

MFN= 011316
01 SID/SCD
02 INPE - 9f33-PRE/5328
04 ETES
05 MC
06 am
10 Silva, Aurea Aparecida
10 Prado, Antonio Fernando Bertachini de Almeida
12 Avaliação de integradores numéricos para cálculo de trajetórias de
veículos espaciais
14 81-82
18 Anais
40 Pt
41 Pt
42 <E>
53 Seminário de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Pesquisas
Espaciais, 3 (SICINPE 1997)
54 1-2 jul. <1997>
56 São José dos Campos
57 BR
58 DMC
61 <CN>
64 <1997>
68 PRE
76 ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAL
83 O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de
vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos
espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica.
90 b
91 FDB-20020608
92 FDB-MLR

[Imprimir](#)[Fechar](#)**Referência Completa**

Tipo da Referência Conference Proceedings

Chave Secundária INPE-9733-PRE/5328

Chave de Citação SilvaPrad:1997:AVInNu

Autor Silva, Aurea Aparecida
Prado, Antonio Fernando Bertachini de Almeida

Título Avaliação de integradores numéricos para cálculo de trajetórias de veículos espaciais

Nome do Evento Seminário de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 3^o (SICINPE 1997)

Localização do Evento São José dos Campos, -BR

Ano 1997

Páginas 81-82

Título do Livro Anais

Data 1-2 jul. 1997
INPE-9733-PRE/5328

Repositório do Metadado sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.30.05.13.28

Rótulo 11252

Palavras-Chave ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAL, trajetórias, veículos espaciais, avaliação, desempenho.

Resumo O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica.

Ultima Atualização do Metadado 2005:07.30.05.13.28 sid.inpe.br/banon/2001/04.03.15.36 administrator

Site <iris.sid.inpe.br:1905>

Idioma Pt

Tipo Secundário PRE CN

Divulgação <E>

Data Secundária 20020608

Area ETESPACIAL

Grupo DMC

Usuário Avançado jefferson

Grupo de Usuários administrator

Visibilidade shown

Data de Acesso 04 abr. 2006

[atualizar](#)

[Fechar](#)

AVALIAÇÃO DE INTEGRADORES NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE TRAJETÓRIAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Aurea Aparecida da Silva

Aluna da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Bolsa
PIBIC / CNPq

Orientador: Dr. Antonio Fernando Bertachini de A. Prado
Divisão de Material e Controle do INPE
Co-orientador: Dr. Othon Cabo Winter
Departamento de Matemática da FEG - UNESP

O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica. Para isso, foram utilizados os seguintes modelos para dinâmica:

- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos usando regularização de Lamaitre com condições iniciais dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos sem regularização com condições iniciais dadas no sistema rotacional.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema fixo e as condições iniciais também são dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema girante-pulsante e as condições iniciais são dadas no mesmo sistema.

Para estudar tais dinâmicas foram utilizados dois métodos de integradores de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, são eles:

- 1)- método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
- 2)- método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem, com controle automático de passo.

Os testes realizados para essas dinâmicas consistem em variar o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores variam de $EPS=10^{-1}$ até $EPS=10^{-15}$; verificando, para cada valor de EPS, o tempo de integração e a trajetória obtida.

A análise dos resultados desse trabalho é feita de forma a levar em consideração o custo benefício da missão, ou seja, a precisão obtida em comparação com o tempo gasto

[Imprimir](#)[Fechar](#)**Referência Completa**

Tipo da Referência Conference Proceedings

Chave Secundária INPE-9733-PRE/5328

Chave de Citação SilvaPrad:1997:AvInNu

Autor(es) Silva, Aurea Aparecida
Prado, Antonio Fernando Bertachini de Almeida

Título Avaliação de integradores numéricos para cálculo de trajetórias de veículos espaciais

Nome do Evento Seminário de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,3 (SICINPE 1997)

Localização do Evento São José dos Campos, BR

Ano 1997

Páginas 81-82

Título do Livro Anais

Data 1-2 jul. 1997

Repositório do Metadado sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.30.05.13.28

Rótulo 11252

Palavras-Chave ENGENHARIA E TECNOLOGIA ESPACIAL, trajetórias, veículos espaciais, avaliação, desempenho.

Resumo O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica.

Ultima Atualização do Metadado 2005:07.30.05.13.28 sid.inpe.br/banon/2001/04.03.15.36 administrator

Site <iris.sid.inpe.br:1905>

Idioma Pt

Tipo Secundário PRE CN

Divulgação <E>

Data Secundária 20020608

Area ETES

Grupo(s) DMC

Usuário Avançado jefferson

Grupo de Usuários administrator

Visibilidade shown

Data de Acesso 11 jan. 2006

[atualizar](#)

[Fechar](#)

RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA



INPE - INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS -
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP

AVALIAÇÃO DE INTEGRADORES NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE TRAJETÓRIAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS

ORIENTADORES: ANTÔNIO F. BERTACHINI DE A. PRADO
OTHON CABO WINTER

BOLSISTA: AUREA APARECIDA SILVA
ALUNA DA FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ
- UNESP -

BOLSA PIBIC / CNPq

DATA: 20/06/97

ÍNDICE

Capítulo I - Introdução	pág. 1
Capítulo II - Resolução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias	pág. 2
Capítulo III - O Problema de Dois Corpos	pág. 12
Capítulo IV - O Problema de Três Corpos	pág. 19
Capítulo V - Regularização	pág. 28
Capítulo VI - Resultados e Conclusões	pág. 32
Referências	pág. 60

- CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Neste trabalho são feitos vários testes com rotinas computacionais que possibilitam o cálculo de trajetórias de veículos espaciais. São estudados diferentes modelos de integradores numéricos para calcular numericamente essas trajetórias. Numa primeira fase são testadas quatro diferentes dinâmicas com a utilização de um integrador de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem; e, posteriormente, são testadas as mesmas dinâmicas com um novo integrador usando o método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem.

Os testes realizados para essas dinâmicas consistem em variar o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores variam de $EPS = 10^{-1}$ até $EPS = 10^{-15}$ verificando, para cada valor de EPS, o tempo de integração e a trajetória obtida.

A análise dos resultados desse trabalho é feita através da precisão obtida em comparação com o tempo gasto pelo computador. Para essa análise simulações foram efetuadas com o uso de um microcomputador compatível como o IBM-486. Esse trabalho pretende ser continuado por mais um período de Iniciação Científica, com a inclusão de novos métodos de integração.

2. CRONOGRAMA

O presente trabalho foi iniciado com o estudo de apostilas sobre "Resolução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias". Esse tópico foi estudado a partir da referência 1. Estudei também apostilas básicas de Mecânica Celeste, abordando tópicos como: "O Problema de Dois Corpos", "O Problema de Três Corpos" e "Regularização". Esses tópicos foram estudados a partir das referências 2 e 3. Os capítulos 2, 3, 4 e 5 desse relatório são baseados nessas apostilas. Em seguida, iniciei os testes com as dinâmicas referidas, estudando as rotinas e obtendo os dados necessários para plotar as trajetórias calculadas para diferentes valores de EPS. Por fim, fiz algumas modificações nas rotinas usando um novo integrador e refazendo os testes. Neste último mês preparei o resumo para o 3º SICINPE, terminei os últimos testes e elaborei este relatório.

Pretendo, futuramente, continuar esse trabalho fazendo novos testes com outros integradores a fim de encontrar um conjunto de boas trajetórias com o menor tempo de integração possível.

