MODELAMENTO DE SATÉLITES ARTIFICIAIS RÍGIDO/FLEXÍVEIS

Alexandre Bizarro Fernandes
Aluno da Escola de Engenharia Industrial de São José dos Campos
Bolsa PIBIC
Orientador: Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, Pesquisador da Divisão de Mecânica Espacial e Controle
Avenida dos Astronautas, 1.758 - Caixa Postal 515

Em geral um satélite precisa apontar, através de uma manobra de atitude, ou ficar apontado para uma determinada região do espaço. Como exemplo, muitos satélites precisam ficar apontados para a Terra. Outros satélites apontam uma face na direção do sol ou certas estrelas de interesse, outros ainda são projetados para apontar primeiro para um objeto e depois para algum outro. Freqüentemente parte do satélite (uma antena de comunicação) deve apontar para a região da Terra, enquanto outra parte (um painel solar) deve apontar para o sol. Para se atingir os objetivos da missão, a estabilização da atitude e o sistema de controle são partes importantes do projeto do satélite.

A definição de satélite rígido/flexível está associada às diferentes partes móveis que constituem o satélite. Por exemplo, um painel solar, uma roda de reação ou mesmo um amortecedor de nutação.

A maioria dos veículos espaciais exige a execução de movimentos de atitude que ajustam o vetor do momento angular durante pelo menos uma fase de sua missão. Muitos desses veículos estarão rodando durante parte ou todo o seu tempo de vida no espaço.

Para satélites estabilizados por rotação é praticamente mandatório a inclusão de um amortecedor de nutação passivo ou ativo. Os amortecedores passivos são muito eficientes e confiáveis além de requerer pouca massa e espaço. Os amortecedores de nutação têm a função de alinhar o eixo de "spin" com o vetor quantidade de movimento angular, amortecendo assintoticamente movimentos de cone originados por perturbações ambientais ou torques de manobra e/ou controle de atitude.

Deseja-se sempre obter um mínimo tempo de amortecimento. Isto pode ser atingido ajustando o amortecedor, variando-se certos parâmetros. Entretanto, não é aconselhável regular o amortecedor muito precisamente, conforme as tolerâncias de fabricação, mudanças da taxa de rotação e variações de temperatura aumentariam demais uma variação na constante de tempo de amortecimento e podem algumas vezes tornar os amortecedores instáveis e, portanto, inúteis.

Um dos amortecedores de nutação mais utilizados é o tipo massa-mola, o qual contém uma fonte e uma massa deslizadora, com uma caixa fixada rigidamente no corpo do satélite. A aceleração linear ao longo do tubo é usada como uma função forçada para o amortecedor.

A dissipação de energia vem de uma fricção estática ou dinâmica resultando um amortecimento da nutação. Na determinação do projeto desse tipo de amortecedor deve-se levar em conta a velocidade de "spin" e as propriedades de inércia do veículo.

Neste trabalho determina-se as equações de movimento de um satélite rígido/flexível, considerando em particular um amortecedor de nutação, para isso utilizamos primeiramente o "software" MATCAD para obtenção das equações do movimento do amortecedor, considerando fatores como a posição de sua massa deslizante em função do tempo, os momentos de inércia do satélite e a dissipação de energia proveniente desse movimento.

Através destas equações estabelecemos algumas restrições para os parâmetros desse amortecedor, as quais foram utilizadas na simulação realizada posteriormente, utilizando a linguagem FORTRAN.

Os resultados dessa simulação puderam ser observados utilizando o aplicativo "GRAPHER FOR WINDOWS".

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS - INPE

RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

TÍTULO: MODELAMENTO E ANÁLISE DE SATÉLITES ARTIFICAIS RÍGIDO/FLEXÍVEIS

Aluno: Alexandre Bizarro Fernandes
Orientador: Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza

ÍNDICE

1) OBJETIVO:

Estudar diferentes metodologias associadas ao modelamento de satélites artificiais rígido/flexíveis, a fim de confrontar o grau de representatividade versus o grau de dificuldade de cada um dos métodos.

2) INTRODUÇÃO

A definição de satélite rígido/flexível está associada às diferentes partes móveis que constituem o satélite, como um painel solar, uma roda de reação ou mesmo um amortecedor de nutação.

A maioria dos veículos espaciais exige a execução de movimentos de atitude que ajustam o vetor momento angular durante pelo menos uma fase de sua missão no espaço, já que em geral um satélite precisa apontar, através de uma manobra de atitude, para uma determinada região do espaço. Como exemplo, alguns precisam ficar apontador para a Terra, outros na direção do sol ou certas estrelas de interesse. Muitas vezes parte do satélite (uma antena de comunicação) deve apontar para a região da Terra, enquanto outra parte (um painel solar) deve apontar para o sol.

Para se atingir os objetivos da missão, a estabilização da atitude e sistema de controle são parte importante do projeto do satélite.

Para satélites estabilizados por rotação é praticamente mandatório a inclusão de um amortecedor de nutação passivo ou ativo. Os amortecedores passivos são muito eficientes e confiáveis além de requerer pouca massa e espaço. Os amortecedores de nutação têm a função de alinhar o eixo de "spin" com o vetor quantidade de movimento angular, amortecendo assintoticamente movimentos de cone originados por perturbações ambientais ou torques de manobra e/ou controle de atitude.

Deseja-se sempre obter um mínimo tempo de amortecimento. Isto pode ser atingido ajustando o amortecedor variando-se certos parâmetros. Entretanto, não é aconselhável regular o amortecedor muito precisamente, conforme as tolerâncias de fabricação, mudanças da taxa de rotação e variações de temperatura aumentariam demais uma variação na constante de tempo de amortecimento e podem algumas vezes tornar os amortecedores instáveis e, portanto, inúteis.

Neste trabalho utilizamos o amortecedor de nutação tipo massa-mola como suporte para o estudo deste tipo de componente essencial à vida útil do satélite.

Este tipo de amortecedor consiste numa fonte e uma massa deslizadora, com uma caixa fixada rigidamente no corpo do satélite. A aceleração linear ao longo do tubo é usada como uma função forçada para o amortecedor.

A dissipação de energia vem de uma fricção estática ou dinâmica resultando um amortecimento da nutação. Na determinação do projeto deste tipo de amortecedor deve-se levar em conta a velocidade de "spin" e as propriedades de inércia do veículo.

Na determinação do projeto desse tipo de amortecedor deve-se levar em conta a velocidade de "spin" e as propriedades de inércia do veículo.

3) PROCEDIMENTO:

Primeiramente procuramos realizar um estudo sobre os métodos de movimentação sobre dentro de massa, os quais são essenciais para o controle e estabilização dos movimentos de um satélite. Existem técnicas de torque aplicado e dissipativas.

A estabilização da rotação é um método comum, o qual independe da atitude e contorno de órbita.

Usamos o gradiente gravitacional para manter a Terra direcionada à uma antena ou outro instrumento, isto tem tido sucesso e é apropriado também para missões restritas de pequena excentricidade orbital.

Este princípio pode ser explicado simplesmente considerando o movimento da atitude de um satélite composto por duas massas, conforme mostra a figura 1.

O centro de massa segue uma órbita circular. A deflexão constante de uma região vertical causa um torque restaurador gerado por um desequilíbrio de forças atuando sobre duas massas iguais.

A força centrífuga atuante sobre a massa 1 é maior que a força gravitacional, porque estas duas forças são iguais apenas no centro de massa. O oposto acontece com a massa 2 onde a força gravitacional é maior que a centrífuga.

Então é criado um outro torque que força as duas massas irem em direção a uma região de orientação vertical.

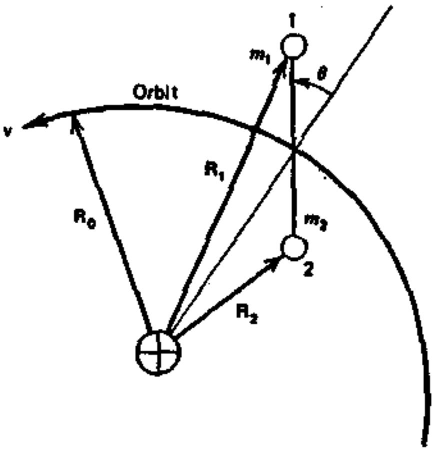

Figura 01 - Princípio de funcionamento do torque do gradiente de gravidade.

Um caso mais geral é mostrado na figura 2. Se **G** é a gravidade produzida pelo torque, então a equação do movimento é simplesmente

$$\mathbf{G} = d\mathbf{h}/dt$$

Onde h é o momento angular do corpo B sobre o seu centro de massa O dado pela equação $ho = \int_B r x(w x r)dm$.

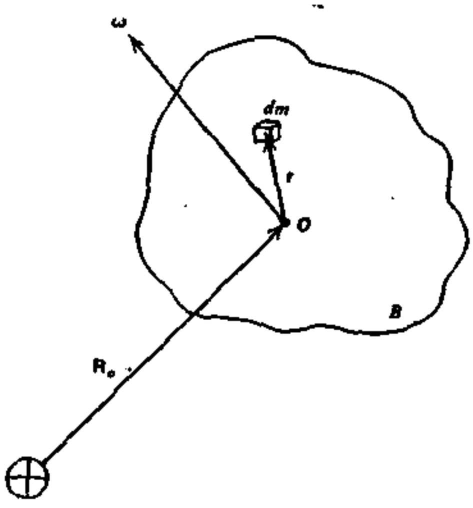

Figura 02 - Modelo geral do gradiente de gravidade.

