

SINCRONIZAÇÃO EM CIRCUITOS ELTRÔNICOS CAÓTICOS

Cleverson Maranhão Porto Marinho

Divisão de Engenharia Eletrônica
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
São José dos Campos – SP – Brasil
Email: porto@h8.ita.br

Elbert E. N. Macau

Laboratório de Integração e Testes – LIT
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE
São José dos Campos – SP – Brasil

RESUMO

Este trabalho consiste em explorar o fenômeno da sincronização em circuitos eletrônicos em regime caótico. O *Circuito de Chua* é considerado como paradigma de um sistema eletrônico que apresenta evolução caótica. Este circuito é inicialmente caracterizado em relação à manifestação do comportamento caótico. Verificam-se os fenômenos não lineares presentes, considerando-se as regiões típicas de interesse. Usando-se determinado parâmetro, no qual ocorre o comportamento caótico de atrator de dupla volta, observam-se as condições de ocorrência do fenômeno de sincronização envolvendo dois circuitos idênticos. Objetivando determinar a influência de um meio de transmissão, determina-se como este fenômeno de sincronização é afetado quando o acoplamento entre dois circuitos de Chua se dá através de um filtro. Todo o trabalho foi desenvolvido a partir da exploração numérica do modelo.

**Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Programa Institucional de Bolsas de
Iniciação Científica – PIBIC/CNPq
Relatório Final**

**Sincronização em Circuitos Eletrônicos
Caóticos**

Bolsista: Cleverson Maranhão Porto Marinho
Orientador: Elbert E. N. Macau
São José dos Campos, julho de 2001

SUMÁRIO

1 – Objetivos

2 – Introdução

- 2.1 – Histórico
- 2.2 – Mapas e Iterações
- 2.3 – Bifurcação
- 2.4 – Universalidade
- 2.5 – Atrator Estranho
- 2.6 – Dimensão
- 2.7 – Expoentes de Lyapunov
- 2.8 – Caos

3 – Sincronização em Sistemas Caóticos

4 – Circuito de Chua

5 – Sincronização Caótica no Circuito de Chua

6 – Conclusão

7 – Referências

8 – Anexo

1 – OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é estudar fenômenos não-lineares presentes em sistemas dinâmicos caóticos, utilizando como exemplo o circuito de Chua. Os objetivos específicos são:

- a) explorar e entender o fenômeno da evolução dinâmica caótica e da sincronização de sistemas não-lineares em evolução caótica;
- b) detectar experimentalmente fenômenos característicos de sistemas não-lineares, tais como, bifurcações, crise, transição para o caos;
- c) desenvolver métodos experimentais para determinação de tais fenômenos em circuitos eletrônicos.

2 – INTRODUÇÃO

2.1 - HISTÓRICO

Desde de Issac Newton, os cientistas têm usado equações para modelar sistemas físicos. Geralmente tais sistemas são modelados por equações diferenciais cujas soluções nem sempre podem ser dadas por expressões algébricas simples.

Quando as equações diferenciais admitem soluções limitadas numa região do espaço, pensava-se que estas soluções poderiam permanecer: A) num estado estável, devido principalmente a perda de energia por atrito; B) oscilando num movimento periódico ou quase-periódico.

Os cientistas conheciam sistemas que possuíam comportamento mais complicado como, por exemplo, moléculas de ar colidindo. Entretanto, como estes sistemas eram formados por uma grande quantidade de partículas, sua complexidade não era surpreendente.

Por volta de 1975, pesquisadores de todo o mundo se curvaram definitivamente à existência de um terceiro tipo de movimento, que hoje é chamado de C) caos. Este movimento é quase-errático, envolve um grande número de períodos, mas não é simplesmente quase-periódico. Além disso, é um tipo de comportamento que pode ser encontrado em sistemas bastante simples.

Antes disso, um pequeno número de matemáticos e físicos já conheciam esse terceiro tipo de movimento. James Clerk Maxwell, que estudou o movimento de moléculas de gás por volta de 1860, provavelmente sabia que um sistema composto de duas moléculas de gás colidindo em uma caixa não seria do tipo A ou do tipo B [1]. Ele estava ciente de que pequenas mudanças no movimento inicial das partículas resultariam em grandes alterações nas trajetórias das moléculas, mesmo se fossem consideradas como esferas rígidas.

Maxwell começou seu famoso estudo das leis dos gases investigando colisões individuais. Considere dois átomos de mesma massa, modelados como esferas perfeitamente rígidas. Suponha que estes átomos possuem a mesma velocidade, mas em direções opostas; assuma que suas posições são escolhidas aleatoriamente em uma grande região do espaço. Maxwell mostrou que se eles colidirem, a direção do movimento dos átomos, após a colisão, pode ser qualquer uma entre todas as direções

do espaço. Ele percebeu que pequenas mudanças nas posições iniciais poderiam produzir grandes alterações nos resultados.

Em 1889, por ocasião do sexagésimo aniversário do Rei Oscar II da Suécia, foi feito um concurso para escolher o melhor trabalho em mecânica celeste relativo à estabilidade do sistema solar. O vencedor do concurso foi Henri Poincaré [1], professor da Universidade de Paris.

Para resolver o problema, Poincaré fez duas simplificações. Primeiro, ele assumiu que havia três corpos movendo-se num plano. Segundo, ele supôs que a massa de dois, dos três corpos, era muito maior que a massa do terceiro; desta forma, o corpo de massa menor não afetava o movimento dos outros dois. Pode-se pensar em duas estrelas e um pequeno asteróide. Em geral, duas grandes estrelas descreveriam trajetórias elípticas, mas Poincaré assumiu que as condições iniciais eram tais que elas se moveriam em círculos, com velocidades constantes e girando em torno dos seus centros de massa.

O método de Poincaré foi baseado no fato de que o movimento do corpo de menor massa poderia ser estudado analisando-se as órbitas de mapas no plano (uma função de R^2 em R^2). Ele descobriu as idéias cruciais de “variedades instável e estável”. Entretanto, ele não entendeu completamente a natureza das variedades instável e estável. Estas variedades podem se interceptar em pontos chamados homoclínicos. Poincaré ficou confuso a respeito destes pontos. Ou ele achava que esses pontos não existiam, ou não entendia o que acontecia quando as variedades se interceptavam. Este erro fez com que suas conclusões sobre a natureza das trajetórias fossem completamente equivocadas. Seu erro foi detectado depois que ele tinha sido declarado vencedor do concurso, mas antes da publicação do trabalho. Poincaré percebeu que a existência dos pontos homoclínicos resultava em movimentos inacreditavelmente complicados próximos desses pontos. Comportamento que atualmente chamamos de “caótico”. As técnicas empregadas por Poincaré foram, posteriormente, aplicadas em uma grande variedade de sistemas físicos.

Cientistas como Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson, Kolmogorov, entre outros, também deram importantes contribuições ao estudo de sistemas dinâmicos [1]. Nos anos 60, grupos de matemáticos, especialmente em Berkeley e Moscou, esforçaram-se para entender o tipo de movimento que hoje denominamos caos. Porém, só com advento dos computadores pessoais, os cientistas e engenheiros puderam estudar de forma adequada os fenômenos caóticos.

2.2 – MAPAS E ITERAÇÕES

Um dos grandes avanços da matemática no século XX foi perceber que mesmo os sistemas dinâmicos mais simples podem ser extremamente imprevisíveis [2]. Sejam as funções de variável real

$$y = x^2 + c \text{ e } y = x. \quad (2.1)$$

Uma forma de interpretar estas funções é considerá-las como curvas no plano. Uma outra forma é vê-las como um conjunto de instruções.

1. Dado um número "x", eleve-o ao quadrado e some a constante "c". Chame o resultado de "y".
2. Dado "y", não faça nada. Chame o resultado de "x".
3. Repita o primeiro passo com o valor encontrado no segundo.

As duas primeiras instruções formam um *mapeamento* de um número sobre o outro:

$$f: x \rightarrow x^2 + c.$$

Se isso fosse feito para todos os números reais, obter-se-ia o *mapeamento* dos números reais sobre eles mesmos:

$$f: R \rightarrow R.$$

Por definição, uma função cujo domínio coincide com o seu contra-domínio é chamada de *mapa*. O acréscimo do terceiro passo resulta num *mapeamento iterado*. O símbolo $f^n(x)$ será usado para representar a n -ésima iteração do valor inicial "x". As instruções geram uma série numérica

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots.$$

Esta série numérica será chamada de *órbita*. O valor inicial "x" é dito semente da *órbita*. Observe que não há instrução dizendo quando parar. Entretanto, depois de um certo número de iterações, surgirá um padrão de repetição que permitirá parar com as iterações e analisar os resultados. Considere agora o comportamento de algumas órbitas. O parâmetro $c = 0$ simplifica as coisas quando

$$f: x \rightarrow x^2 + c$$

logo tem-se

$$f^n \rightarrow \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases} \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

As órbitas em que $x \neq \pm 1$ tendem a zero ou ao infinito. Os pontos zero e infinito são chamados *pontos atratores fixos* porque eles atraem as órbitas ao seu redor. Já os pontos ± 1 são chamados pontos *repulsores* ou *fontes*. Um ponto p é um ponto fixo de um mapa f se $f(p) = p$.

Quando $c > 1/4$ a parábola fica inteiramente acima da linha diagonal e todos os valores sementes vão para o infinito. Quando $c = 1/4$ a parábola e a linha diagonal se interceptam em $1/2$. Sementes com valores absolutos maiores que $1/2$ expandirão para o infinito, enquanto as que estão no intervalo $0 \leq |x| \leq 1/2$ se aproximarão assintoticamente de $1/2$. Depois de cerca de 700 iterações estas sementes terão atingido 4.99. Os resultados das primeiras dez iterações para alguns valores sementes estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2.1: As órbitas de seis sementes no mapeamento $f: x \rightarrow x^2 + 1/4$.

Note: as órbitas que não foram para o infinito são atraídas para $+1/2$.

± 1	$\pm 0,75$	$\pm 0,5$	$\pm 0,25$	$\pm 0,1$	0
+1,25	+0,812	+0,5	+0,3125	+0,26	+0,25
+1,812	+0,910	+0,5	+0,3476562	+0,3176	+0,3125
+3,535	+1,078	+0,5	+0,3708648	+0,3508697	+0,3476562
+12,747	+1,412	+0,5	+0,3875407	+0,3731096	+0,9708648
+162,744	+2,246	+0,5	+0,4001878	+0,3892107	+0,3875407
+26485,994	+5,296	+0,5	+0,4101503	+0,4014850	+0,4001878

+4,921e+17	+800,985	+0,5	+0,4249107	+0,4190774	+0,4182232
+2,421e+35	+64158,262	+0,5	+0,4305491	+0,4256258	+0,4291070
+5,864e+70	+4,116e+11	+0,5	+0,4353725	+0,4311573	+0,4305491
.
.
.
Infinito	Infinito	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5

O ponto fixo muda com o parâmetro, diminuindo sempre um pouco quando "c" torna-se menor. A parábola e a linha diagonal interceptam-se em dois pontos, que são justamente as raízes da equação:

$$x^2 + c = x. \quad (2.3)$$

Pode-se mostrar que a menor das duas raízes é um ponto atrator e a maior, um ponto repulsor. Quando o parâmetro $c = -3/4$, a equação possui duas raízes $-1/2$ e $+3/2$. Os resultados das dez primeiras iterações para alguns valores sementes estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2.2: As órbitas de seis sementes no mapeamento $f: x \rightarrow x^2 - 3/4$.
Note: as órbitas que não foram para o infinito, são repelidas por $+3/2$ e atraídas para $-1/2$.

+/-1,75	+/-1,5	+/-1	+/-0,75	+/-0,5	+/-0,25
+2,31	+1,5	+0,25	-0,1875	-0,5	-0,6875
+4,59	+1,5	-0,6875	-0,71484375	-0,5	-0,2773437
+20,38	+1,5	-0,2773437	-0,2389984	-0,5	-0,6730804
+414,93	+1,5	-0,6730804	-0,6928797	-0,5	-0,2969627
+172173,29	+1,5	-0,2969627	-0,2699176	-0,5	-0,6618131
+1,964e+10	+1,5	-0,6618131	-0,6771444	-0,5	-0,3120033
+8,787e+20	+1,5	-0,3120033	-0,2947537	-0,5	-0,6525639
+7,721e+41	+1,5	-0,6525639	-0,6650421	-0,5	-0,3240428
+5,962e+83	+1,5	-0,3240428	-0,3077189	-0,5	-0,6449962
Overflow	+1,5	-0,6449962	-0,6553090	-0,5	-0,3339798
.
.
.
Infinito	+1,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5

Como era previsto, $+3/2$ é de fato um ponto repulsor, mas $-1/2$ é um atrator? A resposta é sim. As órbitas aproximam-se de $-1/2$, oscilando entre dois valores em ambos os lados de $-1/2$, cada um desses valores se aproximam de $-1/2$. Esse comportamento pode ser visto na tabela acima e é uma indicação de como as coisas se passam.

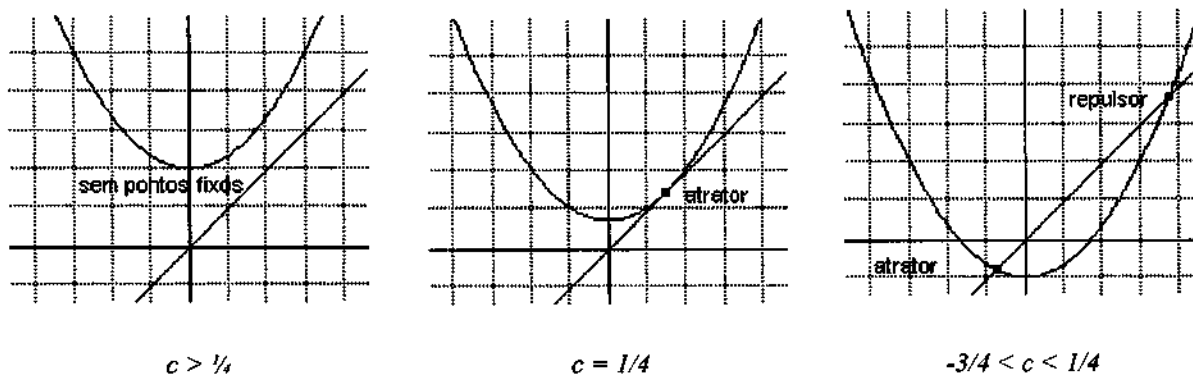


Fig. 2.1 - Pontos fixos para alguns valores de c .