- CAPÍTULO II - RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1. INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da forma:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

$$x \in [a, b]$$

$$y: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}.$$

Uma equação diferencial ordinária tem apenas uma variável independente. Uma equação diferencial parcial envolve mais que uma variável independente.

Ex.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com } u = u(x, y).$$

Uma solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente que satisfaça a equação.

Ex.:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \text{tem } y(x) = a e^x, \quad a \in \mathfrak{R}, \text{ como solução (família de soluções).}$$

Como uma equação diferencial não possui solução única, uma equação diferencial ordinária de ordem n requer, em geral, n condições adicionais para individualizar uma solução.

Se todos as condições se referem a um mesmo valor de x , o valor inicial x_0 , tem-se o chamado **problema de valor inicial (PVI)**.

Caso as condições correspondam a diversos valores da variável independente, tem-se o chamado **problema de valor de contorno**.

Serão considerados aqui, os métodos para solução de um problema de valor inicial de primeira ordem:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Para resolução numérica tomam-se m subintervalos de $[a, b]$, $m \geq 1$, e faz-se $x_j = x_0 + jh$, onde $h = \frac{b-a}{m}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $x_j \in [a, b]$. Em cada x_j calcula-se uma aproximação y_j para $y(x_j)$. A solução numérica é, portanto, uma função linear por partes, cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j, y_j) :

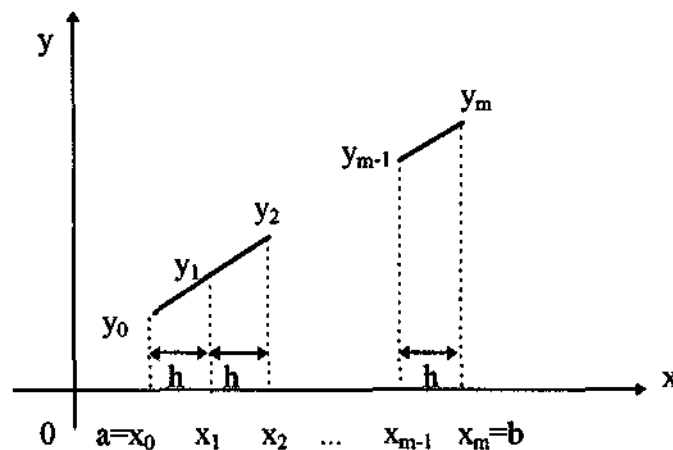


Fig. II.1

Se, para calcular y_j , usamos apenas y_{j-1} , teremos um método de passo simples ou passo um. Por outro lado, se usarmos mais valores, teremos um método de passo múltiplo.

2. MÉTODO DE SÉRIE DE TAYLOR

2.1. Considerações Gerais

Suponha-se que tenha sido computada de algum modo uma aproximação para $y(x)$ para $x_0 \leq x \leq x_n$. Expandindo-se $y(x)$ em torno do ponto $x = x_n$, obtém-se:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n) \frac{(x - x_n)^2}{2!} + \dots + y^{(k)}(x_n) \frac{(x - x_n)^k}{k!} + y^{(k+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_n)^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$x_n \leq \xi_x \leq x.$$

Substituindo-se $x = x_{n+1} = x_n + h$ na expressão anterior e recordando-se, da seção anterior, que y_j designa uma aproximação para $y(x_j)$. Obtem-se, portanto, a seguinte expressão para obtenção de uma aproximação y_{n+1} para $y(x_{n+1})$:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(k)}_n \frac{h^k}{k!}$$

que corresponde à expressão do método da série de Taylor de ordem k .

O erro local de truncamento é dado por:

$$e_{\text{loc}}(x_n) = \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_n})}{(k+1)!} h^{(k+1)}$$

2.2. Método de Euler

É o método de série de Taylor de ordem $k = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n \quad e_{\text{loc}}(x_n) = \frac{y''(\xi_{x_n})}{2} h^2$$

Dado que o PVI considerado é da forma:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{obtem-se a seguinte equação para } y_{n+1}:$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \\ n = 0, 1, \dots, m-1$$

2.3. O Método da Série de Taylor de 2ª Ordem

$$y_{n+1} = y_n + y'_n h + \frac{y''_n}{2} h^2 \quad e_{\text{loc}}(x_n) = \frac{y'''(\xi_{x_n})}{3!} h^3$$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (\text{forma do PVI considerado})$$

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] \\ n = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

3. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

3.1. Considerações Gerais

O estudo de métodos práticos de computação começa com uma ampla classe de técnicas conhecidas como métodos de Runge-Kutta. Para estabelecer o padrão dos métodos, considera-se um (o método de Euler) que é raramente usado mas é de interesse histórico e, como a solução por série de Taylor, fornece um ponto inicial necessário para outras discussões.

Os métodos de Runge-Kutta de ordem p são caracterizados pelas seguintes propriedades:

- (i) são de passo um;
- (ii) concordam com a série de Taylor até os termos de ordem h^p ;
- (iii) não exigem o cálculo de qualquer derivada de $f(x, y)$; pagam, por isso, o preço de se ter que calcular $f(x, y)$ em vários pontos.

3.2. Método de Runge-Kutta de 1ª Ordem (Método de Euler)

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

3.3. Métodos de Runge-Kutta de 2ª Ordem

Classe de métodos da forma:

$$y_{j+1} = y_j + h \underbrace{(\alpha k_1 + \beta k_2)}_{\text{função incremento}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

função incremento

com

$$k_1 = f(x_j, y_j)$$

$$k_2 = f[x_j + ph, y_j + qhf(x_j, y_j)]$$

As constantes α , β , p e q devem ser determinadas para que se obtenham os métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem.

Podemos expandir k_2 numa série de Taylor de duas variáveis e abandonamos todos os termos a partir do termo em h^2 . Enfim, com um pouco de cálculo chegamos ao sistema não linear:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta p = \frac{1}{2} \\ \beta q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior para as constantes α , β , p e q , obtém-se métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem. Dois métodos clássicos são apresentados a seguir.

• Método de Euler Melhorado

Escolhe-se $\beta = 1/2$:

$\Rightarrow \alpha = 1/2, p = 1$ e $q = 1$

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ k_1 &= f(x_j, y_j) \\ k_2 &= f\left(x_j + h, y_j + \underbrace{hf(x_j, y_j)}_{k_1}\right) \end{aligned}$$

• **Método de Euler Modificado**

Escolhe-se $\beta = 1$:

$\Rightarrow \alpha = 0, p = 1/2$ e $q = 1/2$

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hk_2, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ k_1 &= f(x_j, y_j) \\ k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} \underbrace{f(x_j, y_j)}_{k_1}\right) \end{aligned}$$

Todos os métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem possuem o mesmo erro local de truncamento:

$$e_{\text{loc}}(x_j) = \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\xi_{x_j}), \quad x_{j-1} < \xi_{x_j} < x_j$$

3.4. Método de Runge-Kutta de 3ª Ordem

Um método de 3ª ordem bastante conhecido é o seguinte:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ k_1 &= f(x_j, y_j) \\ k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f(x_j + h, y_j + 2hk_2 - hk_1) \end{aligned}$$

$$e_{\text{loc}}(x_j) = \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi_{x_j}), \quad x_{j-1} < \xi_{x_j} < x_j$$

3.5. Métodos de Runge-Kutta de 4ª Ordem

O método de 4ª ordem tem a solução clássica:

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\k_1 &= f(x_j, y_j) \\k_2 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(x_j + h, y_j + hk_3)\end{aligned}$$

$$e_{\text{loc}}(x_j) = \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi_{x_j}), \quad x_{j-1} < \xi_{x_j} < x_j$$

4. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL DE ORDEM SUPERIOR

4.1. Redução de um PVI de Ordem Superior à Unidade a um Sistema de PVIs de Primeira Ordem

Dado um PVI de ordem n :

$$xy^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = c$$

$$y'(x_0) = c_1$$

$$y''(x_0) = c_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

podemos transformá-lo num sistema de PVI de primeira ordem mediante a introdução de variáveis auxiliares do seguinte modo:

$$\begin{array}{ll}
 y' = z_1 & \\
 z_1' = y'' = z_2 & y(x_0) = c_0 \\
 z_2' = y''' = z_3 & z_1(x_0) = c_1 \\
 \vdots & z_2(x_0) = c_2 \\
 z_{n-2}' = y^{(n-1)} = z_{n-1} & \vdots \\
 z_{n-1}' = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) & z_{n-1}(x_0) = c_{n-1}
 \end{array}$$

4.2. Expressões do Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem para PVIs de Ordem Superior

Considere-se, inicialmente, um PVI da forma:

$$\begin{array}{l}
 y'' = f(x, y, y') \\
 y(x_0) = c_0 \\
 y'(x_0) = c_1
 \end{array}$$

Redução do PVI a um sistema de PVIs:

$$\begin{cases}
 y' = z = g(z) \\
 z' = f(x, y, z) \\
 y(x_0) = c_0 \\
 z(x_0) = c_1
 \end{cases}$$

Expressões do método de Runge-Kutta:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{j+1} = z_j + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

onde k_i e L_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são obtidos a partir das expressões:

$$\begin{cases} k_1 = g(z_j) \\ L_1 = f(x_j, y_j, z_j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = g\left(z_j + \frac{h}{2}L_1\right) \\ L_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1, z_j + \frac{h}{2}L_1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = g\left(z_j + \frac{h}{2}L_2\right) \\ L_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2, z_j + \frac{h}{2}L_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_4 = g(z_j + hL_3) \\ L_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3, z_j + hL_3) \end{cases}$$

- CAPÍTULO III - O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

1. INTRODUÇÃO

O problema de n-corpos na versão pontual (todos os N-corpos são supostos serem pontos de massa) foi primeiro formulado por Issac Newton. Ele pode ser formulado como:

“Dadas as posições e velocidades de N-corpos em um dado instante de tempo, que se movem pela gravitação mútua, com as massas conhecidas, pode-se calcular suas posições e velocidades em um instante de tempo futuro.”

Um modo comum de tratar o problema de N-corpos é estudá-lo como um problema de dois corpos perturbado pelos demais N-2 corpos. O Sistema Solar é um bom exemplo disso. Pode-se considerar o movimento da Terra em torno do Sol como um problema de dois corpos perturbado pelos demais planetas. Esse problema será estudado neste capítulo.

2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Um dos modelos mais simples utilizados no estudo de problemas dinâmicos no sistema solar é o problema de dois corpos, que consiste na interação de duas massas movendo-se sobre uma força de atração gravitacional mútua descrita pela lei da gravitação universal de Newton.

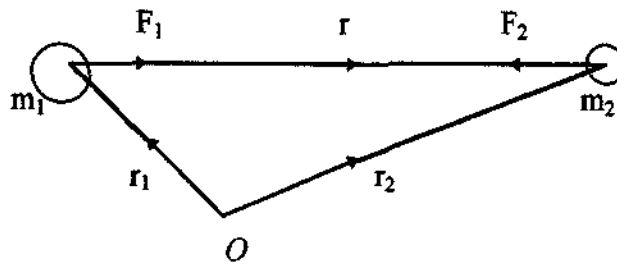


Fig. III.1 - Sistema de Dois Corpos

A figura III.1 mostra um diagrama de vetores para as forças agindo sobre duas massas, m_1 e m_2 com posições vetoriais \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , onde:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

(III.1)

$$\vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

e, $G = 6,67260 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ é a constante gravitacional universal.

Baseado nas leis de Newton e nas equações de Kepler podemos trabalhar as equações acima, obtendo a seguinte relação:

$$C = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}, \quad \text{(III.2)}$$

onde $\mu = G(m_1 + m_2)$, $v^2 = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$ é o quadrado da velocidade e C é a constante do movimento que representa a conservação da energia do sistema.

3. POSIÇÃO ORBITAL E VELOCIDADE

As órbitas dos planetas são aproximadamente elípticas e variam de acordo com a primeira lei de Kepler para movimentos planetários.

Nos movimentos elípticos podemos utilizar a seguinte relação:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad (\text{III.3})$$

onde: a = semi-eixo maior;
 b = semi-eixo menor e
 e = excentricidade da órbita do planeta.

Podemos também deduzir uma equação que indica a magnitude do vetor posição numa órbita aproximadamente elíptica, sendo ela dada por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos(\theta - \varpi))} \quad (\text{III.4})$$

Uma simples inspeção nesta equação mostra que r tem um valor mínimo quando $\theta = \varpi$ e um valor máximo para $\theta = \varpi + \pi$. Esses pontos na órbita são chamados de pericentro e apocentro, respectivamente.

Pelo desenvolvimento matemático da equação (III.3), obtemos a terceira lei de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}. \quad (\text{III.5})$$

Através da diferenciação da equação de \vec{r} em relação ao tempo e lembrando que a velocidade orbital é dada por $v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$, temos que:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \quad \text{e} \quad v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)} \quad (\text{III.6})$$

onde v_p é a velocidade do corpo no pericentro ($\theta = 0$) e v_a é a velocidade do corpo no apocentro ($\theta = \pi$). Em termos gerais temos que:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (\text{III.7})$$

4. ANOMALIAS MÉDIA E EXCÊNTRICA

Podemos expressar v em termos de $v^2 = \dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2$, eliminando θ e v da equação anterior e lembrando que $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, temos:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}$$

integrando temos que:

$$r - a = -a e \cos E \quad , \quad \frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

por uma nova integração, obtemos: $n(t - \tau) = E - e \sin E$,

onde: E = anomalia excêntrica e

τ = constante de integração.

Mas $M = n(t - \tau)$, logo: $M = E - e \sin E$(Equação de Kepler)

sendo M = anomalia média.

Utilizando alguns recursos matemáticos (função de Bessel, método iterativo de Newton-Raphson, etc.) podemos determinar as excentricidades com bom grau de aproximação.

5. ÓRBITAS BARICÊNTRICAS

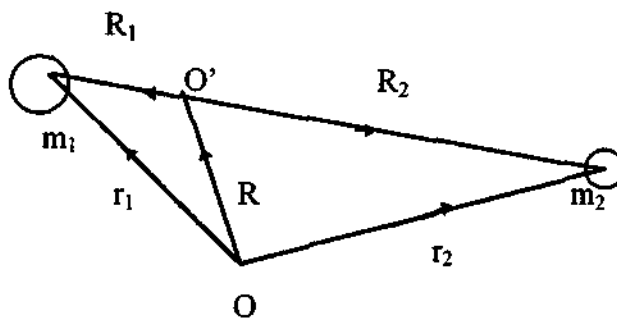


Fig. III.2 - Sistema de Coordenadas Baricêntrico

Através da figura III.2, observamos o movimento da massa m_1 tomando como referência o ponto O . O ponto O pode ser considerado a origem de um sistema de coordenadas inerciais.

Verificamos agora que o movimento do centro de massa do sistema é dado por:

$$M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

onde $M = m_1 + m_2$.

