

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE INTEGRADORES NUMÉRICOS EM MECÂNICA ESPACIAL

Aurea Aparecida da Silva
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP -
Bolsa PIBIC - INPE / CNPq

Antonio Fernando Bertachini de A. Prado
Divisão de Mecânica Espacial e Controle - INPE
Othon Cabo Winter
Departamento de Matemática - FEG / UNESP

O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica. Para isso, foram utilizados quatro diferentes modelos dinâmicos baseados no Problema Restrito de Três Corpos:

- regularizado com as condições iniciais dadas no sistema fixo;
- não regularizado com as condições iniciais dadas no sistema rotacional;
- elíptico, em que as equações de movimento e as condições iniciais estão escritas no sistema fixo;
- elíptico, em que as equações de movimento e as condições iniciais estão escritas no sistema girante-pulsante.

Para estudar tais dinâmicas foram utilizados três métodos de integradores de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, são eles:

1. método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
2. método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem, com controle automático de passo;
3. método de Bulirsch-Stoer.

Os testes realizados para essas dinâmicas consistem em variar o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores variam de $EPS=10^{-1}$ até $EPS=10^{-15}$; verificando, para cada valor de EPS, o tempo de integração e a trajetória obtida.

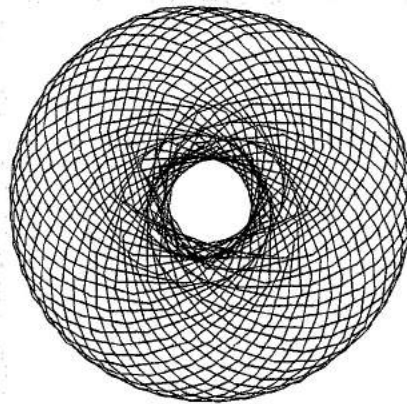
A análise dos resultados desse trabalho é feita de forma a estudar a precisão com que o integrador efetua a trajetória de ida e volta, e verificar o tempo gasto pelo computador (tempo de CPU) para efetuar essa integração. Nesta análise consideramos que existe um acúmulo de erro devido ao tempo de integração que ainda não pode ser observado na 1ª órbita. Dessa forma, para obtermos um melhor estudo, fazemos com que a duração da integração seja aumentada para dez órbitas, ou seja, passamos a analisar a 10ª órbita, em que já foi acumulado o referido erro.

RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA



INPE - INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS -
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE INTEGRADORES NUMÉRICOS EM MECÂNICA ESPACIAL



BOLSISTA: AUREA APARECIDA SILVA

ALUNA DA FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ
- UNESP -

BOLSA PIBIC / CNPq

DATA: 26/05/98

ORIENTADORES: A. F. BERTACHINI DE A. PRADO
OTHON CABO WINTER



- CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Neste trabalho são feitos vários testes com rotinas computacionais que possibilitam o cálculo de trajetórias de veículos espaciais. São estudados diferentes modelos de integradores numéricos para calcular numericamente essas trajetórias.

Na primeira fase são testadas quatro diferentes dinâmicas com a utilização de um integrador de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem; e, posteriormente, são testadas as mesmas dinâmicas com novos integradores usando outros métodos, tais como: método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem (método estudado a partir das referências 5 e 6) e método de Bulirsch Stoer, entre outros.

Dentre os modelos dinâmicos citados, podemos apresentar os seguintes:

- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos usando regularização de Lemaître com condições iniciais dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos sem regularização com condições iniciais dadas no sistema rotacional.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema fixo e as condições iniciais também são dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema girante-pulsante e as condições iniciais são dadas no mesmo sistema.

O presente trabalho consiste em fazer vários testes para cada uma das dinâmicas citadas anteriormente variando o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores devem variar para EPS de 10^{-1} até 10^{-15} , podendo obter, assim, um conjunto de trajetórias. Porém, vale ressaltar que existe um acúmulo de erro devido ao



longo do tempo de integração e esse erro pode não ser observado quando a integração numérica ainda se encontra na 1ª órbita. Para a resolução desse problema, o tempo de integração deve ser aumentado para dez órbitas, ou seja, passamos a analisar a 10ª órbita. Caso esta apresente uma trajetória precisa, com certeza as órbitas anteriores também apresentarão. O propósito dessa tarefa é medir o custo benefício da simulação, ou seja, a precisão obtida em comparação com o tempo gasto pelo computador.

A análise dos resultados desse trabalho é feita através da precisão obtida em comparação com o tempo gasto pelo computador (tempo de CPU). Para essa análise as simulações são efetuadas com o uso de um microcomputador compatível como o IBM-586.

Na segunda fase deste trabalho, são testadas as mesmas dinâmicas e os mesmos integradores, porém, são variadas as condições iniciais de cada dinâmica. O procedimento anterior e a análise dos resultados são seguidos da mesma maneira nesta fase.

Na terceira e última fase são feitos novos testes para verificar a precisão com que cada um dos integradores efetuam uma trajetória completa de ida e volta. Esse trabalho é uma continuação do trabalho desenvolvido no período anterior, em que mais testes e mais integradores foram testados.

I.2. CRONOGRAMA

Este trabalho trata-se da continuação do trabalho desenvolvido no período anterior, em que mais integradores foram testados. As atividades efetuadas neste período foram:

- De agosto a setembro: implementação das rotinas com o método de integração de Bulirsch-Stoer (citado na referência 4);
- De outubro a dezembro: testes e obtenção de resultados com o método citado anteriormente; além de outros testes com novos dados de entrada (a partir da referência 7).



- De janeiro a fevereiro: elaboração do relatório preliminar.
- De março a abril: testes e obtenção de resultados com todos os métodos citados anteriormente (na introdução) para a trajetória de ida e volta das equações de movimento; alteração dos resultados obtidos a partir do método de Bulirsch-Stoer.
- Em maio: complementação do relatório e estudos iniciais sobre integradores simpléticos.

No período de 23 a 24 de outubro de 1997 participei do XIII Seminário de Matemática Aplicada e Computacional, realizado na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP e, no período de 26 a 31 de janeiro de 1998 participei da 2ª Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia realizado no mesmo local, apresentando em ambos o trabalho desenvolvido no primeiro período.



- CAPÍTULO II - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

II.1. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da forma:

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= f(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}) \\x &\in [a, b] \\y: [a, b] &\rightarrow \mathfrak{R}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Uma equação diferencial ordinária tem apenas uma variável independente. Uma equação diferencial parcial envolve mais que uma variável independente.

Ex.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com } u = u(x, y).$$

Uma solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente que satisfaça a equação.

Ex.:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \text{tem } y(x) = a e^x, \quad a \in \mathfrak{R}, \text{ como solução (família de soluções).}$$

Como uma equação diferencial não possui solução única, uma equação diferencial ordinária de ordem n requer, em geral, “ n ” condições adicionais para



individualizar uma solução.

Se todas as condições se referem a um mesmo valor de x , o valor inicial x_0 , tem-se o chamado **problema de valor inicial (PVI)**.

Caso as condições correspondam a diversos valores da variável independente, tem-se o chamado **problema de valor de contorno**.

Serão considerados aqui, os métodos para solução de um problema de valor inicial de primeira ordem:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Para resolução numérica tomam-se " m " subintervalos de $[a, b]$, $m \geq 1$, e faz-se $x_j = x_0 + jh$, onde $h = \frac{b-a}{m}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $x_j \in [a, b]$. Em cada x_j calcula-se uma aproximação y_j para $y(x_j)$. A solução numérica é, portanto, uma função linear por partes, cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j, y_j) :

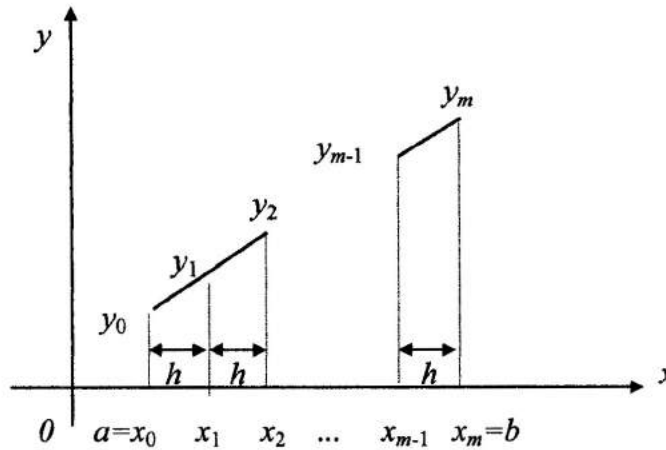


Fig. II.1 - Processo de Integração Numérica

Se, para calcular y_j , usamos apenas y_{j-1} , teremos um método de passo simples ou passo um. Por outro lado, se usarmos mais valores, teremos um método de passo



múltiplo.

II.2. O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

II.2.1. Introdução

O problema de n-corpos na versão pontual (todos os N-corpos são supostos serem pontos de massa) foi primeiro formulado por Issac Newton. Ele pode ser formulado como:

“Dadas as posições e velocidades de N-corpos em um dado instante de tempo, que se movem pela gravitação mútua, com as massas conhecidas, pode-se calcular suas posições e velocidades em um instante de tempo futuro.”

Um modo comum de tratar o problema de N-corpos é estudá-lo como um problema de dois corpos perturbado pelos demais N-2 corpos. O Sistema Solar é um bom exemplo disso. Pode-se considerar o movimento da Terra em torno do Sol como um problema de dois corpos perturbado pelos demais planetas.

II.2.2. Equações de Movimento

Um dos modelos mais simples utilizados no estudo de problemas dinâmicos no sistema solar é o problema de dois corpos, que consiste na interação de duas massas movendo-se sobre uma força de atração gravitacional mútua descrita pela lei da gravitação universal de Newton.

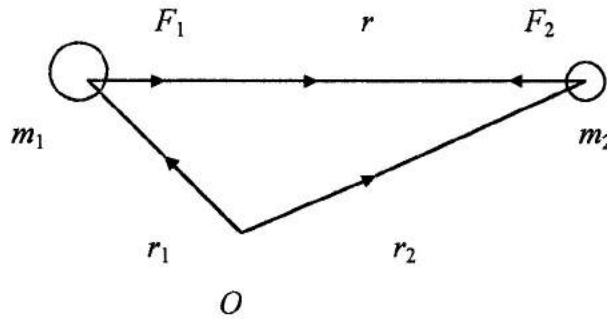


Fig. II.2 - Sistema de Dois Corpos

A figura II.2 mostra um diagrama de vetores para as forças agindo sobre duas massas, m_1 e m_2 com posições vetoriais \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , em que:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.1)$$

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.3)$$

e, $G = 6,67260 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ é a constante gravitacional universal.

Baseado nas leis de Newton e nas equações de Kepler podemos trabalhar as equações acima, obtendo a seguinte relação:

$$C = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (2.4)$$

em que $\mu = G(m_1 + m_2)$, $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ é o quadrado da velocidade e C é a constante do movimento que representa a conservação da energia do sistema.



II.3. O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

II.3.1. Introdução

O caso particular mais simples e talvez o mais importante do problema de N-corpos é o caso $N = 3$. Mesmo assim, nem esse caso possui uma solução geral analítica e fechada. Existem soluções particulares conhecidas para esse caso, como por exemplo as soluções de Lagrange. O caso particular conhecido como “Problema Restrito de Três Corpos” é um dos tópicos mais investigados em mecânica celeste. O problema restrito de três corpos consiste no estudo do movimento de um corpo com massa desprezível em torno de dois outros corpos com massa finita.

II.3.2. O Problema Restrito de Três Corpos

O problema restrito de três corpos é uma versão ainda mais simplificada do caso $N = 3$. Nessa versão existem dois corpos de massas finitas m_1 e m_2 e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível e que orbita o sistema formado pelos outros dois corpos.

É um caso particular, porém rico em aplicações práticas. Entre os sistemas que podem ser estudados com esse modelo, podemos citar:

- O movimento de cometas e asteróides no Sistema Solar;
- A trajetória de um veículo espacial se dirigindo ao Sistema Solar Exterior (Júpiter por exemplo);
- A trajetória de uma sonda lunar;
- Manobras gravitacionalmente assistidas.



Já o modelo geral de três corpos possui bem menos aplicações, uma das quais o estudo de sistemas estelares.

II.3.3. Equações de Movimento do Problema Geral de Três Corpos

Seja \vec{r}_1, \vec{r}_2 e \vec{r}_3 as posições das três massas (finitas) envolvidas e, m_1, m_2 e m_3 são os valores das respectivas massas. Assim, podemos escrever as equações de movimento de um sistema geral de três corpos como:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \quad (3.1)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \quad (3.3)$$

Estas equações derivam imediatamente da lei da gravitação universal de Newton e serão utilizadas na obtenção das equações de movimento do problema restrito de três corpos.

II.3.4. Formulação e Equações de Movimento do Problema Restrito de Três Corpos

Agora nós podemos estender nossa análise à interação gravitacional de três corpos, onde o terceiro corpo tem massa negligenciável comparada aos outros dois.

Nesta situação nós assumiremos que o terceiro corpo não afeta o movimento das duas massas embora ele tenha o seu movimento afetado por eles.

Se posteriormente impusermos a condição de que as duas massas tenham energia tal que elas se movam em órbitas circulares em volta de seu centro de massa, consideraremos o movimento numa órbita plana. Por isso, chamamos este problema de problema planar, circular, restrito de três corpos.

• **Equações de movimento**

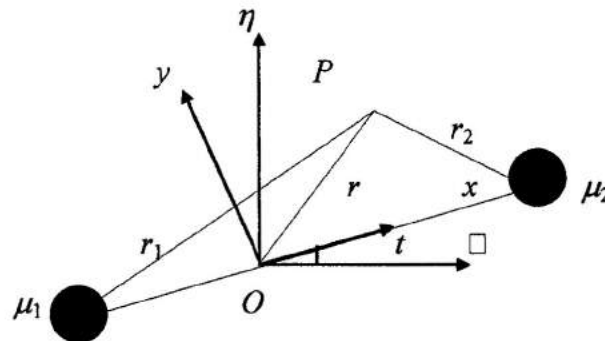


Fig. II.3 - Problema Restrito de Três Corpos.

Baseado no que foi desenvolvido para o problema de dois corpos, e utilizando a figura acima chegamos nas seguintes relações:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \quad (3.4)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right) y \quad (3.5)$$

Essas equações podem ser também escritas como:



$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde $U = U(x, y)$ é dado por:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\tag{3.7}$$

$$\text{e, } \mu_1 = 1 - \mu \quad , \quad \mu_2 = \mu \quad \text{e} \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

II.4. REGULARIZAÇÃO

O estudo de técnicas de regularização tem por objetivo resolver problemas numéricos quando os valores de r_1 e/ou r_2 nas equações de movimento ficam muito pequenos. Isso ocorre toda vez que a partícula m_3 se aproxima de um dos primários.

Em casos práticos os valores de r_1 e r_2 nunca chegam a zero, pois, antes disso haveria uma colisão com a superfície do corpo celeste. Para se evitar uma eventual colisão, necessita-se de maior precisão numérica nas integrações numéricas necessárias a solução de um problema. O maior problema é justamente quando m_3 está próximo de um dos primários.