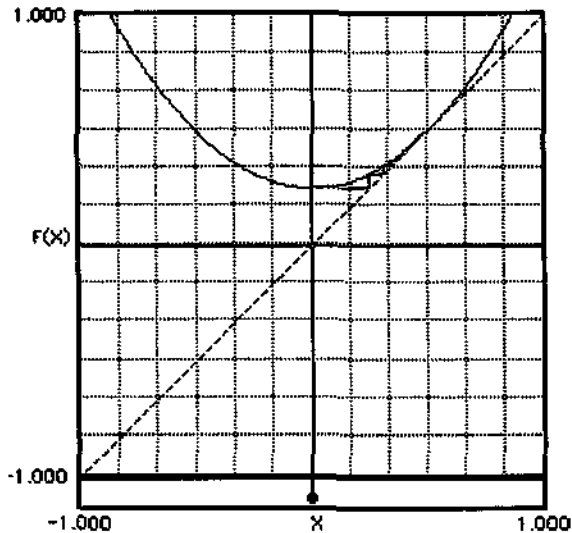
Para valores de $c < -3/4$, as órbitas oscilam entre dois valores distintos. O ponto atrator sofreu uma *bifurcação* e a órbita não é mais estável, mas sim *periódica*. Quando "c" torna-se mais negativo outra bifurcação ocorre e o período dobra para 4, depois para 8, 16, 32, 64, *ad infinitum*. Entretanto, a distância entre duas bifurcações sucessivas se aproxima do zero e o período tende ao infinito para valores finitos de $c < -1.4$. Além desse valor, as órbitas que eram periódicas, agora "serpenteiam" sobre uma órbita *aperiódica* num intervalo finito dentro de $[-2, 2]$ e percorrerão todas as regiões desse intervalo. Esse comportamento é chamado de *ergódico* e é uma característica do *caos* [2]. Além disso, as sementes que estão próximas umas das outras seguirão, depois de algumas iterações, órbitas completamente diferentes. Este comportamento, que exhibe *sensibilidade às condições iniciais*, é dito caótico. Os valores de "c" para os quais esse comportamento ocorre são chamados de *regime caótico*. A seqüência de bifurcações que conduzem ao regime caótico é conhecida como *rota para o caos*.

2.3- BIFURCAÇÃO

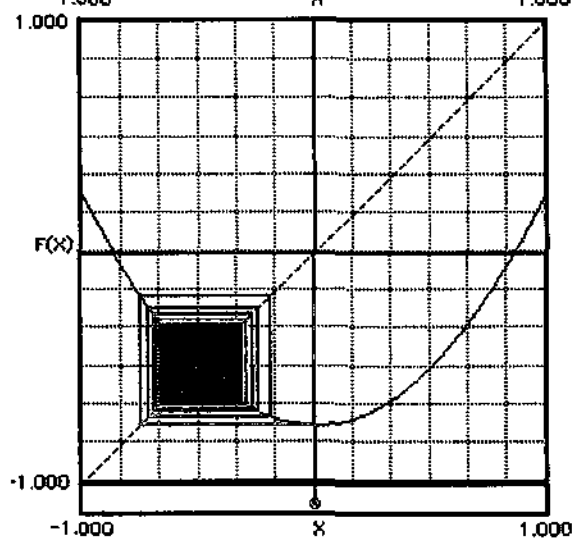
Uma abordagem mais intuitiva para órbitas pode ser feita através de representações gráficas usando as regras a seguir.

1. Trace ambas as curvas sobre os mesmos eixos. Tome um ponto sobre o eixo x. Este ponto será a semente.
2. Trace uma reta vertical do ponto até que se intercepte a parábola.
3. Trace uma reta horizontal do ponto de intersecção com a parábola até a linha diagonal.
4. Repita o passo dois com este novo ponto.

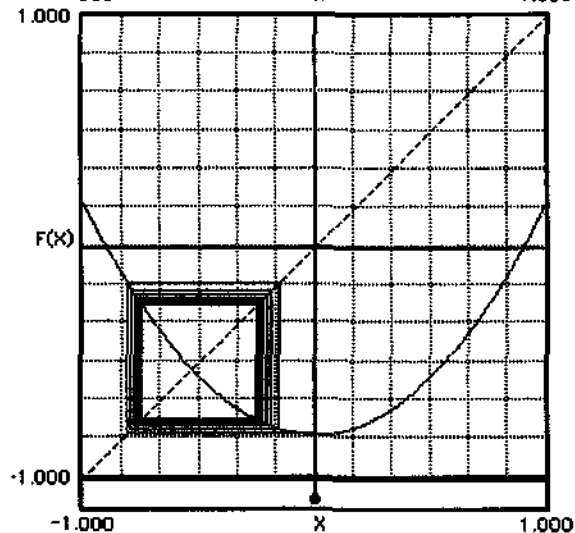
Temos a seguir uma série de gráficos destacando alguns dos comportamentos descritos anteriormente. Devido à aparência, estes diagramas são comumente conhecidos como diagramas teia de aranha (ou *cobweb diagrams*) [2].



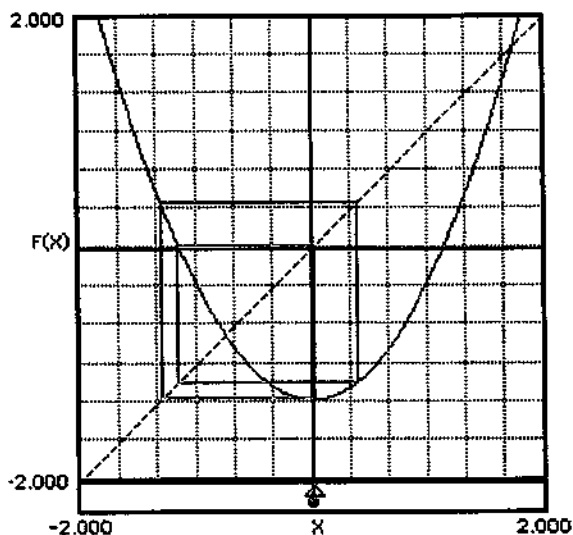
Este gráfico mostra o comportamento atrativo do ponto fixo do parâmetro $c = 1/4$ sendo 0 (zero) o valor semente. Zero será usado como semente para todos os outros diagramas porque ele é "bem comportado". Observe como a órbita se move em direção a $1/2$. Um exame mais detalhado revela que essa aproximação é assintótica.



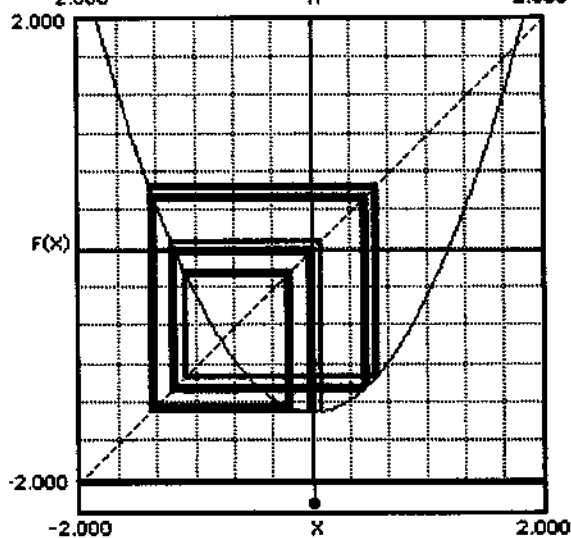
Neste gráfico o valor do parâmetro escolhido foi $c = -3/4$. Observe como a órbita se aproxima do ponto fixo atrator a partir dos dois lados opostos. Depois de mais de 1000 iterações ainda há um buraco visível no centro. Isto significa que a órbita ainda não atingiu seu valor final.



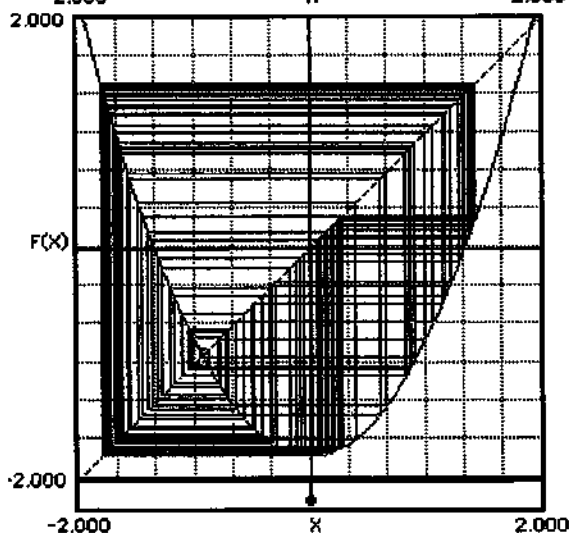
Quando $c = -13/16$ a órbita se estabelece dentro de um período duplo, alternando entre $-3/4$ e $-1/4$.



Aqui se vê uma órbita de período quatro. Quando $c = -1,3$, a órbita oscila sobre os valores $-1,2996224637$, $0,3890185483$, $-1,1486645691$ e $0,0194302923$. Este tipo de órbita se estabelece bem rapidamente. Depois de 100 iterações, ela já parece estar completa.



Esta órbita foi desenhada usando um valor de $c = -1,4015$. Embora ela se pareça com a anterior, as iterações parecem nunca se repetir. Em vez disso, elas se movem dentro de bandas. Pequenos ajustes nas condições iniciais produzem órbitas que são obviamente diferentes. Para $c = -1,4$, a órbita tinha um período igual a 32, agora a órbita tem um período infinito.



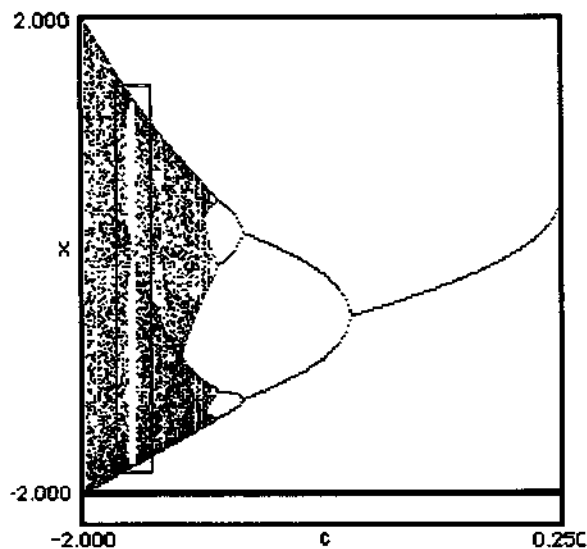
Para $c = -1,8$, a órbita cobre toda a região do intervalo $[-2, 2]$. Esta figura mostra apenas um pequeno subconjunto de todos os pontos que a órbita irá, eventualmente, visitar.

Uma forma de ver o comportamento geral do mapeamento

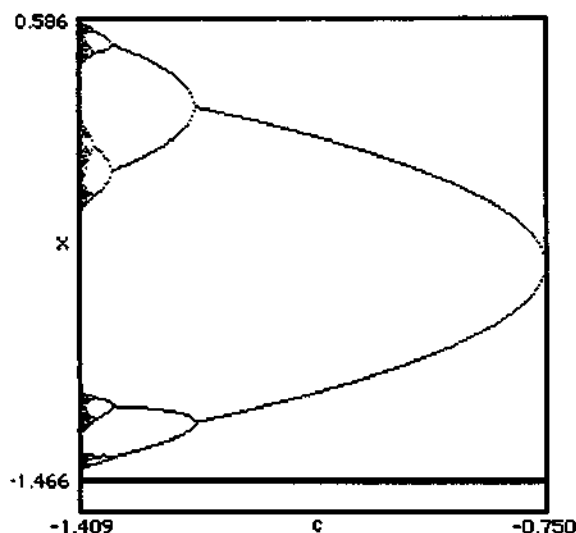
$$f: x \rightarrow x^2 + c$$

é plotar as órbitas como função do parâmetro " c ". Não serão plotados todos os pontos de uma órbita, só os mais importantes, ou seja, aqueles que indicam um comportamento geral. As primeiras centenas de iterações serão descartadas permitindo que a órbita se estabeleça dentro de seu comportamento característico. Esse tipo de diagrama é

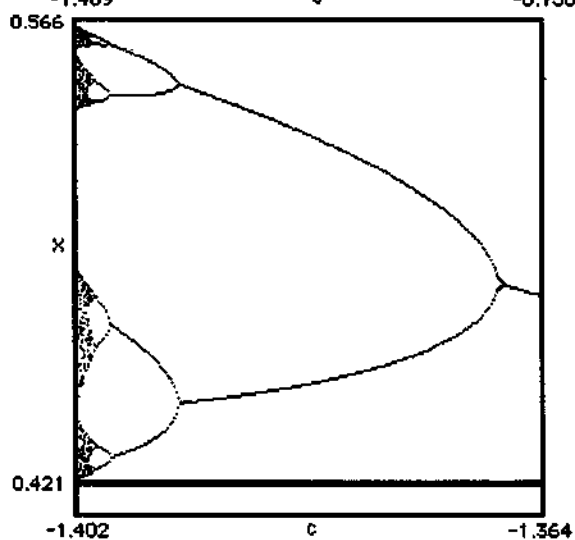
chamado de *diagrama de bifurcação* porque ele mostra a bifurcação das órbitas (entre outras coisas).



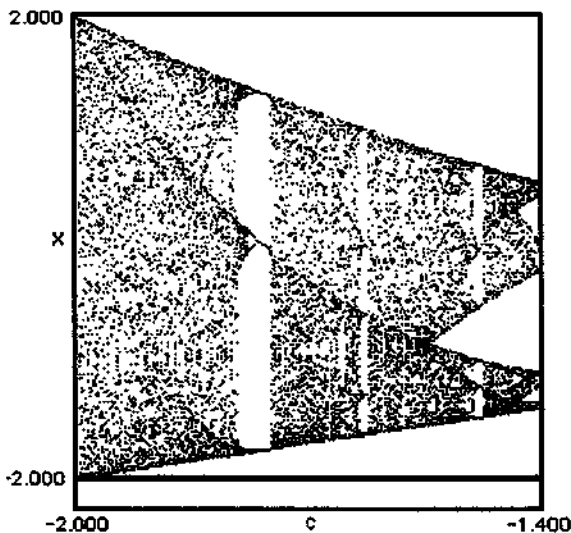
Observa-se aqui um diagrama de bifurcação completo. Valores de parâmetros fora do intervalo $[-2, 1/4]$ não foram incluídos porque todas as suas órbitas vão para o infinito. Observe como um único ponto fixo atrator sofre repetidas bifurcações e se torna caótico. Observe também a janela em $c = -1,8$.