Utilizando a figura III.2 e trabalhando com a equação anterior, chegamos a:

$$\vec{R}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{R}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (\text{III.8})$$

O raio vetor \vec{r} que une as duas massas sempre passará através do centro de massa comum as duas massas. Portanto, se possuímos um sistema de coordenadas com referência ao centro de massa, este é chamado de *sistema baricêntrico*.

Desenvolvendo equações relacionadas \vec{R}_1 e \vec{R}_2 , obtemos alguns valores importantes:

L^* = momento angular orbital total

$$L^* = \frac{m_1 m_2}{M} h, \quad \text{onde } h = r^2 \dot{\theta}$$

E^* = energia total do sistema, isto é, a energia cinética (com referência ao sistema de coordenadas) e energia potencial

$$E^* = \frac{m_1 m_2}{M} C, \quad \text{onde } C = -\frac{\mu}{2a} \quad (\text{constante}).$$

Conseqüentemente, a energia total do sistema é simplesmente uma função do semi-eixo maior da órbita de m_2 em respeito a m_1 .

6. A ÓRBITA NO ESPAÇO

O movimento do sistema solar não está confinado a um simples plano como vimos anteriormente, e sim, num espaço de três dimensões. Podemos definir este espaço adotando um sistema de eixos mutuamente ortogonais x , y e z . Um exemplo é o movimento num sistema de coordenadas heliocêntricas, isto é, com a solução sendo o centro do movimento.

Adotando os mesmos procedimentos matemáticos para o vetor posição e o vetor velocidade e , através de transformações matriciais, pode-se deduzir relações que nos permitem calcular a inclinação da órbita, o raio vetor do plano ascensão (chamado de

longitude do nodo ascendente) e o argumento do pericentro (o ângulo entre o raio vetor anterior e o pericentro da órbita).

- CAPÍTULO IV - O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

1. INTRODUÇÃO

O caso particular mais simples e talvez o mais importante do problema de N-corpos é o caso $N = 3$. Mesmo assim, nem esse caso possui uma solução geral analítica e fechada. Existem soluções particulares conhecidas para esse caso, como por exemplo as soluções de Lagrange. O caso particular conhecido como “Problema Restrito de Três Corpos” é um dos tópicos mais investigados em mecânica celeste. O problema restrito de três corpos consiste no estudo do movimento de um corpo com massa desprezível em torno de dois outros corpos com massa finita.

2. SOLUÇÕES DE LAGRANGE PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Existem casos particulares para a geometria do problema de três corpos em que a configuração geométrica do sistema não muda, a menos de um fator de escala. Os possíveis casos são quando as três partículas ocupam os vértices de um triângulo equilátero e quando as três partículas ocupam posições colineares.

Essas situações ocorrem, segundo Lagrange, sob as seguintes condições:

- 1)- A força resultante em cada corpo passa através do centro de massa do sistema;
- 2)- A força resultante é diretamente proporcional à distância de cada corpo ao centro de massa do sistema;
- 3)- As velocidades iniciais têm magnitude proporcional às distâncias das partículas ao centro de massa e fazem ângulos iguais com os raios vetores partícula-centro de massa.

3. O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

O problema restrito de três corpos é uma versão ainda mais simplificada do caso $N = 3$. Nessa versão existem dois corpos de massas finitas m_1 e m_2 e deseja-se estudar o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível e que orbita o sistema formado pelos outros dois corpos.

É um caso particular, porém rico em aplicações práticas. Entre os sistemas que podem ser estudados com esse modelo, podemos citar:

- O movimento de cometas e asteróides no Sistema Solar;
- A trajetória de um veículo espacial se dirigindo ao Sistema Solar Exterior (Júpiter por exemplo);
- A trajetória de uma sonda lunar;
- Manobras gravitacionalmente assistidas.

Já o modelo geral de três corpos possui bem menos aplicações, uma das quais o estudo de sistemas estelares.

4. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PROBLEMA GERAL DE TRÊS CORPOS

Seja \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 as posições das três massas (finitas) envolvidas e, m_1 , m_2 e m_3 são os valores das respectivas massas. Assim, podemos escrever as equações de movimento de um sistema geral de três corpos como:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\ \ddot{\vec{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Estas equações derivam imediatamente da lei da gravitação universal de Newton e serão utilizadas na obtenção das equações de movimento do problema restrito de três corpos.

5. FORMULAÇÃO E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Agora nós podemos estender nossa análise à interação gravitacional de três corpos, onde o terceiro corpo tem massa negligenciável comparada aos outros dois. Nesta situação nós assumiremos que o terceiro corpo não afeta o movimento das duas massas embora ele tenha o seu movimento afetado por eles.

Se posteriormente impusermos a condição de que as duas massas tenham energia tal que elas se movam em órbitas circulares em volta de seu centro de massa, consideraremos o movimento numa órbita plana. Por isso, chamamos este problema de problema planar, circular, restrito de três corpos.

- Equações de movimento

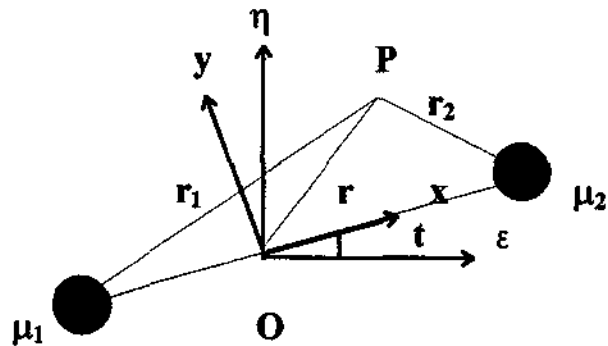


Fig.IV.1 - Problema Restrito de Três Corpos.

Baseado no que foi desenvolvido para o problema de dois corpos, e utilizando a figura acima chegamos nas seguintes relações:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \quad (\text{IV.2})$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y$$

Essas equações podem ser também escritas como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

onde $U = U(x,y)$ é dado por:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (\text{IV.4})$$

e, $\mu_1 = 1 - \mu$, $\mu_2 = \mu$ e $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

• **Curvas de velocidade zero**

Um dos recursos utilizados no estudo da relação de energia no sistema considerado é a constante de Jacobi, que pode ser definida por $2v = C_j$ (quando a velocidade da partícula é zero) ou $x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) = C_j$

Obs: No sistema de coordenadas ε, η a constante de Jacobi pode ser definida por:

$$C_j = 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) + 2(\varepsilon\dot{\eta} - \eta\dot{\varepsilon}) - \dot{\varepsilon}^2 - \dot{\eta}^2 \quad (\text{IV.5})$$

A equação da constante nos dá uma série de curvas no plano xy . Estas curvas são conhecidas como curvas de velocidade zero. Isto é, são regiões que definem onde o movimento da partícula é possível.

A figura IV.2 mostra as curvas de velocidade zero para cada valor da constante de Jacobi com uma razão de massa $\mu = 0.2$. Os valores de C_j são (a) $C_j = 3.9$, (b) $C_j = 3.804$, (c) $C_j = 3.7$, (d) $C_j = 3.55239$, (e) $C_j = 3.4$, (f) $C_j = 3.19732$, (g) $C_j = 3.0$, (h) $C_j = 2.85$. As áreas sombreadas denotam as regiões excluídas. As cruzes denotam as posições das massas μ_1 e μ_2 . As curvas em (b), (d) e (f) são para os valores de C_j associados com os pontos Lagrangianos L_1, L_2 e L_3 respectivamente.