Usando o produto do vetor triplo encontramos,

$$h = \int_B [r^2 w - (r.w)r]dm$$

O torque gravitacional fica na forma

$$G = \int_B r \, x \left[-\frac{\mu(R_0 + r)dm}{|R_0 + r|^3} \right] \qquad \text{Equação (1)}$$

Notando que

$$|R_0 + r|^{-3} = R_0^{-3}\left[1 + \frac{2(r.R_0)}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2}\right]^{-3/2} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 - \frac{3(r.R_0)}{R_0^2} + O\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right)\right]$$

e

$$\int_B r \, dm = 0$$

como r é referente ao centro de massa, a equação 1 pode ser reescrita como

$G = \frac{3\mu}{R_0^5}\int_B (r.R_0) r \, x \, R_0) dm + \frac{\mu}{R_0} x$ (termos do vetor com magnitudes de terceira ordem e maior em r/R_0)

Este é, por sua vez, balanceado pela taxa de h,

$$\frac{dh}{dt} = \int_B \left[r^2 \dot{w} - (r.\dot{w})r\right] dm + \int_B (r.w)(r \, x \, w) dm$$

Como vimos anteriormente para satélites estabilizados por rotação é mandatório a utilização de um amortecedor de nutação, sendo assim, após este estudo prévio sobre o controle e estabilização dos movimentos de um satélite, preferimos a partir de um amortecedor de nutação tipo massa-mola realizar um estudo sobre a atuação deste componente durante toda a missão do satélite.

3.1) Análise Inicial

A posição genérica do amortecedor de nutação tipo massa-mola dentro do corpo do satélite pode ser observada a seguir:

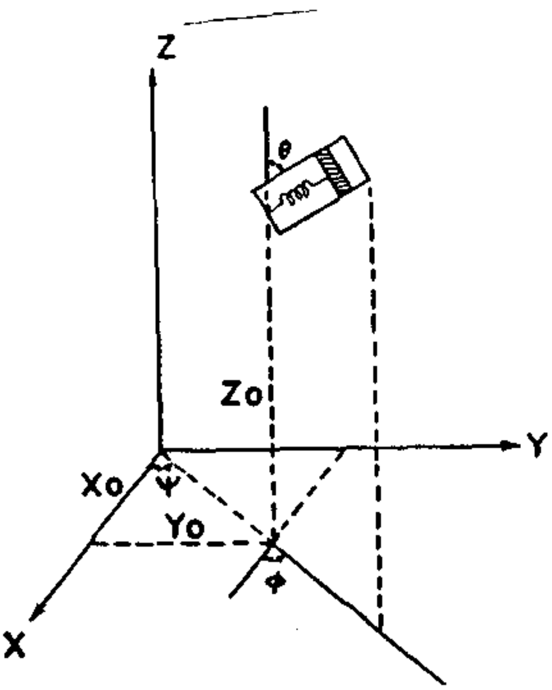

Figura 03 - Amortecedor de nutação tipo massa-mola.

Analisando a figura 3.3, a posição da massa deslizante é dada por:

$$\vec{ro} = (Xo + L.Sen\theta.Cos\phi)\,\vec{i} + (Yo + L.Sen\theta.Sen\phi)\,\vec{j} + (Zo + L.Cos\theta)\,\vec{k} \quad (1)$$

A equação independente que descreve o movimento da massa deslizante pode ser desenvolvida a partir do método Lagrangeano.

A equação de Lagrange no sistema de coordenadas generalizadas é definida como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Lg}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial Lg}{\partial qi} + \frac{\partial F}{\partial \dot{qi}} = 0 \qquad (2)$$

Onde Lg = T - V

T = Energia Cinética
V = Energia Potencial
F = Função Dissipação
qi = notação de coordenada generalizada

Para o amortecedor de nutação tipo massa-mola a coordenada generalizada é L.

$$T = \frac{1}{2} ms\left(\vec{v}.\vec{v}\right)$$

Onde V = velocidade da massa deslizante no espaço inercial, é dada por:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{W} x \vec{r} \qquad (3)$$

Energia Potencial: $V = \frac{1}{2} Ks.L^2$ (4)

Função dissipativa: $F = \frac{1}{2} Cs(\dot{L})^2$ (5)

Assume-se que o centro de gravidade de todo o sistema não é afetado pelo deslizamento da massa. A simplificação e a substituição das variáveis na equação 02 resulta na seguinte equação:

$$\ddot{L} + \frac{Cs}{ms}\dot{L} + L\left\{\frac{Ks}{ms} + 2.Wy.Wz.Sen\theta.Cos\phi.Sen\phi - Wz^2.Sen^2\theta - Wy^2.Cos^2\theta + \right.$$
$$2.Wx.Wz.Sen\theta.Cos\theta.Cos\phi + 2.Wx.Wy.Sen^2\theta.Sen\phi.Cos\phi - Wx^2.Cos^2\theta +$$
$$\left. - Wx^2.Sen^2\theta.Sen^2\phi - Wy^2.Sen^2\theta.Cos^2\phi \right\} +$$
$$+ \dot{W}y(Zo.Sen\theta.Cos\phi - Xo.Cos\theta) + \dot{W}z.Sen\theta(Xo.Sen\phi - Yo.Cos\phi) +$$
$$+ \dot{W}x(Yo.Cos\theta - Zo.Sen\theta.Sen\phi) + Wy.Wz(Yo.Cos\theta + Zo.Sen\theta.Sen\phi) +$$
$$+ Wx.Wz(Zo.Sen\theta.Cos\phi + Xo.Cos\theta) + Wx.Wy(Yo.Sen\theta.Sen\phi + Xo.Sen\theta.Sen\phi) +$$
$$- Wy^2(Zo.Cos\theta + Xo.Sen\theta.Cos\phi) - Wz^2(Yo.Sen\theta.Sen\phi + Xo.Sen\theta.Cos\phi) +$$
$$- Wx^2(Zo.Cos\theta + Yo.Sen\theta.Sen\phi) = 0 \qquad (6)$$

Para um satélite simétrico, a variação básica de Wx e Wy permanece senoidal, mas suas amplitudes se reduzirão devido ao amortecimento e para satélites simétricos o ângulo de cone é dado por:

$$\begin{aligned} Wx &= W_T.Cos\Omega t \\ Wy &= W_T.Sen\Omega t \end{aligned} \qquad (7)$$

Sendo W_T a velocidade transversal do satélite e Ω a freqüência de rotação, dada por:

$$\Omega = \frac{Iz - Ix}{Iy}$$

A substituição é válida para pequenos períodos de tempo.

$$\dot{W}x = -\Omega . W_T . Cos\Omega t$$
$$\dot{W}y = \Omega . W_T . Cos\Omega t \qquad (8)$$

A equação 06 pode então ser simplificada realizando pequenas aproximações.

As velocidades transversais Wx e Wy são pequenas se comparadas com a velocidade de rotação Wz, assim os termos do tipo Wx^2, Wy^2 e Wx.Wy podem ser desconsiderados.

Assumindo-se também que $\dot{W}z$ é muito pequeno, este também pode ser assumido como zero.

Após a substituição de Wx, Wy, $\dot{W}x$, $\dot{W}y$ das equações 07 e 08, a equação de Lagrange pode então ser simplificada, tomando a seguinte forma:

$$\ddot{L} + \frac{Cs}{ms}\dot{L} + L\left(\frac{Ks}{ms} - Wz^2.Sen^2\theta + 2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta.Cos(\Omega t - \phi\right) +$$

$$Zo.W_T.(\Omega + Wz).Sen\theta.Cos(\Omega t - \phi) + Xo.W_T(Wz - \Omega)Cos\Omega t.Cos\theta +$$

$$+ Yo.W_T(Wz - \Omega)Sen\Omega t.Cos\theta = 0 \qquad (9)$$

Considerando ro como sendo a distância da mola até o eixo de rotação.

$$Xo = ro.Cos\psi$$
$$Yo = ro.Sen\psi \qquad (9a)$$

Substituindo na equação 09 temos:

$$\ddot{L}+\frac{Cs}{ms}\dot{L}+L\left(\frac{Ks}{ms}-Wz^2.Sen^2\theta+2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta.Cos(\Omega t-\phi)\right)+$$

$$Zo.W_T.(\Omega+Wz).Sen\theta.Cos(\Omega t-\phi)+ro.W_T(Wz-\Omega).Cos\theta.Cos(\Omega t-\psi)=0$$
`(10)

A performance e estabilidade do amortecedor pode então ser estudada a partir da equação 10, usando técnicas de solução de equações diferenciais.

3.2) Análise da estabilidade

Para uma performance estável do amortecedor, a condição necessária é de que os coeficientes de L, L e L da equação 10 devem ser positivos. Então para ocorrer estabilidade:

$$\frac{Ks}{ms}-Wz^2.Sen^2\theta+2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta.Cos(\Omega t-\phi)\geq 0 \qquad (11)$$

Para pequenos valores de θ a contribuição de $Wz^2.Sen^2\theta$ torna-se muito pequena se comparada com o termo $2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\varnothing.Cos(\Omega t - \varnothing)$. Assim, este termo pode ser cancelado. Neste caso, os parâmetros do amortecedor devem obedecer a seguinte condição:

$$\frac{Ks}{ms}\geq 2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta \qquad (12)$$

(Onde $\frac{Ks}{ms} = Wn^2$ - freqüência natural do amortecedor)

A desvantagem deste tipo de amortecedor é que ele não pode ser regulado com grande precisão.

Para grandes valores de θ, a contribuição de $Wz^2.Sen^2\theta$ é grande se comparado com $W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta$ e então o segundo termo pode ser desconsiderado. A variação no tempo de $2W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta$ é superposta por $Wz^2.Sen^2\theta$.