A eliminação desse problema numérico pode ser obtida através de uma substituição de variáveis. Uma escolha adequada de novas variáveis para posição, velocidade e tempo leva a uma equação de movimento sem singularidades.

Quando somente uma das singularidades (r_1 ou r_2) é eliminada de cada vez, chamamos essa técnica de “Regularização Local”; e, quando as duas singularidades (r_1 e r_2) são eliminadas ao mesmo tempo, chamamos de “Regularização Global”.



II.5. EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON E MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

O método de Bulirsch-Stoer é considerado um bom integrador obtendo uma grande exatidão para as soluções de equações diferenciais ordinárias com o mínimo de esforço computacional.

Três idéias chaves são envolvidas. A primeira é a aproximação ao limite de Richardson. A idéia é considerar a resposta final do cálculo numérico como sendo uma função analítica de um parâmetro ajustável semelhante ao tamanho do passo h . Essa função analítica pode executar o cálculo com vários valores de h , sendo que nenhum deles é necessariamente pequeno o bastante para produzir a exatidão desejada.

A segunda idéia está relacionada com a função que vai ser usada. Bulirsch e Stoer primeiro reconheceram a força da função de extrapolação racional em aplicações do tipo Richardson. A função racional apropriada pode ficar com boas aproximações para funções analíticas mesmo depois de vários termos em potenciais de h terem comparáveis magnitudes.

A terceira idéia é usar um método cuja função erro seja par, permitindo deixar a função racional ou aproximação polinomial em termos da variável h^2 em vez de h .

Colocando-se estas idéias juntas temos o método de Bulirsch-Stoer. Um simples passo de Bulirsch-Stoer leva de x para $x + H$, onde H é supostamente uma grande - absolutamente não infinitesimal - distância. Aquele simples passo é um grande salto consistindo de muitos subpassos do método de ponto médio modificado, o qual são, então, extrapolados para o tamanho de passo zero.

A sequência de diferentes tentativas de cruzar o intervalo H é feito com os crescentes valores de n , o número de subpassos. Bulirsch e Stoer originalmente propuseram a sequência:

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, \dots, [n_j = 2n_{j-2}], \dots \quad (5.1)$$

Em um trabalho mais recente, Deuffhard sugere que a sequência



$$n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, [n_j = 2j], \dots \quad (5.2)$$

é usualmente mais eficiente. Depois de cada sucessivo n ser testado, uma tentativa com extrapolação polinomial é feita. Esta extrapolação retorna ambos valores extrapolados e erros estimados. Se os erros não são satisfatórios, eleva-se o valor de n . Se eles são satisfatórios, vai-se para o próximo passo e começa-se novamente com $n = 2$.

Faz-se o controle do erro, como no método de Runge-Kutta, controlando a consistência interna e adaptando o tamanho do passo para igualar com um limite prescrito sobre o erro local de truncamento. Cada novo resultado da sequência de integrações do ponto médio modificado permite uma tabela para ser estendido por uma coleção adicional de diagonais. A dimensão da nova correção adicional para cada estágio é tomada como o (conservativo) erro estimado. Surge, então, a seguinte pergunta: Como podemos usar esse erro estimado para ajustar o tamanho do passo? A melhor estratégia conhecida é devido a Deuflhard que será descrita a seguir:

Suponha que o valor absoluto do valor estimado da k -ésima coluna (e portanto a $k+1$ -ésima fileira) tabela de extrapolação é $\varepsilon_{k+1,k}$. O controle de erro é feito de modo que

$$\varepsilon_{k+1,k} < \varepsilon \quad (5.3)$$

seja requerido como um critério do passo atual, onde ε é a tolerância requerida. Para cada par da sequência (2) a ordem do método é $2k + 1$:

$$\varepsilon_{k+1,k} \approx H^{2k+1}. \quad (5.4)$$

Assim uma simples estimativa do novo tamanho de passo H_k para obter a convergência na coluna fixa k será



$$H_k = H \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{k+1,k}} \right)^{1/(2k+1)}. \quad (5.5)$$

Vejamos agora em qual coluna k obtem-se a convergência: suponha que A_k seja o trabalho para obter a fileira k da tabela de extrapolação, assim A_{k+1} é o trabalho para obter a coluna k . Assumiremos que o trabalho é dominado pelo custo de avaliar as funções definidas no lado direito das equações diferenciais. Para n_k divisões em H , o número de funções avaliadas pode ser base da repetição

$$\begin{aligned} A_1 &= n_1 + 1 \\ A_{k+1} &= A_k + n_{k+1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

O trabalho por unidade de passo para obter a coluna k é A_{k+1}/H_k , o qual não dimensionalizamos com um fator de H e escrevemos como

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{A_{k+1}}{H_k} H \\ &= A_{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{k+1,k}}{\varepsilon} \right)^{1/(2k+1)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A quantidade W_k pode ser calculada durante a integração. O índice de coluna ótimo q é então definido por

$$W_q = \min_{k=1, \dots, k_f} W_k \quad (5.8)$$

onde k_f é a coluna final, pelo qual o critério de erro (5.3) foi satisfeito. O índice q determinado de (5.8) define o tamanho do passo H_q para ser usado como o próximo tamanho de passo, assim podemos obter a convergência na coluna ótima q .



Dois importantes refinamentos será feito na estratégia mostrada até aqui:

- Se H é muito pequeno, então k_f será muito pequeno, e assim, q fica muito pequeno. Pode ser desejável aumentar H e apontar para a convergência na coluna $q > k_f$.
- Se H é muito grande, pode não haver convergência para todos os passos atuais, então devemos diminuí-lo. Isso pode ser detectado se monitorarmos a quantidade $\varepsilon_{k+1,k}$ para cada k , assim devemos parar o passo, quando possível.

A prescrição de Deuffhard trata desses dois problemas usando idéias da teoria de comunicação para determinar o “termo médio esperado para a convergência” da extrapolação. Seu modelo produz certo fator de correção $\alpha(k, q)$ pelo qual H_k será multiplicado para obter a convergência na coluna q . Os fatores $\alpha(k, q)$ dependem somente de ε e da sequência $\{n_i\}$ e assim podem ser computados uma vez durante a inicialização:

$$\alpha(k, q) = \varepsilon^{\frac{A_{k+1} - A_{q+1}}{(2k+1)(A_q - A_{1+1})}} \quad \text{para } k < q, \text{ com } \alpha(q, q) = 1. \quad (5.9)$$

Agora para tratar do primeiro problema, supõe-se que a convergência ocorra na coluna $q = k_f$. Então antes de tomar H_q para o próximo passo, deve ser apontado o aumento do tamanho do passo obtendo convergência na coluna $q + 1$. Visto que não temos H_{q+1} disponível para a computação, este é estimado como

$$H_{q+1} = H_q \alpha(q, q+1). \quad (5.10)$$

Pela equação (5.7) esta substituição é eficiente, isto é, reduz o trabalho por unidade de passo, se

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \frac{A_{q+1}}{H_q} > \frac{A_{q+2}}{H_{q+1}} \\ & A_{q+1} \alpha(q, q+1) > A_{q+2} \end{aligned} \quad (5.11)$$



Durante a inicialização, essa desigualdade pode ser checada para $q = 1, 2, \dots$ para determinar k_{\max} , a maior coluna permitida. Então quando (5.11) é satisfeito, ele sempre será eficiente para usar H_{q+1} .

O problema de redução do tamanho do passo é tratado pela computação das estimativas do tamanho do passo:

$$\bar{H}_k \equiv H_k \alpha(k, q), \quad k = 1, \dots, q-1 \quad (5.12)$$

durante o passo atual. Os \bar{H} são estimativas do tamanho de passo para obter convergência na coluna ótima q . Se algum \bar{H}_k é “muito pequeno”, abandonamos o passo atual e reiniciamos usando \bar{H}_k . O critério para ser “muito pequeno” é tomado por

$$H_k \alpha(k, q+1) < H. \quad (5.13)$$

Os α satisfazem $\alpha(k, q+1) > \alpha(k, q)$.

Durante o primeiro passo, onde temos a informação sobre a solução, a verificação da redução do tamanho do passo é feita para todo k . Logo depois, o teste é feito para a convergência e para a possível redução do tamanho de passo somente no intervalo

$$\max(1, q-1) \leq k \leq \min(k_{\max}, q+1) \quad (5.14)$$

A razão desse intervalo é que se a convergência parece ocorrer para $k < q-1$ ela é muitas vezes espúria, resultando de algum pequeno erro estimado na extrapolação. Por outro lado, se for necessário ir além de $k = q+1$ para obter convergência, seu modelo local de convergência não é muito bom, sendo então, necessário reduzir o tamanho do passo e reestabelecê-lo.

Na rotina utilizada (bsstep) esses vários testes são efetuados usando as quantidades

$$\varepsilon(k) \equiv \frac{H}{H_k} = \left(\frac{\varepsilon_{k+1,k}}{\varepsilon} \right)^{1/(2k+1)} \quad (5.15)$$

Usualmente, incluímos um “fator de segurança” na seleção do tamanho de passo. Esse fator é implementado pela substituição de ε por 0.25ε .



- CAPÍTULO III - RESULTADOS E CONCLUSÕES FINAIS

III.1. RESULTADOS DAS DINÂMICAS - MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

Para a primeira dinâmica, *a regularizada*, foram dadas as seguintes condições iniciais:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -1.2d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = -0.150642490d0;
- $T0$ = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 422;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Em sua 1ª órbita, podemos perceber que não houve nenhuma variação na trajetória conforme variam-se os valores da precisão (EPS - que foi desde $EPS = 10^{-1}$ até 10^{-15}) e o tempo em que o programa levou para executar as integrações, ou seja, o tempo de CPU foi de $t_1 = 2s$ até $t_{15} = 4s$, aproximadamente; nota-se, assim, que não há necessidade de aumentar a precisão, já que a diferença na trajetória fora negligenciável pois, do contrário, acarretaria num gasto maior de tempo de execução do programa.

A figura III.1 mostra a trajetória calculada para cada valor de EPS , para a 1ª órbita.

Devemos, ainda, analisar esse mesmo caso considerando a 10ª órbita. Para as condições iniciais são feitas apenas algumas modificações como:

- NP = número de passos = 4220;
- $N_{min} = 3798$ e $N_{max} = 4220$ são os pontos limites para impressão.



Obtivemos neste caso um bom conjunto de trajetórias sem qualquer variação quando utilizados os diferentes EPS, onde o tempo de integração verificado variou de $t_1 = 13s$ até $t_{15} = 34s$. Podemos garantir, neste caso, a precisão na trajetória tanto na 1ª como na 10ª órbita. Veja a figura III.2.

Através do programa podemos obter também a constante de Jacobi, na qual quanto menor for sua variação, melhor será o integrador. Neste caso, houve uma pequena variação desta constante, considerando assim, um bom resultado. Isso pode ser verificado através da tabela 1.

TABELA 1

EPS	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
JAC _{MIN}	2.09513	2.09513	2.09513	2.09513	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516
JAC _{MAX}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516
EPS	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	
JAC _{MIN}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	
JAC _{MAX}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	

Nota-se que, a partir do valor $EPS = 10^{-5}$, não existe mais nenhuma variação na constante de Jacobi.

Para a **segunda dinâmica, a não regularizada**, as condições iniciais foram:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -1.2d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = 1.049357510d0;
- $T0$ = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;



- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Em sua 1ª órbita, assim como no caso da primeira dinâmica, não ocorreu nenhuma variação na trajetória utilizando-se EPS = 10^{-1} até 10^{-15} e, neste caso, o tempo gasto para integração foi de $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 7s$. Veja a figura III.3.

Para a 10ª órbita as modificações das condições iniciais foram:

- NP = número de passos = 6200;
- $N_{min} = 5580$ e $N_{max} = 6200$ são os pontos limites para impressão.

Obtivemos o mesmo resultado, ou seja, um bom conjunto de trajetórias sem qualquer variação quando utilizados os diferentes EPS. O tempo gasto neste caso foi de $t_1 = 26s$ até $t_{15} = 45s$. Veja a figura III.4.

Através da tabela 2 podemos verificar a constante de Jacobi obtida, e que a partir do valor EPS = 10^{-6} não ocorre mais variações.

TABELA 2

EPS	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
JAC _{MIN}	2.08311	2.08311	2.08311	2.08313	2.08317	2.08318	2.08318	2.08318
JAC _{MAX}	2.08333	2.08333	2.08333	2.08322	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318
EPS	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	
JAC _{MIN}	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	
JAC _{MAX}	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	

Para a terceira dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no sistema fixo, as condições iniciais foram:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- ECE = excentricidade dos primários = 0.0d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = 1.2d0;



- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = 0.150642490d0;
- $xf(5)$ = tempo = 0.0d0;
- $T0$ = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Em sua 1ª órbita, houve uma pequena variação na trajetória utilizando-se $EPS = 10^{-1}$ até 10^{-3} . Esta variação pode ser notada pela diferença de tamanho de cada uma das trajetórias, ou seja, o valor da ordenada 'y'. Somente a partir de $EPS = 10^{-4}$ até 10^{-15} as trajetórias apresentam-se com grande precisão. O tempo gasto foi de $t_1 = t_{15} = 1s$. Veja as figuras III.5, III.6, III.7 e III.8. É importante notar que, para o integrador utilizado neste teste (o método de Bulirsch-Stoer), o tempo permaneceu constante para todos os valores de EPS .

Para a 10ª órbita, as modificações das condições iniciais foram:

- NP = número de passos = 6200;
- $N_{min} = 5580$ e $N_{max} = 6200$ são os pontos limites para impressão.

Verificamos neste caso uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$, $EPS = 10^{-2}$ e $EPS = 10^{-3}$. Observamos que, para o primeiro EPS , os resultados divergem de modo que não seja possível plotar o gráfico. Para $EPS = 10^{-4}$ houve uma pequena variação na trajetória que pode ser notada pela diferença de tamanho de cada uma das trajetórias, ou seja, o valor da ordenada 'y'. A partir de $EPS = 10^{-5}$ até 10^{-15} podemos verificar que as trajetórias obtidas são precisas. O tempo gasto neste caso foi de $t_1 = 5s$ até $t_{15} = 12s$. Veja as figuras III.9, III.10, III.11 e III.12.

Para a quarta dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no sistema girante-pulsante, as condições iniciais foram:

- ECP = excentricidade dos primários = 0.0d0;



- TAP = anomalia verdadeira inicial de $m_2 = 0.0d0$;
- μ = parâmetro de massa = $0.0121285627d0$;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15});
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = $0.005d0$;
- T0 = tempo inicial = $0.0d0$;
- TF = tempo final = $6.2d0$;
- xf (1) = posição x inicial = $1.2d0$;
- xf (2) = posição y inicial = $0.0d0$;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = $0.0d0$;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = $0.150642490d0$;

OBS: Parâmetro de controle: $H_{\min} = NTA = NFR = 0.0d0$.