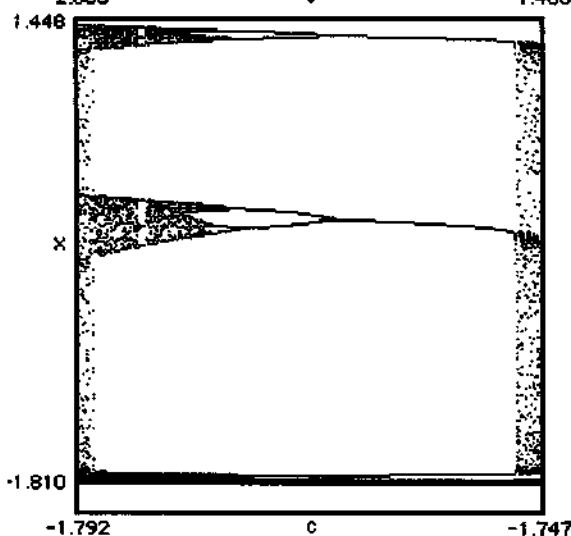
Aqui se vê uma ampliação da área em que o período dobra. Observe as sucessivas bifurcações.



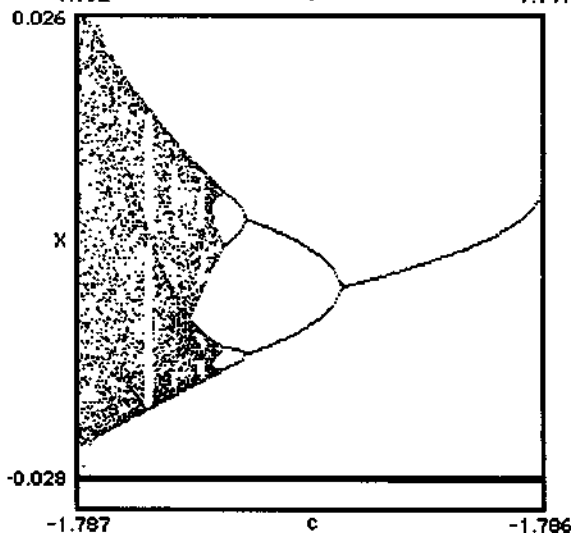
Dando um zoom na região situada no canto superior esquerdo, nota-se uma repetição da estrutura maior. A região em que o período dobra exibe *auto-similaridade* [2], isto é, as regiões menores se parecem com as regiões maiores. Esta propriedade pode ser vista em outras partes do diagrama.



Aqui se vê uma ampliação do regime caótico. Observe as janelas de periodicidade no meio do caos.



A janela repete a estrutura geral do diagrama de bifurcação. O regime de duplicação do período é o mesmo, mas multiplicado por três; isto é, 3, 6, 12, 24, 48..., em vez de 1, 2, 4, 8, 16.... Observe a janela dentro de cada lobo.



Esta é uma ampliação centrada no lobo da maior janela do lobo central. Observe a escala. A figura foi aumentada 1000 vezes. Este diagrama se parece, de forma surpreendente, com o original.

2.4 - UNIVERSALIDADE

Nos diagramas, sub-regiões dentro dos diagramas de bifurcação se parecem bastante umas com as outras e com o diagrama como um todo. Esta auto-similaridade se repete em todos os refinamentos. Tal comportamento é característico de entidades

geométricas chamadas *fractais* [1,2], e é muito comum em mapeamentos iterados. Na região de período dois, por exemplo, toda a região que começa na primeira bifurcação Λ_1 (lambda um) parece a mesma que começa na segunda bifurcação Λ_2 (lambda dois) e esta, por sua vez, se parece com a região que começa na terceira bifurcação Λ_3 (lambda três) e assim por diante. É interessante observar que a distância entre pontos de bifurcação sucessivos Λ_n (lambda n) estreita-se geometricamente de tal forma que a razão dos intervalos

$$\delta = \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} \quad (2.4)$$

aproxima-se de um valor constante quando "n" vai para o infinito. Esta constante é chamada de *número de Feigenbaum* [2] e possui o valor aproximado de

4,669201609102990671853203820466201617258185577475768632651
 3430041343302113147371386897440239480138171659848551898134
 4086271420279325223124429888908908599449354632367134115381
 7142199474556443658237932020095610583305754586176522220785
 4106467494942849814533917262005687556659523398756038256325.

A constante de Feigenbaum não somente reaparece em outras figuras, mas também é responsável por muitas outras características do diagrama de bifurcação. De fato, diagramas notavelmente similares podem ser gerados a partir de qualquer função suave, unidimensional e não monotônica. Um círculo, elipse, seno, ou qualquer outra relação com máximo local produzirá um diagrama de bifurcação com duplicação de período cuja razão tende à " δ " (delta). Junto com uma segunda constante " α " (alfa), o fator escalar " δ " (delta) mostra uma universalidade: a *universalidade métrica* [2]. O comportamento do mapa quadrático é o mesmo que o de muitos sistemas dinâmicos. A rota de período duplo para o caos e as constantes " α " (alfa) e " δ " (delta) aparecem nas confusas equações usadas para descrever o fluxo hidrodinâmico. Este capítulo tem sido dedicado à exploração do mapeamento iterativo unidimensional

$$f: x \rightarrow x^2 + c,$$

onde "x" e "c" eram números reais. A afirmação feita é de que o comportamento deste sistema é comum à "qualquer função suave, não monotônica, unidimensional, mapeada sobre si mesma" [2]. Observe o diagrama de bifurcação para outros mapeamentos.

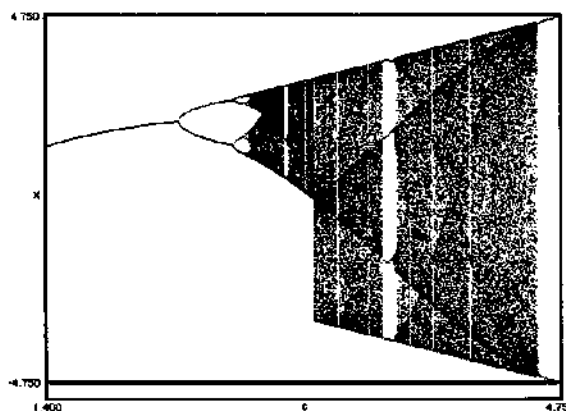


Fig. 2.2 - Diagrama de bifurcação para $f: x \rightarrow c \text{ sen}(x)$.

A estrutura do diagrama de bifurcação é similar àquela do $f: x \rightarrow x^2 + c$ com um caminho de período duplo para o caos e uma região ergódica contendo janelas adicionais. No caso quadrático, o diagrama de bifurcação era finito e terminava num valor de parâmetro além do qual todas as órbitas iam para o infinito. No caso senoidal, contudo, o mapa continua e sofre um abrupto solavanco, chamado de *crise*, no regime caótico [2]. Esta região é pontuada de janelas de períodos iguais; a mais proeminente é um ciclo de período quatro. O regime caótico aumenta e termina num ciclo de período dois, sendo que cada lado do ciclo sofre bifurcação. Novamente, a região ergódica sofre um solavanco e esse comportamento se repete *ad infinitum*.

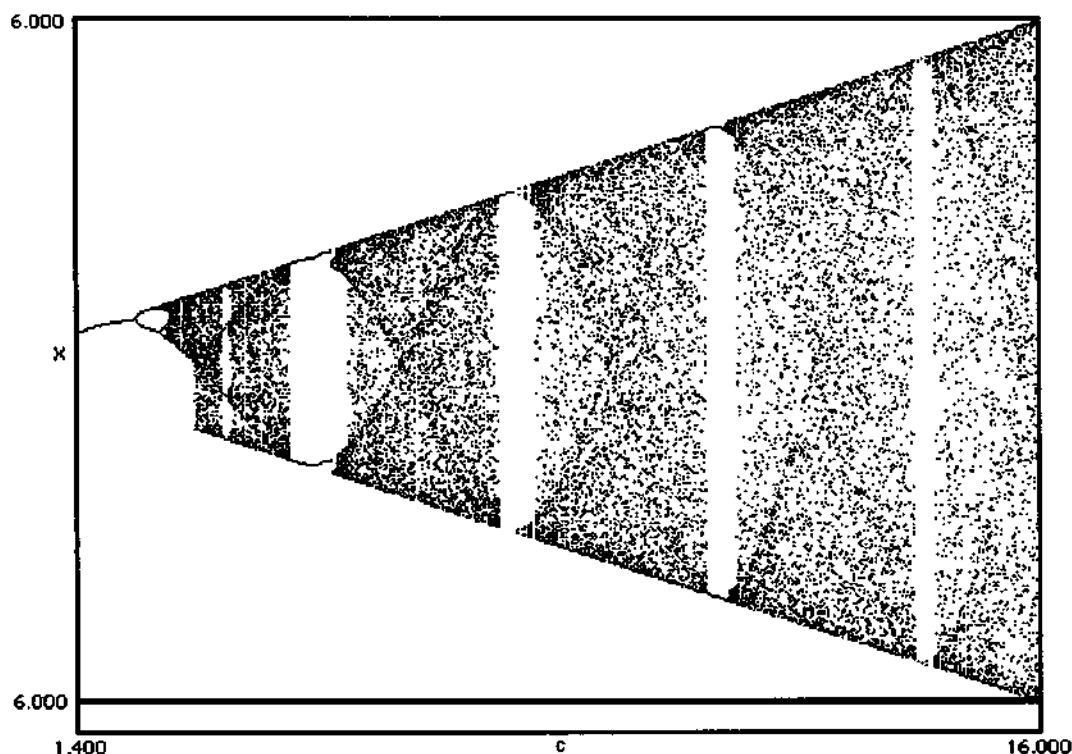


Fig. 2.3 - Diagrama de bifurcação para $f: x \rightarrow c \text{ sen}(x)$.

Como variação do tema, tentou-se o mapeamento $f: x \rightarrow \text{sen}(x) + c$. Este é mais parecido com o mapeamento quadrático. Como esperado, as órbitas produziram um diagrama de bifurcação muito parecido com o do mapa quadrático.

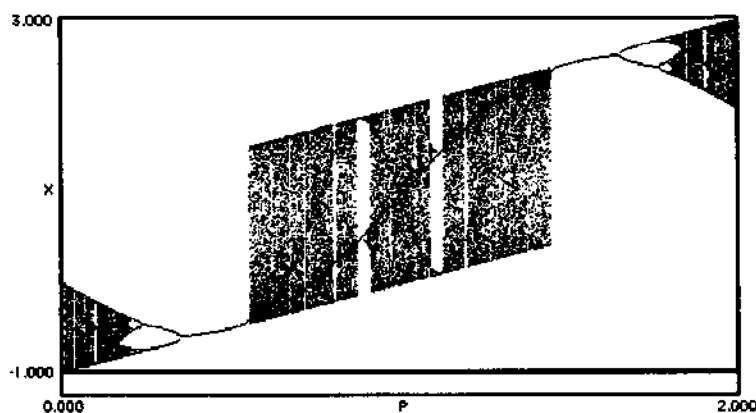


Fig. 2.4 - Diagrama de bifurcação para $f: x \rightarrow \text{sen}(\pi x) + c$.

Novamente observa-se uma mudança abrupta no comportamento característico do mapa para uma extensa região ergódica. Como no mapa senoidal anterior, esta região ergódica possui janelas de periodicidade constante. (Note como as maiores janelas são abertas em um dos lados.) Esta região termina com outra bifurcação parecida com aquela observada no diagrama de bifurcação do mapa quadrático, mas rotacionada de 180° . O comportamento do diagrama no intervalo $[2, 4]$ é o mesmo que no intervalo $[0, 2]$, deslocado apenas de duas unidades para cima. Portanto, o intervalo $[0, 2]$ é característico do resto dos valores dos parâmetros. Alguns diagramas de bifurcação mais comuns são mostrados abaixo. Todas as funções são suaves e não monotônicas. Observe a rota de período duplo para o caos; sempre há janelas de periodicidade dentro do regime caótico.

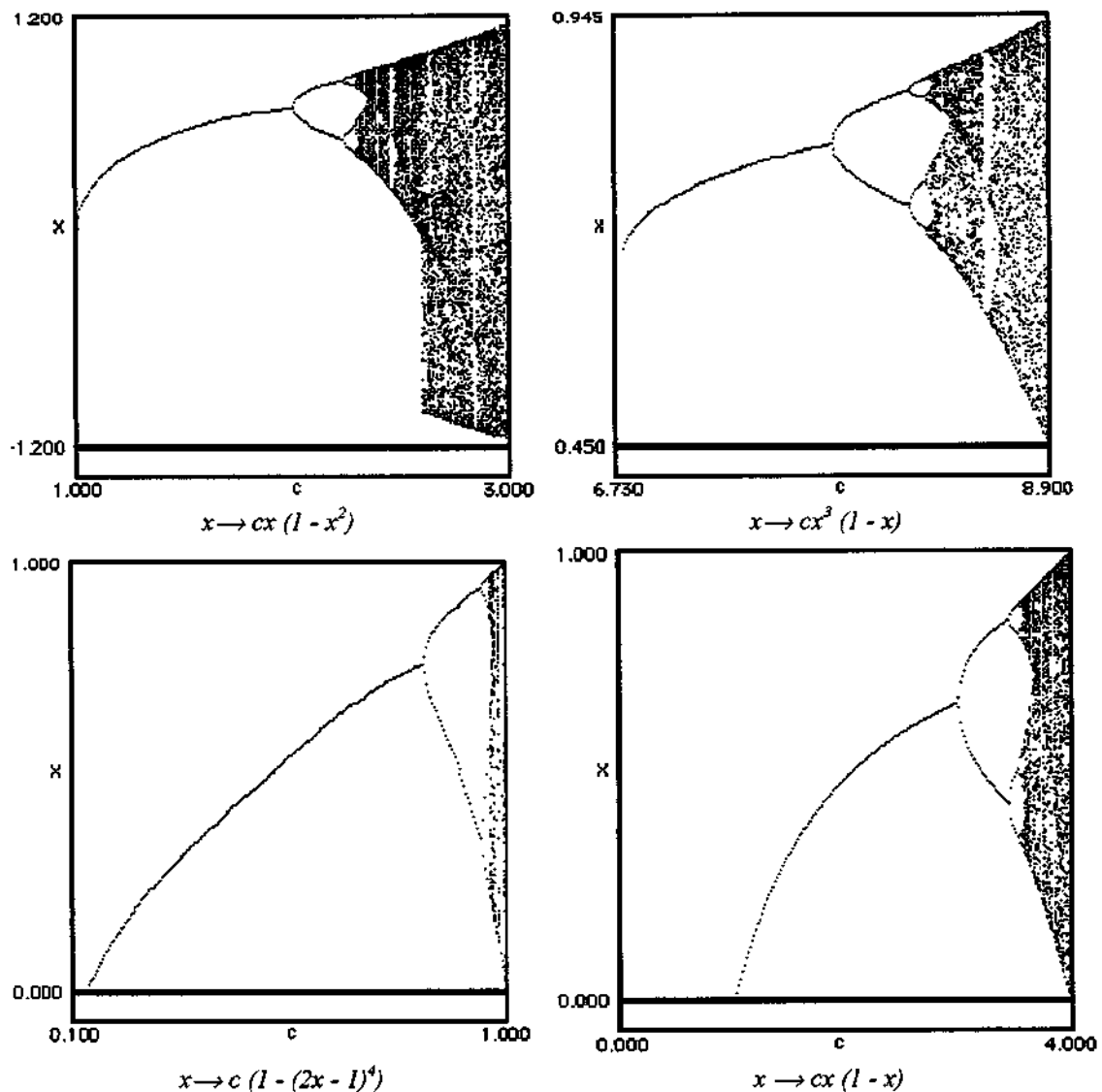


Fig. 2.5 - Mais alguns diagramas de bifurcação.