A equação 10 pode então ser escrita como:

$$\ddot{L}+\frac{Cs}{ms}\dot{L}+L\left(\frac{Ks}{ms}-Wz^2.Sen^2\theta\right)+Zo.W_T.(\Omega+Wz).Sen\theta.Cos(\Omega t-\phi)$$

$$+ro.W_T(Wz-\Omega).Cos\theta.Cos(\Omega t-\psi)=0 \qquad (13)$$

Fazendo a análise da estabilidade, conclui-se que para um movimento estável:

$$\frac{Ks}{ms}\geq Wz^2.Sen^2\theta \qquad (14)$$

3.3) Solução da Equação de Lagrange

A equação de Lagrange (10) considera um pequeno tempo de variação dos termos. Considera-se também θ entre 0 e 90°. Tomando em consideração estes fatos, a solução pode ser encontrada sem desconsiderar os termo $2.W_T.Wz.Sen\theta.Cos\theta.Cos(\Omega t-\phi)$. Uma solução mais precisa pode ser obtida, se desejado, por técnicas de perturbação. A solução em regime permanente da equação 10 é dada por:

$$L=\frac{-Zo.W_T(\Omega+Wz).Sen\theta.Sen(\Omega t+\theta o+\phi)-Zo.W_T(\Omega+Wz).Sen\theta.Sen(\Omega t+\theta o+\phi)}{\sqrt{\left(\frac{Ks}{ms}-Wz^2.Sen^2\theta-\Omega^2\right)^2+\left(\frac{Cs}{ms}\right)^2}} \qquad (15)$$

Onde θo é dado por $Tan\theta o=\left(\frac{Ks}{ms}-Wz^2.Sen^2\theta-\Omega^2\right)\Big/\frac{Cs}{ms}\Omega$

A expressão acima pode ser escrita como:

$$L = L_1.Sen(\Omega t + \theta o + \varnothing) + L_2.Sen(\Omega t + \theta o + \psi) \qquad (16)$$

representando dessa maneira o modo senoidal de oscilações, sendo a amplitude dependente da configuração do amortecedor e do ângulo de nutação. A presença da variável de tempo terá efeito variável na amplitude.

Obviamente que o amortecimento será mais rápido para a amplitude de deflexão máxima. Então a condição encontrada para sintonizar o amortecedor é dada por:

$$\frac{Ks}{ms} = Wz^2.Sen^2\theta + \Omega^2 \qquad (17)$$

Entretanto em projetos práticos, os parâmetros devem ser ajustados de maneira que a deflexão máxima não ultrapasse os valores de projeto do amortecedor.

3.4) Simulação da atuação de um amortecedor tipo massa-mola

Após realizada a análise de todo o equacionamento envolvendo o movimento de um amortecedor de nutação tipo massa-mola foi possível através de um programa desenvolvido em linguagem FORTRAN a realização de uma simulação da atuação deste componente.

As dimensões do satélite escolhido possui as seguintes características:

- Wz = 6 rpm
- Ix = 2,7
- Iy = 2,7
- Iz = 4,7

Consideramos a massa deslizante igual a 50 gramas e a posição do amortecedor, segundo a figura 03, como sendo:

- Xo = 0,2 m
- Yo = 0,2 m
- Zo = 0,6 m
- θ = 90°
- Ø = 0

Através destes valores e utilizando a equação 14 chegamos à seguinte condição:

Ks ≥ 0,02 (N/m)

Com a equação 17 chegamos ao valor de Ks para que o amortecimento seja realizado mais rapidamente:

Ks = 0,047 N/m

Podemos observar que este valor obedece a condição imposta pela equação 14. Entretanto, com sua utilização a amplitude máxima de deformação da mola excedia as especificações do satélite considerado.

Concluímos então que havia a necessidade de se aumentar a rigidez elástica para que a amplitude máxima de deformação fosse menor. O valor da rigidez elástica não poderia porém estar muito acima deste valor, pois o amortecimento do ângulo de nutação seria realizado num intervalo de tempo acima do esperado.

Sendo assim, foram realizadas várias simulações, onde se encontrou um valor que não só obedecia a condição imposta e as especificações do satélite considerado, mas também conseguia realizar o amortecimento do ângulo de nutação num intervalo de tempo conveniente.

Valor utilizado: **Ks = 0,15 N/m**

Os resultados da simulação estão apresentados nos gráficos a seguir:

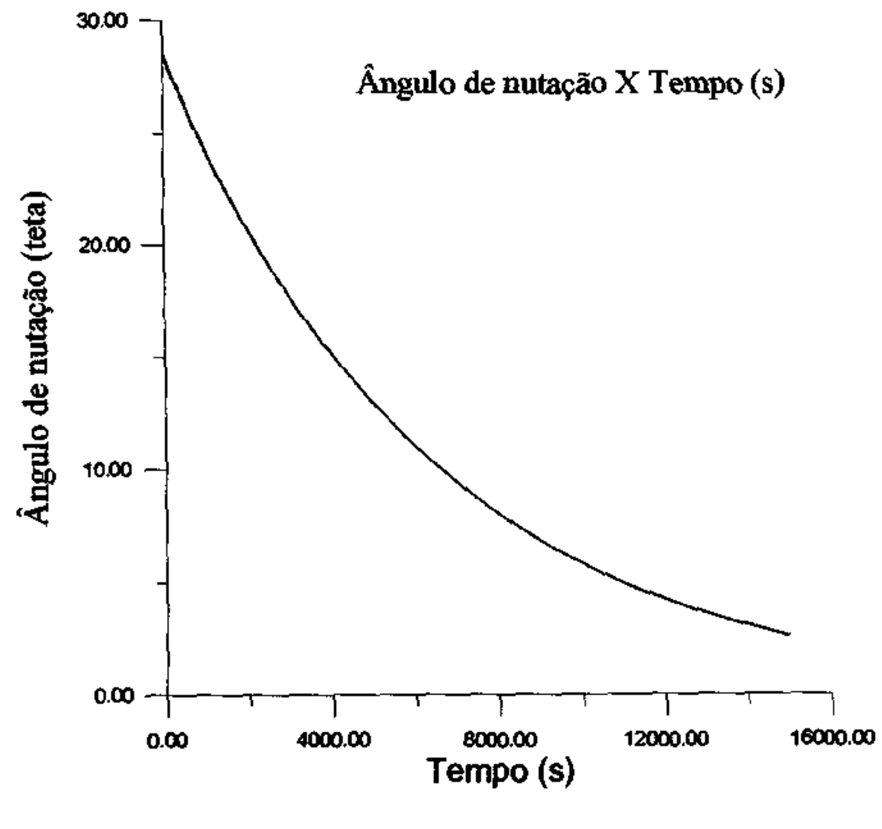

Figura 04 - Amortecimento do ângulo de nutação em função do tempo.

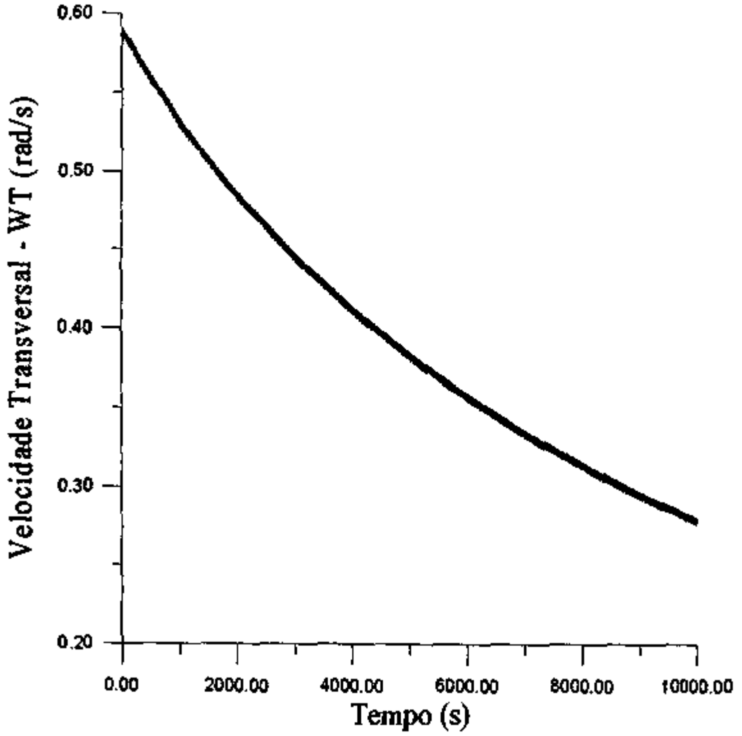

Figura 05 - Comportamento da velocidade transversal W_T em função do tempo.

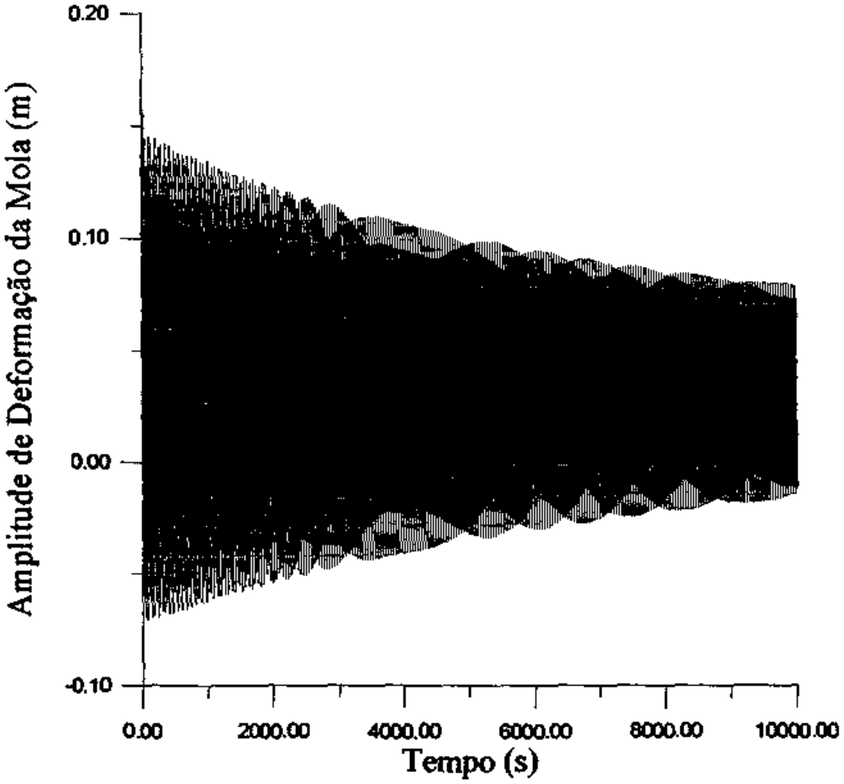

Figura 06 - Comportamento da deformação da mola em função do tempo.