Em sua 1ª órbita, temos uma pequena variação na trajetória conforme variam-se os valores de EPS. Para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-2}$ a trajetória não se fecha com o número de pontos estabelecido pelos dados iniciais; para $EPS = 10^{-3}$ e $EPS = 10^{-4}$ ocorre uma diferença de tamanho (ordenada 'y') em cada trajetória, como no caso da terceira dinâmica, citada anteriormente. E, a partir de $EPS = 10^{-5}$ até 10^{-15} temos um conjunto de trajetórias precisas. O tempo gasto foi de $t_1 = 2s$ até $t_{15} = 4s$. Veja as figuras III.13, III.14, III.15, III.16 e III.17.

Já em sua 10ª órbita, as alterações das condições iniciais são:

- TF = tempo final = $62.0d0$;
- $TA_{\min} = 55.8$ e $TA_{\max} = 62.0$ são anomalias verdadeiras inicial e final onde os pontos são plotados.

Neste caso verificamos uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-2}$; para $EPS = 10^{-3}$ e $EPS = 10^{-4}$ ocorre a mesma diferença no tamanho de cada trajetória como na 1ª órbita. A partir de $EPS = 10^{-5}$ até 10^{-15} obtivemos a trajetória desejada. O tempo gasto foi de $t_1 = 17s$ até $t_{15} = 37s$. Veja as figuras III.18, III.19, III.20, III.21 e III.22.

Observe que tanto para a terceira como para a quarta dinâmica não há constante de Jacobi.



III.2. RESULTADOS DAS DINÂMICAS PARA OS NOVOS DADOS DE ENTRADA COM DIFERENTES MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Os novos dados de entrada foram escolhidos através de um trabalho com o seguinte título: **Transfer Orbits in the Earth-Moon System Using Regularized Model** (veja referência 7). Para esses dados foram testadas as diferentes dinâmicas com os três integradores utilizados até aqui.

Os novos dados de entrada têm como modificação os valores das posições iniciais x e y , e os valores das velocidades iniciais nas direções x e y . Foram testados três diferentes dados (A, B e C) e cada um deles apresentam diferentes trajetórias que foram usadas para avaliar a precisão de cada integrador.

É importante ressaltar que, para esses dados, podemos obter somente a 1ª órbita pois estas não são trajetórias periódicas.

III.2.1. Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Para a **primeira dinâmica, a regularizada**, as condições iniciais estão no sistema rotacional enquanto que o software foi desenvolvido no sistema fixo. Dessa forma, através da primeira dinâmica os dados foram convertidos do sistema rotacional para o fixo. São eles:

DADOS A:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -0.987871437d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.004521d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = 2.3336d0;
- $T0$ = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;



- NP = número de passos = 1000;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Através da trajetória obtida, podemos perceber que não houve nenhuma variação conforme variam-se os valores da precisão EPS; dessa forma, obtivemos um bom conjunto de trajetórias. O tempo gasto foi de $t_1 = 6s$ até $t_{15} = 40s$. Veja a figura III.23, onde estão plotadas todas as trajetórias desde $EPS = 10^{-1}$ até $EPS = 10^{-15}$.

A constante de Jacobi obtida (2.88336) mostrou-se constante na prática, para todos os valores de EPS.

DADOS B:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -0.987871437d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0045d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = -0.45d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = 2.3136d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 1000;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Variando EPS de 10^{-1} até 10^{-15} , obtivemos um conjunto de trajetórias com grande precisão. O tempo gasto para a integração foi de $t_1 = 5s$ até $t_{15} = 38s$. Veja a figura III.24.

Para todos os valores de EPS não houve variação na constante de Jacobi e seu valor foi de 2.79884. Isso indica a grande precisão do integrador.

DADOS C:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -0.987871437d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0045d0;



- $x_f(3)$ = velocidade inicial na direção $x = 0.0d0$;
- $x_f(4)$ = velocidade inicial na direção $y = 3.0136 d0$;
- $T0$ = tempo inicial = $0.0d0$;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = $0.001d0$;
- NP = número de passos = 4100;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

A figura III.25 mostra o conjunto de trajetórias obtidas para os valores de EPS . Estas apresentam-se com grande precisão e o tempo gasto foi de $t_1 = 16s$ até $t_{15} = 43s$.

A constante de Jacobi obtida (-0.727698) permaneceu fixa para todos os valores de EPS .

Para a **segunda dinâmica, a não regularizada**, tanto as condições iniciais quanto o software apresentam-se no sistema rotacional. Dessa forma, não foi necessário fazer a converção de sistema. Os dados iniciais A, B e C foram praticamente os mesmos da primeira dinâmica com poucas modificações que serão apresentadas a seguir:

DADOS A:

- NP = número de passos = 620.

Através da figura III.26 podemos verificar que houve uma pequena variação na trajetória, porém quase imperceptível. O tempo variou de $t_1 = 5s$ até $t_{15} = 13s$.

A constante de Jacobi permaneceu fixa a partir de $EPS = 10^{-5}$ com o valor de 2.87138.

DADOS B:

- NP = número de passos = 620.

Obtivemos, neste caso, uma grande precisão no conjunto de trajetórias apresentado na figura III.27. O tempo variou de $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 30s$.

A constante de Jacobi deixou de variar a partir de $EPS = 10^{-5}$ com o valor de 2.78686.



DADOS C:

- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 600.

Novamente obtivemos uma grande precisão no conjunto de trajetórias apresentado na figura III.28. O tempo variou de $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 20s$.

A constante de Jacobi deixou de variar a partir de $EPS = 10^{-7}$ com o valor de -0.739680.

III.2.2. Método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª Ordem

Para a **primeira dinâmica, a regularizada**, as condições iniciais estão no sistema rotacional enquanto que o software foi desenvolvido no sistema fixo. Sendo assim, foi feita uma modificação nos dados iniciais de forma a convertê-los para o sistema fixo. São eles:

DADOS A:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -0.987871437d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.004521d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = -0.004521d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = 1.345728563d0;
- $T0$ = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 1000;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Neste caso, o tempo gasto para a integração foi de $t_1 = 9s$ até $t_{15} = 10s$.

A constante de Jacobi obtida (2.88336) permaneceu fixa para todos os valores de EPS.



DADOS B:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -0.987871437d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0045d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = -0.4545d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 1.325728563d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 850;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

O tempo gasto foi de $t_1 = 8s$ até $t_{15} = 9s$.

A constante de Jacobi obtida (2.9084) permaneceu fixa para todos os valores de EPS.

DADOS C:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -0.987871437d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0045d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = -0.0045d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 2.025728563 d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.001d0;
- NP = número de passos = 4100;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

O tempo gasto foi de $t_1 = 39s$ até $t_{15} = 40s$.

A constante de Jacobi obtida (-0.727698) permaneceu fixa para todos os valores de EPS.

Podemos verificar que para o método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem, com os dados A, B e C, obtivemos bons resultados pelo qual os conjuntos de trajetórias para



todos os valores de EPS foram precisos. Veja as figuras III.29, III.30 e III.31, respectivamente.

A **segunda dinâmica** ainda será testada para esse método pois surgiram problemas que serão resolvidos futuramente; dessa forma, não foi possível apresentar nenhum resultado.

III.2.3. Método de Bulirsch-Stoer

Para a **primeira dinâmica, a regularizada**, as condições iniciais também foram convertidas para o sistema fixo, assim como no método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem e apresentam os mesmos valores.

As figuras III.32, III.33 e III.34 representam os conjuntos de trajetórias para os dados A, B e C, respectivamente. Os resultados apresentados demonstram uma boa precisão. O tempo gasto para a integração e a constante de Jacobi de cada um dos dados foram:

DADOS A: ➤ $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 8s$.

➤ constante de Jacobi fixa = 2.88336.

DADOS B: ➤ $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 7s$.

➤ constante de Jacobi fixa = 2.79884.

DADOS C: ➤ $t_1 = 12s$ até $t_{15} = 21s$.

➤ constante de Jacobi fixa a partir de $EPS = 10^{-7}$ com o valor de -0.727698.

Para a **segunda dinâmica, a não regularizada**, tanto as condições iniciais quanto o software apresentam-se no sistema rotacional; sendo assim, não foi necessário



fazer a converção de sistema. São eles:

DADOS A:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -0.987871437d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.004521d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 2.3336d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

O tempo para a integração variou de $t_1 = 3s$ até $t_{15} = 6s$.

A constante de Jacobi permaneceu fixa a partir de $EPS = 10^{-7}$ com o valor de 2.87138.

DADOS B:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -0.987871437d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0045d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = -0.45d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 2.3136d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

O tempo para a integração variou de $t_1 = 3s$ até $t_{15} = 5s$.

A constante de Jacobi permaneceu fixa a partir de $EPS = 10^{-6}$ com o valor de 2.78686.



DADOS C:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -0.987871437d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0045d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 3.0136d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.001d0;
- NP = número de passos = 5900;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

O tempo para a integração variou de $t_1 = 7s$ até $t_{15} = 9s$.

A constante de Jacobi permaneceu fixa a partir de $EPS = 10^{-6}$ com o valor de -0.73968.

Através das figuras III.35, III.36 e III.37 podemos verificar que houve uma pequena variação nas trajetórias para os dados A e B, porém quase imperceptível; e para os dados C o resultado foi de grande precisão.



III.3. CONJUNTO DE TRAJETÓRIAS - MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

⇒ 1ª Dinâmica (regularizada)

• 1ª Órbita

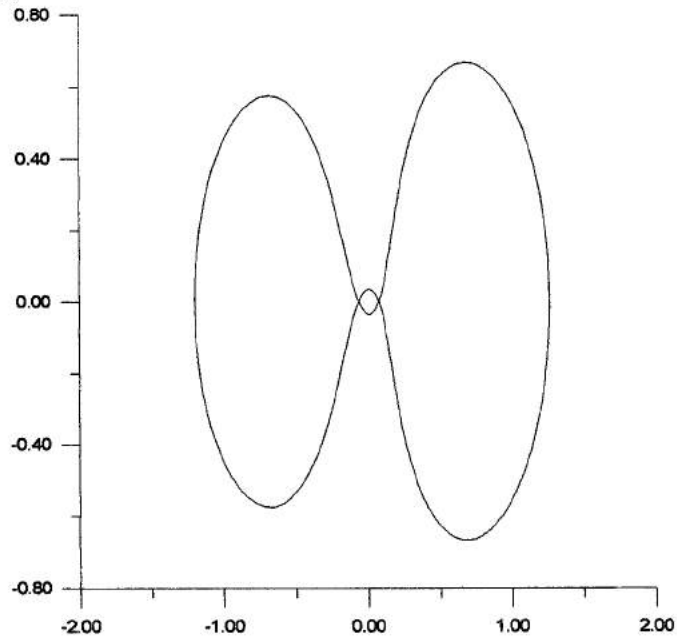


FIG. III.1 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

• 10ª Órbita

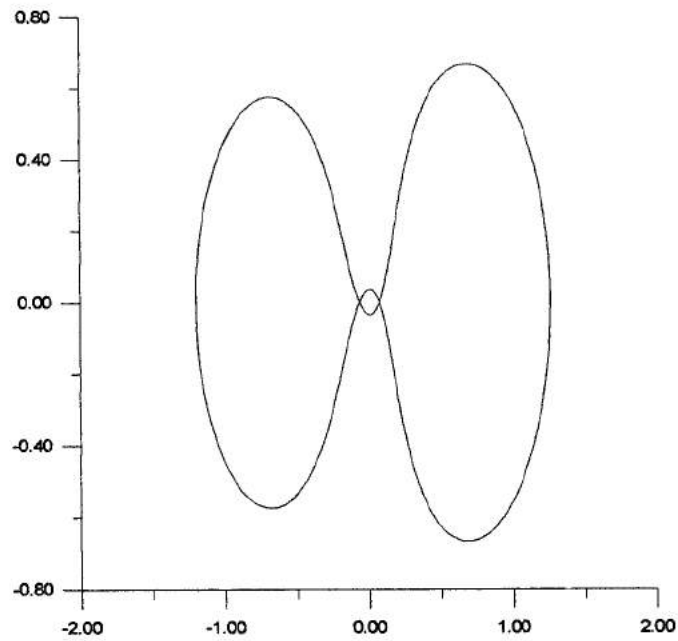


FIG. III.2 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}



→ 2ª Dinâmica (não regularizada)

• 1ª Órbita

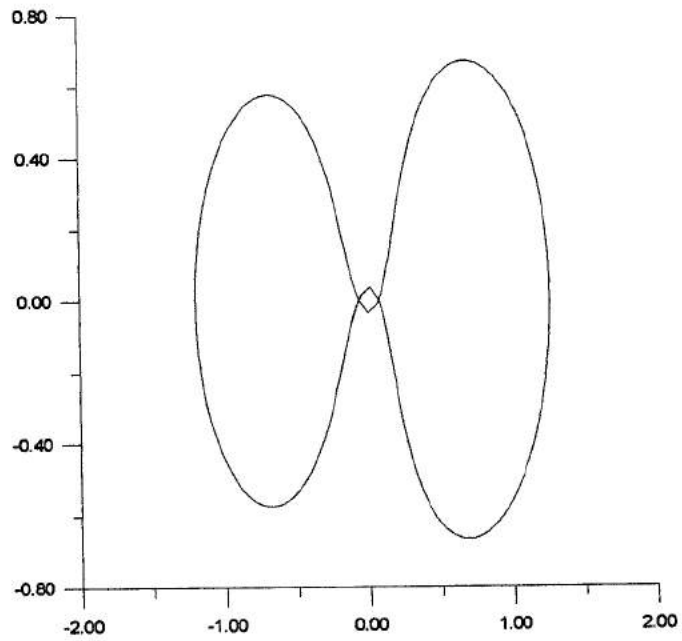


FIG. III.3 - $EPS = 10^{-1}$ A 10^{-15}

• 10ª Órbita

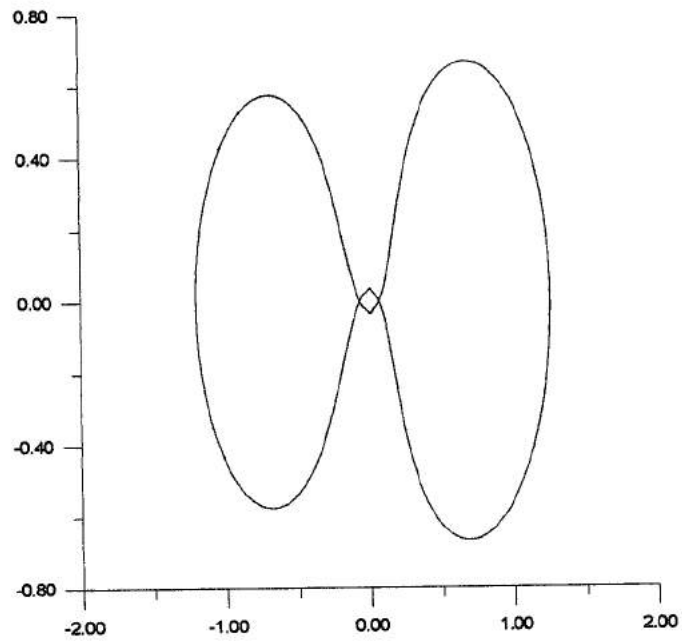


FIG. III.4 - $EPS = 10^{-1}$ A 10^{-15}



⇒ 3ª Dinâmica (elíptico no sistema fixo)

