

TRANSPORTE TRANSIENTE DE CALOR EM GEOMETRIAS TRIDIMENSIONAIS COMPLEXAS

Viviane Ribeiro de Siqueira^{1,2}, viviane@lac.inpe.br

Jerônimo Santos Travelho¹, jeff@lac.inpe.br

1. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

2. Universidade Paulista – UNIP

RESUMO

Os métodos de volume finitos centrados na célula que utilizam o circuncentro¹ como o centro das células são dual dos métodos que utilizam polígonos e volumes de Voronoi. A utilização do circuncentro da célula para o cálculo das variáveis melhora a ordem de aproximação para problemas estacionários em malhas bidimensionais quando comparado com outros métodos para malhas não estruturadas^{1,2,3}. O objetivo deste trabalho é a aplicação dessa abordagem para modelagem numérica de problemas transientes bidimensionais e tridimensionais de transferência de calor.

Esses métodos tem recentemente sido utilizados em problemas estacionários bidimensionais de transferência de grandezas escalares por condução e convecção^{1,2}. Como os problemas transientes em volume finitos dependem da integral de volume da grandeza física, se faz necessário investigar a convergência do método para problemas transientes, pois a posição que fornece a melhor aproximação para o valor da média do volume é o baricentro e não o circuncentro. Além disso, os trabalhos localizados na literatura que utilizam o circuncentro com centro da célula se restringem ao caso bidimensional. O desenvolvimento do modelo sendo submetido visa sua utilização para o estudo do controle de transporte de calor em equipamentos importantes na pesquisa aeroespacial como, por exemplo, antenas gravitacionais, etc.

Bibliografia

1. Fazenda, A.L.; Enari, E.H.; Travelho, J.S. “Abordagem pelo Circuncentro para Malhas Não Estruturadas em Tansferência de Calor”. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 99 - Águas de Lindóia – SP, 1999.
2. Herbin, R; Labergerie; O. “Finite volume schemes for elliptic and elliptic-hyperbolic problems on triangular meshes”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol:147, Issue: 1-2, pp. 85-103, 1997.
3. Kwak, D. Y.; Kwon, H. J.; Sungyun, L. “Multigrid algorithm for cell centered finite difference on triangular meshes”. Applied Mathematics and Computation, Vol: 105, pp. 77-85, 1999.

Ministério da Ciência e Tecnologia

INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

**Transporte Transiente de Calor em Geometrias
Tridimensionais Complexas**

Viviane Ribeiro de Siqueira

Relatório Final de Iniciação Científica – PIBIC

*Orientador:
Dr. Jerônimo dos Santos Travelho*

INPE

São José dos Campos

Julho de 2001

Agradecimentos

Ao INPE pelas facilidades concedidas à realização deste trabalho; ao PIBIC pelo apoio financeiro; ao Doutor Jerônimo pela valiosa orientação, incentivo, apoio para o desenvolvimento deste projeto; aos amigos do LAC pela cooperação, incentivo e amizade.

Em especial, agradeço à minha mãe, meu pai, minha irmã, meu irmão, meu namorado e à Deus pelo apoio nos momentos de dificuldade, e a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização deste projeto.

Resumo

Este trabalho apresenta a aplicação do método numérico **Abordagem Baseada no Circuncentro** com a utilização de malhas não-estruturadas bidimensionais e tridimensionais para o cálculo da transferência de calor em modelo estacionário e transiente.

Lista de Figuras

1.1 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional estacionário

1.2 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método explícito com delta t igual a 0.01 segundos e malha não-estruturada quadrada.

1.3 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método explícito com delta t igual a 0.005 segundos e malha não-estruturada quadrada.

Figura 1.4 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método de Runge-Kutta e malha não-estruturada circular.

Lista de Símbolos

T_P, T_A, T_B, T_C, T_D	Temperatura
k, k_A, k_B, k_C, k_D	Condutibilidade Térmica
l_a, l_b, l_c, l_d	Tamanho do lado do triângulo
A, A_a, A_b, A_c, A_d	Área do triângulo ou tetraedro
V	Volume do tetraedro
ρ	Massa Específica do Material
c	Calor Específico do Material
$d_{AP}, d_{BP}, d_{CP}, d_{DP}$	Distância entre circuncentros
$\nabla \cdot$	Divergente
∇	Gradiente
q	Fluxo de Calor

