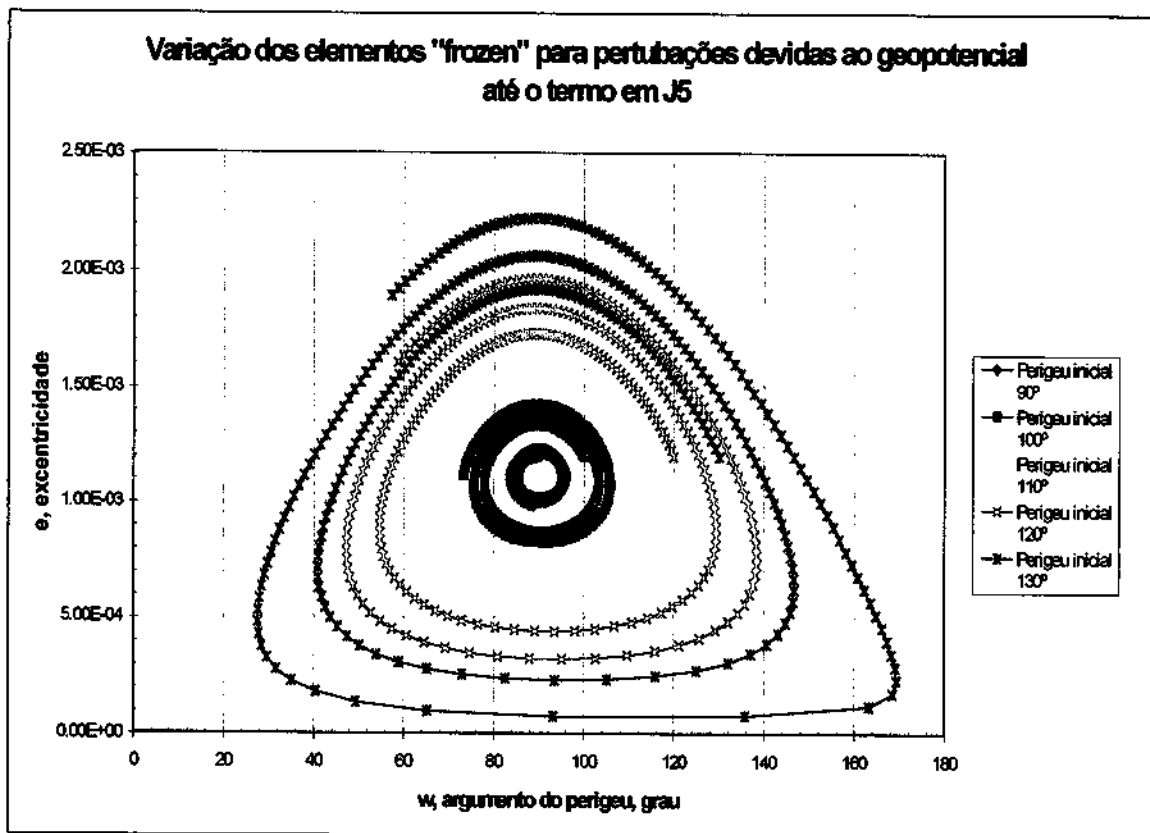


Gráfico 2 – Mostra o comportamento da excentricidade e do argumento do perigeu para diversas condições iniciais e inclui perturbações até a ordem de J5.

Os gráficos 1 e 2 mostram a evolução do satélite CBERS –1 (China Brazil Earth Satellite Resources) e foram obtidos para os seguintes valores dos elementos orbitais do referido satélite, para uma dada data:

- Semi-eixo maior (a) = 7148763.507291386 km
- excentricidade (e) = 0.001193381487911
- inclinação (i) = 98.4895748835131°
- argumento do perigeu (ω): começando com 90° e variando até 130°

Pela análise do gráfico é razoavelmente perceptível que as curvas do Gráfico 2 têm menos amplitude de variação para os elementos frozen “ ω ” e “e” que as curvas do Gráfico 1. Mas como só a análise gráfica não é suficiente para assegurarmos que o acréscimo de J5 realmente melhora a precisão, fizemos uma tabela, a partir das planilhas de dados usadas como base para a obtenção dos gráficos (podem ser conferidas no Anexo 6, página 41 deste Relatório), que indica as variações de amplitude do argumento do perigeu e

da excentricidade para os dois gráficos e para diversas condições iniciais do argumento do perigeu. Por esta tabela, percebe-se que as amplitudes diminuem (em valores numéricos) quando são incluídas as perturbações devidas ao geopotencial até a ordem de J_5 .