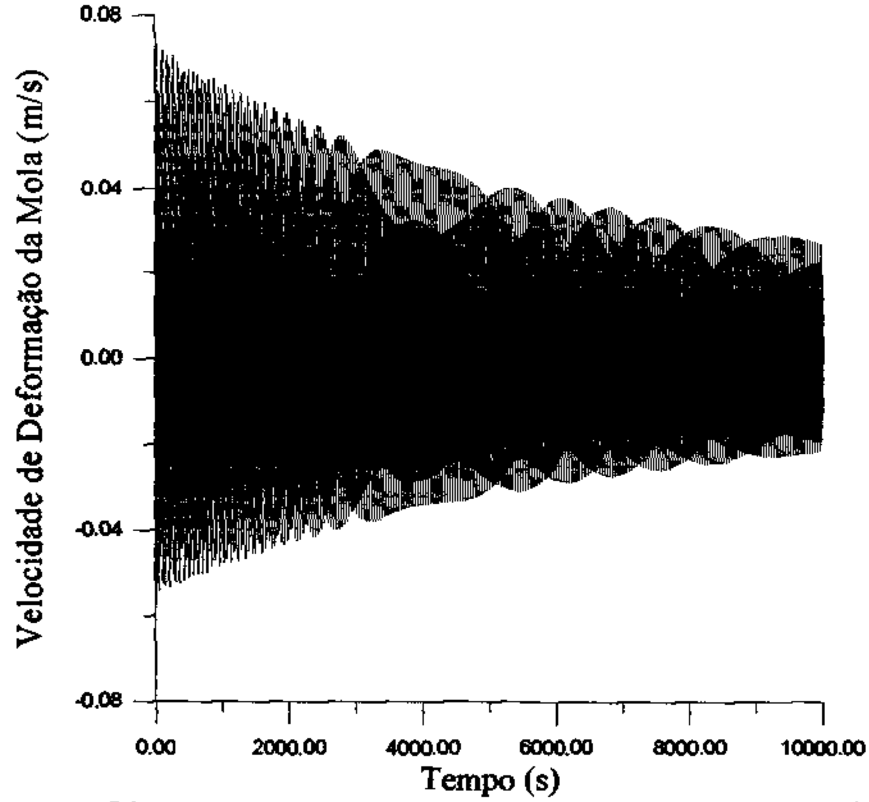

Figura 07 - Comportamento da velocidade de deformação da mola em função do tempo.

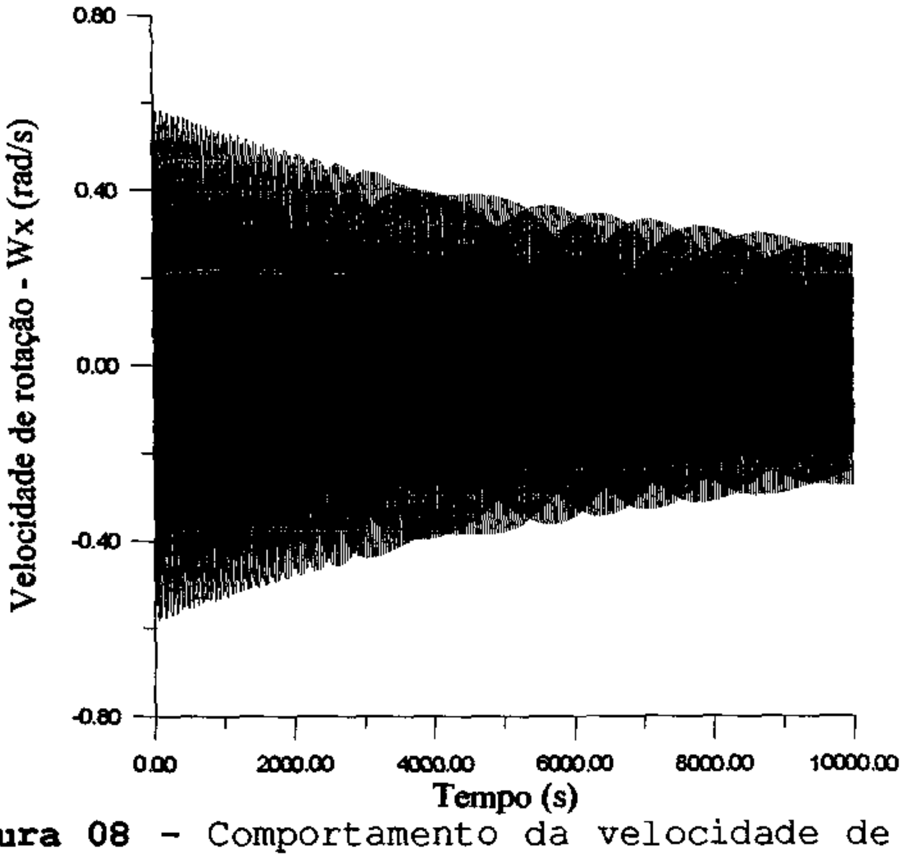

Figura 08 - Comportamento da velocidade de rotação Wx em função do tempo.

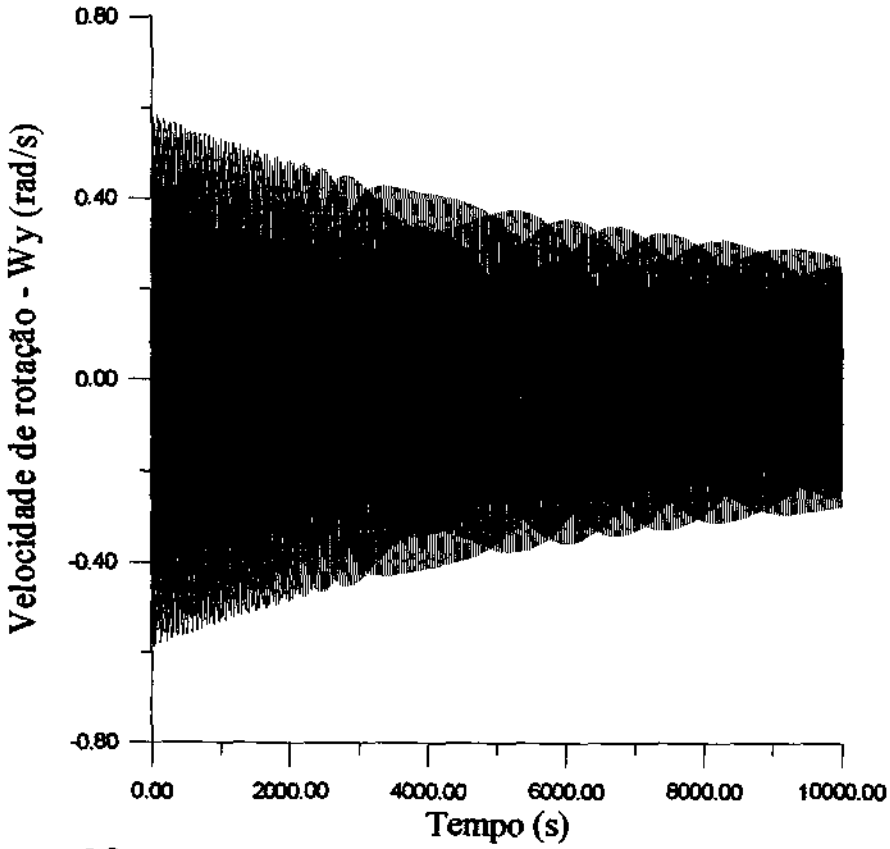

Figura 09 - Comportamento da velocidade de rotação Wy em função do tempo.

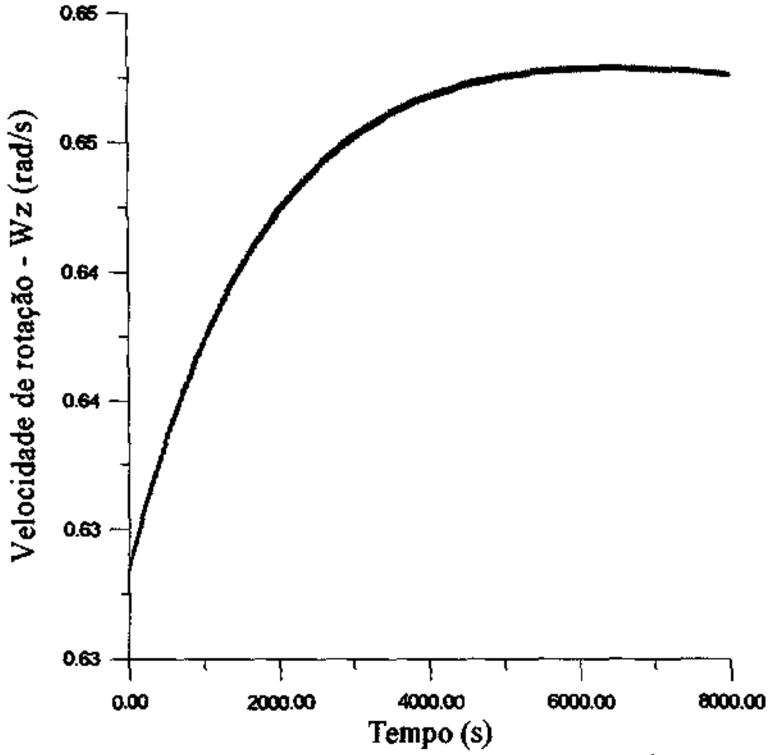

Figura 10 - Comportamento da velocidade de rotação Wz em função do tempo.