• 1ª Órbita

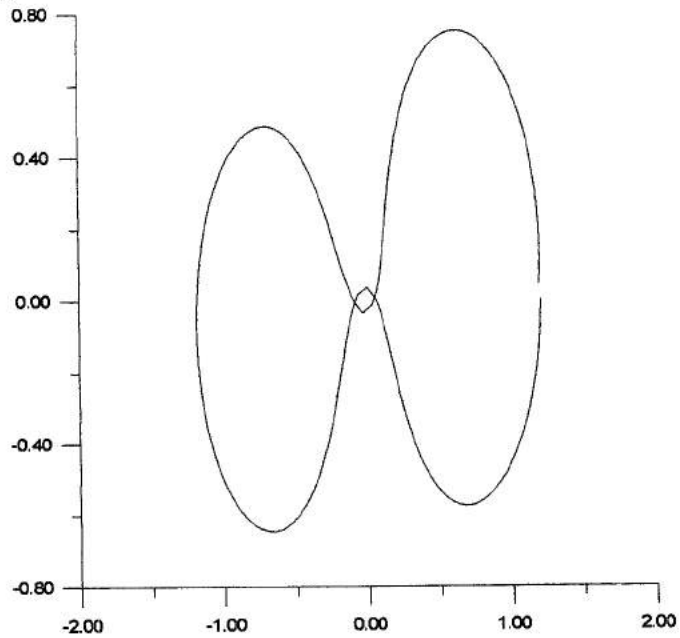


FIG. III.5 - $EPS = 10^{-1}$

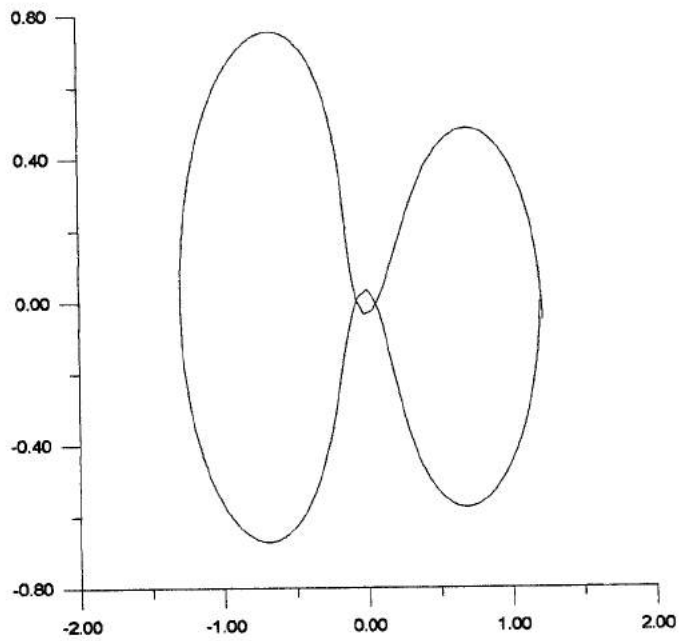


FIG. III.6 - $EPS = 10^{-2}$

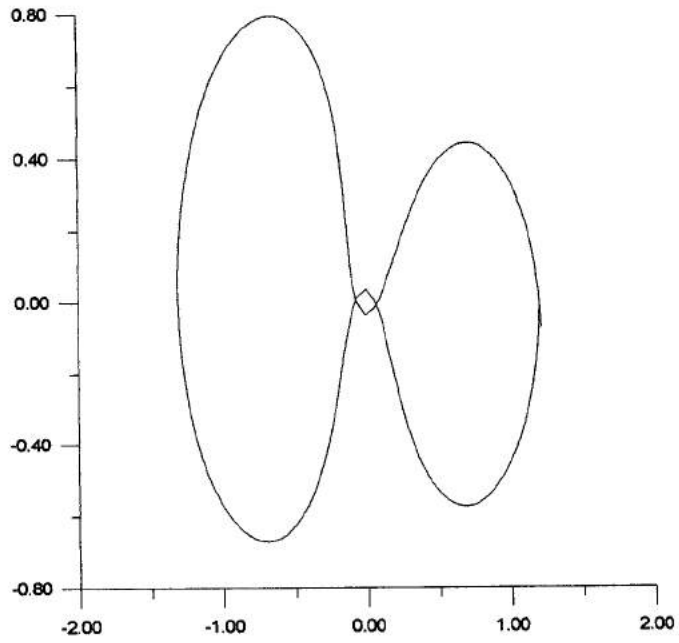


FIG. III.7 - $EPS = 10^{-3}$

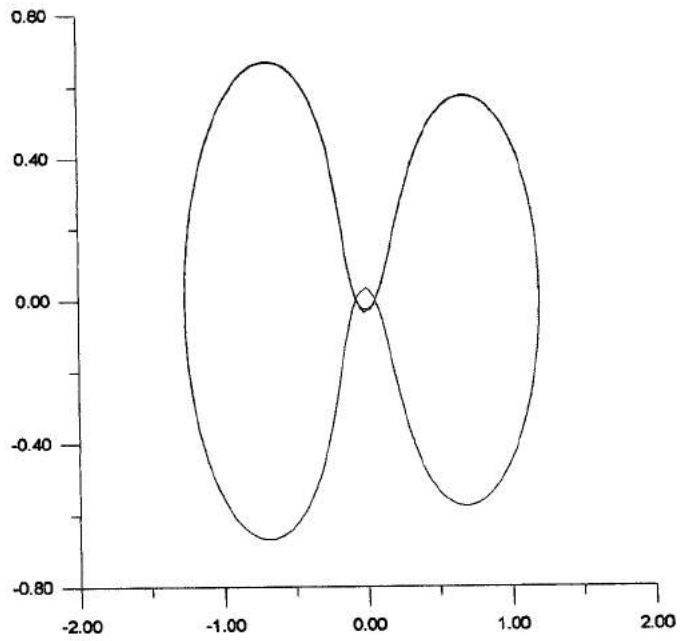


FIG. III.8 - $EPS = 10^{-4}$ A 10^{-15}



• 10ª Órbita

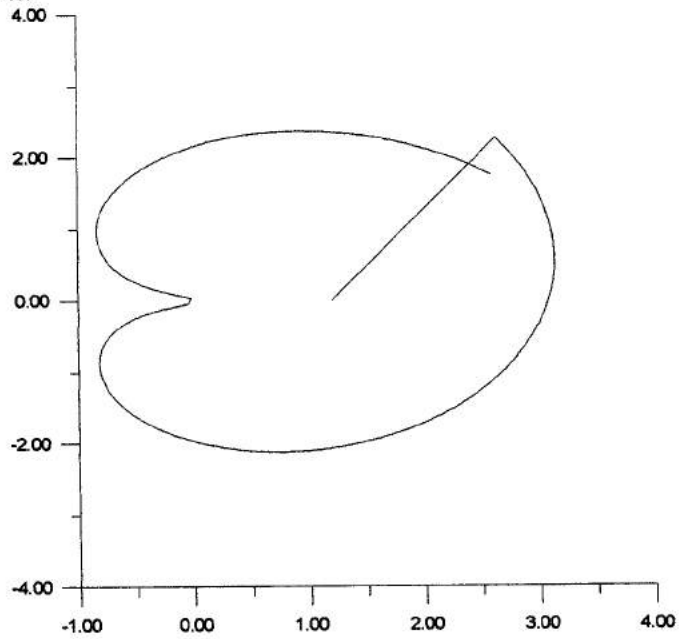


FIG. III.9 - $EPS = 10^{-2}$

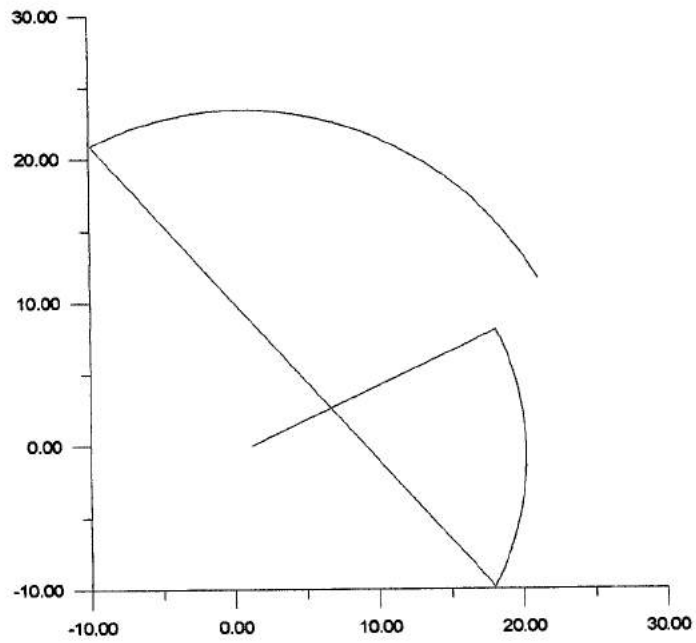


FIG. III.10 - $EPS = 10^{-3}$

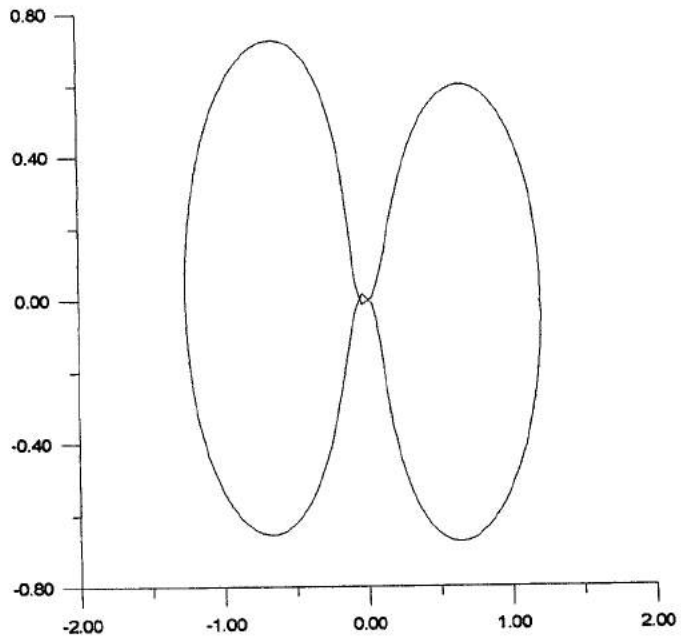


FIG. III.11 - $EPS = 10^{-4}$

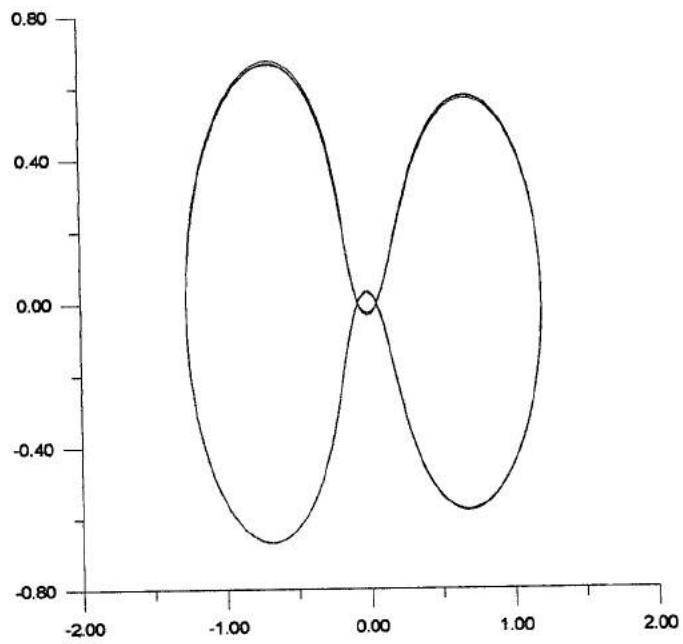


FIG. III.12 - $EPS = 10^{-5}$ A 10^{-15}



⇒ 4ª Dinâmica (elíptico no sistema girante-pulsante)