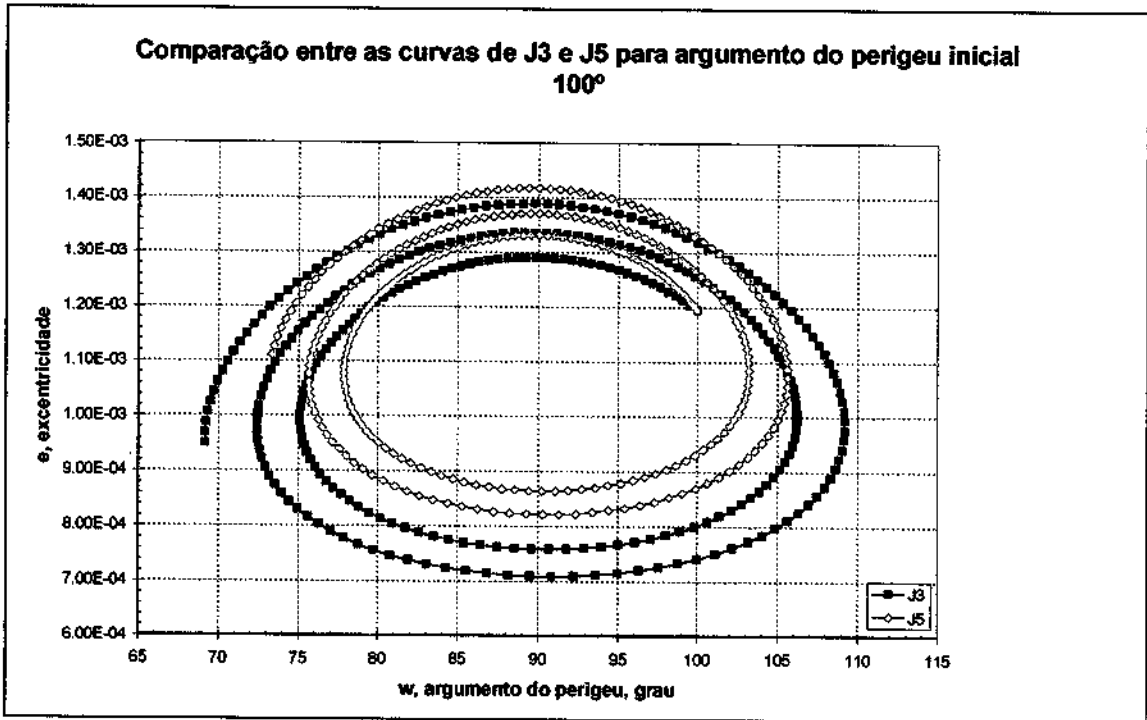
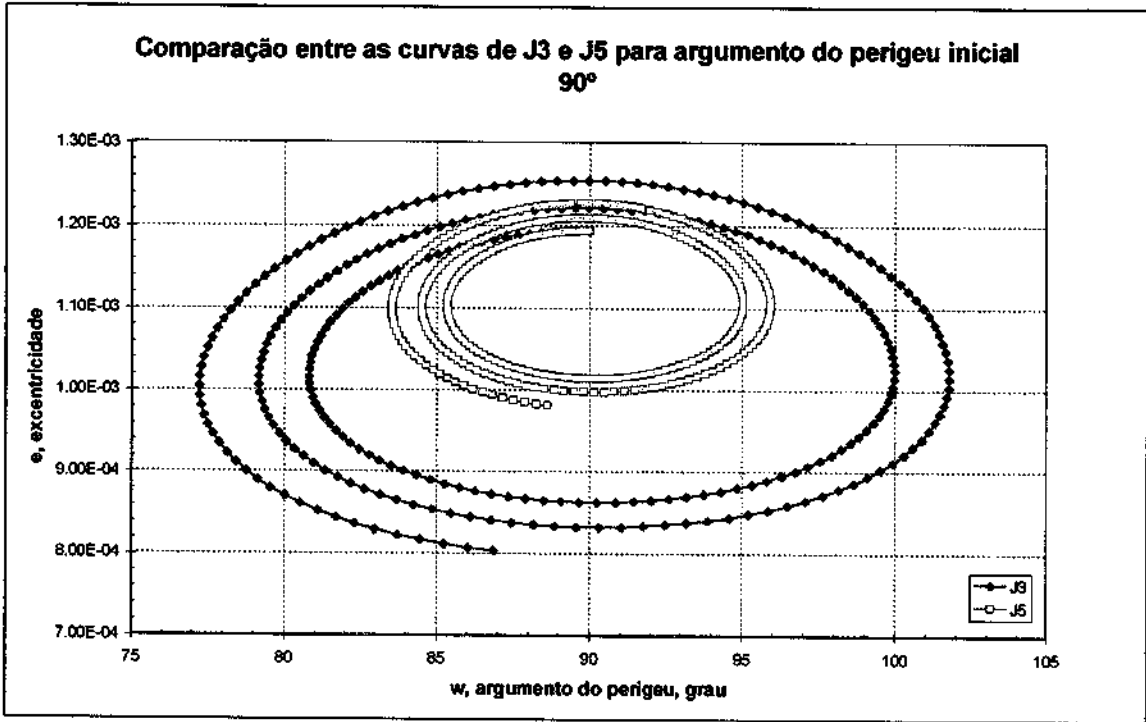
Condições Iniciais		Perturbações devidas a J_3 (Gráfico 1)				Perturbações devidas a J_3+J_5 (Gráfico 2)			
e_0	ω_0	Mín. Δe	Máx. Δe	Mín. $\Delta \omega$	Máx. $\Delta \omega$	Mín. Δe	Máx. Δe	Mín. $\Delta \omega$	Máx. $\Delta \omega$
0.0011934	90.0°	-2.43E-04	2.08E-04	-11.9387	13.2042	-1.30E-04	-1.16E-04	-5.7368	6.6625
0.0011934	100.0°	-3.83E-04	2.98E-04	-19.8636	20.1881	-3.36E-04	2.61E-04	-16.332	15.9948
0.0011934	110.0°	-3.56E-03	4.86E-04	-29.2081	35.1237	-6.55E-04	4.64E-04	-28.0073	30.0739
0.0011934	120.0°	-9.96E-04	6.30E-04	-47.0009	51.3552	-9.98E-04	6.47E-04	-44.2104	46.9441
0.0011934	130.0°	-1.33E-03	7.50E-04	-71.2391	122.1172	-1.35E-03	7.99E-04	-65.5166	76.2672

Tabela 1 – Tabela Comparativa entre os Resultados obtidos para J_3 e J_5

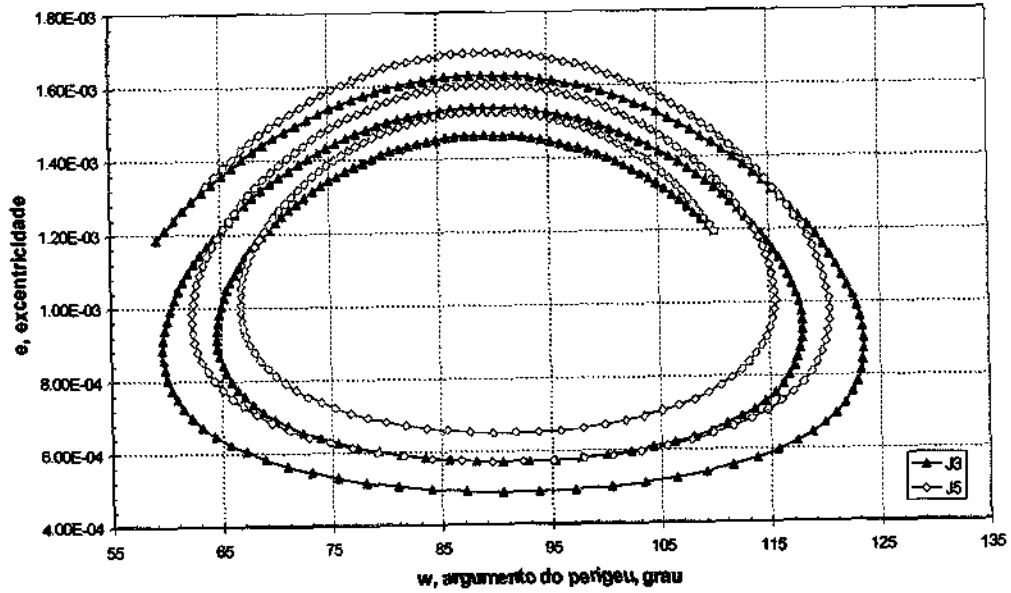
Por esta tabela percebemos que a amplitude da variação do argumento do perigeu com a inclusão de J_5 , tanto máxima quanto mínima, diminuiu em todos os casos, comparado com J_3 . Para valores muito maiores que 90° do argumento do perigeu (neste caso 130°), os valores com J_5 ainda completam o ciclo, ao passo que com J_3 o ciclo começa a se degradar (veja Gráfico 1). Ou seja, a inclusão do efeito devido a J_5 melhora a precisão na previsão do argumento do perigeu. Para a excentricidade, a diminuição na variação é mais sutil, mas ainda ocorre.