Analisando os gráficos das figuras 06, 07 e 08 concluímos que à medida que as velocidades de rotação Wx e Wy diminuem a velocidade de rotação do satélite (Wz) aumenta, ou seja, a velocidade perdida após a atuação de agentes externos é reposta durante o amortecimento do ângulo de nutação.

Com a estabilização dos movimentos do satélite a velocidade de rotação retorna a um valor constante.

4) CONCLUSÃO:

Os resultados da simulação mostram que a atuação do amortecedor de nutação tipo massa-mola atende às especificações estabelecidas para a vida útil de um satélite.

A atuação desse componente faz com que os movimentos indesejados, decorrentes de perturbações externas, desapareçam num intervalo de tempo suficiente para o controle da missão.

Sendo essencial o total controle dos movimentos de um satélite para que se possa orientá-lo segundo os objetivos da missão, a utilização de um amortecedor de nutação é um fator de essencial importância no projeto de veículos espaciais, já que perturbações externas são fatores a se considerar durante toda a missão espacial.

5) APÊNDICE:

PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA SIMULAÇÃO DA ATUAÇÃO DE UM AMORTECEDOR TIPO MASSA-MOLA

```
      PROGRAM NUT-1

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

      EXTERNAL XDOT
      DIMENSION X(5),RAC1(5),RAC2(5),W(70)


      REAL*8 IXY,IXZ,IYZ,IX,IY,IZ,MD,IXYS,IXZS,IYZS,IXS,IYS,IZS,KS,
     *       NUTANG

      COMMON/CALF1/C1,C2,C3,CMX,CXX,CYX,CZX,CMY,CXY,CYY,CZY,CMZ,
     * CXZ,CYZ,CZZ,IXS,IYS,IZS,IXYS,IXZS,IYZS,MD,IX,IY,IZ,IXY,
     * IXZ,IYZ,HX,HY,HZ,TETA,FI,WX,WY,WZ,CTE,PI,X0,Y0,Z0,KS,CS



      WRITE(6,*)'INPUT DATA (T/P)?'
      READ(5,9001)G
 001  FORMAT(1A1)


      CHAMADAS DOS DADOS DE ENTRADA EM JOBS EXTERNOS

      WRITE(6,*)'L,Lp,WX,WY,WZ?'
      READ(5,*)X(1),X(2),X(3),X(4),X(5)
      WRITE(6,*)'STEP,NP?'
      READ(5,*)STEP,NP

      TIME=NP*STEP
      NPLOT=TIME/20
      IX=2.7
      IY=2.7
      IZ=4.7
      KS=0.15
      CS=0.04


      N=5
      T=0.
      PI=3.14159265
      CTE=PI/180.

      DO J=3,5
       X(J)=X(J)*PI/30
      ENDDO
```

```
      PRINT*,'TIME=',TIME
      ACCURACY

      DO 10 J=1,5
        PARA PASSO VARIAVEL USAR RAC1 E RAC2 DIFERENTE DE ZERO,
        COMO ABAIXO
        RAC1(J)=1.E-8
        RAC2(J)=1.E-8
 10   CONTINUE
       JJ=0.

      T=0.
      TF=0.
      JFLAG=1
      JCONT=0
      DT=STEP
      OPEN(UNIT=6,RECL=1000,FILE='NUT.DAT',STATUS='UNKNOWN')
      DO WHILE(T.LE.TIME)

      MD=0.05
      TETA=PI/2
      FI=0
      X0=0.2
      Y0=0.2
      Z0=0.6
      C1=DSIN(TETA)*DCOS(FI)
      C2=DSIN(TETA)*DSIN(FI)
      C3=DCOS(TETA)
      CMX=(C3*Y0 - C2*Z0)*MD
      CXX=2*MD*(Z0*C3 + X(1)*C3**2 + C2*Y0 + X(1)*C2**2)
      CYX=-2*MD*C1*(C2*X(1) + Y0)
      CZX=-2*MD*C1*(C3*X(1) + Z0)
      CMY=(C1*Z0 - C3*X0)*MD
      CXY=-2*MD*C2*(X(1)*C1 + X0)
      CYY=2*MD*(C3*Z0 + X(1)*C3**2 + C1*X0 + X(1)*C1**2)
      CZY=2*MD*C2*(C3*X(1) + Z0)
      CMZ=(C2*X0 - C1*Y0)*MD
      CXZ=-2*MD*C3*(C1*X(1) + X0)
      CYZ=-2*MD*C3*(C2*X(1) +Y0)
      CZZ=2*MD*(C2*Y0 + X(1)*C2**2 + C1*X0 + X(1)*C1**2)
      IXS=MD*((Z0 + X(1)*C3)**2 + (Y0 + X(1)*C2)**2) + IX
      IYS=MD*((X0 + X(1)*C1)**2 + (Z0 + X(1)*C3)**2) + IY
      IZS=MD*((Y0 + X(1)*C2)**2 + (X0 + X(1)*C1)**2) + IZ
      IXYS=-IXY - MD*(X0 + X(1)*C1)*(Y0 + X(1)*C2)
      IXZS=-IXZ - MD*(X0 + X(1)*C1)*(Z0 + X(1)*C3)
      IYXS=-IYZ - MD*(Y0 + X(1)*C2)*(Z0 + X(1)*C3)
```

```
ANGULAR MOMENTUM VECTOR COMPONENTS:

IF(JCONT.EQ.0) THEN

HX = IXS*X(3) + IXYS*X(4) + IXZS*X(5) + CMX*X(2)
HY = IXYS*X(3) + IYS*X(4) + IYZS*X(5) + CMY*X(2)
HZ = IXZS*X(3) + IYZS*X(4) + IZS*X(5) + CMZ*X(2)



SQ=DSQRT(HX**2 + HY**2)

NUTATION ANGLE NUTANG
NUTANG = (DATAN2(SQ,HZ))/CTE
WT=DSQRT(X(3)**2 + X(4)**2)

WRITE(6,1010)T,NUTANG,WT,X(1),X(2),X(3),X(4),X(5)

JCONT=JCONT+1
ELSE
JCONT=JCONT+1
ENDIF
IF(JCONT.EQ.20)JCONT=0



*************************************************************
*
      *
*  CALLING    INTEG: IT INTEGRATES THE EQUATION OF MOTION BY
*  USING RUNGE KUTTA 78
          *
*
      *
* ************************************************************


CALL RKF78(XDOT,N,X,T,TF,RAC1,RAC2,JFLAG,W,DT)


TF=TF+STEP


ENDDO

CLOSE (6)

010  FORMAT (9(1X,1PE15.8))

STOP
```

```
      END



*************************************************************
*
      *
*   SUBROUTINE FOR THE  DERIVATIVE EQUATIONS
      *
*
      *
*************************************************************

      SUBROUTINE XDOT(T,X,XPTO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 X(5),XPTO(5),F(5,6)

      REAL*8 IXY,IXZ,IYZ,IX,IY,IZ,MD,IXYS,IXZS,IYZS,IXS,IYS,IZS,KS

      COMMON/CALF1/C1,C2,C3,CMX,CXX,CYX,CZX,CMY,CXY,CYY,CZY,CMZ,
     *CXZ,CYZ,CZZ,IXS,IYS,IZS,IXYS,IXZS,IYZS,MD,IX,IY,IZ,IXY,
     *IXZ,IYZ,HX,HY,HZ,TETA,FI,WX,WY,WZ,CTE,PI,X0,Y0,Z0,KS,CS


      DATA PREC/1.E-6/

       PRINT*,'IXY=',IXY,'IXZ=',IXZ,'IYZ=',IYZ

      INERTIA MATRIX

      F(1,1)=1.
      F(1,2)=0
      F(1,3)=0
      F(1,4)=0
      F(1,5)=0

      F(2,1)=0
      F(2,2)=1
      F(2,3)=(Y0*C3 - Z0*C2)*MD
      F(2,4)=(Z0*C1 - X0*C3)*MD
      F(2,5)=(X0*C2 - Y0*C1)*MD

      F(3,1)=0
      F(3,2)=CMX
      F(3,3)=IXS
      F(3,4)=IXYS
      F(3,5)=IXZS

      F(4,1)=0
      F(4,2)=CMY
```

```
 F(4,3)=IXYS
 F(4,4)=IYS
 F(4,5)=IYZS

 F(5,1)=0
 F(5,2)=CMZ
 F(5,3)=IXZS
 F(5,4)=IYZS
 F(5,5)=IZS



  IF(X(2).LT.0)CIS=-CIS

 F(1,6)=X(2)
 F(2,6)=-(CS/MD)*X(2)-X(1)*(KS/MD+2*X(4)*X(5)*C2*C3
*-(X(5)*DSIN(TETA))**2-(X(4)*C3)**2+2*X(3)*X(5)*C1*C3
*+2*X(3)*X(4)*C1*C2-(X(3)*C3)**2-(X(3)*C2)**2
*-X(4)*X(5)*(Y0*C3+Z0*C2)-X(3)*X(5)*(Z0*C1+X0*C3)
*-X(3)*X(4)*(Y0*C1+X0*C2)+(X(4)**2)*(Z0*C3+X0*C1)
*+(X(5)**2)*(Y0*C2+X0*C1)+(X(3)**2)*(Z0*C3+Y0*C2)
*-(X(4)*C1)**2)

 F(3,6)=(X(3)*IXZS+X(4)*IYZS-X(5)*IZS)*X(4)
*        +(X(4)*IYS-X(3)*IXYS-X(5)*IYZS)*X(5)
*        -(czx*X(5)+cyx*X(4)+cxx*X(3))*X(2)

 F(4,6)=(IZS*X(5)-IXZS*X(3)-IYZS*X(4))*X(3)
*        +(IXZS*X(5)+IXYS*X(4)-IXS*X(3))*X(5)
*        -(czy*X(5)+cyy*X(4)+cxy*X(3))*X(2)

 F(5,6)=(IXS*X(3)-IXYS*X(4)-IXZS*X(5))*X(4)
*        +(IXYS*X(3)-IYS*X(4)+IYZS*X(5))*X(3)
*        -(czz*X(5)+cyz*X(4)+cxz*X(3))*X(2)




 CALL SIMUL(5,F,XPTO(1),PREC,1,5,DETER)
  PRINT*,'I AM COMING FROM SIMUL',XPTO
 DERIVATIVES XPTO (XPTO(I),I=2,5 COME FROM SIMUL)


  PRINT*,'DETER=',DETER
 IF (DETER.EQ.0) THEN
```

```
      WRITE(6,888)
 888 FORMAT(1A1, 'MATRIZ SINGULAR')
     STOP
     ENDIF

     RETURN
     END

-----------------------------------------------------------------
     SUBROUTINE SIMUL(N,A,X,EPS,INDIC,NRC,DETER)

-----------------------------------------------------------------
     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

     DOUBLE PRECISION A

     DIMENSION IROW(50),JCOL(50),JORD(50),Y(50)

     DIMENSION A(NRC,NRC),X(N)

     INDIC < 0  =>  REDEFINE A COM A SUA INVERSA
     INDIC = 0  =>  RESOLVE SISTEMA LINEAR Ax = b(b=ULT.COL. DE A)
                    E REDEFFINE A COM A SUA INVERSA
     INDIC > 0  =>  RESOLVE SISTEMA LINEAR


     MAX = N
     IF(INDIC.GE.0) MAX=N+1

     IS N LARGER THAN 50?

     IF(N.LE.50) GO TO 5

        WRITE(6,200)
)0      FORMAT('1N TOO BIG')
        DETER = 0.0
```

```
    RETURN

 BEGIN ELIMINATION PROCEDURE

 DETER = 1.0
 DO 18 K=1,N
    KM1 = K-1

    SEARCH FOR THE PIVOT ELEMENT

    PIVOT = 0.0
    DO 11 I=1,N
    DO 11 J=1,N

          SCAN IROW AND JCOL FOR INVALID PIVOT SUBSCRIPTS

          IF(K.EQ.1) GO TO 9

          DO 8 ISCAN=1,KM1
             DO 8 JSCAN=1,KM1

                IF(I.EQ.IROW(ISCAN)) GO TO 11
                IF(J.EQ.JCOL(JSCAN)) GO TO 11
8         CONTINUE
```

```
9             IF(ABS(A(I,J)).LE.ABS(PIVOT)) GO TO 11
                 PIVOT = A(I,J)
                 IROW(K) = I
                 JCOL(K) = J
11     CONTINUE

C      INSURE THAT SELECTED PIVOT IS LARGER THAN EPS

       IF(ABS(PIVOT).GT.EPS) GO TO 13

          DETER = 0.0
          RETURN

C      UPDATE THE DETERMINANT VALUE

3      IROWK = IROW(K)
       JCOLK = JCOL(K)
       DETER = DETER*PIVOT

C      NORMALIZE PIVOT ROW ELEMENTS

       DO 14 J=1,MAX
          A(IROWK,J) = A(IROWK,J)/PIVOT
       CONTINUE
```

```
    CARRY OUT ELIMINATION AND DEVELOP INVERSE

    A(IROWK,JCOLK)=1.0/PIVOT

    DO 18 I=1,N
       AIJCK = A(I,JCOLK)

       IF(I.EQ.IROWK) GO TO 18
       A(I,JCOLK) = -AIJCK/PIVOT

       DO 17 J=1,MAX
          IF(J.NE.JCOLK) A(I,J) = A(I,J)-AIJCK*A(IROWK,J)
7      CONTINUE
8   CONTINUE

    ORDER SOLUTION VALUES (IF ANY) AND CREATE JORD ARRAY

    DO 20 I=1,N
       IROWI       = IROW(I)
       JCOLI       = JCOL(I)
       JORD(IROWI) = JCOLI
       IF(INDIC.GE.0) X(JCOLI) = A(IROWI,MAX)

0   CONTINUE

    ADJUST SIGN OF DETERMINANT

    INTCH = 0
```

```
      NM1    = N-1

      DO 22 I=1,NM1
         IP1 = I+1
         DO 22 J=IP1,N
            IF(JORD(J).GE.JORD(I)) GO TO 22
            JTEMP    = JORD(J)
            JORD(J)  = JORD(I)
            JORD(I)  = JTEMP
            INTCH    = INTCH+1
2     CONTINUE

      IF(INTCH/2*2.NE.INTCH) DETER = -DETER

      IF INDIC IS POSITIVE, RETURN WITH RESULTS

         IF(INDIC.LE.0) GO TO 26
         RETURN

      IF INDIC IS NEGATIVE OR ZERO, UNSCRAMBLE THE INVERSE

         FIRST BY ROWS

      DO 28 J=1,N
         DO 27 I=1,N
            IROWI     = IROW(I)
```

```
            JCOLI    = JCOL(I)
            Y(JCOLI) = A(IROWI,J)
7         CONTINUE
          DO 28 I=1,N
            A(I,J) = Y(I)
3       CONTINUE

          THEN BY COLUMNS

        DO 30 I=1,N
          DO 29 J=1,N
            IROWJ    = IROW(J)
            JCOLJ    = JCOL(J)
            Y(IROWJ) = A(I,JCOLJ)
          CONTINUE
          DO 30 J=1,N
            A(I,J) = Y(J)
        CONTINUE
        RETURN
        END
```

```
      SUBROUTINE RKF78(F,NEQN,X,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,
     *                 WORK,DT)
```