Índice

Capítulo 1 – Introdução	01
Capítulo 2 – Revisão da Literatura	03
Capítulo 3 – Metodologia	06
3.1 – Uso da Modelagem Numérica	06
3.2 – Uso de Malhas Não Estruturadas	07
3.3 – Procedimento para validação do modelo	07
3.4 – Método de Gauss-Seidel	07
3.5 – Método de Runge-Kutta	08
Capítulo 4 – Modelo Unidimensional	09
4.1 – Discretização das equações	09
4.1 – Modelo Físico	10
Capítulo 5 – Modelo Bidimensional	11
5.1 – Modelo Bidimensional Estacionário	11
5.2 – Modelo Bidimensional Transiente	14
Capítulo 6 – Modelo Tridimensional	17
6.1 – Discretização das equações	17
6.2 – Cálculo das iterações	18
Conclusão	19
Bibliografia	20

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é a aplicação da metodologia **Abordagem Baseada no Circuncentro** [1] para modelagem numérica de problemas tridimensionais transientes de transferência de calor.

A transferência de calor é um dos grandes problemas nos projetos de vários ramos da engenharia. As necessidades das diversas áreas da engenharia, na busca de competitividade, tem levado à aplicação de modelos numéricos a geometrias de complexidade crescente. Por essa razão a utilização de malhas não estruturadas tem recebido cada vez mais atenção. No nosso grupo estamos desenvolvendo a Abordagem Baseada no Circuncentro [1], para problemas de fenômenos de transporte em geral, utilizando malhas triangulares, prismáticas e tetraedrais. Nessa abordagem as variáveis são calculadas no circuncentro das células.

As abordagens que utilizam o circuncentro como centro das células são dual dos métodos que utilizam polígonos e volumes de Voronoi. A utilização do circuncentro da célula para o cálculo das variáveis melhora a ordem de aproximação para problemas estacionários em malhas bidimensionais quando comparado com outros métodos para malhas não-estruturadas [1,2,3].

Esses métodos tem recentemente sido utilizados em problemas estacionários bidimensionais de transferência de grandezas escalares por condução e convecção[1,2] . Como os problemas transientes em volume finitos dependem da integral de volume da grandeza física, se faz necessário investigar a convergência do método para problemas transientes, pois a posição que fornece a melhor aproximação para o valor da média do volume é o baricentro e não o circuncentro. Além disso, os trabalhos localizados na literatura que utilizam o circuncentro como centro da célula se restringem ao caso

bidimensional. Neste projeto aplicou-se essa metodologia , pela primeira vez, ao estudo de problemas transientes e também utilizou pela primeira vez, malhas tetraedrais.

O desenvolvimento do modelo sendo submetido visa sua utilização para o estudo do controle de transporte de calor em equipamentos importantes na pesquisa aeroespacial como, por exemplo, antenas gravitacionais, etc.

No Capítulo 2 é apresentada a revisão da literatura que envolve o projeto, dando ênfase aos principais conceitos da física do problema.

No Capítulo 3 é apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento do modelo, com os métodos numéricos que foram utilizados para a discretização das equações e também para o cálculo das variáveis.

No Capítulo 4 é apresentado o modelo unidimensional, com a discretizações das equações, a definição da malha e o método utilizado para o cálculo das variáveis.

No Capítulo 5 é apresentado o modelo bidimensional, com a discretizações das equações, a definição da malha, o método utilizado para o cálculo das variáveis e os resultados do campo de temperatura.

No Capítulo 6 é apresentado o modelo tridimensional, com a discretizações das equações, a definição da malha, o método utilizado para o cálculo das variáveis e os resultados do campo de temperatura.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Conceitos Fundamentais

Os Conceitos Fundamentais de transferência de calor e temperatura são muito importantes para este projeto. Neste capítulo será apresentado uma revisão do significado termodinâmico destes conceitos.

Transferência de Calor

É definida como a interação energética provocada pela diferença de temperatura entre o sistema e seu meio. A transferência de calor ocorre quando há diferença de temperatura entre dois pontos e calor vai do corpo quente para o corpo frio.

Temperatura é a propriedade termodinâmica que determina se o sistema está em equilíbrio térmico com outro sistema. Dois sistemas A e B estão em equilíbrio somente se suas temperaturas são iguais:

$$T_A = T_B$$

Fluxo de Calor

Quantidade de calor que passa por uma superfície por unidade de área por unidade de tempo. O fluxo de calor é proporcional à diferença de temperaturas entre dois corpos, A e B, por exemplo:

$$T_A - T_B$$

e inversamente proporcional à distância entre os mesmos d_{AB} . Também é proporcional à facilidade que o primeiro oferece ao transporte de calor.