Em termos práticos, a teoria utilizando somente o termo J_3 pode induzir a necessidades equivocadas de manobras orbitais de correção. Supondo por exemplo que a missão requeira que o perigeu permaneça com valor $90^\circ \pm 10^\circ$, a teoria com J_3 previria uma manobra corretiva, ao passo que a teoria incluindo J_5 exclue a necessidade de manobra, vide primeira linha da Tabela 1. Conclui-se portanto que é imperativo a inclusão do termo em J_5 para aumentar a precisão no planejamento de manobras do centro de controle.

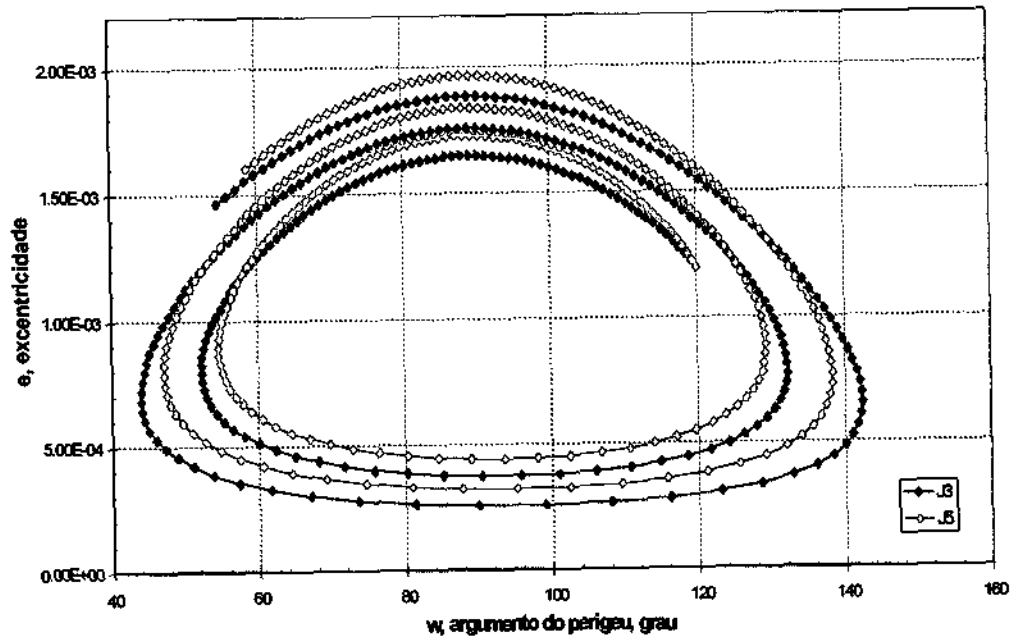
Mostra-se em seguida, para efeitos de comparação, gráficos das curvas só com J_3 e com a inclusão de J_5 para cada par de curvas correspondentes.



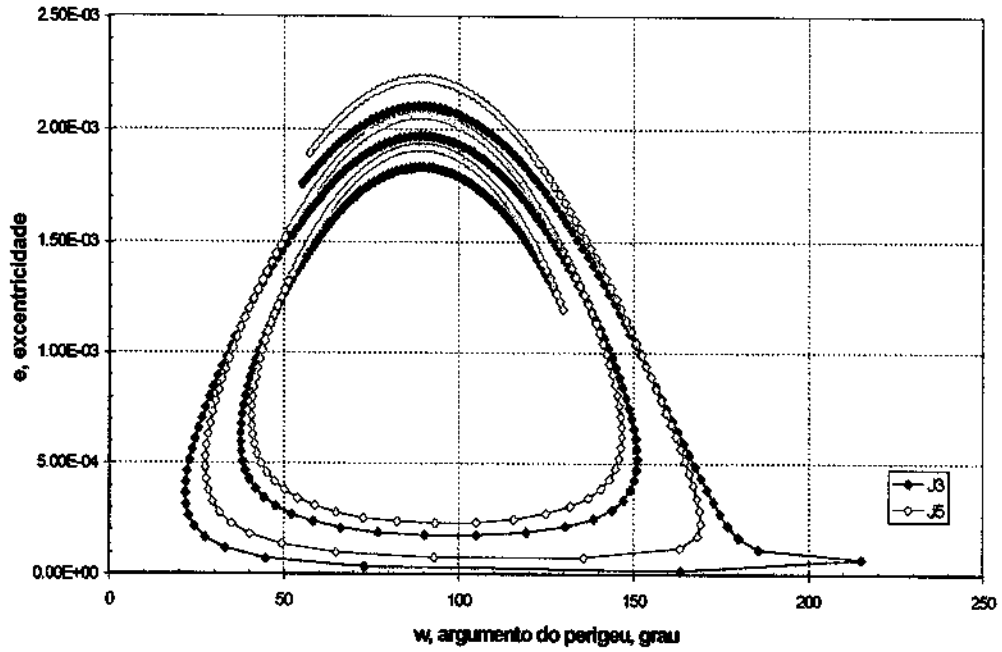
Comparação entre as curvas de J3 e J5 para argumento do perigeu inicial 110°



Comparação entre as curvas de J3 e J5 para argumento do perigeu inicial 120°



Comparação entre as curvas de J3 e J5 para argumento do perigeu inicial 130°



5. CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho consistiu em desenvolver um modelo para obter de forma explícita as expressões de longo período da teoria de Brouwer que fornecem as perturbações devidas ao geopotencial até o termo J_5 , através de um trabalho suplementar, refazendo-se o cálculo e incluindo tal perturbação. Os termos ímpares, que causam efeitos de longo período, dão origem às chamadas órbitas congeladas (“frozen orbits”) cuja teoria está sendo aplicada em missões espaciais, especialmente no satélite CBERS-1 (“China Brazil Earth Resources Satellite”). Tais órbitas mantêm (ou tentam manter) o perigeu e a excentricidade da órbita constantes, de forma que para uma dada latitude o satélite passa sempre com a mesma altitude, beneficiando os usuários devido a essa regularidade.