PURPOSE:

THE SUBROUTINE RKF78 INTEGRATES A SYSTEM OF NEQN FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE RUNGE-KUTTA METHOD OF ORDER 7(8) WITH AUTOMATIC STEPSIZE CONTROL, AND USING THE FEHLBERG COEFFICIENTS.

INPUT:

F — SUBROUTINE WHICH PROVIDES THE DERIVATIVE VALUES DX, GIVEN THE VALUES OF THE DEPENDENT VARIABLE X AND THE INDEPENDENT VARIABLE T. THE SUBROUTINE F SHOULD BE SUPPLIED BY THE USER IN THE FORM GIVEN BELOW:

SUBROUTINE F(T,X,DX).

SINCE F IS AN ARGUMENT IN THE CALL STATEMENT OF RKF78, THE DECLARATION:
"EXTERNAL F"
IS COMPULSORY IN THE MAIN PROGRAM.

NEQN — NUMBER OF EQUATIONS TO BE INTEGRATED.

X — INITIAL DEPENDENT VARIABLE ARRAY DIMENSIONED TO NEQN WORDS.

T — INITIAL VALUE OF THE INDEPENDENT VARIABLE.

TOUT — NEXT VALUE OF T FOR WHICH THE OUTPUT IS DESIRED.

RELERR — ARRAY OF RELATIVE ERROR TOLERANCES DIMENSIONED TO NEQN WORDS.

ABSERR — ARRAY OF ABSOLUTE ERROR TOLERANCES DIMENSIONED TO NEQN WORDS.
THE ESTIMATED LOCAL TRUNCATION ERROR IS KEPT LESS THAN
(RELERR(I)*(X(I)+WORK(I))/2 + ABSERR(I))
AT EACH STEP OF THE INTEGRATION
(I = 1,NEQN). IF ABSERR = RELERR = 0.0,

NO STEPSIZE ADJUSTMENTS ARE MADE AND THE SOLUTION IS OBTAINED BY A FIXED STEPSIZE

```
              EIGHTH ORDER METHOD.
        IFLAG CONTROL PARAMETER TO INITIALIZE THE
              ROUTINE: TO BE SET TO 1 ON THE FIRST CALL
              OF EACH NEW PROBLEM.
        WORK  REAL ARRAY DIMENSIONED TO AT LEAST
              14*NEQN WORDS. ANY ARRAY WHOSE CONTENTS
              ARE EXPENDABLE MAY BE USED.
        DT    INITIAL STEP SIZE (LESS THAN OR EQUAL TO
              THE DIFFERENCE BETWEEN T AND THE NEXT
              VALUE OF T, I.E. TOUT, FOR WHICH OUTPUT
              IS DESIRED).

        COMMON/COEF78/
        A0,... FEHLBERG COEFFICIENTS A0,...,A12, B10,...
              B1211, CH0,...,CH12, E0,...,E12.
         B,... STEPSIZE CONTROL FACTORS, AND NECESSARY
              CONSTANTS USEFUL TO CALCULATE THEM.
OUTPUT:
        X     DEPENDENT VARIABLE ARRAY AT T.
        T     TOUT IF IFLAG = 2. NORMAL RETURN.
              LAST VALUE (DIFFERENT FROM TOUT) ATTAINED
              BY THE INDEPENDENT VARIABLE IF IFLAG # 2.
              ABNORMAL RETURN.
        IFLAG FLAG FOR THE TYPE OF RETURN:
              = 2: NORMAL RETURN , T REACHED TOUT. FOR
                   CONTINUATION, DEFINE A NEW TOUT AND
                   CALL THE ROUTINE AGAIN.

              = 7: MORE THAN MAXREJ REJECTED STEPS IN A
                   ROW. IF THIS OCCURS ON THE FIRST
                   STEP, REDUCE DT AND CALL THE ROUTINE
                   AGAIN. IF THIS OCCURS IN THE MIDDLE
                   OF THE INTEGRATION, INCREASE RELERR
                   AND ABSERR TO CONTINUE THE
                   INTEGRATION.
              = 8: THE PROGRAM ATTEMPTED TO USE TOO
                   SMALL A STEP. INCREASE DT FOR
                   CONTINUATION.
        DT    MOST RECENT STEP SIZE.

        COMMON/CTRK78/
          N... SOME CONSTANT VALUES USEFUL IN SUBSEQUENT
              CALLS OF THE SUBROUTINE.

SUBCALLS:
        RK78CO.
AUTHORS:
        RICHARD E.MCKENZIE(UNIV. OF TEXAS, U.S.A)
                          1976               VERSION 1.0
```

KONDAPALLI R. RAO; HELIO K. KUGA
OCTOBER/85 VERSION 2.0

REF.:

KONDAPALLI R. RAO : A REVIEW ON NUMERICAL METHODS FOR INITIAL VALUE PROBLEMS (INPE-3011-RPI/088).
KONDAPALLI R. RAO ; HELIO K. KUGA : MANUAL DE USO DE UM CONJUNTO DE INTEGRADORES NUMERICOS PARA PROBLEMAS DE CONDICOES INICIAIS. (INPE-3830-RPI/154).