2.5 – ATRATOR ESTRANHO

O próximo passo é estender os conceitos de sistemas iterados a mapeamentos multidimensionais. Dados os resultados dos conceitos explorados anteriormente, pode-se assumir que muito do comportamento encontrado no mapa quadrático terá seu

análogo em dimensões superiores e, portanto, não se faz necessário introduzir um vocabulário novo [2]. Seja

$$f: R^n \rightarrow R^n$$

um mapeamento de n-uplas de números reais sobre elas mesmas. Pegue os resultados e utilize-os no mapa repetidamente. Por conveniência, chame as n-uplas de *pontos* e R^n um *espaço de dimensão "n"*. Este procedimento gera uma órbita de pontos

$$p, f(p), f^2(p), f^3(p), \dots, f^n(p), \dots$$

no espaço de uma semente " p ". O comportamento das órbitas em dimensões mais altas é semelhante àquele em uma dimensão. Observe algumas das possibilidades em duas dimensões. É muito fácil inventar mapeamentos que ilustram pontos fixos atratores e repulsores. Por exemplo,

$$f: (x, y) \rightarrow (x/2, y/2)$$

atrai todos os pontos assintoticamente para a origem, enquanto

$$f: (x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

os atrai para o infinito. O mapeamento

$$f: (x, y) \rightarrow (-y, x)$$

fixa todos os pontos sobre seu próprio ciclo de período quatro ao redor da origem. Gerar um mapeamento que produz seu próprio ciclo de período n , de forma única, é um pouco mais difícil.

Em dimensões superiores, contudo, atração e repulsão não são limitadas a pontos. Um mapa iterativo pode se degenerar em qualquer estrutura possível naquela dimensão. Atratores e repulsores podem formar caminhos, superfícies, volumes, e correspondentes em dimensões mais altas. Por exemplo, o mapa de duas dimensões

$$f: (x, y) \rightarrow (x, y/2)$$

atrai todos os pontos assintoticamente para o eixo x . Da mesma forma, um objeto de duas dimensões pode atuar como um repulsor. Este é o caso do mapa abaixo

$$f: (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy).$$

Pontos dentro do círculo unitário dirigem-se para a origem enquanto os que estão fora, para o infinito. Como os pontos dentro do círculo unitário permanecem lá, para este mapa, o círculo unitário pode ser considerado um repulsor fixo. Para comparar, considere o conjunto de funções iteradas

$$x \rightarrow by \quad e \quad y \rightarrow 1 + x - ay^2$$

onde " a " e " b " são constantes de valores 1,4 e $-0,3$, respectivamente. Os valores sementes que não vão para o infinito degeneram-se nas figuras mostradas abaixo. Este é um exemplo de *atrator estranho*, o *atrator de Hénon*, em homenagem ao seu descobridor, Michel Hénon [3]. Quando esboçado, o atrator parece não materializar coisa alguma. Ele também é caótico. Todas os valores sementes que convergem para o atrator o fazem de maneira diferente. Pontos distintos que estão inicialmente separados, por menor que seja essa separação, divergirão e evoluirão separadamente. O atrator de Hénon mostra também uma grande quantidade de estrutura fina (uma quantidade infinita, para ser mais exato). Sucessivas ampliações mostram um grau crescente de detalhe.

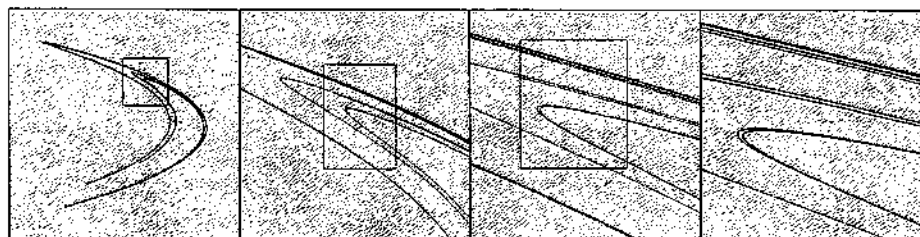


Fig. 2.6 - Atrator de Hénon com sucessivas ampliações.

Figuras igualmente estranhas podem ser geradas usando números complexos. Um mapeamento iterado complexo

$$f(z) \rightarrow z$$

equivale a dois mapeamentos bidimensionais

$$f(x,y) \rightarrow (x,y),$$

que seguem as regras da aritmética complexa. Comece com uma função complexa ou simplesmente tome uma função real conhecida no domínio complexo; aplique os resultados à função e repita o processo; plote a órbita resultante no plano real-imaginário. Quando este processo é aplicado à função

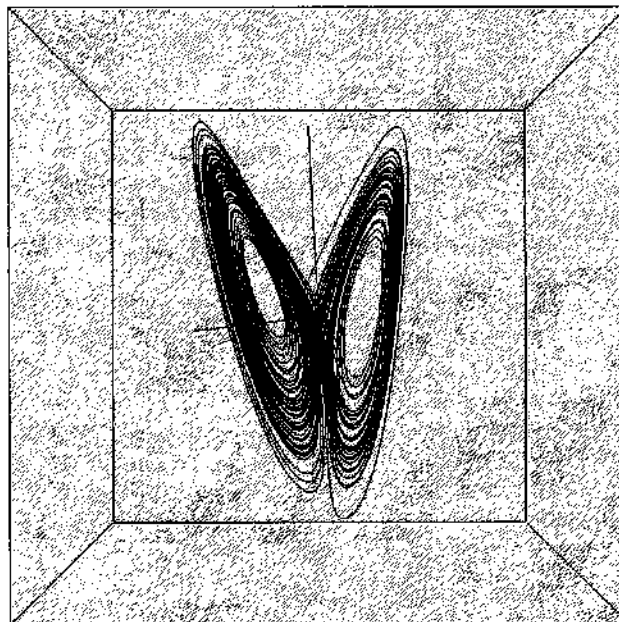
$$f: (z) \rightarrow a + b z \exp i[k - p/(1 + |z|^2)],$$

um atrator estranho emerge - o *atrator de Ikeda*. Com uma escolha apropriada de parâmetros pode-se fazer toda sorte de modelos. O exemplo abaixo lembra as turbulências encontradas em rastros ascendentes de fumaça ($a = 0,85$, $b = 0,9$, $k = 0,4$, $p = 7,7$). Como o atrator de Hénon, o atrator de Ikeda mostra uma estrutura fina que nunca cessa. Isso é o que o faz "estranho".



Fig. 2.7 - Atrator de Ikeda com sucessivas ampliações.

O atrator estranho mais famoso é, provavelmente, o *atrator de Lorenz* [4]. Este atrator surge do estudo das equações usadas na previsão do tempo.



$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y-x) \\ dy/dt &= \rho x - y - xz \\ dz/dt &= xy - \beta z \end{aligned}$$

($\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$)

Fig. 2.8 - Atrator de Lorenz.

2.6 – DIMENSÃO

Considere as instruções abaixo.

1. Comece com um segmento de reta. Divida-o em três. Coloque o vértice de um triângulo equilátero no lugar do segmento central.
2. Copie toda a curva e a reduza a um terço do tamanho original. Coloque esta curva reduzida no lugar dos lados da primeira curva.
3. Retorne ao passo 2 e repita-o.

O resultado é a *curva de Koch* [2,5], que evolui como mostrado abaixo.



Fig. 2.9 - Curva de Koch.

Examine a curva de Koch através de lentes mal focadas. Ela parece ter um certo comprimento. Suponha que este comprimento corresponda a uma unidade. Corrija um pouco o foco, de tal forma que se possa visualizar detalhes com 1/3 do tamanho dos visualizados sem a correção. A curva é agora quatro vezes maior, ou seja, tem 4 unidades de comprimento. Usando-se um foco que revela detalhes com 1/9 do tamanho dos anteriores, tem-se uma curva 16 vezes maior que a primeira. Isso indica a existência de uma característica quantificável. Para ser um pouco mais preciso, todo espaço está associado a uma distância entre dois pontos quaisquer. Em segmentos como a curva de Koch, escolhe-se arbitrariamente o comprimento do lado da primeira iteração como a unidade de comprimento. No plano euclidiano, a distância entre dois pontos quaisquer é dada pelo teorema de Pitágoras

$$s^2 = x^2 + y^2. \quad (2.5)$$

Distâncias que estabelecem tal relação são chamadas de *métricas*, o espaço que possui uma métrica é chamado de espaço métrico. Métricas são usadas para criar vizinhanças em um espaço. Escolha um ponto em um espaço métrico. Este ponto e todos os outros que se encontram a uma determinada distância do ponto escolhido compreendem uma região do espaço chamada de *disco fechado*. O termo disco é usado porque, no plano de coordenadas com métrica usual, a região tem a forma de disco. No espaço euclidiano tridimensional, os discos seriam esferas.

Quantos discos são necessários para cobrir a curva de Koch? Bem, depende dos seus tamanhos. Um disco com diâmetro 1 é suficiente para cobrir tudo, 4 discos com diâmetro 1/3, 16 discos com diâmetro 1/9, 64 discos com diâmetro 1/27, e assim por diante. Em geral, são necessários 4^n discos de raio $(1/3)^n$ para cobrir a curva de Koch. Se este procedimento for aplicado a qualquer entidade, em qualquer espaço métrico, pode-se definir uma quantidade que é equivalente à dimensão. A dimensão de *Hausdorff-Besicovitch* [1,2], também chamada dimensão de *Contagem de Caixas*, de um objeto em um espaço métrico é dada pela fórmula

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log \left(\frac{1}{h} \right)} \quad (2.6)$$

onde $N(h)$ é o número de discos de raio h necessários para cobrir o objeto. Portanto, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch da curva de Koch é o limite da seqüência

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \frac{\log 64}{\log 27}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{n \log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261859507\dots$$

Isto realmente é uma dimensão? Aplique este procedimento a um segmento de reta unitário. Necessita-se de 1 disco de diâmetro 1, 2 discos de diâmetro 1/2, 4 discos de diâmetro 1/4, e assim por diante, para cobrir o segmento de reta unitário. No limite, encontra-se uma dimensão de

$$\frac{\log 2^n}{\log 2^n} = \frac{n \log 2}{n \log 2} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1.$$

Isto concorda com a dimensão topológica do espaço.

O problema é como interpretar o resultado 1,261859507... ? Ele não concorda com a dimensão topológica 1, mas não tem dimensão 2. A curva de Koch é algo entre uma reta e um plano. Sua dimensão não é um número inteiro, mas uma fração. Ela é *fractal*.

Deveria ser possível usar métodos analíticos, como os descritos acima, para descrever todos os objetos fractais. Fractais produzidos por processos iterativos simples, como é o caso da curva de Koch, são fáceis de se lidar analiticamente. Os conjuntos de Julia e Mandelbrot, fractais produzidos por mapeamentos iterados de funções complexas contínuas, são um outro caso [2].

Existem técnicas experimentais para se calcular a dimensão dos fractais[1,2]. Considere qualquer objeto geométrico plano de dimensão finita. Cubra-o com um único disco fechado. Por conveniência, pode-se usar o quadrado. Anote sua dimensão e chame-a de “ h ”. Repita o procedimento com um quadrado menor. Registre sua dimensão e o número de quadrados “ $N(h)$ ” necessários para cobrir o objeto. A figura abaixo ilustra o processo para o caso da curva de Koch.

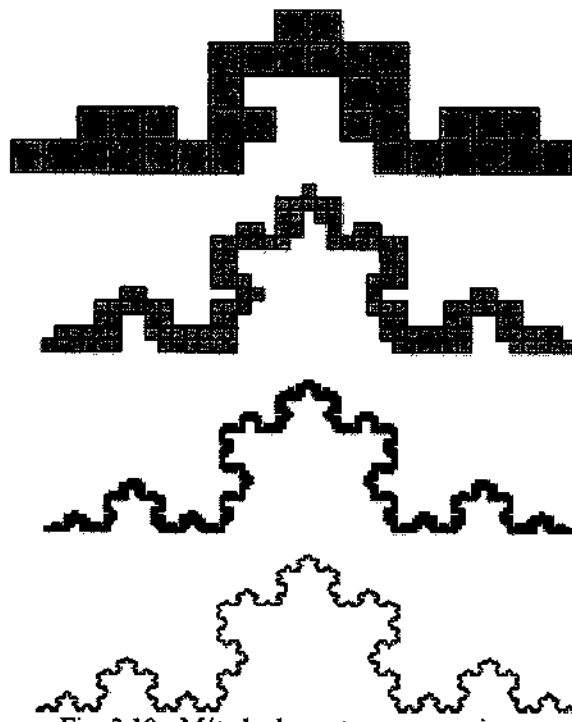
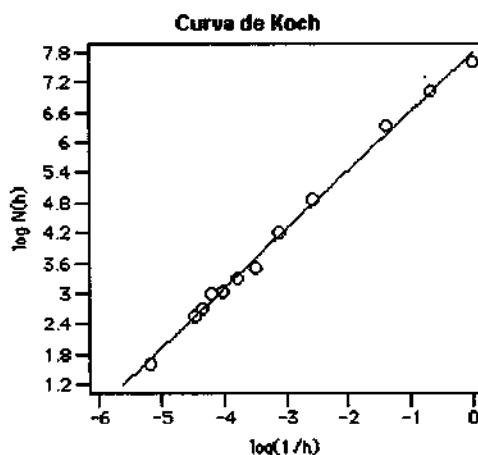
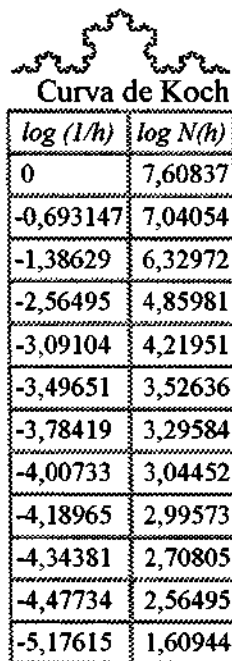
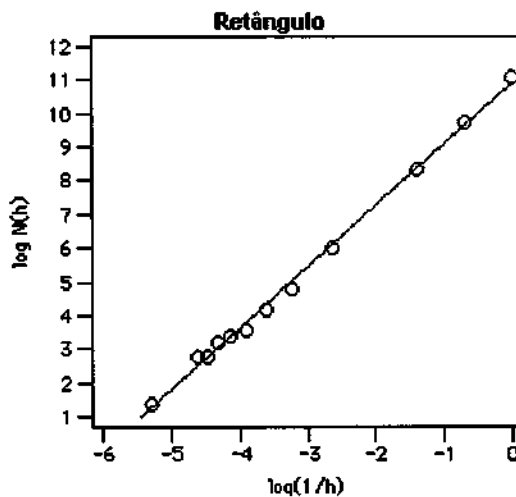
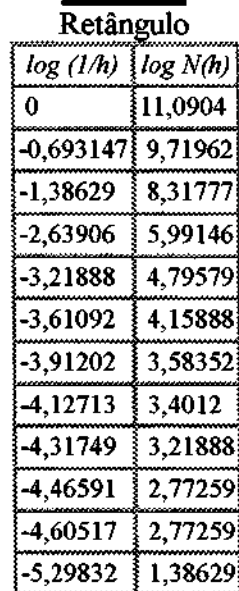


Fig. 2.10 - Método de contagem por caixas.