Condutibilidade Térmica

Propriedade física do meio material, que mede a facilidade de ocorrer a condução de calor. A maioria dos dados da condutibilidade térmica podem ser encontrados em livros e manuais referentes aos materiais isotrópicos e homogêneos. É necessário ressaltar que a temperatura pode alterar significativamente o valor da condutibilidade térmica e esta pode classificar os materiais em “bons” e “maus” condutores de energia.

Gradiente da propriedade física

É um vetor perpendicular (vetor normal) que mede a taxa de maior variação do campo e sua direção, onde seu sentido aponta para a parte mais quente.

Superfície Adiabática

Superfície perfeitamente isolada, onde não ocorre a transferência de calor.

Lei de Fourier

$$\bar{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} - k \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k}$$

Esta equação é conhecida como a Lei de Fourier para a condução de calor, onde k é a condutibilidade térmica e q é o fluxo de calor.

Equação de Balanço

A equação de balanço é utilizada para verificar, em sistemas de modelagem numérica, se a quantidade de calor que entra em uma extremidade da superfície é a mesma quantidade de calor que sai na outra superfície. A equação de balanço para o transporte bidimensional estacionário, ou seja, o campo de temperaturas não depende do tempo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

Transporte Transiente de Calor

Transporte de Calor onde o campo de temperaturas depende do tempo.

Condições de Contorno

As condições de contorno são necessárias para definir o que ocorre em toda a fronteira que define o meio condutor analisado. As condições de contorno analisadas foram:

- a) Temperatura conhecida no contorno;
- b) Fluxo de calor conhecido.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 – Uso da Modelagem Numérica

A modelagem numérica de fenômenos físicos é um meio termo entre a teoria e a experimentação. Ela possui características de ambas. Na teoria pode-se estudar situações impossíveis na prática. E na experimentação, seus resultados são particulares e são obtidos, muitas vezes, após várias tentativas.

Qualquer modelagem, numérica ou analítica, é feita admitindo-se uma série de hipóteses. Na modelagem numérica, além das hipóteses de validade dos modelos físicos, existem hipóteses referentes às aproximações numéricas. Essas hipóteses devem ser verificadas através da comparação com soluções analíticas. Finalmente, as hipóteses do modelo físico devem ser verificadas através da comparação com resultados experimentais. A modelagem numérica é muito útil, pois permite a análise de várias situações de maneira rápida e econômica, antes de construir protótipos.

A primeira etapa da modelagem numérica é a geração da malha. As malhas podem ser estruturadas ou não-estruturadas. Uma malha é estruturada se os vértices da células que não estão no contorno, pertencerem ao mesmo número de células. As células são facilmente acessadas numa malha estruturada, aumentando a velocidade do código. No entanto, as malhas não-estruturadas são mais adequadas para contornos complexos

3.1.2 - Método dos Volumes Finitos

No método de Volumes Finitos se aplica as equações de balanço a cada célula da malha. Se os fluxos forem calculados corretamente nas faces das células pode-se garantir que as equações de balanço serão válidas para qualquer grupo de células vizinhas. Esse é o método numérico mais próximo das leis físicas e o método utilizado para a discretização da equações no decorrer desse projeto.

3.2 – Uso de Malhas Não-Estruturadas

O método numérico para malhas não-estruturadas utilizado neste projeto é o método centrado na célula, onde as variáveis são calculadas no centro das mesmas (no centro dos triângulos e tetraedros).

Quando as variáveis são calculadas no circuncentro dos triângulos, obtém-se o método sendo utilizado em nosso grupo e denominado Abordagem Baseada no Circuncentro.

3.3 Procedimentos para a validação do modelo

O modelo ao ser implementado foi testado para várias situações visando sua validação:

- Consistência para várias condições iniciais;
- Independência da solução em relação à malha utilizada.

As soluções numéricas são normalmente obtidas através de:

- Convergência a partir de um campo inicial tentativo.

3.4 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel calcula as iterações utilizando os valores dos cálculos anteriores. O valor da temperatura $T_{[n+1]}$ é calculada usando o valor da temperatura anteriormente calculada. A primeira iteração é a condição inicial. O cálculo das iterações ficará da seguinte forma:

$$T_{[0]} = 0 \tag{3.1}$$

$$T_{[1]} = \frac{T_{[0]} + T_{[2]}}{2} \tag{3.2}$$

$$T_{[2]} = \frac{T_{[1]} + T_{[3]}}{2} \tag{3.3}$$

$$T_{[i]} = \frac{T_{[i-1]} + T_{[i+1]}}{2} \tag{3.4}$$

3.5 - Método de Runge-Kutta

Utiliza a seguinte condição:

$$y' = f(x, y) \quad (3.5)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad (3.7)$$