• 1ª Órbita

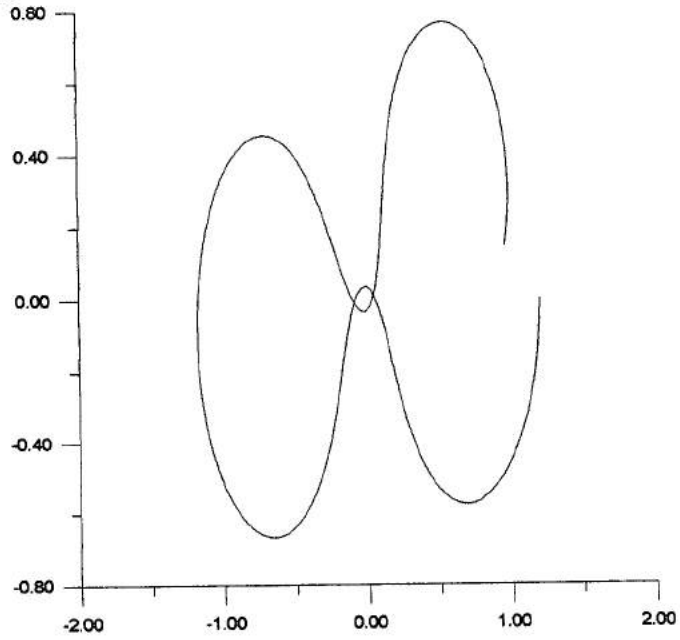


FIG. III.13 - $EPS = 10^{-1}$

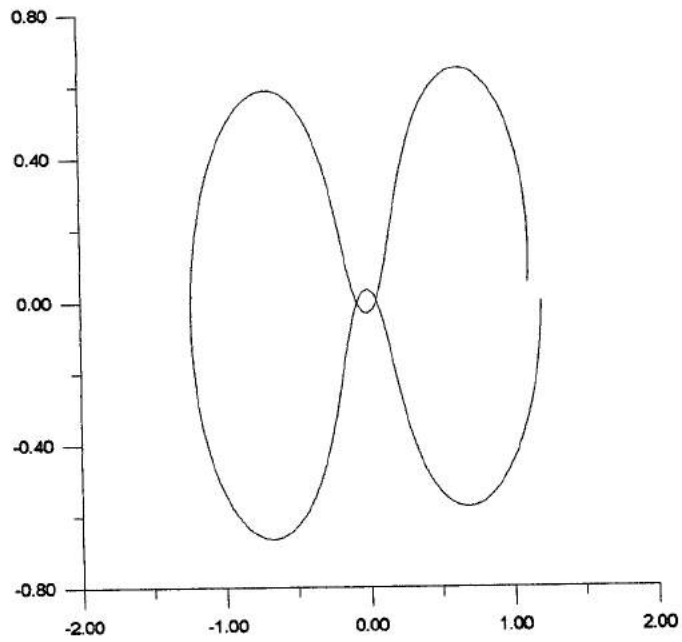


FIG. III.14 - $EPS = 10^{-2}$

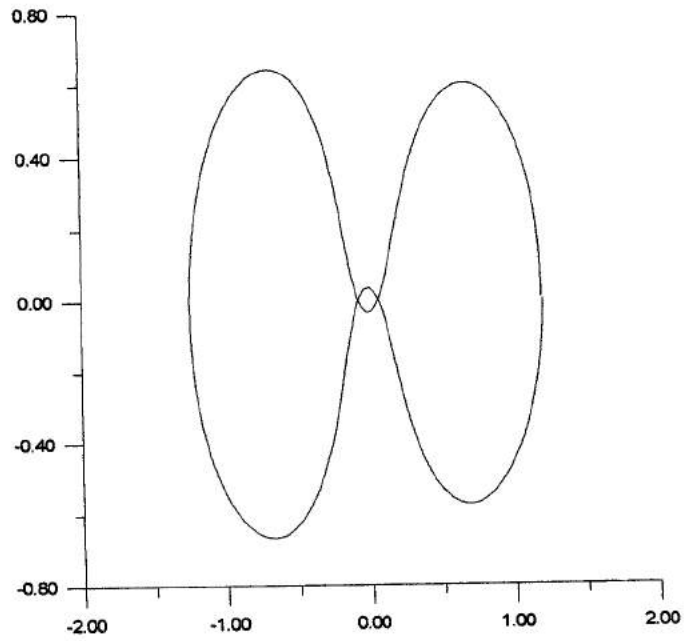


FIG. III.15 - $EPS = 10^{-3}$

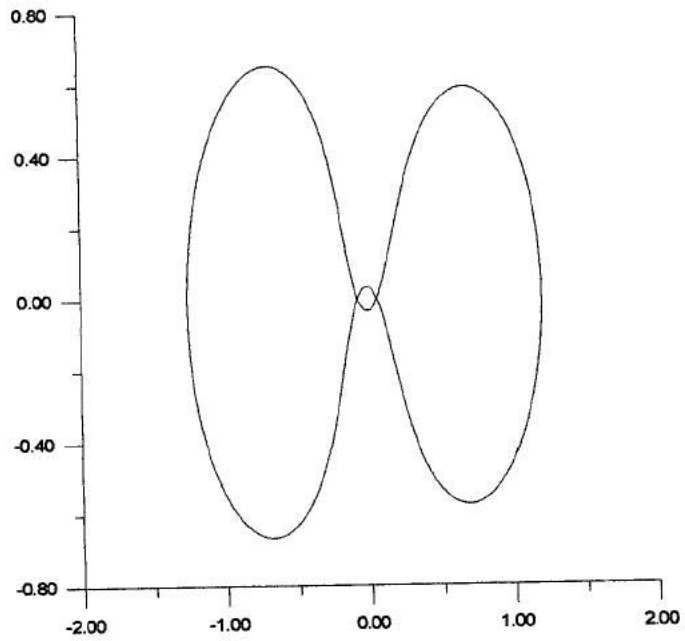


FIG. III.16 - $EPS = 10^{-4}$

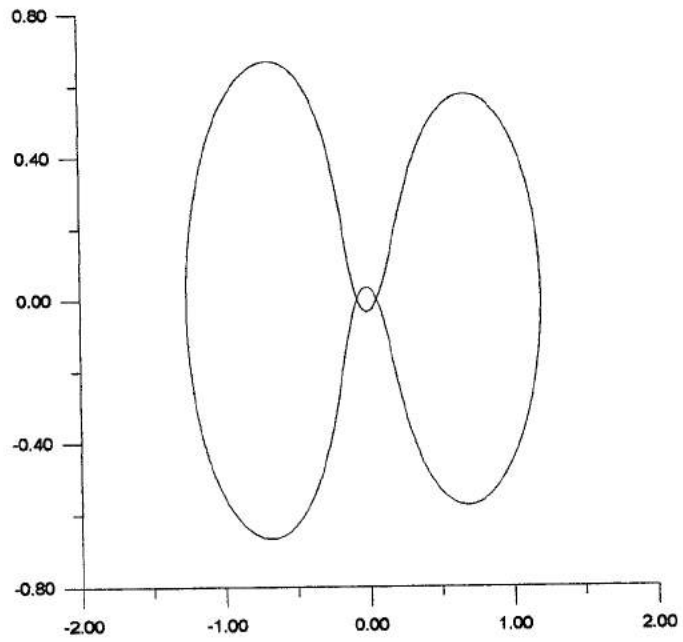


FIG. III.17 - $EPS = 10^{-5}$ A 10^{-15}

• 10ª Órbita

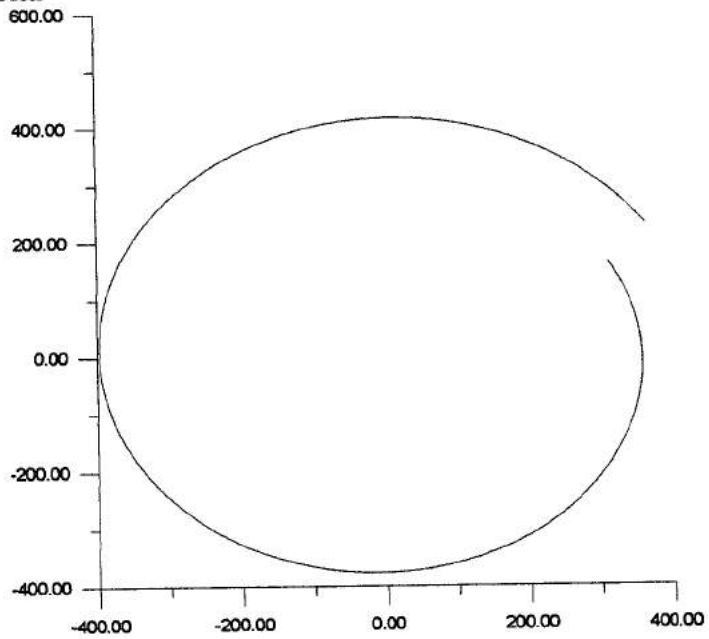


FIG. III.18 - $EPS = 10^{-1}$

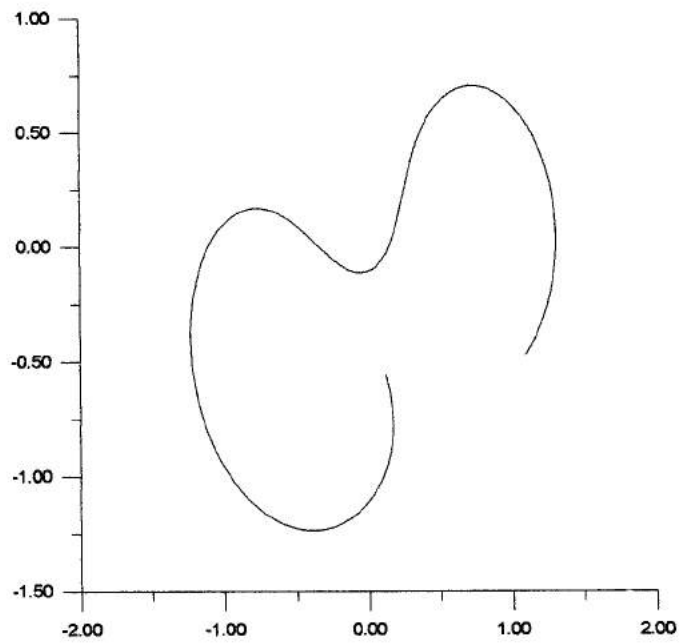


FIG. III.19 - $EPS = 10^{-2}$

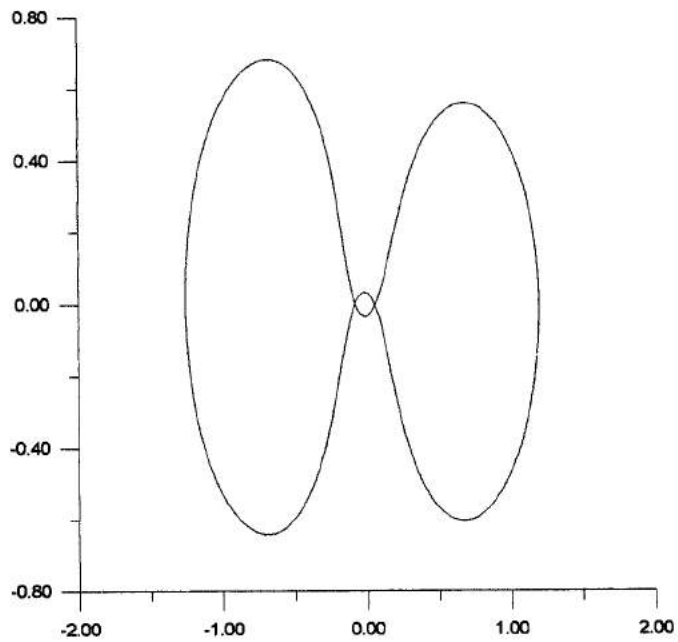


FIG. III.20 - $EPS = 10^{-3}$

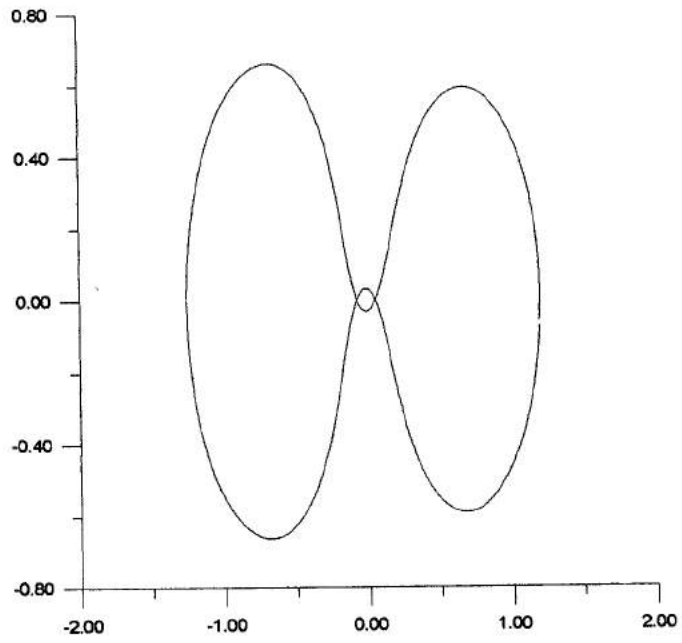


FIG. III.21 - $EPS = 10^{-4}$

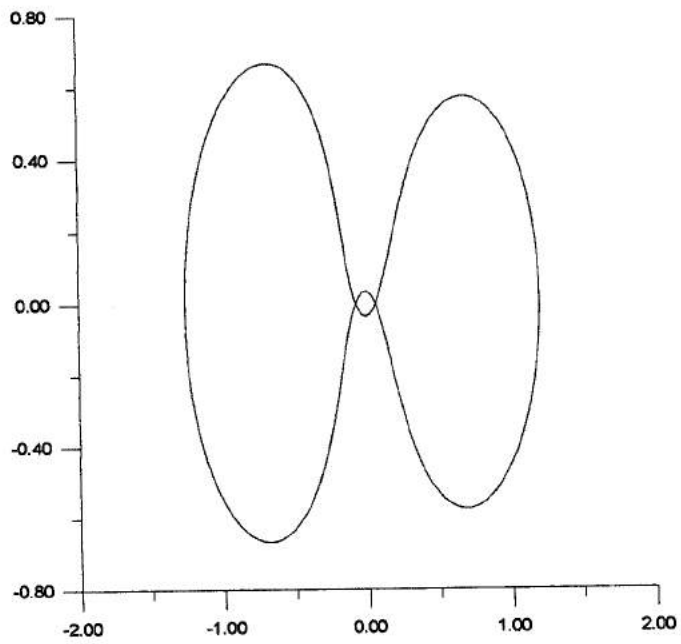


FIG. III.22 - $EPS = 10^{-5}$ A 10^{-15}



III.4. CONJUNTO DE TRAJETÓRIAS PARA OS NOVOS DADOS DE ENTRADA

III.4.1. Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

⇒ 1ª Dinâmica (regularizada)

❖ DADOS A:

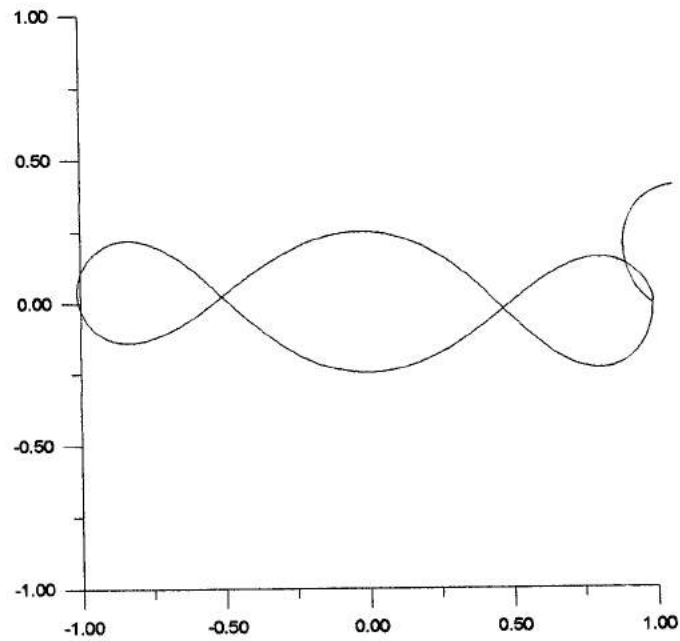


FIG. III.23 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ **DADOS B:**

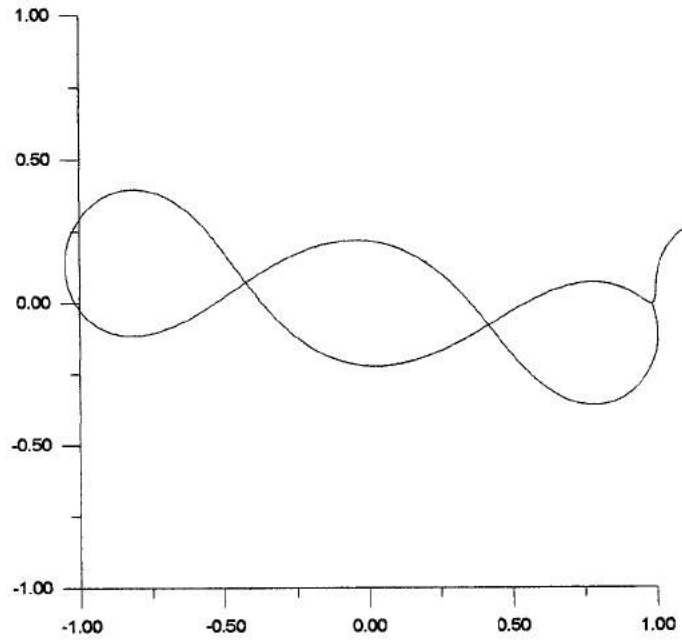


FIG. III.24 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ **DADOS C:**

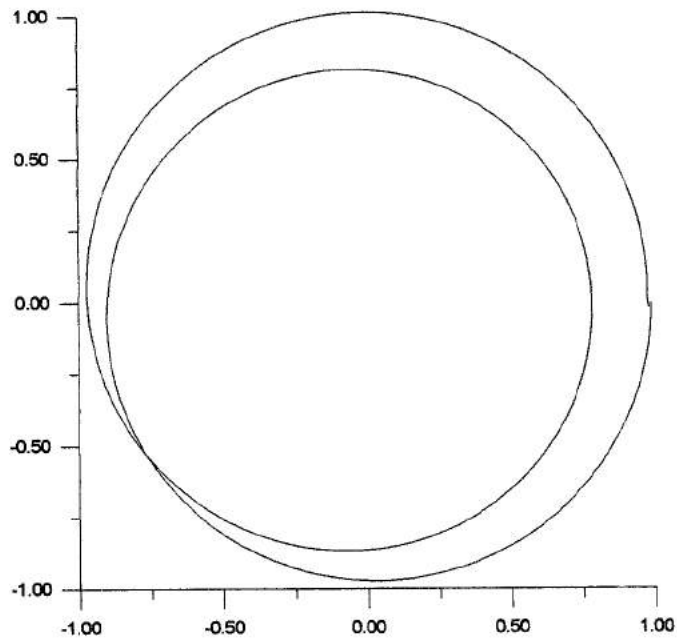


FIG. III.25 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

⇒ 2ª Dinâmica (não regularizada)