Repita o processo com quadrados cada vez menores. Plote os resultados em um gráfico com “ $\log(N(h))$ ” no eixo vertical e “ $\log(1/h)$ ” no horizontal.



dimensão (experimental) = 1,18
 dimensão (analítica) = 1,26
 divergência = 6,35%



dimensão (experimental) = 1,82
 dimensão (analítica) = 2,00
 divergência = 9,00%

A inclinação da melhor reta será uma aproximação da dimensão de Hausdorff-Besicovitch do objeto. As figuras acima ilustram os resultados de experimentos simples, usando-se o método de *contagem por caixas*. Com um pouco mais de refinamento, os desvios poderiam ser inferiores a 5%.

2.7 – EXPOENTES DE LYAPUNOV

Considere dois pontos no espaço X_0 e $X_0 + \Delta x_0$. Cada um deles vai gerar uma órbita no espaço, usando alguma equação ou um sistema de equações. Estas órbitas podem ser funções paramétricas de uma variável, o tempo, por exemplo. Se uma dessas órbitas for usada como referência, a separação entre duas órbitas também será uma função do tempo. Como a dependência sensível pode surgir somente em algumas porções do sistema, esta separação também é função da posição do valor inicial e tem a forma $\Delta x(X_0, t)$. Em um sistema com pontos atratores fixos ou atratores periódicos, $\Delta x(X_0, t)$ diminui assintoticamente com o tempo. Se um sistema é instável, como alfinetes equilibrados pela ponta, as órbitas divergem por algum tempo, mas eventualmente se "ajeitam". Para pontos caóticos, a função $\Delta x(X_0, t)$ terá um comportamento errático. Isto é útil para estudar o significado da taxa exponencial de divergência de duas órbitas inicialmente próximas, usando a fórmula

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ |\Delta x_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta x(X_0, t)|}{|\Delta x_0|}. \quad (2.7)$$

Este número, chamado de *expoente de Lyapunov* " λ " (lambda) [1], é útil para se distinguir entre os vários tipos de órbitas. Serve tanto para sistemas discretos quanto para contínuos. Há três casos possíveis:

- $\lambda < 0$ (lambda) A órbita atrai um ponto fixo estável ou uma órbita periódica estável. Expoentes de Lyapunov negativos são característicos de sistemas *dissipativos* ou *não conservativos* (por exemplo, o oscilador harmônico amortecido). Tais sistemas exibem *estabilidade assintótica*; quanto mais negativo o expoente, maior é a estabilidade. Os pontos fixos super-estáveis e pontos periódicos super-estáveis têm um expoente de Lyapunov igual a $\lambda = -\infty$. Isto é parecido com um oscilador criticamente amortecido no qual o sistema dirige-se para os pontos de equilíbrio o mais rápido possível.
- $\lambda = 0$ (lambda) Um expoente de Lyapunov igual a zero indica que o sistema está em algum tipo de modo fixo estável. Considere o caso de dois osciladores harmônicos idênticos, oscilando com amplitudes diferentes. Como a frequência é independente da amplitude, o mapa de fases dos dois osciladores seria um par de círculos concêntricos. As órbitas, nestas condições, manteriam uma separação constante.
- $\lambda > 0$ (lambda) A órbita é instável e caótica. Pontos próximos, não importa a distância, divergirão para uma separação arbitrária. Todas as vizinhanças no espaço de fases serão, eventualmente, visitadas. Estes pontos são ditos instáveis. Para um sistema discreto, as órbitas se parecerão com "chuviscos" num aparelho de televisão. Para um sistema contínuo, o mapa de fases seria um mar de linhas onduladas, como um prato de espaguete. Um exemplo físico é o movimento browniano. Embora o sistema seja determinístico, não há ordem para as órbitas resultantes.

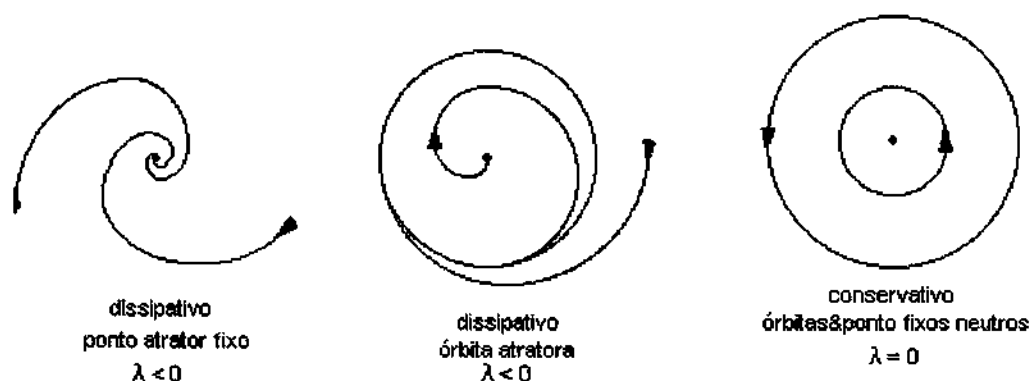


Fig. 2.11 - Algumas órbitas e seus expoentes de Lyapunov.

É possível mostrar que praticamente todas as órbitas de um atrator possuem o mesmo expoente de Lyapunov, ou seja, λ está associado ao atrator e não a uma órbita particular. A tabela 2.3 contém os expoentes de Lyapunov de quinze órbitas diferentes do atrator de Hénon. Depois de 4000 iterações, pode-se observar que os expoentes de cada órbita estão próximos de um mesmo valor.

Tabela 2.3: Expoentes de Lyapunov de algumas órbitas do atrator de Hénon.

Condições iniciais (x, y)	Expoentes de Lyapunov (λ)
(0, 1)	0,419838
(0,48, 1,08)	0,420575
(-0,83, -1,29)	0,408573
(-1,76, 0,05)	0,416868
(0,14, 1,12)	0,416002
(-0,24, 1,18)	0,419690
(0,31, 0,88)	0,411510
(0,14, 1,13)	0,426820
(0,99, -0,90)	0,417091
(-0,20, 1,17)	0,417675
(0,03, 1,26)	0,417304
(1,70, 0,05)	0,422898
-0,83, -1,29)	0,408573
(-1,79, 1,78)	0,418171
(-0,46, 1,42)	0,428163

Valor médio - $\bar{\lambda} = 0,417983$

Desvio padrão - $\sigma_x = 0,005634$

2.8 – CAOS

Considere uma condição inicial numa vizinhança de um ponto repulsor p de um mapa f . No início da órbita do ponto p , observa-se um comportamento instável. A distância entre a órbita do ponto e o ponto repulsor cresce a uma taxa exponencial. Isto quer dizer que a cada iteração, a distância entre eles é multiplicada por $|f'(p)| > 1$. Diz-

se que a taxa exponencial de separação é $|f'(p)|$ por iteração. Por menor que seja, a separação entre os pontos aumenta. Depois de algumas iterações, a órbita pode ser atraída por um ponto atrator q . À medida que se aproxima do ponto atrator, a órbita exibe um comportamento convergente – a distância entre a órbita e o ponto atrator diminui por um fator de $|f'(q)| < 1$.

É comum encontrar sistemas nos quais o comportamento instável é transiente e que, eventualmente, evoluem para um estado estável depois de algum tempo. Contudo, não há razão para que uma condição inicial situada na vizinhança de um ponto repulsor seja, necessariamente, atraída por um ponto atrator.

Uma órbita caótica é aquela que exibe o mesmo comportamento instável de uma órbita próxima a um ponto repulsor, mas que não é fixa, nem periódica. Parece que ela nunca encontra um ponto atrator para o qual pudesse ser atraída. Neste tipo de órbita, há pontos arbitrariamente próximos que vão se afastando depois de mais iterações. Utilizando o conceito de expoentes de Lyapunov, pode-se definir o que é uma órbita caótica [1].

Definição 1: Seja f um mapa de R^m , $m \geq 1$, e $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ uma órbita limitada de f . A órbita é caótica se

1. não for assintoticamente periódica,
2. não possuir número de Lyapunov igual a 1,
3. $\lambda_1(v_0) > 0$.

Definição 2: Seja f um mapa de R^m , $m \geq 1$. A função f é caótica se.

1. f possui um expoente de Lyapunov positivo em cada ponto do seu domínio que não seja, eventualmente, periódico;
2. f possui um conjunto denso de órbitas periódicas;
3. dados dois pontos quaisquer pertencentes ao domínio de f , sempre existe uma órbita que passa pela vizinhança destes dois pontos, não importando o tamanho das vizinhanças (i. é, f é transitivo).

De uma forma grosseira, a existência de caos está associada à presença de expoente de Lyapunov maior que zero.

3 – SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS CAÓTICOS

Parece razoável supor que dois sistemas caóticos virtualmente iguais nunca entram em sincronismo. De fato, qualquer diferença infinitesimal nas condições iniciais faria com que as trajetórias dos sistemas divergissem exponencialmente com o tempo. No entanto, Fujisaka e Yamada [10] descobriram que existem sistemas caóticos que se sincronizam. O sincronismo ocorre quando dois sistemas descrevem trajetórias que convergem para os mesmos valores no espaço de fases. Pecora e Carroll [11, 12] estudaram o assunto e encontraram uma forma de se construir sistemas caóticos que tinham a propriedade de entrar em sincronismo, independente de suas condições iniciais. Para entender o que Pecora e Carroll fizeram deve-se ter em mente os conceitos de sistema diretor e sistema resposta.

Diz-se que um sistema dirige o outro quando eles estão acoplados e o comportamento do segundo depende do comportamento do primeiro, mas o segundo sistema não influencia o comportamento do primeiro. O primeiro sistema é chamado de sistema diretor e o segundo, de resposta. Os dois sistemas podem ser combinados em um único sistema dinâmico no qual o subsistema resposta depende das variáveis do subsistema diretor.

Suponha que o sistema dinâmico que se deseja estudar pode ser dividido como mencionado acima. Seja n a dimensão do sistema completo. Use um vetor v de

dimensão m para representar as variáveis diretoras usadas na resposta, um vetor u de dimensão k para as variáveis diretoras que não influenciam a resposta e um vetor w de dimensão l para representar as variáveis do sistema resposta. Portanto, $n = m + k + l$ e o sistema em estudo é dividido da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{v} = f(v, u) \\ \dot{u} = g(v, u) \end{array} \right\} \text{diretor, } \dot{w} = h(v, w) \left. \right\} \text{resposta} \quad (3.1)$$

O problema agora é saber quando o sistema resposta é um subsistema estável. Ou melhor, quando sua trajetória $w(t)$ é imune a perturbações. Isto garantiria que, para um conjunto fixo de condições iniciais, a trajetória $w(t)$ convergiria sempre para os mesmos valores, quaisquer que fossem as condições iniciais do subsistema resposta.

Esta questão leva a uma equação variacional de movimento. Tem-se a trajetória $w(t)$ (cuja estabilidade deseja-se determinar) com condição inicial $w(0)$. Considere a trajetória iniciada numa vizinhança do ponto $w'(0)$. O sinal diretor é o mesmo para os dois sistemas resposta. Sob que condições tem-se $\Delta w(t) = |w'(t) - w(t)| \rightarrow 0$? Em termos de campos vetoriais,

$$\begin{aligned} \dot{\Delta w} &= h(v, w') - h(v, w) \\ &= D_w h(v, w) \Delta w + o(w, v), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $D_w f$ é o Jacobiano do campo vetorial resposta com respeito às variáveis resposta e $o(w)$ representa os termos de ordem mais alta. Para Δw muito pequeno, obtém-se

$$\dot{\Delta w} = D_w h(v, w) \Delta w. \quad (3.3)$$

Quando $w(t)$ é constante (ponto fixo) ou representa uma órbita periódica, pode-se determinar os autovalores de $D_w f$ para analisar a estabilidade de $w(t)$. Entretanto, deseja-se controlar w com um sinal caótico v e isto inviabiliza o teste de estabilidade por meio dos autovalores de $D_w f$.

A solução para este impasse pode ser encontrada calculando-se certos expoentes de Lyapunov. Estes expoentes descrevem a expansão ou a contração de pequenos deslocamentos ao longo trajetória sobre o atrator. Em outras palavras, eles dizem se pequenos deslocamentos da trajetória são estáveis ou instáveis. Se o que se procura é um sistema estável, então deve-se ter todos os expoentes negativos. Desta forma pequenas perturbações cairão exponencialmente a zero. O cálculo dos expoentes de Lyapunov pode ser feito integrando-se diretamente a equação (3.3) com respeito ao sistema (v, u, w) . Há um método mais geral que não depende da escolha inicial do deslocamento.

Utilize uma matriz Z no lugar de w na equação (3.3), de tal forma que $Z(0)$ seja a matriz identidade. Portanto

$$\dot{\Delta Z} = D_w h(v, w) \Delta Z. \quad (3.4)$$

A solução $Z(t)$, chamada de matriz solução principal, determinará se as perturbações nas trajetórias do subsistema resposta vão crescer ou diminuir. Pode-se pensar na matriz $Z(t)$ como uma representação de um sistema de coordenadas que inicialmente é Cartesiano, mas que se alonga, se comprime e se distorce com o tempo em várias direções (não necessariamente ortogonais) de acordo com os expoentes de Lyapunov. Quando $t \rightarrow \infty$, a matriz $Z(t)$ pode ser usada para determinar os expoentes de Lyapunov de um subsistema w , controlado por um sinal diretor $(v, u)(t)$. Se os expoentes de Lyapunov forem negativos, $w(t)$ é uma trajetória assintoticamente estável. Estes expoentes dependem de $v(t)$ e são uma medida da estabilidade do subsistema w . Em geral, eles não são simplesmente um subconjunto dos expoentes de Lyapunov do sistema (v, u, w) .

Devido à dependência de $\nu(t)$, os expoentes são chamados de expoentes de Lyapunov condicionais (*ELC*).