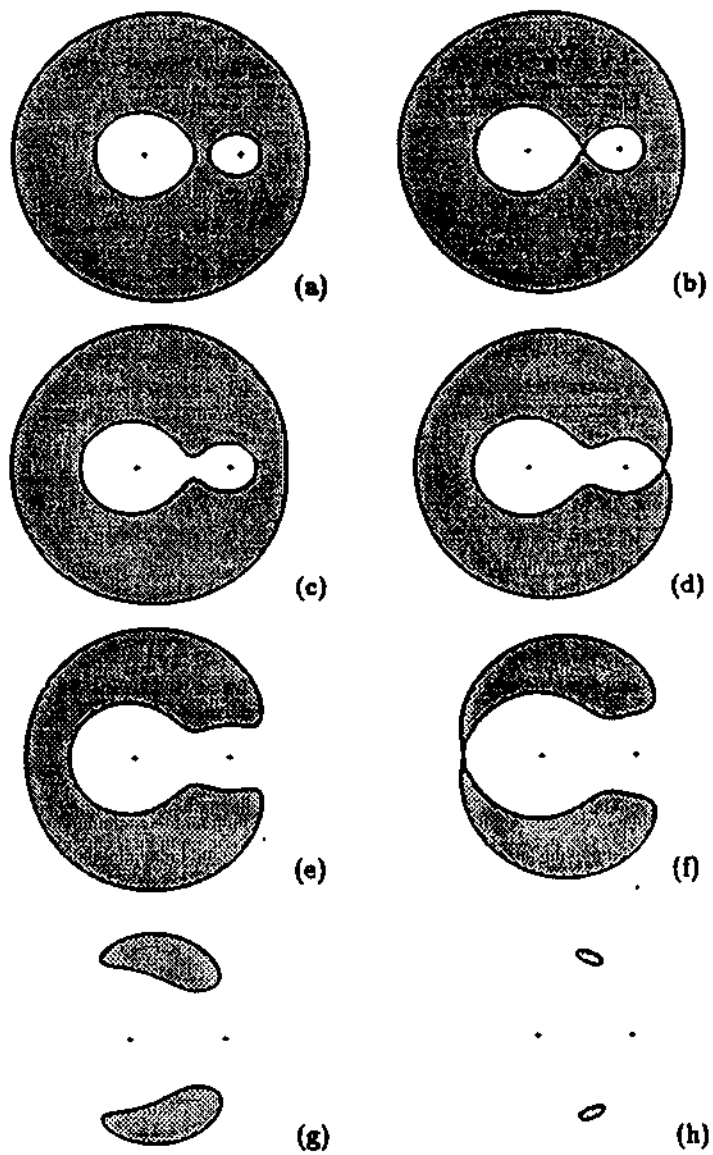


Fig. IV.2 - Curvas de Velocidade Zero

- **Pontos de equilíbrio Lagrangeanos**

Embora o problema circular, restrito de três corpos não seja integrável, podemos achar um número de soluções especiais. Estas soluções são pontos onde a partícula que for colocada nesse ponto com velocidade igual a zero permanecerá estacionada nesse ponto, ou seja, são pontos chamados de pontos de equilíbrio do sistema.

Segundo Brouwer & Clemence (1961) a função U pode ser definida por:

$$U = (1 - \mu) \cdot (1/r_1 + r_1^2/2) + \mu (1/r_2 + r_2^2/2) - 1/2 \mu (1 - \mu). \quad (\text{IV.6})$$

Trabalhando com o formalismo lagrangeano conseguimos determinar alguns pontos de equilíbrio representados na figura abaixo.

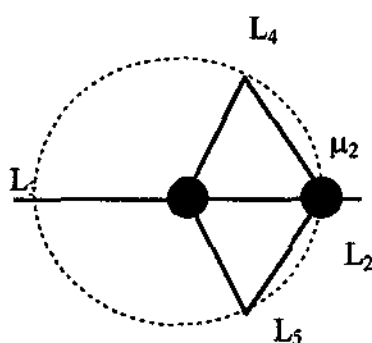


Fig. IV.3

onde: $C_{L1} = 3 + 3^{4/3} \mu^{2/3} - (10/3) \mu$

$$C_{L2} = 3 + 3^{4/3} \mu^{2/3} - (14/3) \mu$$

$$C_{L3} = 3 + \mu$$

$$C_{L4} = C_{L5} = 3 - \mu$$

- **Estabilidade dos pontos de equilíbrio**

Não é suficiente conhecer o número de pontos de equilíbrio que existem num sistema dinâmico, precisamos determinar a estabilidade de alguns pontos pelo exame do comportamento de uma partícula em que é feito um pequeno deslocamento da posição de equilíbrio. Nós podemos verificar isto pela linearização das equações de movimento e fazer uma análise da estabilidade linear.

Denotando por (x_0, y_0) um ponto de equilíbrio no problema restrito circular e considerando um pequeno deslocamento (X, Y) deste ponto tal que, $x = x_0 + X$ e $y = y_0 + Y$, obtemos expressões que podem ser expandidas em série de Taylor.

$$\ddot{X} - 2\ddot{Y} = X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right)_0 + \dots,$$

$$\ddot{Y} + 2\ddot{X} = X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)_0 + \dots,$$

Utilizando derivadas parciais e resolvendo o sistema acima, obtemos, após vários cálculos, o valor aproximado de μ sendo menor que 0,03800. Esse valor de μ é o valor limite superior que permite que os pontos triangulares sejam estáveis. Essas equações correspondem a dois períodos fundamentais, são eles:

- (i) O movimento de pequeno período compatível com o período da massa m_2 em relação a masa m_1 ;
- (ii) O movimento de grande período superposto conhecido como libração em relação ao ponto de equilíbrio.

A combinação destes dois tipos de oscilação resulta num agregado de partículas num plano de rotação similar àquele mostrado anteriormente.

- **Sistemas co-orbitais**

A condição de μ descrita anteriormente é satisfeita para todos os pares Planeta-Sol, do sistema solar e também para todos os pares Planeta-satélites com exceção do sistema Plutão-Charon, onde μ é de aproximadamente 0,1. Contudo, embora o comportamento da libração dos objetos em relação aos pontos de equilíbrios estáveis tivesse sido descobertos por Lagrange alguns objetos não foram descobertos até este século.

Em 1906 o primeiro asteróide Trojan, Achilles, foi descoberto librando em torno do ponto de equilíbrio L_4 no sistema Sol-Júpiter. Até metade de 1988 um total de 157 asteróides Trojan tinham sido descobertos librando em torno dos pontos L_4 e L_5 de Júpiter e as amplitudes de libração podem ser na faixa dos 50° .

Os satélites co-orbitais são aqueles que pertencem a um sistema que apresentam uma ressonância 1:1 como exemplo o que acontece com dois satélites de Saturno chamados Janus e Epimetheus.

- **Equações de Hill**

Ao invés de continuar com as equações completas do problema circular restrito de três corpos, é possível derivar uma quantidade de equações aproximadas e fazer várias suposições, transferindo a origem do sistema de coordenadas para a segunda massa. Isto nos permite determinar uma nova constante de Jacobi, isto é, uma constante modificada. As equações modificadas de movimento que nos fornece essa nova constante são chamadas equações de Hill.

As equações podem ser aplicadas no caso de órbitas excêntricas, se estas representarem o movimento do centro guia.

Tomando os pontos lagrangeanos L_1 e L_2 e usando as equações de Hill obtemos o valor de $3^{4/3} \mu^{2/3}$ para a constante de Jacobi modificada. A área circundada pela curva velocidade crítica zero entre L_1 e L_2 é chamada de lóbulo Roche.