❖ DADOS A:

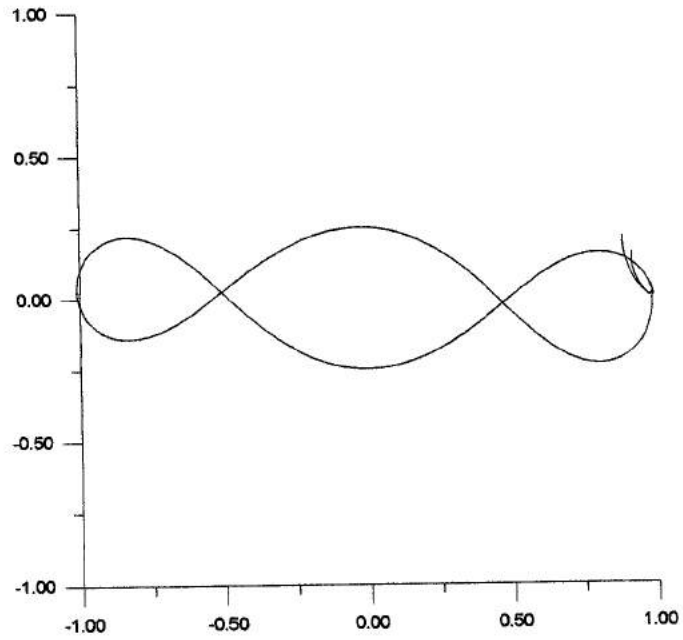


FIG. III.26 - $EPS = 10^{-1}$ A 10^{-15}

❖ DADOS B:

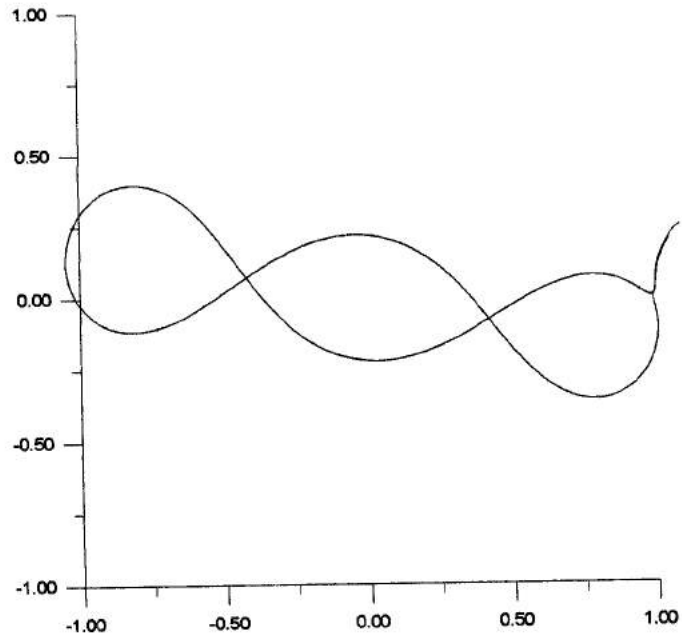


FIG. III.27 - $EPS = 10^{-1}$ A 10^{-15}



❖ DADOS C:

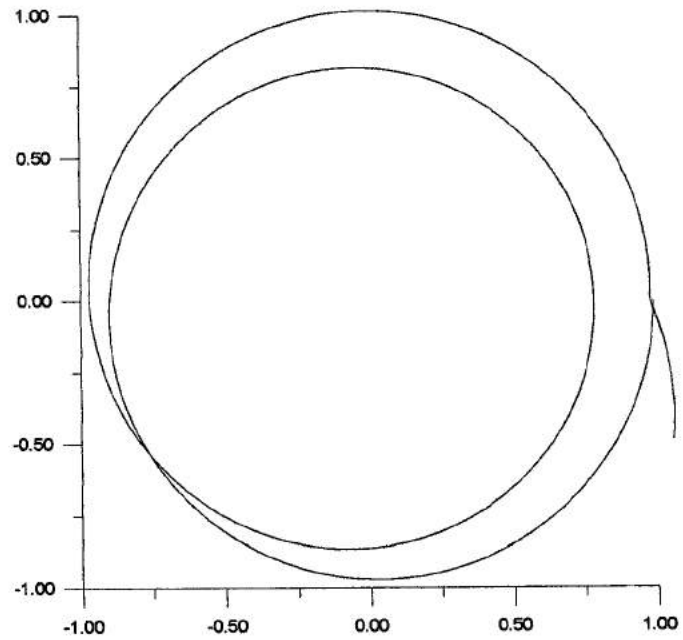


FIG. III.28 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

III.4.2. Método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª Ordem

⇒ 1ª Dinâmica (regularizada)

❖ DADOS A:

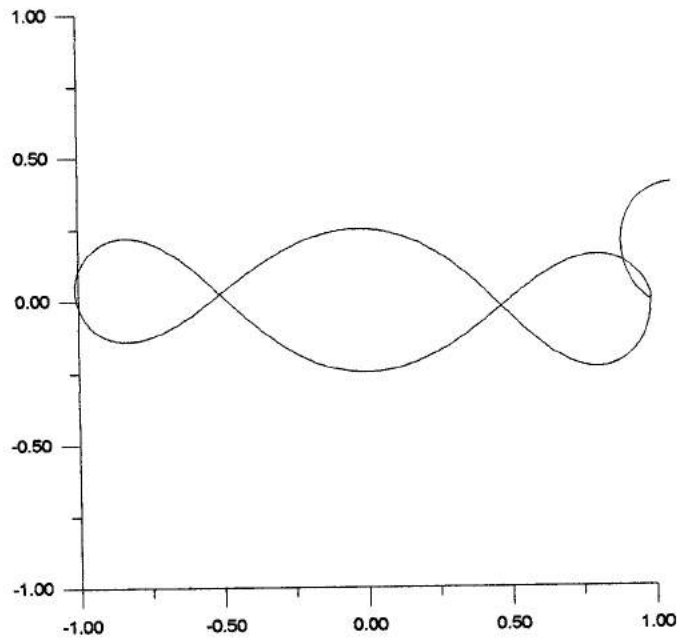


FIG. III.29 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ DADOS B:

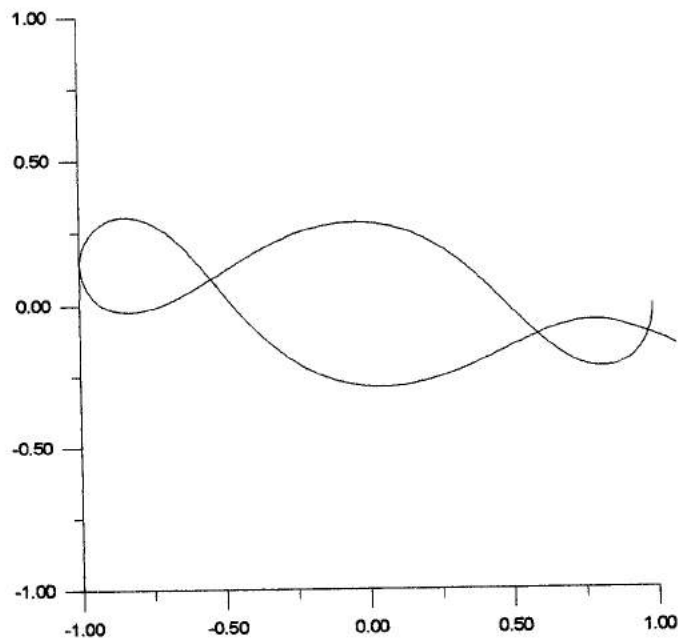


FIG. III.30 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ DADOS C:

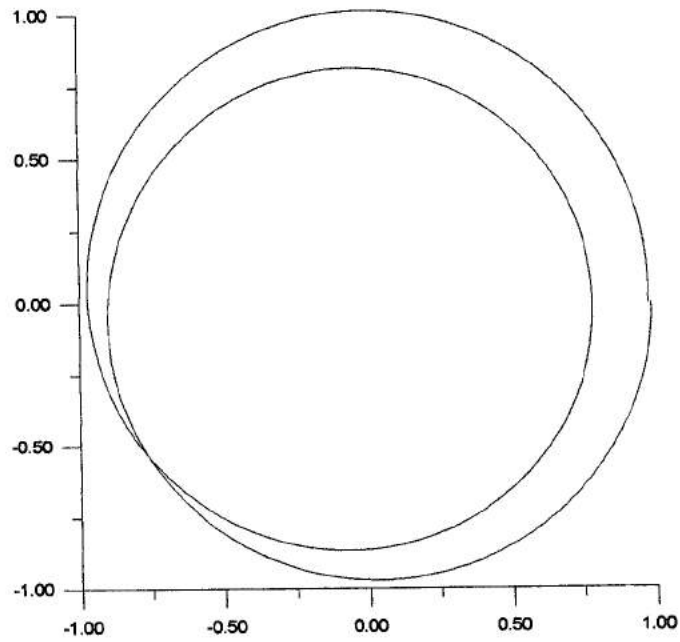


FIG. III.31 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}



III.4.3. Método de Bulirsch-Stoer

⇒ 1ª Dinâmica (regularizada)

❖ DADOS A:

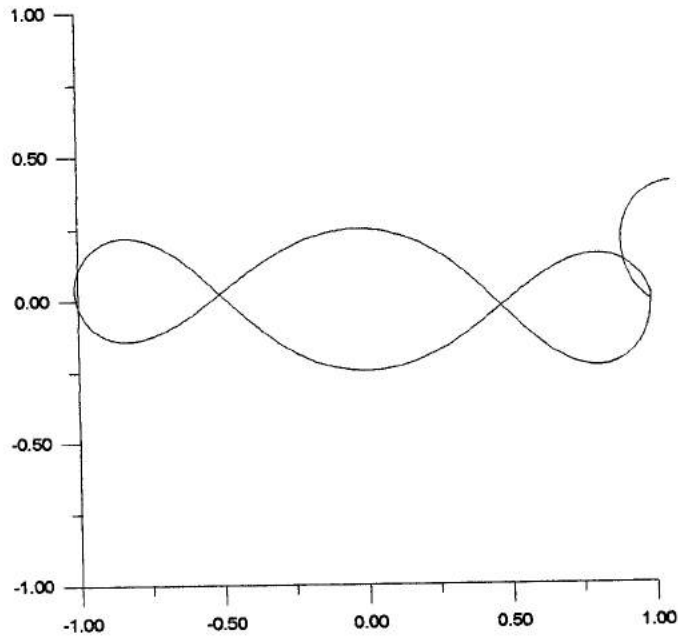


FIG. III.32 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ DADOS B:

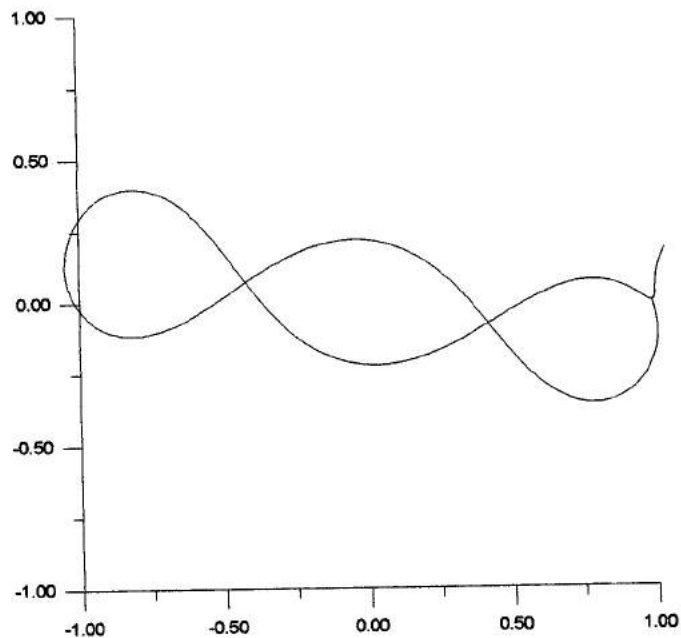


FIG. III.33 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ DADOS C:

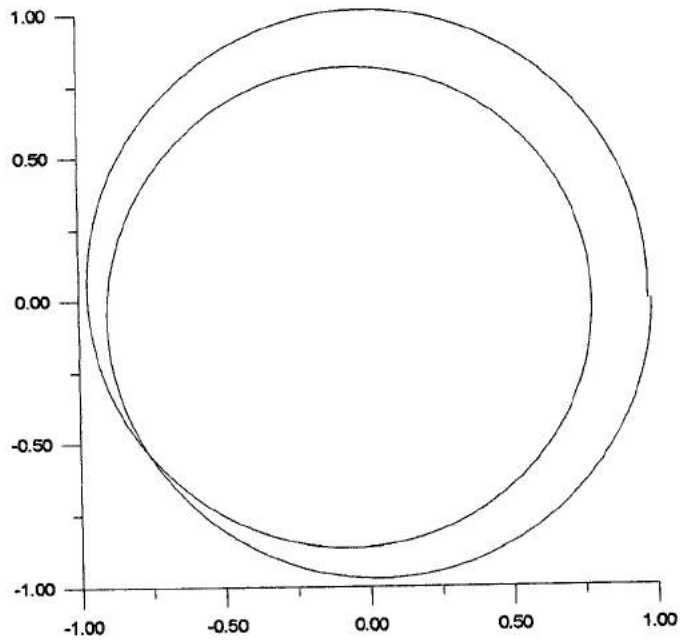


FIG. III.34 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

⇒ 2ª Dinâmica (não regularizada)

❖ DADOS A:

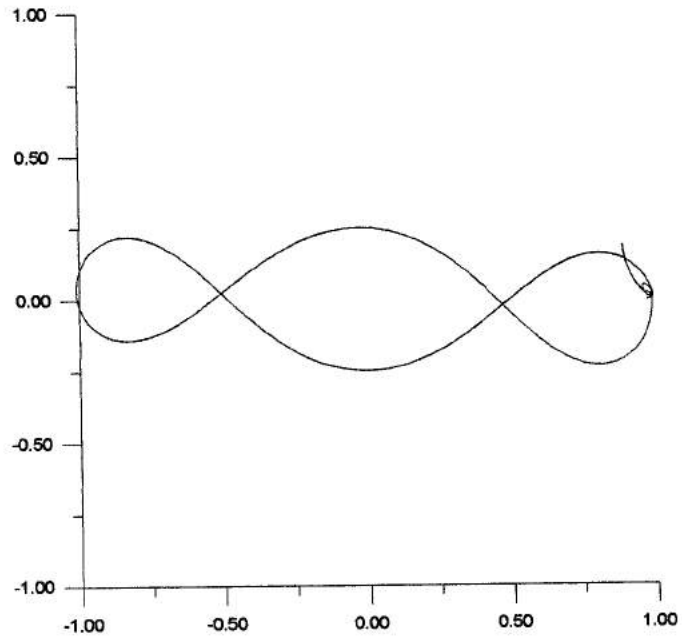


FIG. III.35 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

❖ DADOS B:

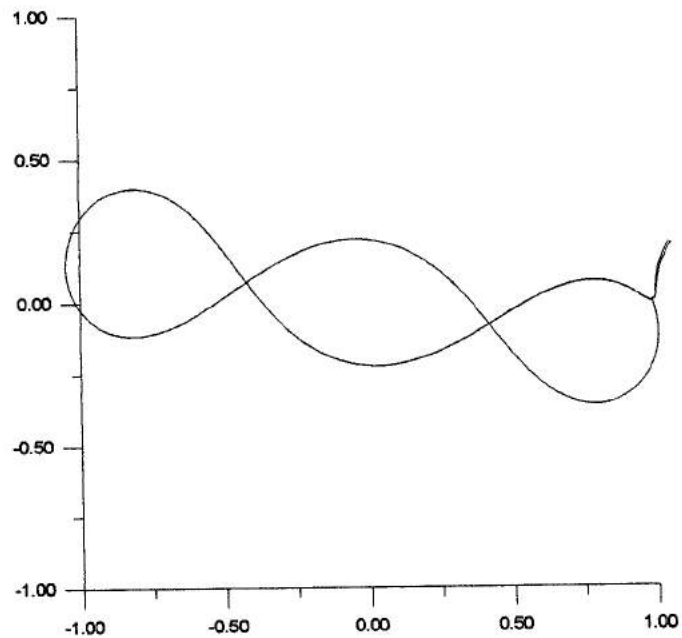


FIG. III.36 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}



❖ **DADOS C:**

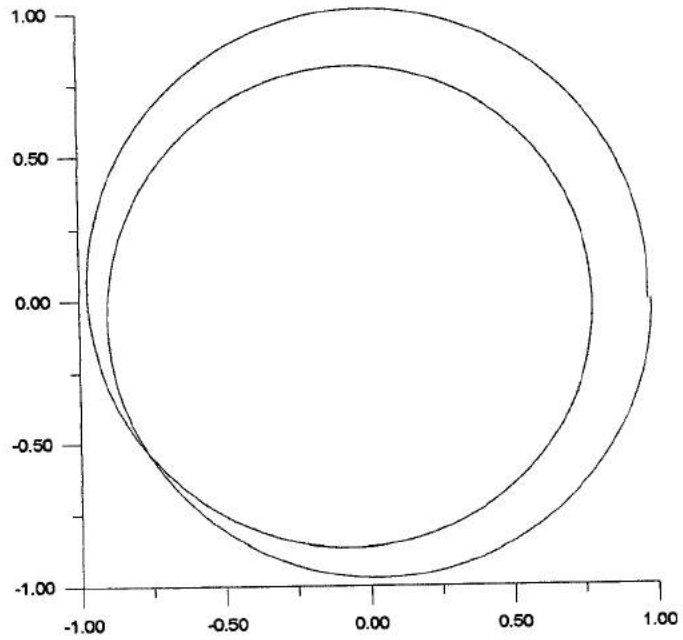


FIG. III.37 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}



III.5. TESTES UTILIZANDO TRAJETÓRIAS QUE RETORNAM AO PONTO DE PARTIDA

Nesta fase do trabalho foram feitos novos testes utilizando as mesmas dinâmicas e os mesmos integradores utilizados anteriormente. O objetivo é estudar a precisão do integrador numérico através do seu comportamento ao obter uma trajetória da partícula teste que retorne ao ponto de partida original. Isso é medido comparando as condições iniciais originais com as que são obtidas após uma integração de ida e volta das equações de movimento. Para isso algumas modificações foram feitas e estas são apresentadas através dos seguintes passos:

- 1)- As dinâmicas regularizada, não regularizada, elíptica no sistema fixo e elíptica no sistema girante-pulsante foram testadas com os três diferentes integradores utilizados até aqui (método de Runge-Kutta de 4ª ordem, método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem e método de Bulirsch-Stoer). Para estes testes foram utilizados dados iniciais que estão apresentados nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 ;
- 2)- Concluídos os testes (passo 1) podemos obter a posição e a velocidade ao final da integração que serão os novos dados iniciais para a sequência do teste. Neste passo serão trocadas as posições e velocidades iniciais pelas posições e velocidades finais dos dados de entrada para cada software. Com essas modificações faz-se necessário inverter o sinal do valor de DT, ou seja, do intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados;
- 3)- Terminadas as modificações são feitos novos testes, variando o valor de EPS (tempo de integração) que vai de $EPS = 10^{-1}$ até $EPS = 10^{-15}$, obtendo os novos valores das posições e velocidades finais;
- 4)- Finalmente, os últimos dados obtidos (os dados finais) devem ser comparados com os dados iniciais originais.

O esquema a seguir mostra as modificações citadas em cada um dos passos:



Passo 1: dados iniciais $\rightarrow X, Y, \dot{X}, \dot{Y}, DT$

dados finais $\rightarrow \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\dot{X}}, \bar{\dot{Y}}$

Passo 2: dados iniciais $\rightarrow \bar{X}, \bar{Y}, \bar{\dot{X}}, \bar{\dot{Y}}, -DT$

dados finais $\rightarrow \bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{\dot{X}}}, \bar{\bar{\dot{Y}}}$

Passo 3: os passos 1 e 2 devem ser seguidos para cada valor de EPS.

Passo 4: montar uma tabela contendo os valores:

$X,$	$\bar{\bar{X}}$	e	DX
$Y,$	$\bar{\bar{Y}}$	e	DY
$\dot{X},$	$\bar{\bar{\dot{X}}}$	e	$D\dot{X}$
$\dot{Y},$	$\bar{\bar{\dot{Y}}}$	e	$D\dot{Y}$

onde a terceira coluna representa as diferenças entre as outras duas colunas e é dada em módulo, por exemplo: $DX = |X - \bar{\bar{X}}|$.

TABELAS E RESULTADOS

Tabela 1 - Dinâmica Regularizada

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -1.2d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = -0.150642490d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 422;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).



Tabela 2 - Dinâmica Não Regularizada

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- xf (1) = posição x inicial = -1.2d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 1.049357510d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Tabela 3 - Dinâmica Eliptica no Sistema Fixo

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- ECE = excentricidade dos primários = 0.0d0;
- xf (1) = posição x inicial = 1.2d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 0.150642490d0;
- xf (5) = tempo = 0.0d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} até 10^{-15}).



Tabela 4 - Dinâmica Elíptica no Sistema Girante-pulsante

- ECP = excentricidade dos primários = 0.0d0;
 - TAP = anomalia verdadeira inicial de $m_2 = 0.0d0$;
 - μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
 - EPS = precisão (de 10^{-1} até 10^{-15});
 - DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.05d0;
 - T0 = tempo inicial = 0.0d0;
 - TF = tempo final = 6.2d0;
 - xf (1) = posição x inicial = 1.2d0;
 - xf (2) = posição y inicial = 0.0d0;
 - xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
 - xf (4) = velocidade inicial na direção y = 0.150642490d0;
- OBS: Parâmetro de controle: $H_{\min} = 0.0d0$, NTA = 0.0d0, NFR = 0.0d0;

As tabelas apresentadas a seguir mostram os resultados de cada teste feito para cada integrador com os diferentes valores de EPS.



➤ Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Tabela 5 - Dinâmica Regularizada

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773028	0.013773028	0.014621884
10^{-2}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773028	0.013773028	0.014621884
10^{-3}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773028	0.013773028	0.014621884
10^{-4}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773028	0.013773028	0.014621884
10^{-5}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773028	0.013773028	0.014621884
10^{-6}	-1.2	-1.204909499	0.004909499	0.0	-0.013773030	0.013773030	0.014621886
10^{-7}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773030	0.013773030	0.014621876
10^{-8}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773031	0.013773031	0.014621877
10^{-9}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-10}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-11}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-12}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-13}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-14}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-15}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	0.057054307	0.057054307	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221260
10^{-2}	0.0	0.057054307	0.057054307	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221260
10^{-3}	0.0	0.057054307	0.057054307	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221260
10^{-4}	0.0	0.057054307	0.057054307	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221260
10^{-5}	0.0	0.057054307	0.057054307	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221260
10^{-6}	0.0	0.057054309	0.057054309	-0.150642490	-0.155010395	0.004367905	0.057221262
10^{-7}	0.0	0.057054223	0.057054223	-0.150642490	-0.155010390	0.004367900	0.057221259
10^{-8}	0.0	0.057054226	0.057054226	-0.150642490	-0.155010390	0.004367900	0.057221178
10^{-9}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-10}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-11}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-12}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-13}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-14}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-15}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181



Tabela 6 - Dinâmica Elíptica no Sistema Fixo

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	219.90219770	218.70219770	0.0	132.95593971	132.95593971	255.9451761
10^{-2}	1.2	1.230298008	0.030298008	0.0	0.024644534	0.024644534	0.039055375
10^{-3}	1.2	1.220928052	0.020928052	0.0	0.034934730	0.034934730	0.040723687
10^{-4}	1.2	1.210735314	0.010735314	0.0	0.017535052	0.017535052	0.020560278
10^{-5}	1.2	1.210013934	0.010013934	0.0	0.016560687	0.016560687	0.019352913
10^{-6}	1.2	1.209929000	0.009929000	0.0	0.016448711	0.016448711	0.019213150
10^{-7}	1.2	1.209920474	0.009920474	0.0	0.016437349	0.016437349	0.019199017
10^{-8}	1.2	1.209919572	0.009919572	0.0	0.016436095	0.016436095	0.019197477
10^{-9}	1.2	1.209919474	0.009919474	0.0	0.016435959	0.016435959	0.019197310
10^{-10}	1.2	1.209919465	0.009919465	0.0	0.016435946	0.016435946	0.019197294
10^{-11}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-12}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-13}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-14}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-15}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	-46.11585050	46.11585050	0.150642490	-27.87959813	27.87959813	53.879598135
10^{-2}	0.0	-0.074943127	0.074943127	0.150642490	0.155711176	0.005068686	0.075114339
10^{-3}	0.0	-0.090282399	0.090282399	0.150642490	0.152240788	0.001598298	0.090296545
10^{-4}	0.0	-0.043582507	0.043582507	0.150642490	0.155811826	0.005169336	0.043888005
10^{-5}	0.0	-0.040864753	0.040864753	0.150642490	0.155971688	0.005329198	0.041210780
10^{-6}	0.0	-0.040551473	0.040551473	0.150642490	0.155989901	0.005347411	0.040902528
10^{-7}	0.0	-0.040519677	0.040519677	0.150642490	0.155991762	0.005349272	0.040871248
10^{-8}	0.0	-0.040516179	0.040516179	0.150642490	0.155991970	0.005349480	0.040867808
10^{-9}	0.0	-0.040515800	0.040515800	0.150642490	0.155991993	0.005349503	0.040867435
10^{-10}	0.0	-0.040515762	0.040515762	0.150642490	0.155991995	0.005349505	0.040867397
10^{-11}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-12}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-13}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-14}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-15}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392



Tabela 7 - Dinâmica Elíptica no Sistema Girante-pulsante

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	1.230492571	0.030492571	0.0	0.068958788	0.068958788	0.075399677
10^{-2}	1.2	1.230492571	0.030492571	0.0	0.068958788	0.068958788	0.075399677
10^{-3}	1.2	1.221129689	0.021129689	0.0	0.033789968	0.033789968	0.039852549
10^{-4}	1.2	1.210615285	0.010615285	0.0	0.016239118	0.016239118	0.019400856
10^{-5}	1.2	1.209470426	0.009470426	0.0	0.014951850	0.014951850	0.017698779
10^{-6}	1.2	1.209386148	0.009386148	0.0	0.014844086	0.014844086	0.017562650
10^{-7}	1.2	1.209377790	0.009377790	0.0	0.014833394	0.014833394	0.017549146
10^{-8}	1.2	1.209376891	0.009376891	0.0	0.014832221	0.014832221	0.017547674
10^{-9}	1.2	1.209376798	0.009376798	0.0	0.014832093	0.014832093	0.017547516
10^{-10}	1.2	1.209376788	0.009376788	0.0	0.014832081	0.014832081	0.017547501
10^{-11}	1.2	1.209376788	0.009376788	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547500
10^{-12}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-13}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-14}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-15}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	-0.175723105	0.175723105	0.150642490	0.141040188	0.009602302	0.175985266
10^{-2}	0.0	-0.175723105	0.175723105	0.150642490	0.141040188	0.009602302	0.175985266
10^{-3}	0.0	-0.089566976	0.089566976	0.150642490	0.151726019	0.001083529	0.089573530
10^{-4}	0.0	-0.041501843	0.041501843	0.150642490	0.155240234	0.004597744	0.041755745
10^{-5}	0.0	-0.037838664	0.037838664	0.150642490	0.155426660	0.004784170	0.038139911
10^{-6}	0.0	-0.037537001	0.037537001	0.150642490	0.155442826	0.004800336	0.037842696
10^{-7}	0.0	-0.037506979	0.037506979	0.150642490	0.155444449	0.004801959	0.037813123
10^{-8}	0.0	-0.037503684	0.037503684	0.150642490	0.155444629	0.004802139	0.037809878
10^{-9}	0.0	-0.037503327	0.037503327	0.150642490	0.155444649	0.004802159	0.037809526
10^{-10}	0.0	-0.037503291	0.037503291	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809491
10^{-11}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-12}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-13}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-14}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-15}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490



➤ Método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem

Tabela 8 - Dinâmica Regularizada

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-2}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-3}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-4}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-5}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-6}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-7}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-8}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-9}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-10}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-11}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-12}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-13}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-14}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-15}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\bar{\bar{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\bar{\bar{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-2}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-3}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-4}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-5}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-6}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-7}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-8}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-9}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-10}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-11}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-12}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-13}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-14}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-15}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181