Neste trabalho, foram desenvolvidos analiticamente os termos das perturbações de longo período até J_5 , através da manipulação algébrica da teoria de Brouwer. Este modelo foi codificado em computador, em linguagem Fortran. O programa foi testado para várias situações sendo confrontado com os dados existentes, e os resultados obtidos com ele condizem com a realidade. O desenvolvimento deste modelo permite obter previsões mais precisas para a evolução da órbita do CBERS-1 e de satélites similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS).

Ao incluir um termo a mais nas perturbações devidas ao geopotencial (no caso J_5) o que se pretendia era a melhora na precisão da previsão dos elementos “congelados” argumento do perigeu e excentricidade, fato que se verificou nos diversos testes e gráficos (conforme Tabela 1 do Capítulo 4). Ou seja, realizou-se o objetivo deste projeto de pesquisa: obter um modelo onde as expressões de longo período da teoria de Brouwer até J_5 estivessem presentes de forma explícita e que fosse coerente com o que se espera quando há o aumento da precisão, ou seja, diminuição dos erros.

As menores amplitudes quando se inclui J_5 permitem uma maior precisão na previsão dos elementos frozen “ ω ” e “ e ”, o que significa maior precisão não só no cálculo da manobra, mas também na previsão da manobra, o que contribuirá para um melhor desempenho nas operações do Centro de Controle de Satélites do INPE.

Para trabalhos futuros o que se pretende é incluir as perturbações devidas ao arrasto atmosférico, buscando uma precisão cada vez mais alta para as manobras realizadas pelo Centro de Controle de Satélites para os satélites CBERS-1 e outros similares (SPOT, Landsat, ERS e IRS), otimizando, desta forma, as previsões e precisões das mesmas.

6. ANEXOS

6.1 CRONOGRAMA DE TRABALHO REFERENTE AO PROJETO

Fases*	Conteúdo**
1. Determinação de Órbita: Problema Direto e Problema Inverso.	Estudo das relações biunívocas entre as coordenadas iniciais $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ e os elementos orbitais $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau)$ de satélite.
2. Geopotencial.	Estudo do potencial devido ao geopotencial, que depende das características da Terra, em termos da latitude ϕ e da longitude λ , introduzindo os Polinômios de Legendre e Polinômios Associados de Legendre.
3. Introdução ao Problema Restrito de Três Corpos.	Definição de problema de três corpos e estudo das condições impostas (tornando-o restrito) para a sua solução.
4. Método da Variação das Constantes.	Breve recordação de um dos métodos matemáticos utilizados para a resolução de equações diferenciais ordinárias.
5. Equações de Lagrange.	Se a perturbação deriva de um potencial, como ocorre aqui, as equações que descrevem o movimento podem ser colocadas na forma conhecida como Equações de Lagrange, também apresentadas em sua forma Hamiltoniana.
6. Perturbações seculares, de longo e de curto período.	Definição dos termos, em função da variação temporal, sendo as perturbações de longo período de interesse para este projeto.
7. Noções sobre a teoria de Brouwer.	Motivações para o desenvolvimento da teoria por Brouwer e métodos utilizados para a resolução das equações matemáticas dela originadas.
8. Cálculo das perturbações de longo período até J5 pela teoria de Brouwer.	Partindo das equações de interesse deste projeto da teoria de Brouwer, comparando-as com as equações usadas como base para as "órbitas congeladas", foram desenvolvidos analiticamente os termos de longo período até J5.
9. Conclusões e Elaboração do Relatório Final.	Montagem do relatório, após discussão dos resultados obtidos, compilando todas as fases estudadas anteriormente.

* Tópicos Estudados

** Breve descrição dos tópicos estudados

Duração das Fases:

- Fases 1, 2, 3 e 4: três meses
- Fases 5 e 6: dois meses
- Fases 7 e 8: três meses e meio
- Fase 9: um mês e meio