- CAPÍTULO V - REGULARIZAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

O estudo de técnicas de regularização tem por objetivo resolver problemas numéricos quando os valores de r_1 e/ou r_2 nas equações de movimento ficam muito pequenos. Isso ocorre toda vez que a partícula m_3 se aproxima de um dos primários.

Em casos práticos os valores de r_1 e r_2 nunca chegam a zero, pois, antes disso haveria uma colisão com a superfície do corpo celeste. Para se evitar uma eventual colisão, necessita-se de maior precisão numérica nas integrações numéricas necessárias a solução de um problema. O maior problema é justamente quando m_3 está próximo de um dos primários.

A eliminação desse problema numérico pode ser obtida através de uma substituição de variáveis. Uma escolha adequada de novas variáveis para posição, velocidade e tempo leva a uma equação de movimento sem singularidades.

Quando somente uma das singularidades (r_1 ou r_2) é eliminada de cada vez, chamamos essa técnica de “Regularização Local”; e, quando as duas singularidades (r_1 e r_2) são eliminadas ao mesmo tempo, chamamos de “Regularização Global”.

2. REGULARIZAÇÃO DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS EM UMA DIMENSÃO

O mais simples problema para a aplicação de técnicas de regularização é o problema de uma colisão entre dois corpos.

Suponha que um corpo m_1 seja colocado na origem de um sistema de referência x - y e um segundo corpo, de massa desprezível, seja colocado em uma posição $y = 0$,

$x_0 > 0$ com velocidade inicial $\dot{y}_0 = \dot{x}_0 = 0$. O movimento descrito por este corpo será o de se aproximar de m_1 até que ocorra uma colisão. As equações de movimento serão:

$$y = 0 \quad (\text{V.1})$$

$$\ddot{x} = \frac{-x}{|x|^3} \quad (\text{V.2})$$

e a integral de energia será:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{|x|} - C \quad (\text{V.3})$$

Do tempo $t = 0$ até o momento da colisão (t_c), a distância x da origem diminui de $x = x_0$ para $x = 0$ e a magnitude da velocidade aumenta do valor $|\dot{x}| = 0$ para $|\dot{x}| = \infty$. O que acontece com o sistema depois do momento da colisão é completamente ignorado.

A Figura V.1 mostra o comportamento de x em função do tempo t para esse problema.

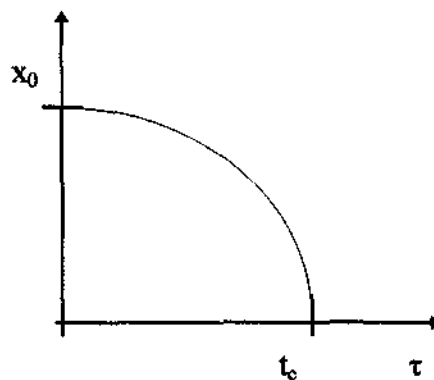


Fig. V.1

Para resolver essa questão é que foi desenvolvida a técnica de regularização. Ela transforma o sistema descrito por uma equação do tipo $x = x(t)$ para um sistema descrito em termos de outras variáveis $u = u(\tau)$. A idéia é escrever o sistema em função de um “tempo dilatado” τ , onde os fenômenos ocorram em uma velocidade mais lenta e o sistema possa ser melhor estudado.

Neste caso a integral de energia pode ser escrita como:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{x} - c \Rightarrow (u')^2 = \frac{g^2}{(f')^2} \left(\frac{2}{f} - C \right) \quad (\text{V.4})$$

Onde, desprezando a parte $\frac{g^2}{(f')^2} C$, tirando a raiz quadrada do termo restante e representando g/f' como uma série de potências em $f^{1/2}$, obtemos o valor de u' :

$$u'^2 = \sqrt{2} A_1 \quad (\text{V.5})$$

com

$$\frac{g^2}{(f')^2 f} = A_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{g^2}{(f')^2} = 0$$

Vamos agora escrever a equação de movimento com respeito a singularidades. Com algumas manipulações algébricas e fazendo a seguinte definição:

$$2T = \dot{x}^2 = \frac{2}{x} - C, \quad (\text{V.6})$$

a equação de movimento pode ser escrita na forma:

$$\ddot{x} = \frac{1}{f'} \frac{dT}{du} = u'' \frac{f'}{g^2} + u'^2 \left(\frac{f''}{g^2} - \frac{f' g'}{g^3} \right), \quad (\text{V.7})$$

ou escrita pelas novas variáveis como:

$$u'' = \frac{d}{du} \left(\frac{g^2}{f^2} T \right) \quad (\text{V.8})$$

que é a equação de movimento do corpo m_2 nas variáveis u e τ ; notando que não existem mais singularidades.

Com essas equações disponíveis, vamos fazer a transformação do tempo, ou seja, executar apenas a mudança de variáveis no tempo.

Consideremos a mudança $x = u$ e $\frac{dt}{d\tau} = x$. Com essa escolha, a integral de energia fica:

$$x'^2 = x(2 - Cx). \quad (\text{V.9})$$

Para a equação de movimento, temos a seguinte expressão:

$$x'' + Cx - 1 = 0. \quad (\text{V.10})$$

A Figura V.2 mostra o comportamento de x em função de τ .

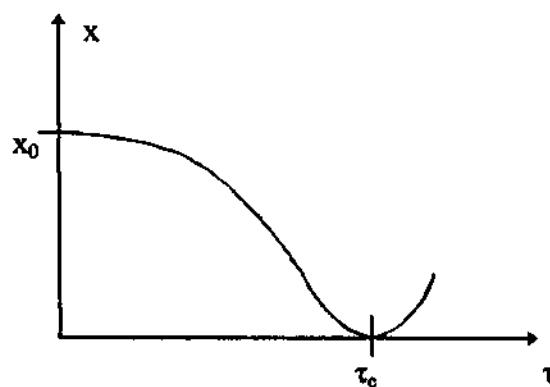


Fig. V.2

- CAPÍTULO VI - RESULTADOS E CONCLUSÕES

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de vários integradores numéricos para calcular trajetórias espaciais utilizando diferentes modelos para a dinâmica do movimento. Dentre esses modelos, podemos citar os seguintes:

- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos usando regularização de Lamaitre com condições iniciais dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos sem regularização com condições iniciais dadas no sistema rotacional.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema fixo e as condições iniciais também são dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema girante-pulsante e as condições iniciais são dadas no mesmo sistema.

Para estudar tais dinâmicas foram utilizados dois métodos de integradores de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, são eles:

- 1)- método de Runge-Kutta de 4ª ordem (ver capítulo II);
- 2)- método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem, com controle automático de passo. Esse método foi estudado a partir das referências 5 e 6.

O presente trabalho consiste em fazer vários testes para cada uma das dinâmicas citadas anteriormente variando o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores variam de EPS de 10^{-1} até 10^{-15} , obtendo, assim, um conjunto de trajetórias. Porém, vale ressaltar que existe um acúmulo de erro devido ao tempo de integração mas esse erro não pode ser observado quando os dados obtidos estão na 1ª órbita. Para diminuir esse problema, o tempo de integração deve ser aumentado para dez

órbitas, ou seja, passamos a analisar a 10ª órbita do veículo espacial. Caso esta apresente uma boa trajetória, com certeza as órbitas anteriores também apresentarão. O propósito dessa tarefa é medir o custo benefício da missão, ou seja, a precisão obtida em comparação com o tempo gasto pelo computador.

Observe que verificamos também o caso de $EPS = 10^{-16}$, porém, para este valor não foi possível obter uma solução, pois o passo de integração ficou pequeno demais.