O fato dos expoentes de Lyapunov do subsistema w serem negativos é obviamente uma condição necessária para garantir a estabilidade do subsistemas resposta. O teorema fundamental da estabilidade linear mostra que esta também é uma condição suficiente para muitos sistemas dinâmicos [13].

Teorema: A solução nula do sistema não-linear

$$\dot{x} = A(t)x + o(x, t),$$

com $o(0, t) = 0$ para t qualquer, é assintoticamente estável se

(i) $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \|o(x, t)\|/\|x\| = 0$ para todo t ,

(ii) $A(t)$ é limitada para todo t ,

(iii) a solução trivial do sistema linear $\dot{x} = A(t)x$ é assintoticamente estável.

O teorema acima garante a existência de um conjunto não vazio de condições iniciais $w'(0)$, para as quais a trajetória $w'(t)$ convergirá para $w(t)$. Esta abordagem generaliza o teste de estabilidade (autovalores do Jacobiano) por meio dos expoentes de Lyapunov a todos os sinais diretores $\nu(t)$.

O método para a estabilidade do subsistema resposta descrito acima pode ser estendido para estimar a taxa de convergência entre uma trajetória do subsistema resposta e a trajetória para a qual ela deveria convergir. A estimativa é para pequenas diferenças (Δw), mas na prática, parece funcionar bem para diferenças da ordem do tamanho do atrator. A taxa de convergência provavelmente depende da forma da bacia de atração para o sistema resposta e, também, da forma como o sistema evolui do ponto inicial até a trajetória esperada. Estes dois fatores poderiam levar o subsistema resposta a percorrer o espaço de fases antes de se aproximar da trajetória esperada. Sendo assim, deve-se ter precaução no uso de taxas de convergência para grandes diferenças $|\Delta w|$.

Para estimar as taxas de convergência, precisa-se ter uma idéia das taxas médias de convergência e suas direções associadas. Isto significa encontrar os expoentes de Lyapunov condicionais e seus autovetores. Os *ELC* são calculados a partir da matriz $Z(t)$, para t grande e ao longo de uma trajetória que converge para o atrator. Os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \ln \nu_i \quad (3.5)$$

para um valor elevado de t , onde ν_i são os autovalores de $Z(t)$, cujos autovetores associados são ξ_i .

Para pequenos valores de $\Delta w(0)$, pode-se aproximar a convergência por

$$\Delta w(t) = e^{At} \Delta w(0), \quad (3.6)$$

onde A é formada pela transformação da matriz diagonal, com os λ_i 's na diagonal principal, no sistema de coordenadas original. Em outras palavras, aproxima-se $Z(t)$ pela exponencial de uma matriz constante construída a partir dos expoentes de Lyapunov.

É do interesse deste trabalho o caso particular em que $k = l$ e $f = h$. Tal caso é conhecido como direção homogênea porque o subsistema resposta corresponde à parte do subsistema diretor que não entra com um sinal de controle. Isto leva ao importante conceito de sincronização de subsistemas caóticos.

A construção de um sistema de direção homogênea é fácil. Dado um sistema, divida-o em dois subsistemas (v , u). Reproduza o subsistema que não será usado para controle (u) e chame esta cópia de resposta (w). O critério para se dividir o sistema

diretor é determinado pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov condicionais. O subsistema u deve ser estável.

4 – CIRCUITO DE CHUA

Nos anos 80, o circuito de Chua [6] tornou-se bastante popular como instrumento de estudo dos sistemas caóticos. Ele permite que quase todos os resultados detectados em simulações computacionais de sistemas dinâmicos sejam vistos experimentalmente na tela de um osciloscópio. O circuito é basicamente um RLC com quatro elementos (dois capacitores, um resistor, um indutor) e um diodo não-linear, que pode ser modelado por um sistema de três equações diferenciais [1,8]. As equações de estado são:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= G(v_2 - v_1) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= G(v_1 - v_2) + i_3 \\ L \frac{di_3}{dt} &= -v_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde v_1 , v_2 e i_3 denotam a tensão no capacitor C_1 , a tensão no capacitor C_2 e a corrente no indutor L , respectivamente. A função $g(v_1)$ fornece a tensão versus a corrente no elemento não-linear, geralmente chamado de diodo de Chua. A figura abaixo ilustra a curva $v - i$ característica do diodo de Chua.

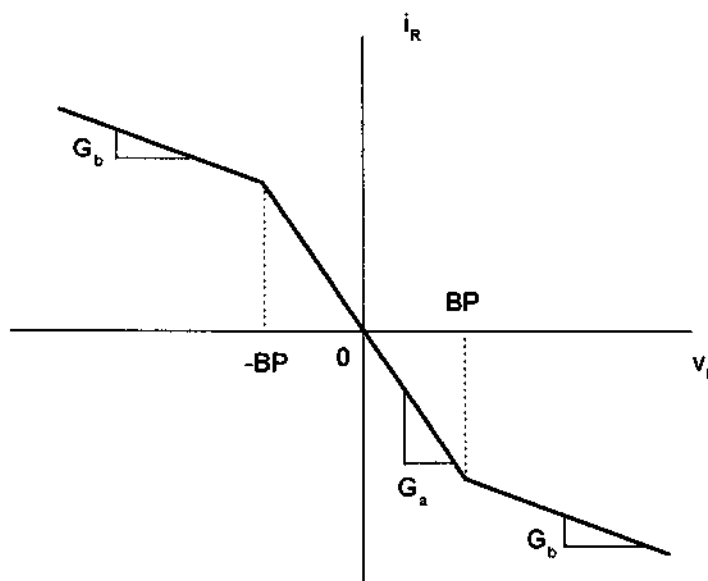


Fig 4.1 - Curva característica do diodo de Chua.

A parte não-linear no circuito de Chua original é descrita por uma função constituída de três segmentos lineares, cuja representação é a seguinte:

$$g(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|). \quad (4.2)$$

É relativamente simples implementar fisicamente um circuito que satisfaz (4.1). Todos os elementos lineares (capacitor, resistor e indutor) estão disponíveis comercialmente. O

diodes de Chua pode ser obtido utilizando-se diodos, transistores, amplificadores operacionais, ou ainda, outros dispositivos não lineares. O que torna o circuito de Chua atrativo é a facilidade com que ele é construído, manuseado e modelado. Devido à simplicidade, robustez e baixo custo, ele se tornou uma das ferramentas mais usadas no estudo de fenômenos caóticos.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Todas as simulações numéricas deste tópico foram feitas com o Dynamics 2 [7]. Primeiramente deve-se normalizar as equações de estado do circuito de Chua. Sendo assim, têm-se:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_1}{B_p} & y &= \frac{v_2}{B_p} & z &= \frac{i_3}{B_p} \\ \tau &= \frac{tG}{C_2} & a &= \frac{G_a}{G} & & \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1} & \beta &= \frac{C_2}{LG^2} & b &= \frac{G_b}{G} \end{aligned} \quad (4.3)$$

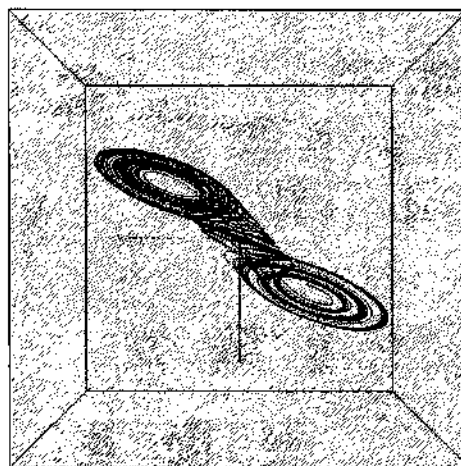
O conjunto de equações diferenciais (3.1) pode ser transformado nas seguintes equações adimensionais:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (4.4)$$

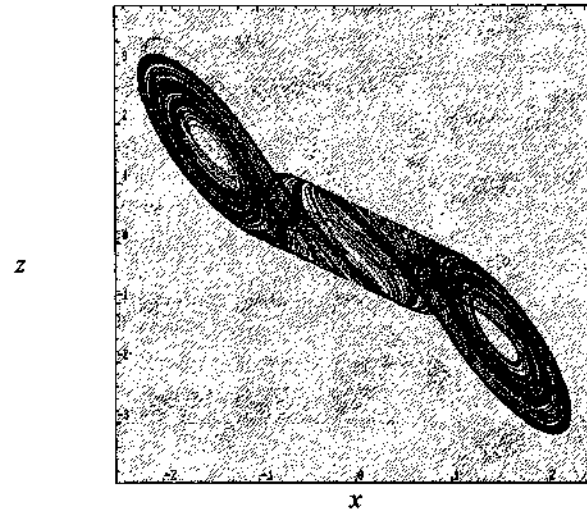
onde

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x; 1, b, a) \\ &= \begin{cases} bx + a - b, & x \geq 1 \\ \alpha x, & |x| \leq 1 \\ bx - a + b, & x \leq -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

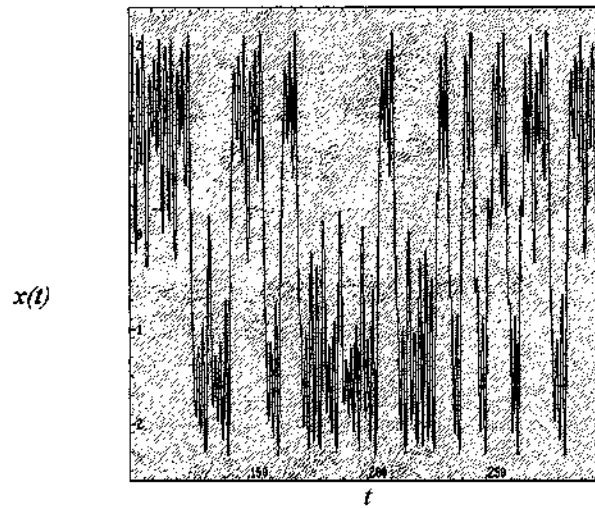
e α , β , a e b são parâmetros reais, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a < 0$ e $b < 0$. As figuras abaixo mostram órbitas típicas para o circuito de Chua.



(a)



(b)

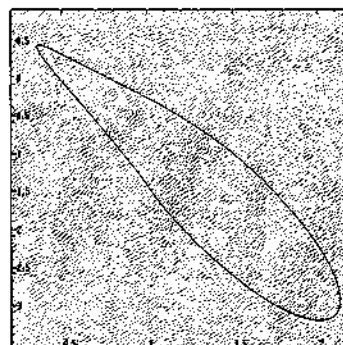


(c)

Fig. 4.2 – Atrator de Chua ($\alpha=9$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$, $b = -5/7$). (a) Vista tridimensional. (b) Projeção do atrator sobre o plano (x, z) . (c) Forma de onda de $x(t)$.

1 - Duplicação de período

Variando os valores dos parâmetros, as equações (4.4) exibem o fenômeno da duplicação de período. As figuras a seguir ilustram tal fenômeno.



(a)

3 - Pré-turbulência

Um fenômeno é chamado de “pré-turbulência” ou “caos metaestável” quando uma trajetória qualquer de um sistema dinâmico serpenteia caoticamente numa vizinhança de um conjunto “estranho”, antes de ser atraída por um atrator não caótico (um ponto fixo, ou uma órbita periódica, por exemplo) [8]. A figura 4.5 ilustra este fenômeno na equação de Chua para: $\alpha = 8,986$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$ e $b = -5/7$.

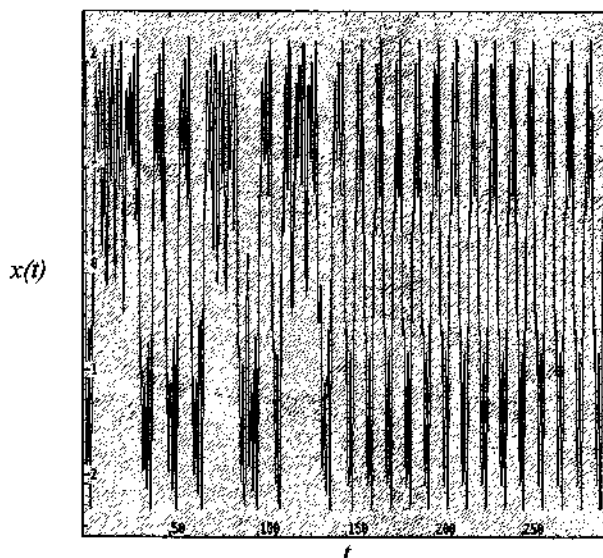
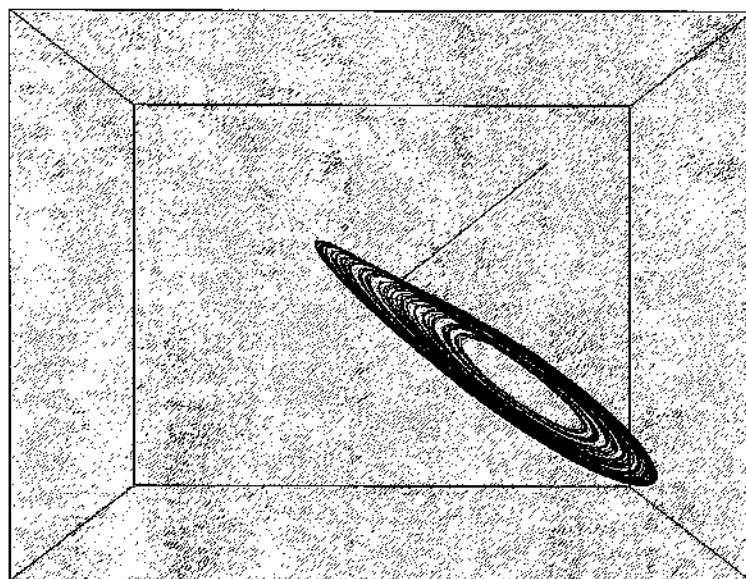


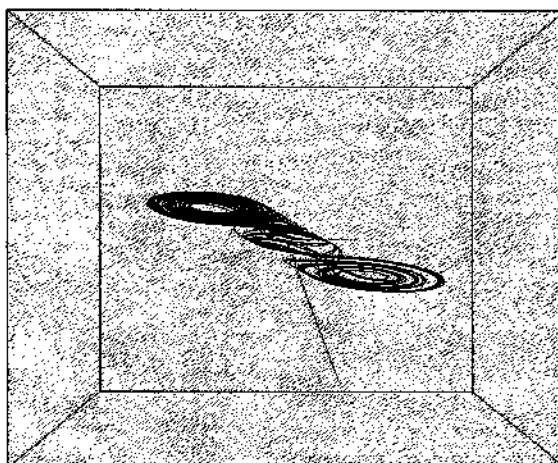
Fig. 4.5 – Caos metaestável na equação de Chua.