REMARKS:

THE 1976 VERSION OF RICHARD E. MCKENZIE WAS MODIFIED IN TERMS OF NUMBER OF PARAMETERS AND DIMENSIONS TO FACILITATE THE USER, BY KONDAPALLI R. RAO, INPE, IN SEPTEMBER 1984. ALSO AN ERROR IN THE VERSION OF MCKENZIE WAS CORRECTED BY HELIO K. KUGA AND KONDAPALLI R. RAO IN OCTOBER 1985. THE SINGLE PRECISION VERSION OF THE PROGRAM WAS TRANSFORMED INTO DOUBLE PRECISION BY HELIO K. KUGA IN JULY 1987.

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

      DIMENSION  X(*),RELERR(*),ABSERR(*),WORK(*)

      COMMON/COEF78/A0,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,
     *              A12,B10,B20,B21,B30,B31,B32,B40,B41,B42,
     1              B43,B50,B51,B52,B53,B54,B60,B61,B62,B63,
     2              B64,B65,B70,B71,B72,B73,B74,B75,B76,B80,
     3              B81,B82,B83,B84,B85,B86,B87,B90,B91,B92,
     4              B93,B94,B95,B96,B97,B98,B100,B101,B102,
     5              B103,B104,B105,B106,B107,B108,B109,B110,
     6              B111,B112,B113,B114,B115,B116,B117,B118,
     7              B119,B1110,B120,B121,B122,B123,B124,
     8              B125,B126,B127,B128,B129,B1210,B1211,
     9              CH0,CH1,CH2,CH3,CH4,CH5,CH6,CH7,CH8,CH9,
     A              CH10,CH11,CH12,E0,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,
     B              E8,E9,E10,E11,E12,B,BLO,BUP,REMIN,DTINC,
     C              DTDEC,MAXREJ
      COMMON/CTRK78/N,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9,N10,N11,
     1              N12,N13

      LOGICAL DTFAIL,DTFIX
```

```
   SET FEHLBERG COEFFICIENTS AND THE VALUES OF SOME
   CONSTANTS  ON THE FIRST CALL


   IF (IFLAG.NE.1) GO TO 5
   CALL RK78CO
   N = NEQN
   N1 = N
   N2 = 2*N
   N3 = 3*N
   N4 = 4*N
   N5 = 5*N
   N6 = 6*N
   N7 = 7*N
   N8 = 8*N
   N9 = 9*N
   N10 = 10*N
   N11 = 11*N
   N12 = 12*N
   N13 = 13*N
 5 NREJT = 0
   NSTP = 0


   SET FLAG IF FIXED STEP MODE IS DESIRED


   DTFIX = .FALSE.
   DO 10 NEQ = 1,N
      IF(ABSERR(NEQ).EQ.0.D0.AND.RELERR(NEQ).EQ.0.D0)
  *      DTFIX = .TRUE.
10 CONTINUE
   DTOLD = DT
20 DTFAIL = .FALSE.
   NREJ = 0


   RESET STEP SIZE IF THIS WILL PUT T GREATER THAN TOUT


   DELT = TOUT-T
   IF (ABS(DT).LT.ABS(DELT)) GO TO 25
   DT = DELT
   GO TO 30
25 IF (ABS(DT+DT).LT.ABS(DELT)) GO TO 30
   DT = DELT/2.D0
```

```
   IF REQUIRED STEP IS TOO SMALL, EXTRAPOLATE AND RETURN

30 IF(ABS(DT).LT.1.D-15*ABS(T)) GO TO 160

   FIRST EVALUATION

   T0 = T
   DO 35 NEQ = 1,N
      WORK(NEQ) = X(NEQ)
35 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N1+1))

   SECOND EVALUATION

40 T = T0+A1*DT
   D0 = B10*DT
   DO 45 NEQ = 1,N
      X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+WORK(NEQ)
45 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N2+1))

   THIRD EVALUATION

   T = T0+A2*DT
   D0 = B20*DT
   D1 = B21*DT
   DO 50 NEQ = 1,N
      X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+WORK(NEQ)
50 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N3+1))
```

```
      FOURTH EVALUATION



      T = T0+A3*DT
      D0 = B30*DT
      D1 = B31*DT
      D2 = B32*DT
      DO 55 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1             WORK(NEQ)
   55 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N4+1))


      FIFTH EVALUATION



      T = T0+A4*DT
      D0 = B40*DT
      D1 = B41*DT
      D2 = B42*DT
      D3 = B43*DT
      DO 60 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1             D3*WORK(N4+NEQ)+WORK(NEQ)
   60 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N5+1))


      SIXTH EVALUATION



      T = T0+A5*DT
      D0 = B50*DT
      D1 = B51*DT
      D2 = B52*DT
      D3 = B53*DT
      D4 = B54*DT
      DO 65 NEQ = 1,N
```

```
      X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
  1              D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+WORK(NEQ)
65 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N6+1))


   SEVENTH EVALUATION


   T = T0+A6*DT
   D0 = B60*DT
   D1 = B61*DT
   D2 = B62*DT
   D3 = B63*DT
   D4 = B64*DT
   D5 = B65*DT
   DO 70 NEQ = 1,N
      X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
  1              D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
  2              WORK(NEQ)
70 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N7+1))


   EIGHTH EVALUATION


   T = T0+A7*DT
   D0 = B70*DT
   D1 = B71*DT
   D2 = B72*DT
   D3 = B73*DT
   D4 = B74*DT
   D5 = B75*DT
   D6 = B76*DT
   DO 75 NEQ = 1,N
      X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
  1              D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
  2              D6*WORK(N7+NEQ)+WORK(NEQ)
75 CONTINUE
   CALL F(T,X,WORK(N8+1))
```

```
      NINTH EVALUATION



      T = T0+A8*DT
      D0 = B80*DT
      D1 = B81*DT
      D2 = B82*DT
      D3 = B83*DT
      D4 = B84*DT
      D5 = B85*DT
      D6 = B86*DT
      D7 = B87*DT
      DO 80 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+WORK(NEQ)
   80 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N9+1))


      TENTH EVALUATION



      T = T0+A9*DT
      D0 = B90*DT
      D1 = B91*DT
      D2 = B92*DT
      D3 = B93*DT
      D4 = B94*DT
      D5 = B95*DT
      D6 = B96*DT
      D7 = B97*DT
      D8 = B98*DT
      DO 85 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
     3            WORK(NEQ)
   85 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N10+1))


      ELEVENTH EVALUATION
```

```
      T = T0+A10*DT
      D0 = B100*DT
      D1 = B101*DT
      D2 = B102*DT
      D3 = B103*DT
      D4 = B104*DT
      D5 = B105*DT
      D6 = B106*DT
      D7 = B107*DT
      D8 = B108*DT
      D9 = B109*DT
      DO 90 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
     3            D9*WORK(N10+NEQ)+WORK(NEQ)
   90 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N11+1))


      TWELFTH EVALUATION


      T = T0+A11*DT
      D0 = B110*DT
      D1 = B111*DT
      D2 = B112*DT
      D3 = B113*DT
      D4 = B114*DT
      D5 = B115*DT
      D6 = B116*DT
      D7 = B117*DT
      D8 = B118*DT
      D9 = B119*DT
      D10 = B1110*DT
      DO 95 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
     3            D9*WORK(N10+NEQ)+D10*WORK(N11+NEQ)+WORK(NEQ)
   95 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N12+1))


      THIRTEENTH EVALUATION
```

```
      T = T0+A12*DT
      D0 = B120*DT
      D1 = B121*DT
      D2 = B122*DT
      D3 = B123*DT
      D4 = B124*DT
      D5 = B125*DT
      D6 = B126*DT
      D7 = B127*DT
      D8 = B128*DT
      D9 = B129*DT
       D10 = B1210*DT
      D11 = B1211*DT
      DO 100 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
     3            D9*WORK(N10+NEQ)+D10*WORK(N11+NEQ)+D11*WORK(N12+N
Q)+
     4            WORK(NEQ)
  100 CONTINUE
      CALL F(T,X,WORK(N13+1))



      COMPUTE STATE AT T + DT



      D0 = CH0*DT
      D1 = CH1*DT
      D2 = CH2*DT
      D3 = CH3*DT
      D4 = CH4*DT
      D5 = CH5*DT
      D6 = CH6*DT
      D7 = CH7*DT
      D8 = CH8*DT
      D9 = CH9*DT
      D10 = CH10*DT
      D11 = CH11*DT
      D12 = CH12*DT
      DO 105 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1            D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2            D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
```

```
    3              D9*WORK(N10+NEQ)+D10*WORK(N11+NEQ)+D11*WORK(N12+N
EQ)+
    4              D12*WORK(N13+NEQ)+WORK(NEQ)
  105 CONTINUE