6.2 PLANILHAS COM OS DADOS DE ORIGEM DOS GRÁFICOS 1 E 2 (CAPÍTULO 4)

DADOS DE ORIGEM DO GRÁFICO 1 (CAPÍTULO 4)										
	w (grau)	e	w (grau)	e	w (grau)	e	w (grau)	e	w (grau)	e
1	90.0000	1.19E-03	100.0000	1.19E-03	110.0000	1.19E-03	120.0000	1.19E-03	130.0000	1.19E-03
2	89.6040	1.19E-03	99.5647	1.20E-03	109.4483	1.21E-03	119.2581	1.22E-03	128.9999	1.23E-03
3	89.2079	1.19E-03	99.1131	1.21E-03	108.8680	1.23E-03	118.4830	1.25E-03	127.9720	1.26E-03
4	88.8124	1.19E-03	98.6460	1.22E-03	108.2611	1.25E-03	117.6777	1.27E-03	126.9191	1.29E-03
5	88.4182	1.19E-03	98.1646	1.23E-03	107.6295	1.26E-03	116.8446	1.30E-03	125.8436	1.33E-03
6	88.0261	1.19E-03	97.6698	1.24E-03	106.9749	1.28E-03	115.9860	1.32E-03	124.7476	1.36E-03
7	87.6366	1.19E-03	97.1627	1.24E-03	106.2989	1.30E-03	115.1040	1.35E-03	123.6330	1.39E-03
8	87.2504	1.19E-03	96.6441	1.25E-03	105.6030	1.31E-03	114.2005	1.37E-03	122.5016	1.42E-03
9	86.8684	1.18E-03	96.1150	1.26E-03	104.8887	1.33E-03	113.2772	1.39E-03	121.3548	1.45E-03
10	86.4911	1.18E-03	95.5763	1.26E-03	104.1574	1.34E-03	112.3357	1.41E-03	120.1941	1.48E-03
11	86.1192	1.18E-03	95.0289	1.27E-03	103.4102	1.35E-03	111.3774	1.43E-03	119.0205	1.50E-03
12	85.7536	1.17E-03	94.4735	1.27E-03	102.6484	1.36E-03	110.4037	1.45E-03	117.8351	1.53E-03
13	85.3949	1.17E-03	93.9112	1.28E-03	101.8731	1.38E-03	109.4158	1.47E-03	116.6391	1.55E-03
14	85.0438	1.16E-03	93.3426	1.28E-03	101.0855	1.39E-03	108.4148	1.49E-03	115.4332	1.58E-03
15	84.7012	1.16E-03	92.7687	1.28E-03	100.2864	1.40E-03	107.4018	1.50E-03	114.2182	1.60E-03
16	84.3676	1.16E-03	92.1901	1.29E-03	99.4769	1.41E-03	106.3778	1.52E-03	112.9950	1.62E-03
17	84.0440	1.15E-03	91.6078	1.29E-03	98.6579	1.42E-03	105.3436	1.54E-03	111.7641	1.64E-03
18	83.7310	1.14E-03	91.0224	1.29E-03	97.8304	1.42E-03	104.3001	1.55E-03	110.5283	1.66E-03
19	83.4294	1.14E-03	90.4348	1.29E-03	96.9951	1.43E-03	103.2481	1.56E-03	109.2820	1.68E-03
20	83.1400	1.13E-03	89.8457	1.29E-03	96.1528	1.44E-03	102.1884	1.58E-03	108.0318	1.70E-03
21	82.8637	1.13E-03	89.2559	1.29E-03	95.3045	1.44E-03	101.1216	1.59E-03	106.7763	1.72E-03
22	82.6011	1.12E-03	88.6662	1.29E-03	94.4508	1.45E-03	100.0485	1.60E-03	105.5158	1.73E-03
23	82.3532	1.11E-03	88.0774	1.29E-03	93.5925	1.45E-03	98.9696	1.61E-03	104.2508	1.75E-03
24	82.1207	1.11E-03	87.4901	1.29E-03	92.7304	1.46E-03	97.8856	1.62E-03	102.9817	1.76E-03
25	81.9044	1.10E-03	86.9053	1.28E-03	91.8651	1.46E-03	96.7971	1.62E-03	101.7089	1.77E-03
26	81.7052	1.09E-03	86.3237	1.28E-03	90.9974	1.46E-03	95.7046	1.63E-03	100.4327	1.78E-03
27	81.5239	1.08E-03	85.7460	1.28E-03	90.1280	1.46E-03	94.6086	1.63E-03	99.1535	1.79E-03
28	81.3613	1.07E-03	85.1732	1.27E-03	89.2575	1.46E-03	93.5097	1.64E-03	97.8716	1.80E-03
29	81.2183	1.07E-03	84.6060	1.27E-03	88.3867	1.46E-03	92.4085	1.64E-03	96.5873	1.81E-03
30	81.0957	1.06E-03	84.0452	1.26E-03	87.5162	1.46E-03	91.3053	1.64E-03	95.3009	1.82E-03
31	80.9943	1.05E-03	83.4917	1.26E-03	86.6468	1.46E-03	90.2007	1.65E-03	94.0127	1.82E-03
32	80.9148	1.04E-03	82.9464	1.25E-03	85.7791	1.45E-03	89.0952	1.65E-03	92.7230	1.82E-03
33	80.8582	1.03E-03	82.4102	1.25E-03	84.9138	1.45E-03	87.9893	1.64E-03	91.4321	1.83E-03
34	80.8251	1.02E-03	81.8840	1.24E-03	84.0518	1.45E-03	86.8834	1.64E-03	90.1401	1.83E-03
35	80.8163	1.02E-03	81.3687	1.23E-03	83.1936	1.44E-03	85.7780	1.64E-03	88.8475	1.83E-03
36	80.8324	1.01E-03	80.8654	1.22E-03	82.3400	1.43E-03	84.6737	1.64E-03	87.5544	1.83E-03
37	80.8742	9.99E-04	80.3749	1.21E-03	81.4919	1.43E-03	83.5709	1.63E-03	86.2611	1.83E-03
38	80.9423	9.90E-04	79.8984	1.21E-03	80.6499	1.42E-03	82.4701	1.63E-03	84.9678	1.82E-03
39	81.0372	9.82E-04	79.4369	1.20E-03	79.8150	1.41E-03	81.3718	1.62E-03	83.6749	1.82E-03
40	81.1594	9.73E-04	78.9915	1.19E-03	78.9880	1.40E-03	80.2766	1.61E-03	82.3826	1.81E-03
41	81.3093	9.65E-04	78.5634	1.18E-03	78.1697	1.39E-03	79.1849	1.60E-03	81.0911	1.80E-03
42	81.4873	9.57E-04	78.1538	1.17E-03	77.3612	1.38E-03	78.0975	1.59E-03	79.8007	1.80E-03
43	81.6936	9.49E-04	77.7638	1.15E-03	76.5632	1.37E-03	77.0148	1.58E-03	78.5118	1.79E-03
44	81.9283	9.41E-04	77.3948	1.14E-03	75.7770	1.35E-03	75.9374	1.57E-03	77.2246	1.78E-03
45	82.1914	9.34E-04	77.0481	1.13E-03	75.0035	1.34E-03	74.8661	1.55E-03	75.9393	1.76E-03
46	82.4829	9.26E-04	76.7251	1.12E-03	74.2439	1.33E-03	73.8014	1.54E-03	74.6564	1.75E-03
47	82.8023	9.19E-04	76.4271	1.11E-03	73.4994	1.31E-03	72.7442	1.53E-03	73.3762	1.74E-03
48	83.1494	9.13E-04	76.1557	1.09E-03	72.7713	1.30E-03	71.6951	1.51E-03	72.0989	1.72E-03
49	83.5236	9.06E-04	75.9123	1.08E-03	72.0609	1.28E-03	70.6550	1.49E-03	70.8250	1.70E-03
50	83.9240	9.00E-04	75.6985	1.07E-03	71.3697	1.27E-03	69.6247	1.47E-03	69.5549	1.69E-03
51	84.3499	8.94E-04	75.5160	1.05E-03	70.6991	1.25E-03	68.6052	1.46E-03	68.2889	1.67E-03
52	84.8000	8.89E-04	75.3664	1.04E-03	70.0510	1.23E-03	67.5974	1.44E-03	67.0275	1.65E-03