O procedimento anterior deve ser seguido para as demais dinâmicas e, dessa forma, podemos obter importantes resultados, os quais serão apresentados a seguir.

2. RESULTADOS PARA O MÉTODO DE RUNGE-KUTA DE 4ª ORDEM

Para a primeira dinâmica, *a regularizada*, foram dadas as seguintes condições iniciais:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -1.2d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $xf(4)$ = velocidade inicial na direção y = -0.150642490d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 422;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Em sua 1ª órbita, temos uma pequena variação na trajetória conforme variam-se os valores da precisão (EPS). Essa variação foi desde $EPS = 10^{-1}$ até 10^{-15} e o tempo em que o programa levou para executar as integrações foi de $t_1 = 4s$ até $t_{15} = 52s$, aproximadamente; nota-se, assim, que não há necessidade de aumentar a precisão já que houve uma diferença negligenciável na trajetória onde acarreta num gasto maior de tempo de execução do programa.

A figura VI.1 mostra a trajetória calculada para cada valor de EPS, para a 1ª órbita.

Devemos, ainda, analisar esse mesmo caso considerando a 10^2 órbita. Para as condições iniciais são feitas apenas algumas modificações como:

- NP = número de passos = 4220;
- $N_{\min} = 3798$ e $N_{\max} = 4220$ são os pontos limites para impressão.

Obtivemos neste caso um bom conjunto de trajetórias sem qualquer variação quando utilizados os diferentes EPS, onde o tempo de integração verificado variou de $t_1 = 30s$ até $t_{15} = 491s$. Veja a figura VI.2.

Através do programa podemos obter também a constante de Jacobi, na qual quanto menor for sua variação, melhor será o integrador. Neste caso, houve uma pequena variação desta constante, considerando assim, um bom resultado. Isso pode ser verificado através da tabela 1.

Tabela 1

EPS	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
JAC _{MIN}	2.09515	2.09515	2.09515	2.09515	2.09515	2.09515	2.09516	2.09516
JAC _{MAX}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516
EPS	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	
JAC _{MIN}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	
JAC _{MAX}	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	2.09516	

Nota-se que, a partir do valor $EPS = 10^{-7}$, não existe mais nenhuma variação na constante de Jacobi.

Para a segunda dinâmica, a não regularizada, as condições iniciais foram:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- $xf(1)$ = posição x inicial = -1.2d0;
- $xf(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $xf(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;

- $x_f(4)$ = velocidade inicial na direção $y = 1.049357510d0$;
- T_0 = tempo inicial = $0.0d0$;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = $0.01d0$;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15}).

Em sua 1ª órbita, houve uma considerável variação na trajetória utilizando-se $EPS = 10^{-1}$ até 10^{-15} e, neste caso, o tempo gasto para integração foi de $t_1 = 10s$ até $t_{15} = 270s$. Veja a figura VI.3.

Para a 10ª órbita as modificações das condições iniciais foram:

- NP = número de passos = 6200;
- $N_{min} = 5580$ e $N_{max} = 6200$ são os pontos limites para impressão.

Verificamos neste caso uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-2}$, lembrando que existe um erro acumulativo e, para $EPS = 10^{-3}$ a trajetória começa a aproximar-se daquela desejada. A partir de $EPS = 10^{-4}$ até 10^{-15} podemos verificar que as trajetórias obtidas são consideradas boas. O tempo gasto neste caso foi de $t_1 = 12s$ até $t_{15} = 113s$. Veja as figuras VI.4, VI.5, VI.6 e VI.7.

Através da tabela 2 podemos verificar a constante de Jacobi obtida, onde y_{min} passou a ser constante a partir de $EPS = 10^{-8}$ e para y_{max} com $EPS = 10^{-3}$.

Tabela 2

EPS	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
JAC _{MIN}	1.98558	1.93056	1.94177	2.07536	2.08237	2.08309	2.08317	2.08318
JAC _{MAX}	21.8154	8.23063	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318
EPS	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	
JAC _{MIN}	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	
JAC _{MAX}	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	2.08318	

Para a terceira dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no *sistema fixo*, as condições iniciais foram:

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- ECE = excentricidade dos primários = 0.0d0;
- $x_f(1)$ = posição x inicial = 1.2d0;
- $x_f(2)$ = posição y inicial = 0.0d0;
- $x_f(3)$ = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- $x_f(4)$ = velocidade inicial na direção y = 0.150642490d0;
- $x_f(5)$ = tempo = 0.0d0;
- T_0 = tempo inicial = 0.0d0;
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.01d0;
- NP = número de passos = 620;
- EPS = precisão.

Em sua 1ª órbita, houve uma pequena variação na trajetória utilizando-se $EPS = 10^{-1}$ até 10^{-15} e, neste caso, o tempo gasto foi de $t_1 = 2s$ até $t_{15} = 21s$. Veja as figuras VI.8 e VI.9.

Para a 10ª órbita, as modificações das condições iniciais foram:

- NP = número de passos = 6200;
- $N_{min} = 5580$ e $N_{max} = 6200$ são os pontos limites para impressão.

Verificamos neste caso uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-2}$. Para $EPS = 10^{-3}$ a trajetória começa a aproximar-se daquela desejada, porém esta encontra-se com um grande número de revoluções. A partir de $EPS = 10^{-4}$ até 10^{-15} podemos verificar que as trajetórias obtidas são consideradas boas. O tempo gasto neste caso foi de $t_1 = 10s$ até $t_{15} = 185s$. Veja as figuras VI.10, VI.11, VI.12 e VI.13.

Para a quarta dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no *sistema girante-pulsante*, as condições iniciais foram:

- ECP = excentricidade dos primários = 0.0d0;
- TAP = anomalia verdadeira inicial de $m_2 = 0.0d0$;

- μ = parâmetro de massa = 0.0121285627d0;
- EPS = precisão (de 10^{-1} a 10^{-15});
- DT = intervalo entre dois pontos consecutivos que são plotados = 0.05d0;
- T0 = tempo inicial = 0.0d0;
- TF = tempo final = 6.2d0;
- xf (1) = posição x inicial = 1.2d0;
- xf (2) = posição y inicial = 0.0d0;
- xf (3) = velocidade inicial na direção x = 0.0d0;
- xf (4) = velocidade inicial na direção y = 0.150642490d0;

OBS: Parâmetro de controle: $H_{\min} = 0.0d0$, NTA = 0.0d0, NFR = 0.0d0.

Em sua 1ª órbita, temos uma pequena variação na trajetória conforme variam-se os valores de EPS. Este caso assimila-se com a dinâmica regularizada (1ª órbita). O tempo gasto foi de $t_1 = 3s$ até $t_{15} = 20s$. Veja a figura VI.14.

Já em sua 10ª órbita, as alterações das condições iniciais são:

- TF = tempo final = 62.0d0;
- $TA_{\min} = 55.8$ e $TA_{\max} = 62.0$ são anomalias verdadeiras inicial e final onde os pontos são plotados.

Neste caso verificamos uma discrepância para EPS = 10^{-1} , EPS = 10^{-2} e para EPS = 10^{-3} onde o último começa a aproximar-se da trajetória desejada. A partir de EPS = 10^{-4} até 10^{-15} chegamos à trajetória desejada. O tempo gasto foi de $t_1 = 20s$ até $t_{15} = 184s$. Veja as figuras VI.15, VI.16, VI.17 e VI.18.

3. RESULTADOS PARA O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 7ª E 8ª ORDEM

Neste método utilizamos as mesmas condições iniciais de cada dinâmica testada com o método anterior e os resultados serão apresentados a seguir.