Para a equação:

$$\frac{k_a \frac{T_A - T_P}{dAP} l_a + k_b \frac{T_B - T_P}{dBP} l_b + k_c \frac{T_C - T_P}{dCP} l_c}{\frac{k_a l_a}{dAP} + \frac{k_b l_b}{dBP} + \frac{k_c l_b}{dCP}} = 0 \quad (3.8)$$

$$K_1 = \frac{k_a \frac{T_A - T_P}{dAP} l_a + k_b \frac{T_B - T_P}{dBP} l_b + k_c \frac{T_C - T_P}{dCP} l_c}{\frac{k_a l_a}{dAP} + \frac{k_b l_b}{dBP} + \frac{k_c l_b}{dCP}} + T_P \quad (3.9)$$

$$K_2 = \frac{k_a \frac{K_{1A} - K_{1P}}{dAP} l_a + k_b \frac{K_{1B} - K_{1P}}{dBP} l_b + k_c \frac{K_{1C} - K_{1P}}{dCP} l_c}{\frac{k_a l_a}{dAP} + \frac{k_b l_b}{dBP} + \frac{k_c l_b}{dCP}} \quad (3.10)$$

Capítulo 4

Modelo Unidimensional

O modelo unidimensional foi implementado para haver maior familiarização com o projeto. Foi utilizado o regime estacionário, para implementação deste modelo.

4.1 - Discretização das Equações

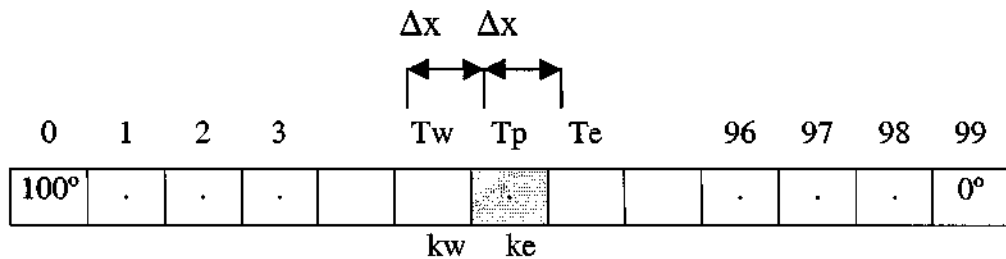
A equação que descreve a condução em regime unidimensional estacionário é:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

Aplicando o método dos volumes finitos obtemos a seguinte equação:

$$k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x} + k_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x} = 0 \quad (4.2)$$

$$T_p = \frac{\frac{k_w}{\Delta x} T_w + \frac{k_e}{\Delta x} T_e}{\frac{k_w}{\Delta x} + \frac{k_e}{\Delta x}} \quad (4.3)$$



Capítulo 5

Modelo Bidimensional

5.1 - Modelo Bidimensional Estacionário

5.1.1 - Discretização das Equações

A equação que descreve a condução bidimensional estacionário é:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \quad (5.1)$$

Utilizando o Teorema da Divergência de Gauss – que transforma a integral dupla em integral de superfície e divide o a superfície em pequenos pedaços, obtemos:

$$\iiint \nabla \cdot (k\nabla T) dv = \iiint 0 dv \quad (5.2)$$

$$\iint \nabla \cdot (k\nabla T) dv = 0 \quad (5.3)$$

$$\oint k\nabla T \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^3 k(\nabla T \cdot \hat{n}) l_i = 0 \quad (5.5)$$

Aplicando o método dos volumes finitos:

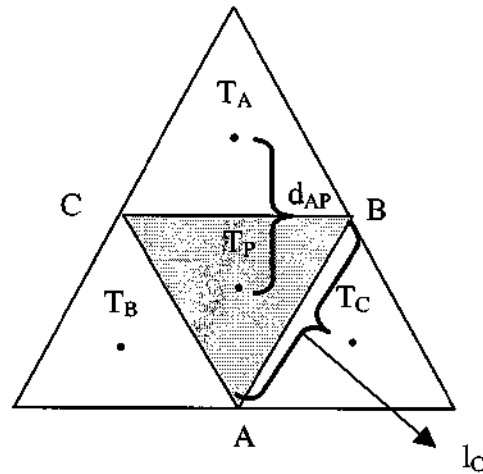
$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \quad (5.6)$$

$$\hat{n} = -\hat{i} \quad (5.7)$$

$$\nabla T \cdot \hat{n} = -\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T_{\text{vizinho}} - T_P}{d_{\text{circuncentros}}} \quad (5.8)$$