4. Características teóricas

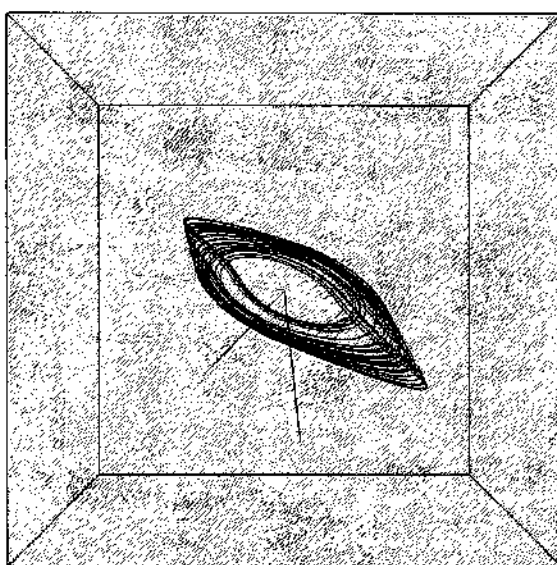
O conjunto de equações 4.4 é um sistema dinâmico linear por partes. Sendo assim, as três equações são topologicamente equivalentes a equações de simetria ímpar lineares por partes no R^3 . Portanto, a dinâmica de qualquer função de três segmentos, linear por partes no R^3 pode ser mapeada neste circuito. Mais de 50 atratores não periódicos deste circuito já foram identificados [8]. Observe as figuras abaixo.



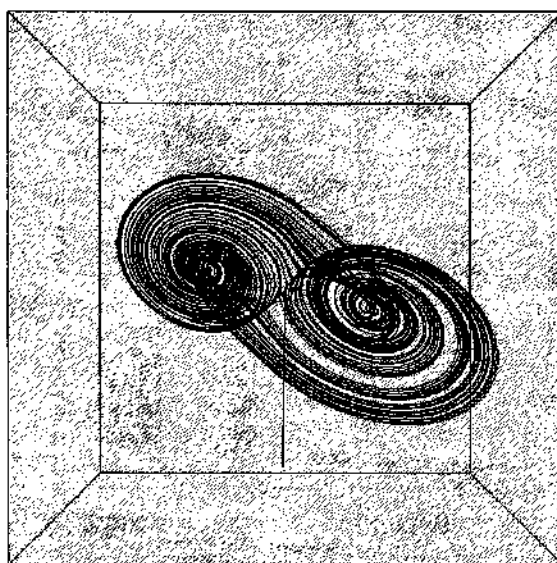
(a)



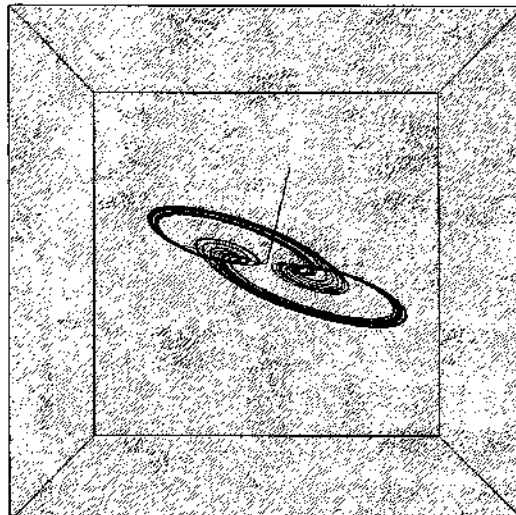
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 4.6 – Cinco atratores não periódicos da equação de Chua. (a) $\alpha = 9.4$, $\beta = 16$, $a = -1,14285$, $b = -0,714$. (b) $\alpha = 9$, $\beta = 14,2857$, $a = -1,1428$, $b = -0,714285$. (c) $\alpha = 8,342$, $\beta = 11,925$, $a = -0,7048$, $b = -1,146$. (d) $\alpha = -4,925$, $\beta = -3,649$, $a = -2,497$, $b = -0,9301$. (e) $\alpha = -4,087$, $\beta = -2$, $a = -8/7$, $b = -5/7$.

5 – SINCRONIZAÇÃO CAÓTICA NO CIRCUITO DE CHUA

No limite infinitesimal, a equação (3.4) leva a equações variacionais para o subsistema resposta. Sendo assim,

$$\dot{\xi}(t) = D_w h(v(t), w(t))\xi. \quad (5.1)$$

Se o subsistema resposta for linear, tem-se

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t), \quad (5.2)$$

onde A é uma matriz constante. As partes reais dos autovalores de A são os *ELC* procurados. Se o subsistema resposta não for linear, deve-se recorrer a métodos computacionais para se determinar os *ELC*. De agora em diante serão investigados três tipos de sistemas diretor-resposta:

Diretor	Resposta	Subsistema
x	(y, z)	linear
y	(x, z)	não-linear
z	(x, y)	não-linear

As simulações numéricas desta seção foram feitas no MATLAB 5.

1 – Sinal diretor: x

As equações de estado tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= x - y' + z' \\ \dot{z}' &= -\beta y' \end{aligned}$$

Para este subsistema, a equação (5.2) é escrita da seguinte forma

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \xi. \quad (5.4)$$

Os ELC são $(-0,5, -0,5)$ e conseqüentemente os subsistemas entram em sincronismo. A figura (5.1) mostra que os subsistemas estão em sincronismo. Observe na figura (5.2) o logaritmo do valor absoluto da diferença entre os sinais dos subsistemas diretor e resposta. Veja como o sinal resposta converge rapidamente para o diretor. Em todas as simulações numéricas foram usados os seguintes valores para os parâmetros: $\alpha = 10,00$, $\beta = 14,87$, $a = -1,27$ e $b = -0,68$.

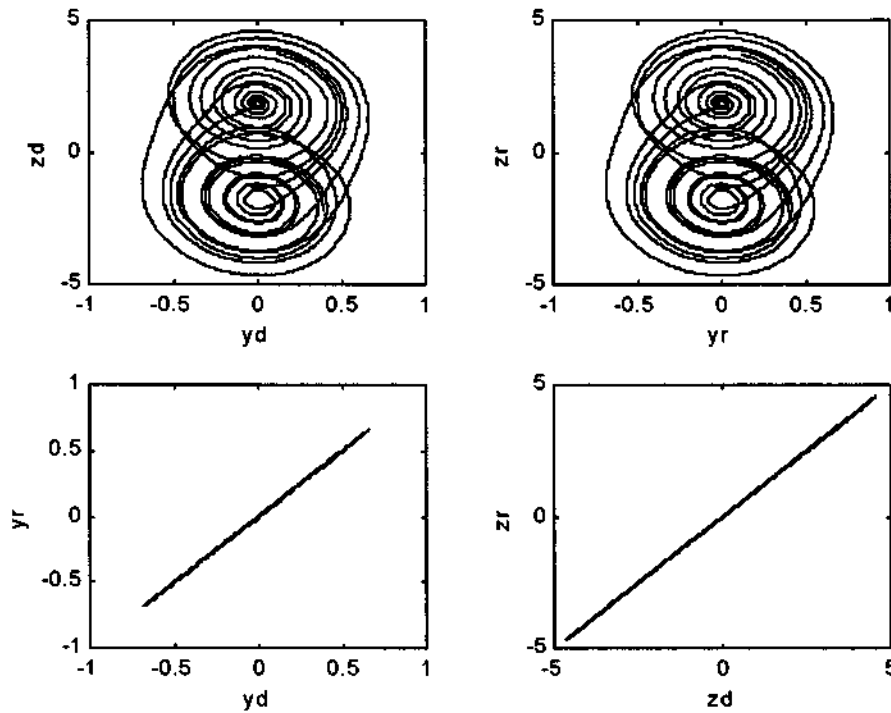


Fig. 5.1 – Configuração x-diretor, condições iniciais: $x = -2$; $y(y_d) = 0,02$; $z(z_d) = 4$; $y'(y_r) = 0,4$; $z'(z_r) = -0,8$.

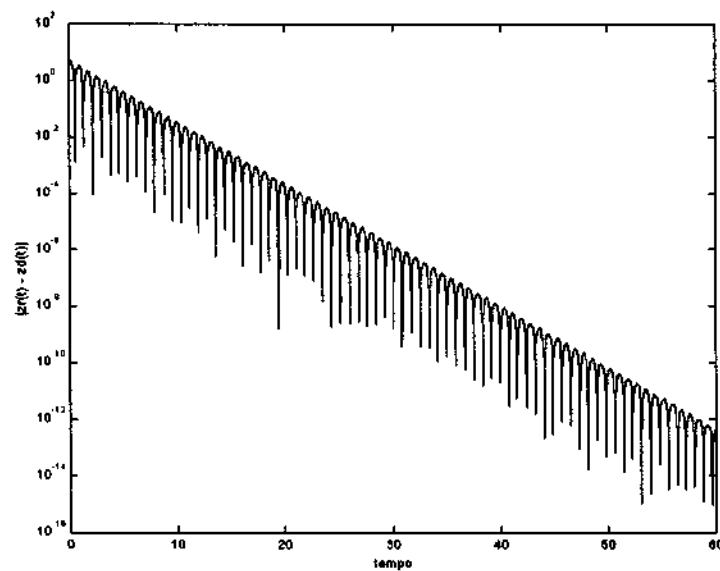


Fig. 5.2 – Valor absoluto da diferença entre a componente z dos sistemas diretor e resposta.

2 – Sinal diretor: y

As equações de estado são:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \\ \dot{x}' &= \alpha(y' - x' - f(x')) \\ \dot{z}' &= -\beta y'\end{aligned}\quad (5.5)$$

Os ELC para este subsistema são $(-2,5 \pm 0,05, 0)$ [14]. Desta forma, espera-se que os subsistemas entrem em sincronismo. Como o segundo expoente de Lyapunov condicional é nulo, os sinais $z(\tau)$ e $z'(\tau)$ permanecem separados por uma distância constante $\Delta z = |z(0) - z'(0)|$. Observe na figura (5.3) que a componente x dos subsistemas se sincronizam e que a componente z , apesar do sincronismo, sofre um deslocamento devido à diferença nas condições iniciais.

3 – Sinal diretor: z

Neste caso as equações de estado são:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y \\ \dot{x}' &= \alpha(y' - x' - f(x')), \quad \dot{y}' = x' - y' + z.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Os ELC do subsistema resposta são $(-5,44, +1,20)$ [14]. Observe na figura (5.8) que os subsistemas não se sincronizam.

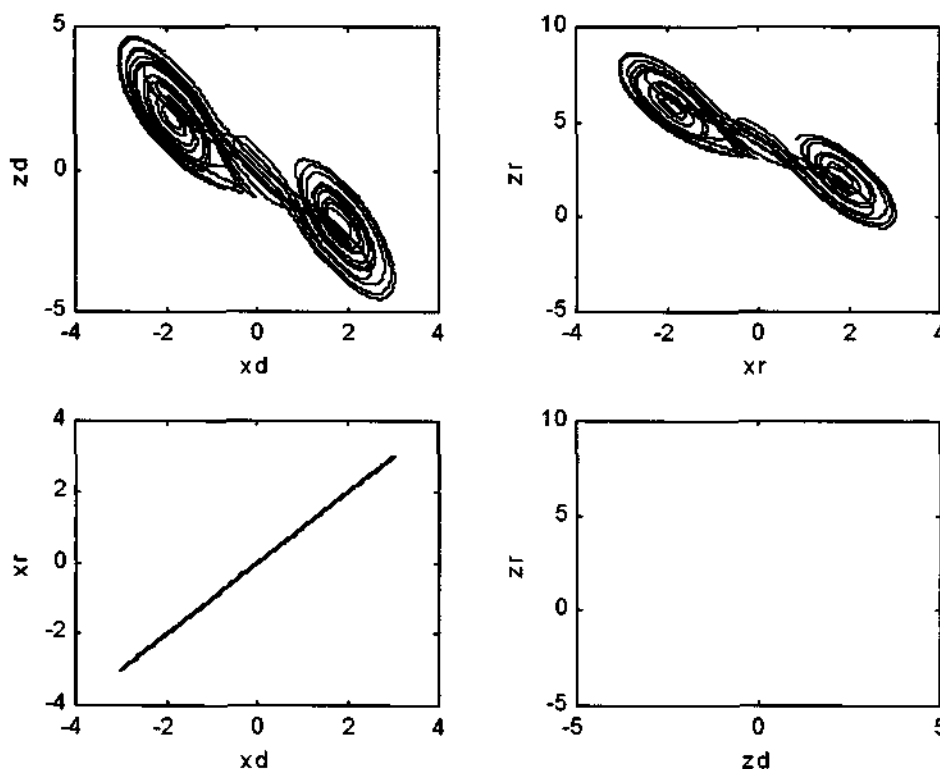


Fig. 5.3 – Configuração y -diretor; condições iniciais: $x = -2$; $y(yd) = 0,02$; $z(zd) = 2$; $x'(xr) = 2$; $z'(zr) = 4$.

O anexo I mostra o gráfico $z_d - z_r$ com mais riqueza de detalhes.

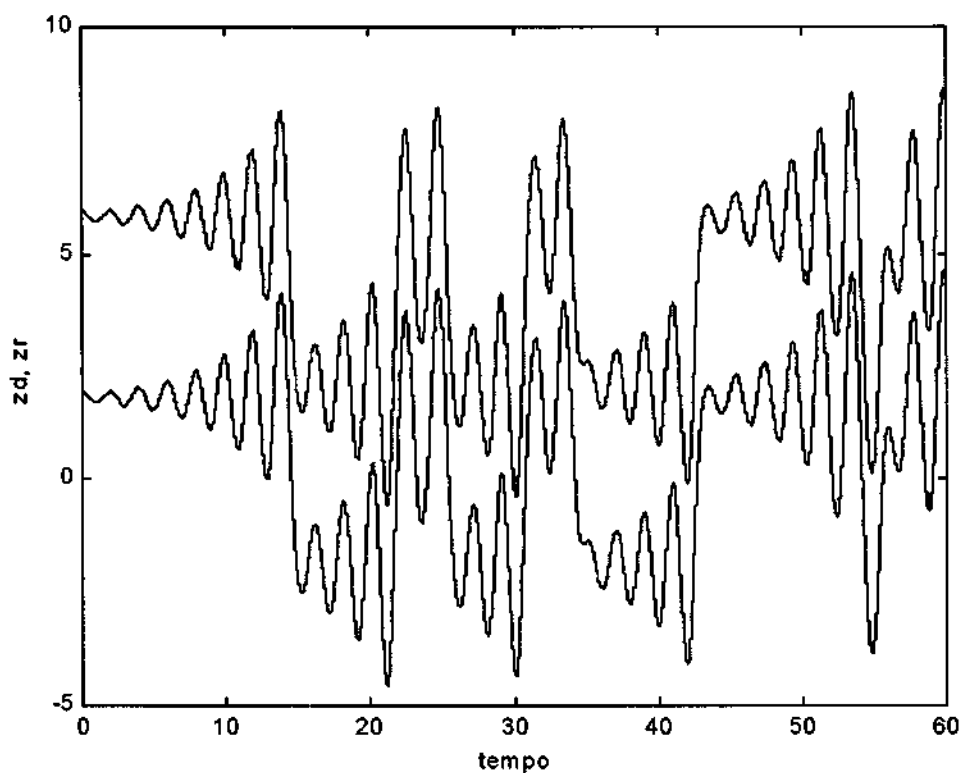


Fig. 5.4 – Série temporal de z (inferior) e z' (superior) para a configuração y -diretor.