Tabela 9 - Dinâmica Eliptica no Sistema Fixo

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	1.211127255	0.011127255	0.0	0.018618536	0.018618536	0.021690221
10^{-2}	1.2	1.211127255	0.011127255	0.0	0.018618536	0.018618536	0.021690221
10^{-3}	1.2	1.211127255	0.011127255	0.0	0.018618536	0.018618536	0.021690221
10^{-4}	1.2	1.210605325	0.010605325	0.0	0.017402055	0.017402055	0.020379020
10^{-5}	1.2	1.209985787	0.009985787	0.0	0.016517336	0.016517336	0.019301252
10^{-6}	1.2	1.209943671	0.009943671	0.0	0.016480930	0.016480930	0.019248315
10^{-7}	1.2	1.209920079	0.009920079	0.0	0.016437104	0.016437104	0.019198603
10^{-8}	1.2	1.209919548	0.009919548	0.0	0.016436054	0.016436054	0.019197430
10^{-9}	1.2	1.209919476	0.009919476	0.0	0.016435961	0.016435961	0.019197313
10^{-10}	1.2	1.209919465	0.009919465	0.0	0.016435946	0.016435946	0.019197294
10^{-11}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-12}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-13}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-14}	1.2	1.210139740	0.01013974	0.0	0.016829534	0.016829534	0.019648093
10^{-15}	1.2	1.210505625	0.010505625	0.0	0.018135732	0.018135732	0.020958839



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	-0.046234418	0.046234418	0.150642490	0.155597571	0.004955081	0.046499185
10^{-2}	0.0	-0.046234418	0.046234418	0.150642490	0.155597571	0.004955081	0.046499185
10^{-3}	0.0	-0.046234418	0.046234418	0.150642490	0.155597571	0.004955081	0.046499185
10^{-4}	0.0	-0.043189528	0.043189528	0.150642490	0.155831129	0.005188639	0.043500084
10^{-5}	0.0	-0.040739870	0.040739870	0.150642490	0.155979043	0.005336553	0.041087903
10^{-6}	0.0	-0.040637639	0.040637639	0.150642490	0.155983718	0.005341228	0.040987149
10^{-7}	0.0	-0.040519011	0.040519011	0.150642490	0.155991790	0.005349300	0.040870592
10^{-8}	0.0	-0.040516071	0.040516071	0.150642490	0.155991976	0.005349486	0.040867701
10^{-9}	0.0	-0.040515806	0.040515806	0.150642490	0.155991992	0.005349502	0.040867441
10^{-10}	0.0	-0.040515763	0.040515763	0.150642490	0.155991995	0.005349505	0.040867398
10^{-11}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-12}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-13}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867392
10^{-14}	0.0	-0.041627988	0.041627988	0.150642490	0.155920674	0.005278184	0.041961275
10^{-15}	0.0	-0.044829504	0.044829504	0.150642490	0.155665383	0.005022893	0.045110020



Tabela 10 - Dinâmica Elíptica no Sistema Girante-pulsante

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-2}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-3}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-4}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-5}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-6}	1.2	1.209387877	0.009387877	0.0	0.014846736	0.014846736	0.017565814
10^{-7}	1.2	1.209378744	0.009378744	0.0	0.014834081	0.014834081	0.017550236
10^{-8}	1.2	1.209376986	0.009376986	0.0	0.014832396	0.014832396	0.017548349
10^{-9}	1.2	1.209376796	0.009376796	0.0	0.014832088	0.014832088	0.017547511
10^{-10}	1.2	1.209376788	0.009376788	0.0	0.014832081	0.014832081	0.017547501
10^{-11}	1.2	1.209376788	0.009376788	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547500
10^{-12}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-13}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-14}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-15}	1.2	1.209516940	0.009516940	0.0	0.015038476	0.015038476	0.017796851



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-2}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-3}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-4}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-5}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-6}	0.0	-0.037544461	0.037544461	0.150642490	0.155442346	0.004799856	0.037850035
10^{-7}	0.0	-0.037508997	0.037508997	0.150642490	0.155444365	0.004801875	0.037815114
10^{-8}	0.0	-0.037504150	0.037504150	0.150642490	0.155444598	0.004802108	0.037810336
10^{-9}	0.0	-0.037503315	0.037503315	0.150642490	0.155444650	0.004802160	0.037809514
10^{-10}	0.0	-0.037503292	0.037503292	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809492
10^{-11}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-12}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-13}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-14}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809490
10^{-15}	0.0	-0.038085283	0.038085283	0.150642490	0.155411467	0.004768977	0.038382703



➤ Método de Bulirsch-Stoer

Tabela 11 - Dinâmica Regularizada

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	-1.2	-1.204910201	0.004910201	0.0	-0.013774488	0.013774488	0.014623495
10^{-2}	-1.2	-1.204910201	0.004910201	0.0	-0.013774488	0.013774488	0.014623495
10^{-3}	-1.2	-1.204910201	0.004910201	0.0	-0.013774488	0.013774488	0.014623495
10^{-4}	-1.2	-1.204910240	0.004910240	0.0	-0.013774219	0.013774219	0.014623254
10^{-5}	-1.2	-1.204909440	0.004909440	0.0	-0.013772622	0.013772622	0.014621481
10^{-6}	-1.2	-1.204909452	0.004909452	0.0	-0.013773125	0.013773125	0.014621959
10^{-7}	-1.2	-1.204909452	0.004909452	0.0	-0.013773136	0.013773136	0.014621970
10^{-8}	-1.2	-1.204909457	0.004909457	0.0	-0.013773116	0.013773116	0.014621952
10^{-9}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-10}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-11}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-12}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-13}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-14}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878
10^{-15}	-1.2	-1.204909472	0.004909472	0.0	-0.013773032	0.013773032	0.014621878



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\bar{\bar{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\bar{\bar{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	0.057065244	0.057065244	-0.150642490	-0.155013137	0.004370647	0.057232374
10^{-2}	0.0	0.057065244	0.057065244	-0.150642490	-0.155013137	0.004370647	0.057232374
10^{-3}	0.0	0.057065244	0.057065244	-0.150642490	-0.155013137	0.004370647	0.057232374
10^{-4}	0.0	0.057064343	0.057064343	-0.150642490	-0.155013100	0.004370610	0.057231473
10^{-5}	0.0	0.057052415	0.057052415	-0.150642490	-0.155010191	0.004367701	0.057219357
10^{-6}	0.0	0.057054509	0.057054509	-0.150642490	-0.155010410	0.004367920	0.057221462
10^{-7}	0.0	0.057054550	0.057054550	-0.150642490	-0.155010413	0.004367923	0.057221503
10^{-8}	0.0	0.057054502	0.057054502	-0.150642490	-0.155010415	0.004367925	0.057221455
10^{-9}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-10}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-11}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-12}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-13}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-14}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181
10^{-15}	0.0	0.057054229	0.057054229	-0.150642490	-0.155010391	0.004367901	0.057221181



Tabela 12 - Dinâmica Eliptica no Sistema Fixo

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	0.321976120	0.87802388	0.0	-0.040893388	0.040893388	0.878975656
10^{-2}	1.2	1.240790742	0.040790742	0.0	0.083329341	0.083329341	0.092745225
10^{-3}	1.2	1.234356776	0.034356776	0.0	0.069965236	0.069965236	0.077945629
10^{-4}	1.2	1.212417743	0.012417743	0.0	0.022097468	0.022097468	0.025347552
10^{-5}	1.2	1.209866920	0.009866920	0.0	0.016288665	0.016288665	0.019044073
10^{-6}	1.2	1.209901478	0.009901478	0.0	0.016434915	0.016434915	0.019187123
10^{-7}	1.2	1.209893458	0.009893458	0.0	0.016427724	0.016427724	0.019180964
10^{-8}	1.2	1.209919675	0.009919675	0.0	0.016436143	0.016436143	0.019197571
10^{-9}	1.2	1.209919494	0.009919494	0.0	0.016435977	0.016435977	0.019197335
10^{-10}	1.2	1.209919464	0.009919464	0.0	0.016435945	0.016435945	0.019197292
10^{-11}	1.2	1.209919464	0.009919464	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197291
10^{-12}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197290
10^{-13}	1.2	-3.708570914	2.508570914	0.0	-2.481688785	2.481688785	3.528697671
10^{-14}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197290
10^{-15}	1.2	1.209919463	0.009919463	0.0	0.016435943	0.016435943	0.019197290



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\bar{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\bar{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	1.2286727235	1.228672723	0.150642490	0.610398912	0.459756422	1.311873709
10^{-2}	0.0	-0.198867647	0.198867647	0.150642490	0.138725060	0.011917430	0.199224411
10^{-3}	0.0	-0.158033862	0.158033862	0.150642490	0.145973395	0.004669095	0.158102820
10^{-4}	0.0	-0.054934026	0.054934026	0.150642490	0.154907104	0.004264614	0.055099311
10^{-5}	0.0	-0.040229383	0.040229383	0.150642490	0.156012630	0.005370140	0.040586225
10^{-6}	0.0	-0.040505833	0.040505833	0.150642490	0.155991370	0.005348880	0.040857472
10^{-7}	0.0	-0.040488591	0.040488591	0.150642490	0.155992384	0.005349894	0.040840511
10^{-8}	0.0	-0.040516399	0.040516399	0.150642490	0.155991963	0.005349473	0.040868024
10^{-9}	0.0	-0.040515856	0.040515856	0.150642490	0.155991990	0.005349500	0.040867489
10^{-10}	0.0	-0.040515760	0.040515760	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867395
10^{-11}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867391
10^{-12}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867391
10^{-13}	0.0	0.381132804	0.381132804	0.150642490	0.693315920	0.005349506	0.381170344
10^{-14}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867391
10^{-15}	0.0	-0.040515756	0.040515756	0.150642490	0.155991996	0.005349506	0.040867391



Tabela 13 - Dinâmica Eliptica no Sistema Girante-pulsante

Posições:

EPS	X	\bar{X}	DX	Y	\bar{Y}	DY	$\sqrt{DX^2 + DY^2}$
10^{-1}	1.2	1.067951119	0.132048881	0.0	-0.034153408	0.034153408	0.136394143
10^{-2}	1.2	0.879206690	0.320793310	0.0	-0.146570855	0.146570855	0.352691598
10^{-3}	1.2	1.181358705	0.018641295	0.0	-0.013010365	0.013010365	0.022732520
10^{-4}	1.2	1.207102548	0.007102548	0.0	0.015801661	0.015801661	0.017324510
10^{-5}	1.2	1.209139625	0.009139625	0.0	0.014480512	0.014480512	0.017123608
10^{-6}	1.2	1.209397468	0.009397468	0.0	0.014834883	0.014834883	0.017560927
10^{-7}	1.2	1.209377515	0.009377515	0.0	0.014827631	0.014827631	0.017544128
10^{-8}	1.2	1.209377378	0.009377378	0.0	0.014832552	0.014832552	0.017548214
10^{-9}	1.2	1.209376751	0.009376751	0.0	0.014832041	0.014832041	0.017547447
10^{-10}	1.2	1.209376781	0.009376781	0.0	0.014832074	0.014832074	0.017547491
10^{-11}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-12}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-13}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-14}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499
10^{-15}	1.2	1.209376787	0.009376787	0.0	0.014832080	0.014832080	0.017547499



Velocidades:

EPS	\dot{X}	$\overline{\dot{X}}$	$D\dot{X}$	\dot{Y}	$\overline{\dot{Y}}$	$D\dot{Y}$	$\sqrt{D\dot{X}^2 + D\dot{Y}^2}$
10^{-1}	0.0	0.078229589	0.078229589	0.150642490	0.253107820	0.102465330	0.128914748
10^{-2}	0.0	0.611555514	0.611555514	0.150642490	0.127402969	0.023239521	0.611996913
10^{-3}	0.0	0.046058412	0.046058412	0.150642490	0.157566787	0.007025380	0.046591128
10^{-4}	0.0	-0.041525820	0.041525820	0.150642490	0.154869600	0.004227110	0.041740414
10^{-5}	0.0	-0.036546809	0.036546809	0.150642490	0.155499867	0.004857377	0.036868188
10^{-6}	0.0	-0.037521588	0.037521588	0.150642490	0.155444971	0.004802481	0.037827680
10^{-7}	0.0	-0.037491509	0.037491509	0.150642490	0.155445760	0.004803270	0.037797945
10^{-8}	0.0	-0.037504752	0.037504752	0.150642490	0.155444602	0.004802112	0.037810933
10^{-9}	0.0	-0.037503164	0.037503164	0.150642490	0.155444658	0.004802168	0.037809365
10^{-10}	0.0	-0.037503271	0.037503271	0.150642490	0.155444652	0.004802162	0.037809470
10^{-11}	0.0	-0.037503289	0.037503289	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809488
10^{-12}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809489
10^{-13}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809489
10^{-14}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809489
10^{-15}	0.0	-0.037503290	0.037503290	0.150642490	0.155444651	0.004802161	0.037809489



III.6. CONCLUSÕES FINAIS

Fazendo uma análise de todos os resultados obtidos no período anterior e, também neste período, podemos estudar qual foi o melhor método de integração testado até aqui para cada caso simulado.

Tal análise foi feita, comparando-se o tempo de integração gasto pelo computador, ou seja, o tempo de CPU. Além disso, verificou-se para qual integrador foi possível obter um conjunto de trajetórias mais preciso.

Foram utilizados, conforme já citamos anteriormente, três métodos de integração. São eles:

- 1)- método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
- 2)- método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem e
- 3)- método de Bulirsch-Stoer.

O primeiro método foi eficiente para as dinâmicas regularizada e não regularizada, porém gastou um considerável tempo (da ordem de 250s para a 10ª órbita) para a integração. Para as demais dinâmicas o tempo foi da ordem de 100s para a 10ª órbita e os conjuntos de trajetórias somente foram precisos a partir de $EPS = 10^{-4}$.

O segundo método mostrou-se eficiente na dinâmica regularizada e o tempo de CPU foi da ordem de 40s para a 10ª órbita. Entretanto, apresentou alguns problemas na dinâmica não regularizada. Para as demais dinâmicas, o integrador utilizou um pequeno tempo de integração (da ordem de 20s para a 1ª órbita) e apresentou grande eficiência quanto a precisão nos conjuntos de trajetórias.

Por fim, o terceiro método (Bulirsch-Stoer) utilizou um pequeno tempo de CPU (da ordem de 12s para a 10ª órbita) para a dinâmica elíptica no sistema fixo e um tempo de integração (da ordem de 35s para a 10ª órbita) para as demais dinâmicas. Para as dinâmicas regularizada e não regularizada os conjuntos de trajetórias foram altamente precisos e, para as demais dinâmicas obteve-se precisão a partir de $EPS = 10^{-5}$.

Para os novos dados de entrada utilizado, todos os conjuntos de trajetórias foram eficientes e o menor tempo gasto foi para o método de Bulirsch-Stoer.



REFERÊNCIAS

1. Senna, G.J. - Apostila de Cálculo Numérico e Computação - DMA / FEG / UNESP ;
2. Prado, A.F.B.A. - “ Análise e Planejamento de Missões” - DMC / INPE - apostila a ser publicada;
3. Murray, C.D. and S.F.Dermott (1997) - “Solar System Dynamics” - (in press);
4. Brouwer, D., and G.M. Clemence, Methods of Celestial Mechanics, Academic New York, 1961;
5. Kondapalli R. Rao: A Review on Numerical Methods for Initial Value Problems (INPE-3011-RPI / 088);
6. Kondapalli R. Rao; Hélio K. Kuga: Manual de Uso de um Conjunto de Integradores Numéricos para Problemas de Condições Iniciais (INPE-3830-RPI / 154).
7. Prado, A.F.B.A. and Broucke, R. - “Transfer Orbits in the Earth-Moon System Using a Regularized Model”.