183	90.1549	9.97E-04	75.6930	1.05E-03	64.7521	1.19E-03	57.9217	1.39E-03	54.3554	1.62E-03
184	90.4838	9.97E-04	75.7663	1.03E-03	64.2810	1.17E-03	56.9531	1.36E-03	53.0288	1.59E-03
185	90.8121	9.98E-04	75.8826	1.02E-03	63.8527	1.14E-03	56.0076	1.33E-03	51.7086	1.55E-03
186	91.1385	9.99E-04	76.0436	1.00E-03	63.4708	1.11E-03	55.0875	1.30E-03	50.3955	1.52E-03
187	91.4620	1.00E-03	76.2506	9.91E-04	63.1392	1.09E-03	54.1953	1.26E-03	49.0902	1.48E-03
188	91.7812	1.00E-03	76.5051	9.77E-04	62.8622	1.06E-03	53.3340	1.23E-03	47.7935	1.44E-03
189	92.0951	1.00E-03	76.8084	9.64E-04	62.6444	1.04E-03	52.5069	1.20E-03	46.5065	1.41E-03
190	92.4024	1.01E-03	77.1616	9.51E-04	62.4910	1.01E-03	51.7175	1.16E-03	45.2301	1.37E-03
191	92.7023	1.01E-03	77.5656	9.38E-04	62.4075	9.84E-04	50.9702	1.12E-03	43.9656	1.33E-03
192	92.9935	1.01E-03	78.0212	9.25E-04	62.3999	9.57E-04	50.2697	1.09E-03	42.7144	1.28E-03
193	93.2751	1.01E-03	78.5287	9.13E-04	62.4749	9.30E-04	49.6215	1.05E-03	41.4781	1.24E-03
194	93.5462	1.02E-03	79.0883	9.02E-04	62.6394	9.04E-04	49.0320	1.01E-03	40.2586	1.20E-03
195	93.8058	1.02E-03	79.6997	8.91E-04	62.9013	8.77E-04	48.5085	9.77E-04	39.0580	1.15E-03
196	94.0532	1.02E-03	80.3623	8.81E-04	63.2686	8.51E-04	48.0594	9.38E-04	37.8790	1.11E-03
197	94.2876	1.03E-03	81.0748	8.71E-04	63.7502	8.25E-04	47.6948	9.00E-04	36.7246	1.06E-03
198	94.5084	1.03E-03	81.8358	8.62E-04	64.3553	8.00E-04	47.4262	8.61E-04	35.5983	1.02E-03
199	94.7149	1.04E-03	82.6431	8.54E-04	65.0935	7.75E-04	47.2674	8.22E-04	34.5045	9.72E-04
200	94.9065	1.04E-03	83.4939	8.47E-04	65.9745	7.51E-04	47.2344	7.83E-04	33.4484	9.24E-04
201	95.0829	1.05E-03	84.3850	8.40E-04	67.0080	7.27E-04	47.3467	7.44E-04	32.4363	8.76E-04
202	95.2436	1.05E-03	85.3126	8.35E-04	68.2034	7.05E-04	47.6270	7.05E-04	31.4762	8.28E-04
203	95.3883	1.06E-03	86.2722	8.30E-04	69.5690	6.83E-04	48.1030	6.66E-04	30.5779	7.79E-04
204	95.5167	1.06E-03	87.2591	8.26E-04	71.1119	6.63E-04	48.8075	6.28E-04	29.7537	7.29E-04
205	95.6287	1.07E-03	88.2678	8.23E-04	72.8367	6.45E-04	49.7802	5.90E-04	29.0196	6.79E-04
206	95.7241	1.07E-03	89.2926	8.22E-04	74.7450	6.28E-04	51.0684	5.53E-04	28.3963	6.29E-04
207	95.8027	1.08E-03	90.3274	8.21E-04	76.8343	6.13E-04	52.7287	5.17E-04	27.9114	5.78E-04
208	95.8648	1.08E-03	91.3659	8.21E-04	79.0970	6.00E-04	54.8276	4.82E-04	27.6022	5.27E-04
209	95.9101	1.09E-03	92.4017	8.23E-04	81.5196	5.89E-04	57.4416	4.49E-04	27.5204	4.76E-04
210	95.9390	1.10E-03	93.4284	8.25E-04	84.0819	5.80E-04	60.6555	4.18E-04	27.7398	4.25E-04
211	95.9514	1.10E-03	94.4398	8.28E-04	86.7571	5.74E-04	64.5558	3.90E-04	28.3690	3.75E-04
212	95.9476	1.11E-03	95.4298	8.33E-04	89.5122	5.71E-04	69.2189	3.65E-04	29.5741	3.24E-04
213	95.9278	1.11E-03	96.3927	8.38E-04	92.3089	5.70E-04	74.6883	3.45E-04	31.6204	2.74E-04
214	95.8923	1.12E-03	97.3232	8.45E-04	95.1062	5.73E-04	80.9412	3.29E-04	34.9551	2.25E-04
215	95.8414	1.13E-03	98.2164	8.52E-04	97.8619	5.78E-04	87.8505	3.20E-04	40.3791	1.78E-04
216	95.7754	1.13E-03	99.0682	8.60E-04	100.5358	5.86E-04	95.1608	3.18E-04	49.4234	1.34E-04
217	95.6947	1.14E-03	99.8749	8.69E-04	103.0917	5.96E-04	102.5062	3.23E-04	65.1571	9.64E-05
218	95.5997	1.14E-03	100.6332	8.79E-04	105.4995	6.09E-04	109.4856	3.36E-04	93.2155	7.22E-05
219	95.4907	1.15E-03	101.3408	8.90E-04	107.7360	6.25E-04	115.7659	3.55E-04	135.8150	7.55E-05
220	95.3682	1.15E-03	101.9957	9.01E-04	109.7852	6.42E-04	121.1540	3.80E-04	163.2926	1.17E-04
221	95.2327	1.16E-03	102.5965	9.13E-04	111.6381	6.62E-04	125.6026	4.10E-04	188.4355	1.72E-04
222	95.0846	1.17E-03	103.1424	9.26E-04	113.2918	6.83E-04	129.1678	4.43E-04	169.3041	2.28E-04
223	94.9245	1.17E-03	103.6329	9.39E-04	114.7483	7.06E-04	131.9575	4.80E-04	169.0076	2.85E-04
224	94.7527	1.18E-03	104.0682	9.52E-04	116.0136	7.30E-04	134.0923	5.18E-04	168.2375	3.41E-04
225	94.5699	1.18E-03	104.4485	9.66E-04	117.0960	7.55E-04	135.6857	5.58E-04	167.2292	3.98E-04
226	94.3765	1.18E-03	104.7747	9.81E-04	118.0057	7.81E-04	136.8351	5.99E-04	166.0844	4.54E-04
227	94.1731	1.19E-03	105.0476	9.95E-04	118.7541	8.08E-04	137.6212	6.41E-04	164.8542	5.10E-04
228	93.9601	1.19E-03	105.2686	1.01E-03	119.3525	8.36E-04	138.1091	6.84E-04	163.5669	5.65E-04
229	93.7382	1.20E-03	105.4389	1.03E-03	119.8125	8.64E-04	138.3511	7.27E-04	162.2395	6.20E-04
230	93.5079	1.20E-03	105.5602	1.04E-03	120.1452	8.93E-04	138.3889	7.70E-04	160.8830	6.75E-04
231	93.2696	1.20E-03	105.6341	1.06E-03	120.3611	9.22E-04	138.2562	8.13E-04	159.5045	7.29E-04
232	93.0241	1.21E-03	105.6624	1.07E-03	120.4700	9.51E-04	137.9798	8.56E-04	158.1091	7.83E-04
233	92.7717	1.21E-03	105.6467	1.09E-03	120.4811	9.80E-04	137.5816	8.98E-04	156.7004	8.37E-04
234	92.5131	1.21E-03	105.5889	1.10E-03	120.4029	1.01E-03	137.0796	9.41E-04	155.2810	8.90E-04
235	92.2489	1.22E-03	105.4908	1.12E-03	120.2431	1.04E-03	136.4883	9.83E-04	153.8529	9.42E-04
236	91.9795	1.22E-03	105.3542	1.13E-03	120.0087	1.07E-03	135.8200	1.02E-03	152.4176	9.94E-04
237	91.7056	1.22E-03	105.1810	1.15E-03	119.7081	1.10E-03	135.0846	1.07E-03	150.9762	1.04E-03
238	91.4277	1.22E-03	104.9728	1.16E-03	119.3412	1.12E-03	134.2908	1.11E-03	149.5297	1.09E-03
239	91.1464	1.22E-03	104.7315	1.18E-03	118.9192	1.15E-03	133.4455	1.15E-03	148.0788	1.14E-03
240	90.8622	1.22E-03	104.4587	1.19E-03	118.4450	1.18E-03	132.5549	1.19E-03	146.6242	1.19E-03
241	90.5758	1.23E-03	104.1560	1.21E-03	117.9228	1.21E-03	131.6241	1.23E-03	145.1663	1.24E-03
242	90.2876	1.23E-03	103.8251	1.22E-03	117.3567	1.23E-03	130.6576	1.26E-03	143.7055	1.29E-03
243	89.9982	1.23E-03	103.4674	1.24E-03	116.7502	1.26E-03	129.6592	1.30E-03	142.2421	1.34E-03
244	89.7082	1.23E-03	103.0845	1.25E-03	116.1065	1.29E-03	128.6323	1.34E-03	140.7765	1.38E-03