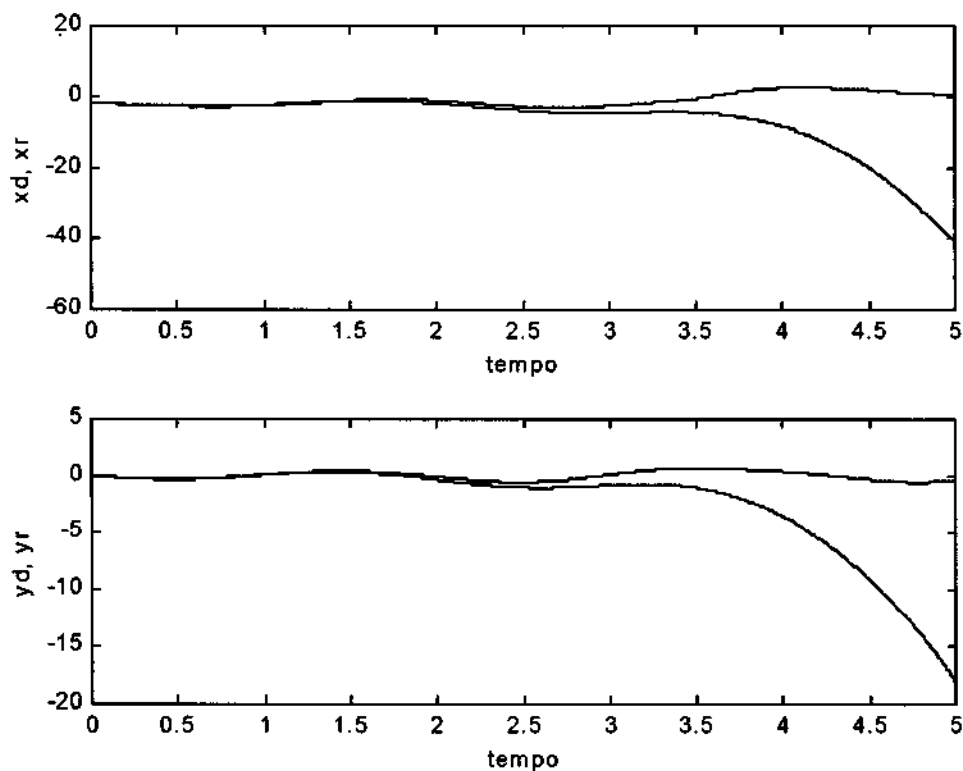


Fig. 5.5 – Séries temporais dos subsistemas diretor e resposta para a configuração z -diretor; condições iniciais: $x = -2$; $y(y_d) = 0,02$; $z = 2$; $x'(x_r) = -2,05$; $y'(y_r) = 0,01$. Os sinais do subsistema resposta estão divergindo para valores negativos.

4 – Efeito de um filtro na sincronização caótica do circuito de Chua

O passo seguinte foi investigar o efeito de se passar o sinal diretor por um filtro. A partir dos resultados obtidos na seção 1, sabe-se que o subsistema (y, z) é linear e seus ELC são ambos negativos. Sendo assim, os subsistemas diretor e resposta entram em sincronismo quaisquer que sejam as condições iniciais. A questão é saber o que ocorre se o sinal diretor, neste caso $x(t)$, tiver certas frequências de seu espectro suprimidas. Ou melhor, qual o mínimo de informação que se deve transmitir de um subsistema para o outro, a fim de que haja o sincronismo? Como se sabe, o meio de propagação atenua e distorce o sinal transmitido, de forma que um filtro pode simular esses efeitos e dar uma idéia melhor de como as coisas se comportam.

Primeiramente deve-se saber em que faixa de frequência está situada a informação contida no sinal $x(t)$. A figura (5.9) mostra o espectro de $x(t)$ (todas as frequências estão normalizadas, já que se está trabalhando com equações adimensionais). Observe que praticamente toda a informação está contida em frequências baixas.

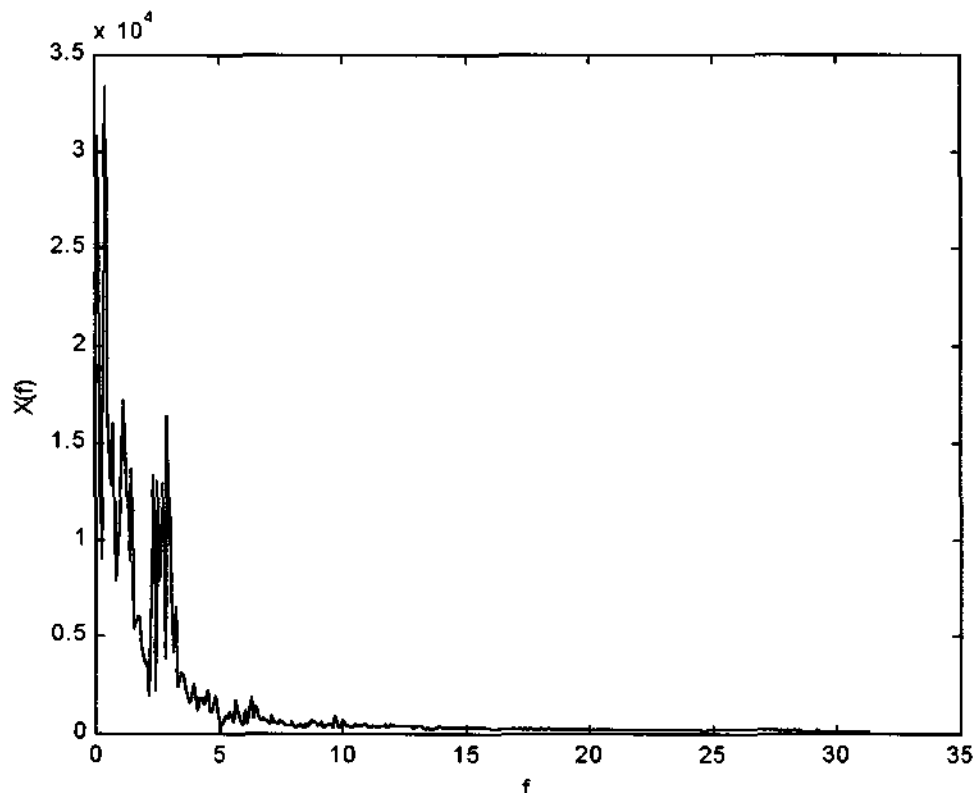


Fig. 5.6 – Espectro de $x(t)$.

O filtro escolhido para esta análise foi o de Chebyshev passa-baixas de terceira ordem. Variando-se a frequência de corte do filtro, pôde-se ter uma idéia de como o filtro afeta o sincronismo entre os dois subsistemas. Para frequências de corte altas, verificou-se que o filtro produz um pequeno atraso no sinal diretor que controla o subsistema resposta. Entretanto, este atraso não chegou a comprometer o sincronismo. À medida que se diminuía a frequência de corte, o atraso aumentava. Para $f_c = 18$ (frequência de corte normalizada), o atraso introduzido pelo filtro no sinal diretor mascarou o sincronismo. Aparentemente os subsistemas não se sincronizavam mais. No entanto, calculando-se a correlação cruzada entre o sinal diretor e o sinal na saída do filtro obteve-se o valor do atraso e compensando-o, notou-se que os subsistemas ainda

filtro obteve-se o valor do atraso e compensando-o, notou-se que os subsistemas ainda se sincronizavam. O método de compensação do atraso funcionou até $f_c = 2,0$. Nesta frequência o sinal filtrado sofreu uma atenuação mais acentuada e os subsistemas perderam completamente o sincronismo. Talvez se houvesse um amplificador na entrada do filtro os subsistemas se sincronizariam. Observe as figuras a seguir.

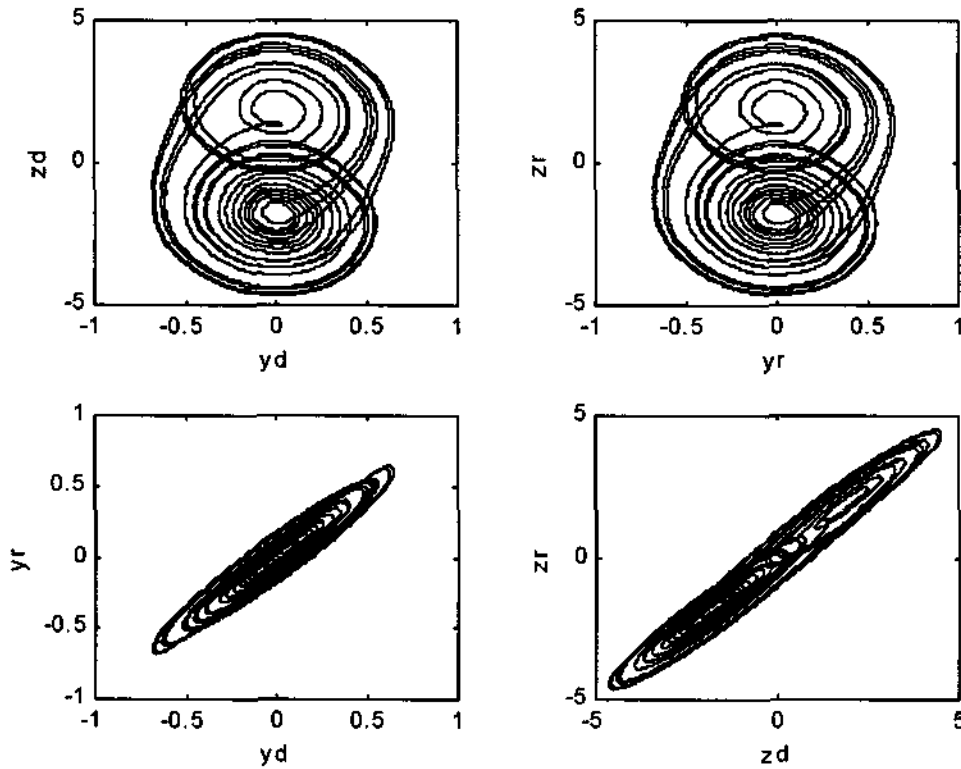


Fig. 5.7 – Configuração x-diretor com filtro. A frequência de corte é $f_c = 18$.

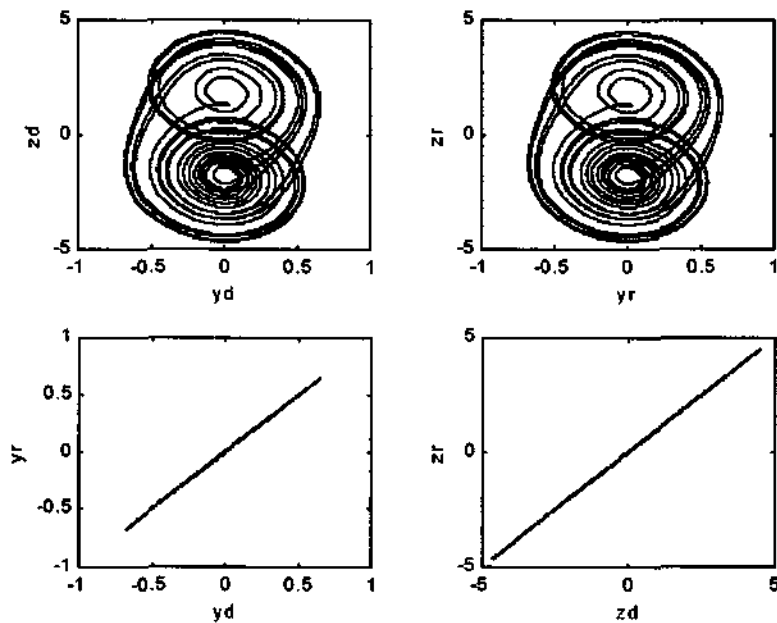


Fig. 5.9 – Sistema com o atraso compensado; $f_c = 18$.

6 – CONCLUSÃO

O conceito de sistema diretor e sua aplicação na construção de sistemas dinâmicos caóticos que se sincronizam constitui uma importante ferramenta no estudo da sincronização caótica. Apesar dos estudos sobre tais sistemas não terem elucidado completamente seu comportamento, forneceram um método para se conseguir entender melhor como as coisas se comportam.

Há muito que se investiga sobre sincronização caótica no circuito de Chua, antes de partir para a implementação do circuito. Os efeitos da filtragem do sinal diretor precisam ser analisados com mais detalhes. Quanto de informação é realmente necessário para que os dois subsistemas atinjam o sincronismo? O tipo de filtro usado interfere de que forma no processo? Será que o fato dos expoentes de Lyapunov condicionais serem negativos garante o sincronismo com o mínimo de informação transmitida? A robustez e simplicidade do circuito de Chua tornam-no uma ferramenta apropriada para investigar estas questões.

A possibilidade de se construir sistemas caóticos que se sincronizam pode abrir um vasto campo de aplicações para a Teoria do Caos em sistemas comunicações.

7 – REFERÊNCIAS

1. Kathleen Alligood, Tim Sauer, James York. Chaos – an introduction to dynamical systems. Springer-Verlag, Inc – 1996.
2. Glenn Elert. The Chaos Hypertextbook. www.hipertextbook.com
3. Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 50, 69-77.
4. Lorenz, E. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Science* 20: 130 – 141.
5. Boyer, C. B. 1996. História da Matemática. Edgard Blücher.
6. Matsumoto, T., Chua, L. O., and Komuro, M. 1985. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 23:798.
7. Nusse, H. E., York, J.A. 1994. *Dynamics: Numerical Explorations*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
8. Kokarev, L., Roska, T. 1993. Dynamics of the Lorenz Equation and Chua's Equation: A Tutorial.
9. Michael Cross. Chua's Circuit. www.cmp.caltech.edu/~mcc/chaos_new
10. Fujisaka, H., Yamada, T. *Prog. Theor. Phys.* 69, n° 32, 1983.
11. Pecora, M. L., Carroll, T. L. Driving systems with chaotic signals, *Phys. Rev. A* 44, 2374 (1991).
12. Pecora, M. L., Carroll, T. L. Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821 (1990).

13. Hanselman, D., Littlefield B. MATLAB 5. Makron Books.
14. Chua, O. L., Itoh, M., Kocarev, L., Eckert, K. Chaos Synchronization in Chua's Circuit, Chua' s Circuit: A Paradigm for Chaos. Edited by Rabinder N. Madan. World Scientific, Singapore,

ANEXO I