      IF FIXED STEP SIZE IS DESIRED GO TO 140



      IF (DTFIX) GO TO 140



      COMPUTE MAX LOCAL TRUNCATION ERROR



      RTE = 0.D0
      D0 = E0*DT
      D1 = E1*DT
      D2 = E2*DT
      D3 = E3*DT
      D4 = E4*DT
      D5 = E5*DT
      D6 = E6*DT
      D7 = E7*DT
      D8 = E8*DT
      D9 = E9*DT
      D10 = E10*DT
      D11 = E11*DT
      D12 = E12*DT
      DO 110 NEQ = 1,N
         RER = MAX1(RELERR(NEQ),1.D-16+REMIN)
         SCALE = RER/2
         TE = ABS(D0*WORK(N1+NEQ)+D1*WORK(N2+NEQ)+D2*WORK(N3+NEQ)+
     1        D3*WORK(N4+NEQ)+D4*WORK(N5+NEQ)+D5*WORK(N6+NEQ)+
     2        D6*WORK(N7+NEQ)+D7*WORK(N8+NEQ)+D8*WORK(N9+NEQ)+
     3        D9*WORK(N10+NEQ)+D10*WORK(N11+NEQ)+D11*WORK(N12+NEQ)+
     4        D12*WORK(N13+NEQ))
         XMAG = (ABS(X(NEQ))+ABS(WORK(NEQ)))*SCALE+ABSERR(NEQ)+
     1           1.0D-15
         RTE = MAX1(RTE,TE/XMAG)
  110 CONTINUE
      IF(RTE.LT.1.D0) GO TO 140
```

```
C     REJECT THIS STEP

C


      DTFAIL = .TRUE.
      NREJ = NREJ+1
      NREJT = NREJT+1
      IF (NREJ.LT.MAXREJ) GO TO 130
      DO 120 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = WORK(NEQ)
  120 CONTINUE
      T = T0
      IFLAG = 7
      RETURN

  130 PCT = DTDEC
      IF (RTE.LT.BUP) PCT = B/RTE**.125D0
      DT = PCT*DT
      DTOLD = DT
      GO TO 40



      THIS STEP IS ACCEPTABLE - EIGHTH ORDER EVALUATION.




  140 T = T0+DT
      NSTP = NSTP+1
      IF (ABS(TOUT-T).GT.1.D-15) GO TO 150
      DT = DTOLD
      IFLAG = 2
      RETURN

  150 IF (DTFIX) GO TO 20
      PCT = DTINC
      IF (RTE.GT.BLO) PCT = B/RTE**.125D0
      IF (DTFAIL) PCT = DMIN1(PCT,1.D0)
      DT = DT*PCT
      DTOLD = DT
      GO TO 20



      CHECK FOR TOO SMALL A STEP SIZE
```

```
  160 IF (ABS(DELT).GT.ABS(DT)) GO TO 180
C
C     STRAIGHT LINE EXTRAPOLATION (EULER'S METHOD OF ORDER 1)
C

      CALL F(T,X,WORK(N1+1))
      DO 170 NEQ = 1,N
         X(NEQ) = DT*WORK(N1+NEQ)+X(NEQ)
  170 CONTINUE
      T = T+DT
      DT = DTOLD
      IFLAG = 2
      RETURN


      ATTEMPTED TO USE TOO SMALL A STEP SIZE


  180 IFLAG = 8
      RETURN
      END

      SUBROUTINE RK78CO
```

PURPOSE:

THE SUBROUTINE RK78CO SETS UP FEHLBERG COEFFICIENTS FOR THE NUMERICAL INTEGRATION ROUTINE RKF78.

INPUT:

NONE.

OUTPUT:

COMMON/COEF78/

A0,...	FEHLBERG COEFFICIENTS A0,...,A12, B10,... B1211,CH0,...,CH12, E0,...,E12.
B,...	STEPSIZE CONTROL FACTORS, AND NECESSARY CONSTANTS USEFUL TO CALCULATE THEM.

SUBCALLS:

NONE.

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

      COMMON/COEF78/A0,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,
     *              A12,B10,B20,B21,B30,B31,B32,B40,B41,B42,
     1              B43,B50,B51,B52,B53,B54,B60,B61,B62,B63,
     2              B64,B65,B70,B71,B72,B73,B74,B75,B76,B80,
     3              B81,B82,B83,B84,B85,B86,B87,B90,B91,B92,
     4              B93,B94,B95,B96,B97,B98,B100,B101,B102,
     5              B103,B104,B105,B106,B107,B108,B109,B110,
     6              B111,B112,B113,B114,B115,B116,B117,B118,
     7              B119,B1110,B120,B121,B122,B123,B124,
     8              B125,B126,B127,B128,B129,B1210,B1211,
     9              CH0,CH1,CH2,CH3,CH4,CH5,CH6,CH7,CH8,CH9,
     A              CH10,CH11,CH12,E0,E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,
     B              E8,E9,E10,E11,E12,B,BLO,BUP,REMIN,DTINC,
     C              DTDEC,MAXREJ


      MAXREJ = 10
      DTINC = 20.D0
      DTDEC = 0.025D0
      REMIN = 3.0D-15
      B = 0.85D0



      SET COEFFICIENTS



      A0 = 0.D0
      A1 = 2.D0/27.D0
      A2 = 1.D0/9.D0
      A3 = 1.D0/6.D0
      A4 = 5.D0/12.D0
      A5 = 1.D0/2.D0
      A6 = 5.D0/6.D0
      A7 = 1.D0/6.D0
      A8 = 2.D0/3.D0
      A9 = 1.D0/3.D0
      A10 = 1.D0
      A11 = 0.D0
      A12 = 1.D0

      B10 = 2.D0/27.D0
      B20 = 1.D0/36.D0
      B21 = 1.D0/12.D0
```

```
B30 = 1.D0/24.D0
B31 = 0.D0
B32 = 1.D0/8.D0
B40 = 5.D0/12.D0
B41 = 0.D0
B42 = -25.D0/16.D0
B43 = 25.D0/16.D0
B50 = 1.D0/20.D0
B51 = 0.D0
B52 = 0.D0
B53 = 1.D0/4.D0
B54 = 1.D0/5.D0
B60 = -25.D0/108.D0
B61 = 0.D0
B62 = 0.D0
B63 = 125.D0/108.D0
B64 = -65.D0/27.D0
B65 = 125.D0/54.D0
B70 = 31.D0/300.D0
B71 = 0.D0
B72 = 0.D0
B73 = 0.D0
B74 = 61.D0/225.D0
B75 = -2.D0/9.D0
B76 = 13.D0/900.D0
B80 = 2.D0
B81 = 0.D0
B82 = 0.D0
B83 = -53.D0/6.D0
B84 = 704.D0/45.D0
B85 = -107.D0/9.D0
B86 = 67.D0/90.D0
B87 = 3.D0
B90 = -91.D0/108.D0
B91 = 0.D0
B92 = 0.D0
B93 = 23.D0/108.D0
B94 = -976.D0/135.D0
B95 = 311.D0/54.D0
B96 = -19.D0/60.D0
B97 = 17.D0/6.D0
B98 = -1.D0/12.D0
B100 = 2383.D0/4100.D0
B101 = 0.D0
B102 = 0.D0
B103 = -341.D0/164.D0
B104 = 4496.D0/1025.D0
B105 = -301.D0/82.D0
B106 = 2133.D0/4100.D0
B107 = 45.D0/82.D0
B108 = 45.D0/164.D0
```

```
B109 = 18.D0/41.D0
B110 = 3.D0/205.D0
B111 = 0.D0
B112 = 0.D0
B113 = 0.D0
B114 = 0.D0
B115 = -6.D0/41.D0
B116 = -3.D0/205.D0
B117 = -3.D0/41.D0
B118 = 3.D0/41.D0
B119 = 6.D0/41.D0
B1110 = 0.D0
B120 = -1777.D0/4100.D0
B121 = 0.D0
B122 = 0.D00
B123 = -341.D0/164.D0
B124 = 4496.D0/1025.D0
B125 = -289.D0/82.D0
B126 = 2193.D0/4100.D0
B127 = 51.D0/82.D0
B128 = 33.D0/164.D0
B129 = 12.D0/41.D0
B1210 = 0.D0
B1211 = 1.D0

CH0 = 0.D0
CH1 = 0.D0
CH2 = 0.D0
CH3 = 0.D0
CH4 = 0.D0
CH5 = 34.D0/105.D0
CH6 = 9.D0/35.D0
CH7 = 9.D0/35.D0
CH8 = 9.D0/280.D0
CH9 = 9.D0/280.D0
CH10 = 0.D0
CH11 = 41.D0/840.D0
CH12 = 41.D0/840.D0

E0 = 41.D0/840.D0
E1 = 0.D0
E2 = 0.D0
E3 = 0.D0
E4 = 0.D0
E5 = 0.D0
E6 = 0.D0
E7 = 0.D0
E8 = 0.D0
E9 = 0.D0
E10 = 41.D0/840.D0
E11 = -41.D0/840.D0
```

```
E12 = -41.D0/840.D0


SET STEP SIZE CONTROL FACTORS



BUP = (B/DTDEC)**8
BLO = (B/DTINC)**8
RETURN
END
```

6)BIBLIOGRAFIA:

• Junkis, J. L. e Kim, Y, Introduction to dynamics and control of flexible structures, AIAA - Education Series, USA, 1.993. ISBN 1-56347-054-3

• Inman, D. J.; Vibration with control measurement and stability, Prentice Hall Ed., USA, 1.989. ISBN 0-13-941642-0.

• Malik, N.K.. ISRO-ISAC-TN-06-77.

• Maia, L.P.M., Mecânica Analítica.

• Boyce, William E. e Diprima, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.