245	89.4182	1.23E-03	102.6778	1.26E-03	115.4287	1.31E-03	127.5797	1.37E-03	139.3088	1.43E-03
246	89.1287	1.23E-03	102.2487	1.27E-03	114.7194	1.34E-03	126.5039	1.41E-03	137.8394	1.47E-03
247	88.8404	1.22E-03	101.7986	1.29E-03	113.9811	1.36E-03	125.4072	1.44E-03	136.3683	1.51E-03
248	88.5537	1.22E-03	101.3286	1.30E-03	113.2162	1.38E-03	124.2916	1.46E-03	134.8957	1.55E-03
249	88.2693	1.22E-03	100.8401	1.31E-03	112.4265	1.41E-03	123.1588	1.51E-03	133.4217	1.59E-03
250	87.9877	1.22E-03	100.3343	1.32E-03	111.6141	1.43E-03	122.0103	1.54E-03	131.9465	1.63E-03
251	87.7095	1.22E-03	99.8122	1.33E-03	110.7807	1.45E-03	120.8475	1.57E-03	130.4701	1.67E-03
252	87.4353	1.22E-03	99.2750	1.34E-03	109.9280	1.47E-03	119.6717	1.60E-03	128.9927	1.71E-03
253	87.1656	1.21E-03	98.7238	1.35E-03	109.0573	1.49E-03	118.4840	1.63E-03	127.5142	1.75E-03
254	86.9011	1.21E-03	98.1596	1.36E-03	108.1701	1.51E-03	117.2853	1.66E-03	126.0349	1.78E-03
255	86.6424	1.21E-03	97.5835	1.37E-03	107.2677	1.53E-03	116.0767	1.68E-03	124.5546	1.81E-03
256	86.3899	1.20E-03	96.9963	1.37E-03	106.3513	1.54E-03	114.8588	1.71E-03	123.0736	1.85E-03
257	86.1443	1.20E-03	96.3990	1.38E-03	105.4219	1.56E-03	113.6326	1.73E-03	121.5917	1.88E-03
258	85.9062	1.20E-03	95.7925	1.39E-03	104.4807	1.58E-03	112.3986	1.76E-03	120.1092	1.91E-03
259	85.6762	1.19E-03	95.1777	1.39E-03	103.5285	1.59E-03	111.1575	1.78E-03	118.6259	1.94E-03
260	85.4548	1.19E-03	94.5555	1.40E-03	102.5664	1.60E-03	109.9099	1.80E-03	117.1420	1.96E-03
261	85.2427	1.18E-03	93.9268	1.40E-03	101.5951	1.62E-03	108.6563	1.82E-03	115.6574	1.99E-03
262	85.0404	1.18E-03	93.2923	1.41E-03	100.6155	1.63E-03	107.3972	1.84E-03	114.1722	2.02E-03
263	84.8485	1.17E-03	92.6529	1.41E-03	99.6284	1.64E-03	106.1331	1.85E-03	112.6865	2.04E-03
264	84.6675	1.17E-03	92.0093	1.41E-03	98.6345	1.65E-03	104.8644	1.87E-03	111.2001	2.06E-03
265	84.4981	1.16E-03	91.3624	1.42E-03	97.6345	1.66E-03	103.5915	1.88E-03	109.7132	2.08E-03
266	84.3409	1.16E-03	90.7130	1.42E-03	96.6291	1.66E-03	102.3148	1.90E-03	108.2258	2.10E-03
267	84.1963	1.15E-03	90.0618	1.42E-03	95.6190	1.67E-03	101.0347	1.91E-03	106.7378	2.12E-03
268	84.0649	1.15E-03	89.4096	1.42E-03	94.6047	1.68E-03	99.7515	1.92E-03	105.2493	2.14E-03
269	83.9473	1.14E-03	88.7572	1.42E-03	93.5870	1.68E-03	98.4655	1.93E-03	103.7603	2.15E-03
270	83.8440	1.13E-03	88.1053	1.42E-03	92.5664	1.68E-03	97.1770	1.94E-03	102.2709	2.17E-03
271	83.7555	1.13E-03	87.4548	1.41E-03	91.5434	1.69E-03	95.8863	1.95E-03	100.7809	2.18E-03
272	83.6824	1.12E-03	86.8063	1.41E-03	90.5187	1.69E-03	94.5937	1.95E-03	99.2904	2.19E-03
273	83.6250	1.12E-03	86.1608	1.41E-03	89.4929	1.69E-03	93.2995	1.96E-03	97.7994	2.20E-03
274	83.5839	1.11E-03	85.5189	1.40E-03	88.4664	1.69E-03	92.0040	1.96E-03	96.3080	2.21E-03
275	83.5595	1.10E-03	84.8815	1.40E-03	87.4400	1.69E-03	90.7074	1.96E-03	94.8161	2.21E-03
276	83.5521	1.10E-03	84.2495	1.39E-03	86.4140	1.68E-03	89.4100	1.96E-03	93.3236	2.22E-03
277	83.5622	1.09E-03	83.6237	1.39E-03	85.3892	1.68E-03	88.1120	1.96E-03	91.8307	2.22E-03
278	83.5900	1.08E-03	83.0048	1.38E-03	84.3680	1.68E-03	86.8137	1.96E-03	90.3373	2.22E-03
279	83.6359	1.08E-03	82.3939	1.38E-03	83.3451	1.67E-03	85.5153	1.96E-03	88.8435	2.22E-03
280	83.7002	1.07E-03	81.7918	1.37E-03	82.3270	1.66E-03	84.2171	1.95E-03	87.3491	2.22E-03
281	83.7829	1.06E-03	81.1994	1.36E-03	81.3124	1.66E-03	82.9193	1.95E-03	85.8542	2.22E-03
282	83.8843	1.06E-03	80.6177	1.35E-03	80.3019	1.65E-03	81.6223	1.94E-03	84.3587	2.21E-03
283	84.0044	1.05E-03	80.0477	1.34E-03	79.2961	1.64E-03	80.3262	1.93E-03	82.8628	2.21E-03
284	84.1432	1.05E-03	79.4905	1.33E-03	78.2958	1.63E-03	79.0314	1.92E-03	81.3663	2.20E-03
285	84.3008	1.04E-03	78.9471	1.32E-03	77.3015	1.62E-03	77.7381	1.91E-03	79.8692	2.19E-03
286	84.4769	1.03E-03	78.4185	1.31E-03	76.3141	1.60E-03	76.4466	1.90E-03	78.3716	2.18E-03
287	84.6714	1.03E-03	77.9061	1.30E-03	75.3344	1.59E-03	75.1573	1.88E-03	76.8734	2.17E-03
288	84.8840	1.02E-03	77.4109	1.29E-03	74.3630	1.58E-03	73.8703	1.87E-03	75.3746	2.16E-03
289	85.1144	1.02E-03	76.9343	1.27E-03	73.4009	1.56E-03	72.5861	1.85E-03	73.8751	2.14E-03
290	85.3620	1.01E-03	76.4775	1.26E-03	72.4491	1.54E-03	71.3050	1.84E-03	72.3750	2.13E-03
291	85.6264	1.01E-03	76.0419	1.25E-03	71.5084	1.53E-03	70.0274	1.82E-03	70.8743	2.11E-03
292	85.9070	1.00E-03	75.6290	1.23E-03	70.5799	1.51E-03	68.7537	1.80E-03	69.3728	2.09E-03
293	86.2030	1.00E-03	75.2402	1.22E-03	69.6646	1.49E-03	67.4842	1.78E-03	67.8706	2.07E-03
294	86.5136	9.97E-04	74.8771	1.20E-03	68.7639	1.47E-03	66.2194	1.76E-03	66.3676	2.05E-03
295	86.8379	9.93E-04	74.5414	1.19E-03	67.8789	1.45E-03	64.9599	1.73E-03	64.8638	2.03E-03
296	87.1749	9.90E-04	74.2347	1.17E-03	67.0111	1.43E-03	63.7061	1.71E-03	63.3592	2.00E-03
297	87.5236	9.87E-04	73.9589	1.16E-03	66.1619	1.40E-03	62.4586	1.68E-03	61.8536	1.98E-03
298	87.8828	9.85E-04	73.7158	1.14E-03	65.3330	1.38E-03	61.2179	1.66E-03	60.3472	1.95E-03
299	88.2512	9.82E-04	73.5074	1.13E-03	64.5261	1.36E-03	59.9849	1.63E-03	58.8397	1.92E-03
300	88.6276	9.81E-04	73.3356	1.11E-03	63.7431	1.33E-03	58.7601	1.60E-03	57.3312	1.89E-03