$$\frac{k_a \frac{T_A - T_P}{d_{AP}} l_a + k_b \frac{T_B - T_P}{d_{BP}} l_b + k_c \frac{T_C - T_P}{d_{CP}} l_c}{\frac{k_a l_a}{d_{AP}} + \frac{k_b l_b}{d_{BP}} + \frac{k_c l_b}{d_{CP}}} = 0 \quad (5.9)$$

$$T_P = \frac{\frac{T_A k_a l_a}{d_{AP}} + \frac{T_B k_b l_b}{d_{BP}} + \frac{T_C k_c l_c}{d_{CP}}}{\frac{k_a l_a}{d_{AP}} + \frac{k_b l_b}{d_{BP}} + \frac{k_c l_c}{d_{CP}}} \quad (5.10)$$



5.1.2 - Definição da Superfície e Cálculo das Iterações

5.1.2.1 - Malha Quadrada

No modelo bidimensional estacionário foi utilizado o programa Easymesh [4] que cria a malha, de acordo com as coordenadas fornecidas pelo usuário e divide-a interiormente em triângulos e polígonos sobrepostos aos triângulos. Essas coordenadas são gravadas em um arquivo. Esse arquivo deve conter o número de pontos que a malha terá, coordenadas de cada um desses pontos, número de lados que a malha terá e os pontos que formarão esses lados.

Primeiramente foi definida uma malha com 1 metro de comprimento por 1 metro de altura. O Easymesh fornece a visualização da malha e as coordenadas de cada triângulo em três arquivos diferentes:

- número de vértices e coordenadas x e y de cada vértice;
- número de lados, os dois vértices que formam um lado e os dois triângulos que compartilham esse lado;
- número de triângulos, índice dos três vértices que formam esse triângulo, índice dos três triângulos vizinhos ao lado, coordenadas x e y dos circuncentros dos triângulos.

Após a criação da malha, utilizou-se um programa de pré-processamento, desenvolvido pelo grupo, que lê os arquivos gerados pelo Easymesh e cria um arquivo padrão, pois desta forma facilita a comparação de resultados entre os integrantes do grupo.

O contorno é formado por 40 triângulos e as condições de contorno foram definidas da seguinte forma: 10 triângulos com temperatura à 100°C e os 30 triângulos restantes com temperatura à 0°C . As condições iniciais de temperatura são de 0°C . Para resolver as iterações foi utilizado o método de Gauss-Seidel.

5.1.3 - Resultados

Os resultados do campo de temperatura obtidos são exemplificados no gráfico abaixo:

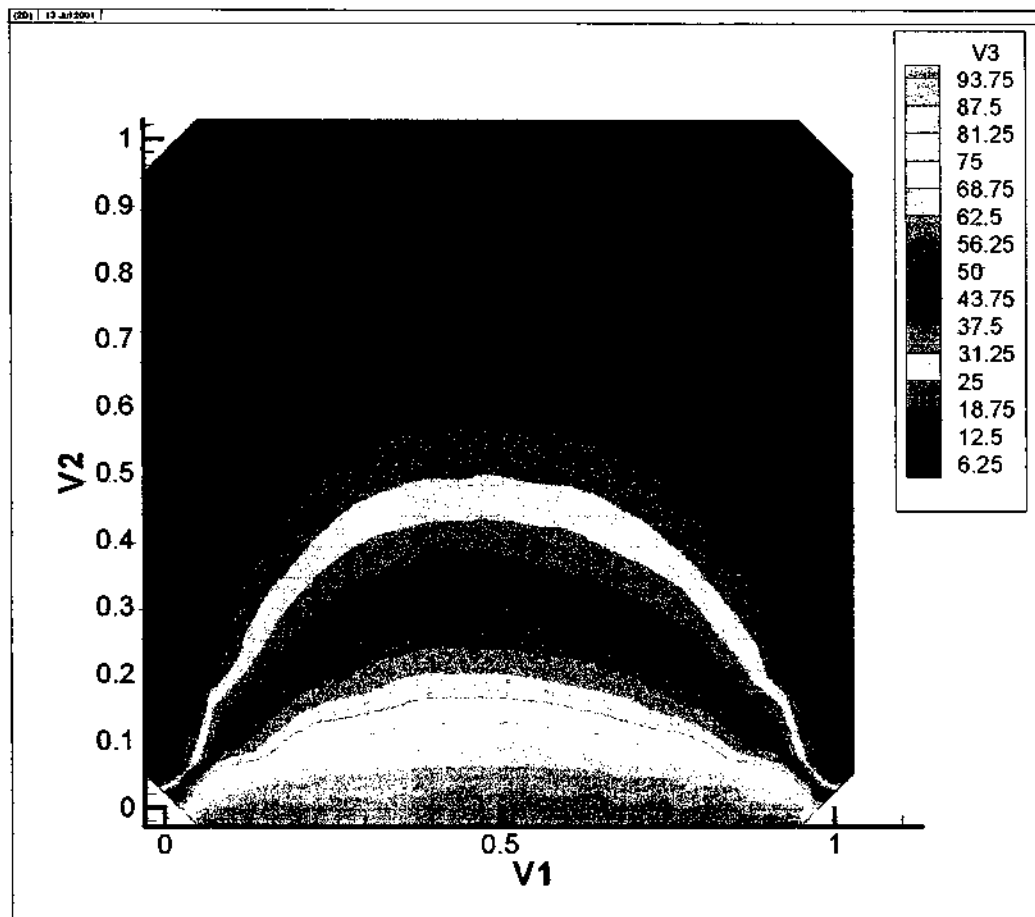


Figura 1.1 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional estacionário

5.2 - Modelo Bidimensional Transiente

5.2.1 - Discretização das Equações

A equação que descreve a condução bidimensional transiente é:

$$\iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dv = \iiint \nabla \cdot (k \nabla T) dt dv \quad (5.11)$$

Utilizando o método dos volumes finitos e o método explícito – que calcula as temperaturas no instante futuro através de iterações com as temperaturas do instante atual e uma condição inicial – obtemos a seguinte equação:

$$T_P^{n+1} = \frac{\left[ka^n \frac{T_A^n - T_P^n}{d_{AP}} la + kb^n \frac{T_B^n - T_P^n}{d_{BP}} lb + kc^n \frac{T_C^n - T_P^n}{d_{CP}} lc \right] \Delta t}{(\rho c)^n A} + T_P^n \quad (5.12)$$

5.2.2 - Definição da Superfície e Cálculo das Iterações

5.2.2.1 – Malha Quadrada

Como no modelo bidimensional estacionário, no modelo bidimensional foi utilizado o programa Easymesh para criar uma malha quadrada.

As condições de contorno foram definidas tendo um lado a temperatura igual a 100°C e os outros três lados temperatura igual a 0°C. As condições iniciais são de temperaturas iguais a 0°C. O valor inicial de tempo é de 0 segundos, parando a execução ao tempo final igual a 5 minutos. O valor da variação do tempo (delta t) foi inicialmente 0.01 segundos e posteriormente 0.005 segundos. Para resolver as iterações foi utilizado o método explícito e Gauss-Siedel.

Também foi utilizado o método de Runge-Kutta para calcular as iterações. O período de tempo foi definido como anteriormente de 0 segundos a 5 minutos.

5.2.2.1 – Malha Circular

Foi definida no Easymesh uma malha formada por metade de um círculo. Foi gerado

um programa para ler os dados gerados pelo Easymesh e criar triângulos simétricos e fazer assim, uma malha circular. Nessa malha utilizamos somente as condições iniciais, onde a metade da malha tinha temperatura à 100°C e a outra metade, temperatura à 0°C.

Foi utilizado o método de Runge-Kutta para calcular as iterações. O período de tempo também ocorreu como anteriormente, de 0 segundos a 5 minutos.

5.2.3 - Resultados

Os resultados obtidos são mostrados nos gráficos a seguir:

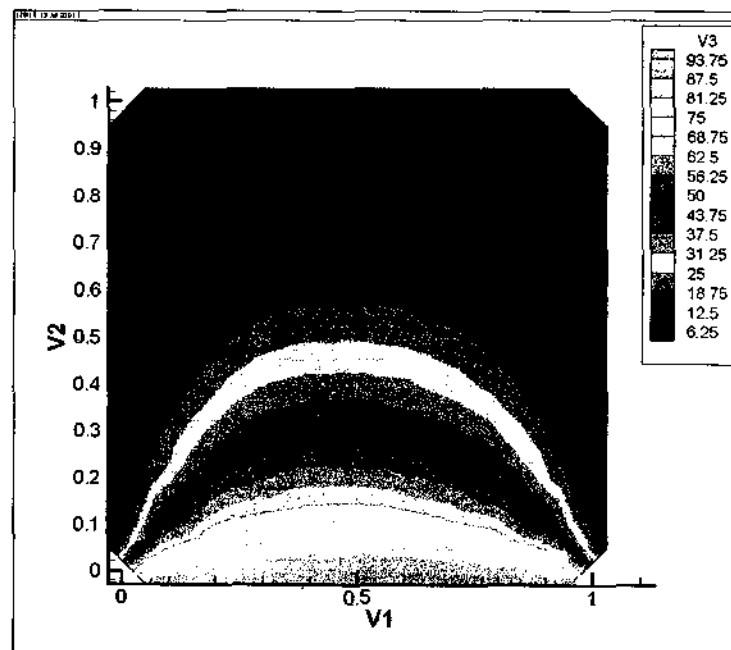


Figura 1.2 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método explícito com delta t igual a 0.01 segundos e malha não-estruturada quadrada.

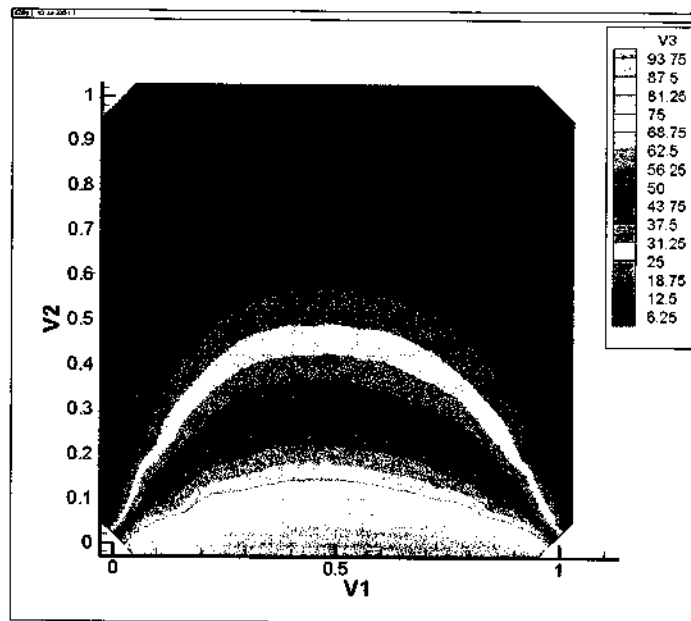


Figura 1.3 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método explícito com Δt igual a 0.005 segundos e malha não-estruturada quadrada.

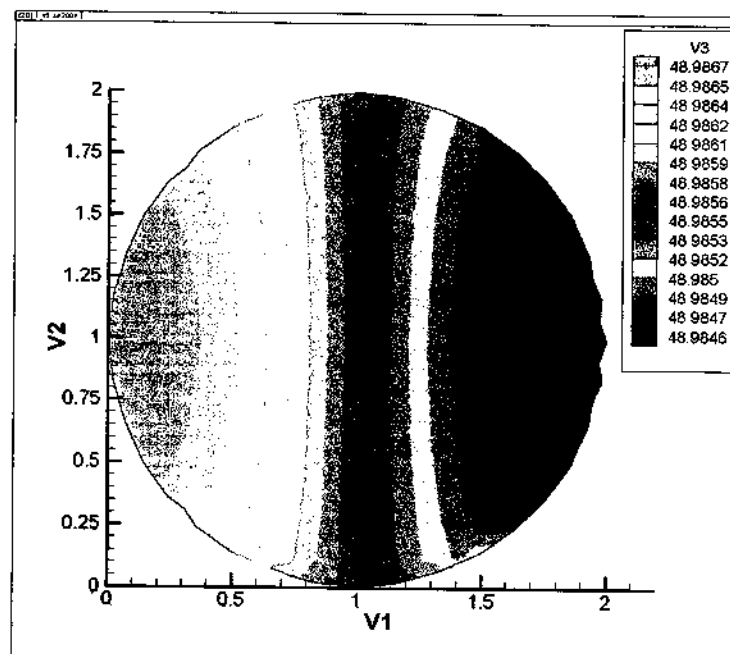


Figura 1.5 – Resultado do campo de temperaturas para o modelo bidimensional transiente utilizando o método de Runge-Kutta e malha não-estruturada circular.

Capítulo 6

Modelo Tridimensional

6.1 - Discretização das equações

6.1.1 - Discretização das Equações em modelo estacionário

A equação que descreve a condução tridimensional estacionária é:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (6.1)$$

Aplicando o método dos volumes finitos:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \quad (6.2)$$

$$\frac{k_a \frac{T_A - T_P}{d_{AP}} A_a + k_b \frac{T_B - T_P}{d_{BP}} A_b + k_c \frac{T_C - T_P}{d_{CP}} A_c + k_d \frac{T_D - T_P}{d_{DP}} A_d}{\frac{k_a A_a}{d_{AP}} + \frac{k_b A_b}{d_{BP}} + \frac{k_c A_c}{d_{CP}} + \frac{k_d A_d}{d_{DP}}} = 0 \quad (6.3)$$

$$T_P = \frac{\frac{T_A k_a A_a}{d_{AP}} + \frac{T_B k_b A_b}{d_{BP}} + \frac{T_C k_c A_c}{d_{CP}} + \frac{T_D k_d A_d}{d_{DP}}}{\frac{k_a A_a}{d_{AP}} + \frac{k_b A_b}{d_{BP}} + \frac{k_c A_c}{d_{CP}} + \frac{k_d A_d}{d_{DP}}} \quad (6.4)$$

6.1.2 - Discretização das Equações em modelo transiente

Sabendo que a equação que descreve a condução tridimensional transiente é:

$$\int \int \int \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt dv = \int \int \int \nabla \cdot (k \nabla T) dt dv \quad (6.5)$$

Aplicamos o método dos volumes finitos e obtemos a equação a seguir:

$$T_P^{n+1} = \frac{\left[ka^n \frac{T_A^n - T_P^n}{d_{AP}} la + kb^n \frac{T_B^n - T_P^n}{d_{BP}} lb + kc^n \frac{T_C^n - T_P^n}{d_{CP}} lc \right] \Delta t}{(\rho c)^n A} + T_P^n \quad (6.6)$$

6.2 - Cálculo das Iterações

Para resolver as iterações na malha tridimensional foi utilizado o método explícito e Runge-Kutta. As condições iniciais foram definidas através das coordenadas dos circuncentros. As coordenadas de z que fossem iguais a zero têm temperatura à 50°C, as coordenadas de z que fossem menores que zero têm temperatura à 100°C e o restante com temperatura igual a 0°C. Foi utilizado delta t muito pequeno devido à proximidade dos circuncentros dos tetraedros.

Conclusão

Os métodos numéricos que utilizam o circuncentro como centro das células dependem muito da qualidade da malha que está sendo utilizada. No modelo bidimensional as malhas geradas eram não-estruturadas, porém a qualidade dos triângulos obtida era boa porque os triângulos eram regulares, e o circuncentro bem próximo do baricentro do triângulo. No modelo tridimensional os geradores existentes não geram malhas de boa qualidade, que crie tetraedros regulares. Desenvolvemos um programa para gerar tetraedros melhores, assim a distância entre os circuncentros em nossa malha é muito pequena. Devido à isso, tivemos que usar um delta t muito pequeno para conseguir executar o programa e analisar os resultados obtidos. Assim, podemos concluir que a **Abordagem Baseada no Circuncentro** é muito eficaz para o modelo bidimensional estacionário e bidimensional transiente, porém esse método não é eficaz para o modelo tridimensional devido à complexidade em gerar malhas tridimensionais com tetraedros próximos de tetraedros regulares.

Bibliografia

1. Fazenda, A.L.; Enari, E.H.; Trivelho, J.S. **“Abordagem pelo Circuncentro para Malhas Não Estruturadas em Transferência de Calor”**. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 99 - Águas de Lindóia – SP, 1999.
2. Herbin, R; Labergerie; O. **“Finite volume schemes for elliptic and elliptic-hyperbolic problems on triangular meshes”**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol:147, Issue: 1-2, pp. 85-103, 1997.
3. Kwak, D. Y.; Kwon, H. J.; Sungyun, L. **“Multigrid algorithm for cell centered finite difference on triangular meshes”**. Applied Mathematics and Computation, Vol: 105, pp. 77-85, 1999.
4. <http://www-dinma.univ.trieste.it/~nirftc/research/easymesh/>
Consultada em 23 de outubro de 2000.
5. Bejan, Adrian **“Transferência de Calor”**. Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996.
6. **“Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach”**. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, 1980.
7. Spiegel, M. R. **“Coleção Shaum – Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas”**. McGraw-Hill, 1973.
8. Hoffman, J.D. **“Numerical Methods for engineers ans scientists”**. McGraw-Hill, 1993.
9. Fortuna, A. O. **“Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos – Conceitos Básicos e Aplicações”**. Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

10. Siqueira, V. R.; Travelho, J. S. **“Transporte Transiente de Calor em Geometrias Tridimensionais Complexas”**, aceito no XXIV CNMAC a ser realizado de 10 a 13 de setembro de 2001 em Belo Horizonte, MG.