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Brouwer, D.: "Solution of the Problem of an Artificial Satellite, Theory without Drag", *Astronomical Journal*, 64, #9, 378-397, 1959.
- Cutting, E., Born, G. H. and Frautnick, J. C.: "Orbit Analysis for SEASAT-A", *The Journal of Astronautical Sciences*, 26, #4, 315-342, Oct. – Dec., 1978.
- Ferraz Melo, S.: "Teoria de Perturbação", ITA, (Publicação Interna), São José dos Campos, 1972.
- Kovalevsky, J.: "Introduction to Celestial Mechanics", D. Reidel Publishing Company, Netherlands, 1967.
- Morando, B.: "Mouvement d'un satellite artificiel de la terre", Gordon & Breach, Paris, 1974.
- Prado, A. F. B. A.: "Trajetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade", INPE, São José dos Campos, 2001.
- Roy, A. E.: "Orbital Motion", Adam Hilger, London, 1988.
- Szebehely, V. G. and Mark, H.: "Adventures in Celestial Mechanics", J. Wiley & Sons, New York, 1998.
- Vieira Neto, E.: "Apostila da 6ª Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia", UNESP, Guaratinguetá, 2002.
- Vilhena de Moraes, R.: "Trajetórias de Veículos Espaciais", ITA, (Publicação Interna), São José dos Campos, 1978.

Algumas das referências citadas referem-se a obras consultadas para a elaboração do relatório, embora não tenham sido referenciadas no texto.