Para a primeira dinâmica, a *regularizada*, na 1ª órbita do veículo espacial, com os valores de EPS variando de 10^{-1} até 10^{-15} , observamos que os tempos de integração são

idênticos para esse integrador (6 s). Nas mesmas condições, para a 10ª órbita, os tempos também permanecem fixos (84 s). As trajetórias apresentadas mostram que nesta dinâmica a precisão é muito boa para todos os valores de EPS testados. Veja as figuras VI.19 e VI.20.

A constante de Jacobi obtida mostrou-se constante na prática, para todos os valores de EPS.

A segunda dinâmica ainda está sendo testada para esse método pois surgiram problemas que serão resolvidos futuramente; dessa forma, não foi possível apresentar nenhum resultado.

Para a terceira dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no *sistema fixo*, na 1ª órbita do veículo espacial, com variações de EPS de 10^{-1} até 10^{-15} , os tempos permanecem fixos (2 s). As trajetórias apresentadas mostram uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-14}$. Para os demais valores de EPS, temos um bom resultado. Veja as figuras de VI.21 a VI.23. Para a 10ª órbita, os tempos de integração verificados tiveram uma pequena variação de $t_1 = 12$ s a $t_{15} = 17$ s. As trajetórias apresentadas mostram uma discrepância para $EPS = 10^{-1}$ e $EPS = 10^{-2}$. Para $EPS = 10^{-3}$ e $EPS = 10^{-4}$ as trajetórias começam a aproximar-se daquela desejada. A partir de $EPS = 10^{-5}$ até 10^{-10} podemos verificar que as trajetórias obtidas são boas mas, para $EPS = 10^{-11}$ até 10^{-15} as trajetórias divergem. Veja as figuras de VI.24 a VI.33.

Para a quarta dinâmica, onde as equações de movimento estão escritas no *sistema girante-pulsante*, na 1ª órbita do veículo espacial, com os valores de EPS variando de 10^{-1} até 10^{-15} , os tempos de integração tiveram uma pequena variação de $t_1 = 2$ s a $t_{15} = 4$ s. Obtivemos neste caso um conjunto de trajetórias com uma pequena variação conforme variam-se os valores de EPS. Veja a figura VI.34. Para a 10ª órbita, com as mesmas variações de EPS, ocorreram também, pequenas variações no tempo de $t_1 = 20$ s a $t_{15} = 25$ s. Para os valores de EPS de 10^{-1} até 10^{-10} as trajetórias obtidas são boas mas, a partir

de $EPS = 10^{-11}$ até 10^{-13} elas divergem. No entanto, para $EPS = 10^{-14}$ e $EPS = 10^{-15}$ as trajetórias voltam a apresentar-se boas. Veja as figuras VI.35 a VI.40.

Os resultados apresentados tiveram alguns pontos que não eram esperadas, como maus resultados para valores de EPS muito baixos. Esses tópicos serão estudados em maiores detalhes no próximo período de Iniciação Científica.

4. CONJUNTO DE TRAJETÓRIAS - MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4º ORDEM

● 1ª Dinâmica (regularizada)

● 1ª Órbita

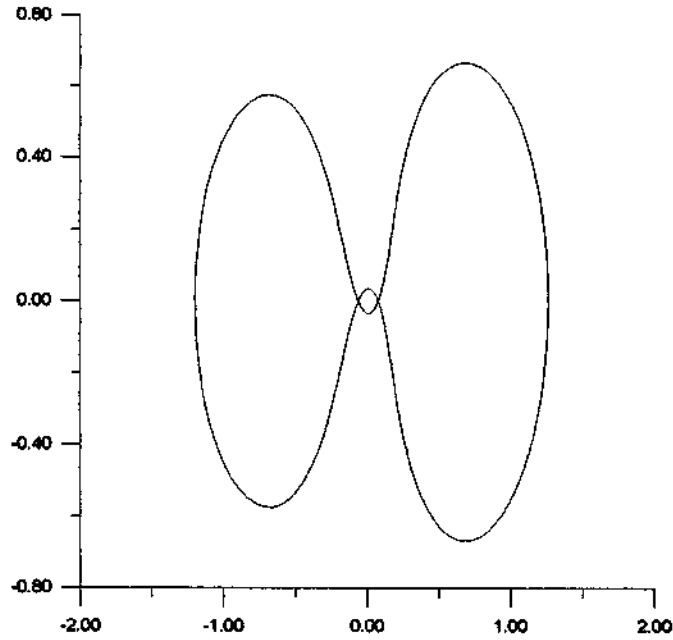


FIG. VI.1 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

● 10ª Órbita

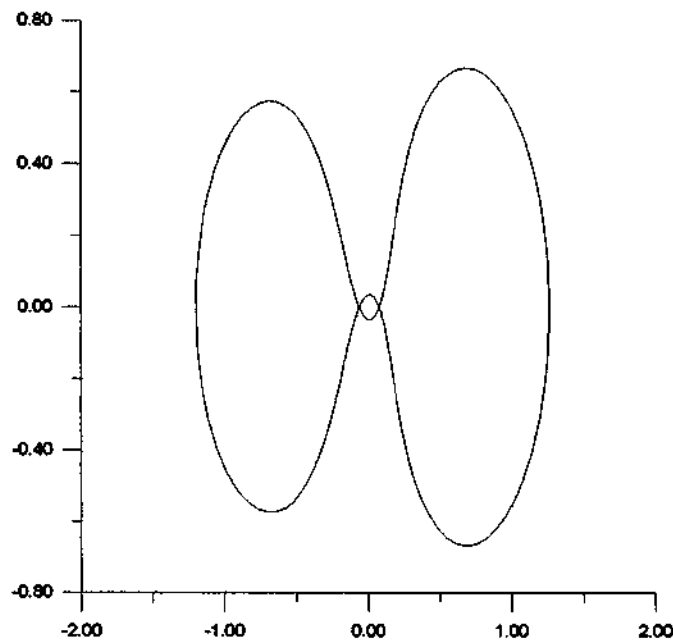


FIG. VI.2 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

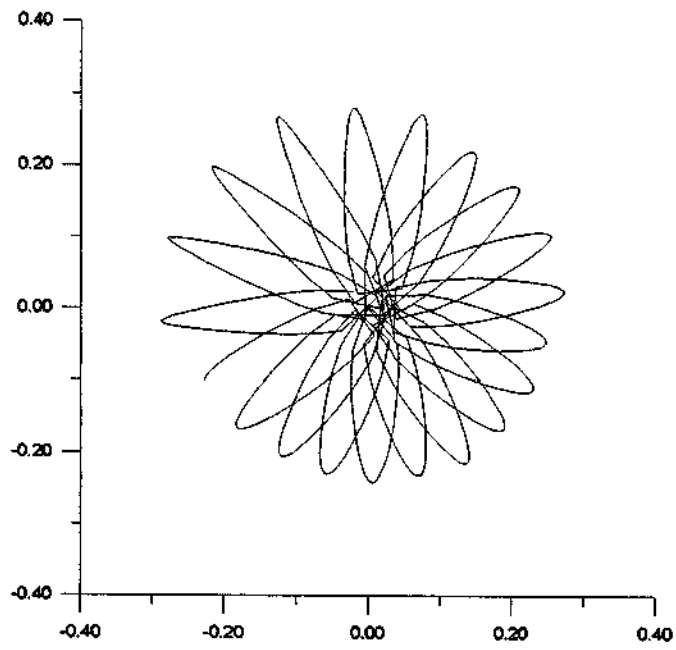


FIG. VI.5 - $\text{EPS} = 10^{-2}$

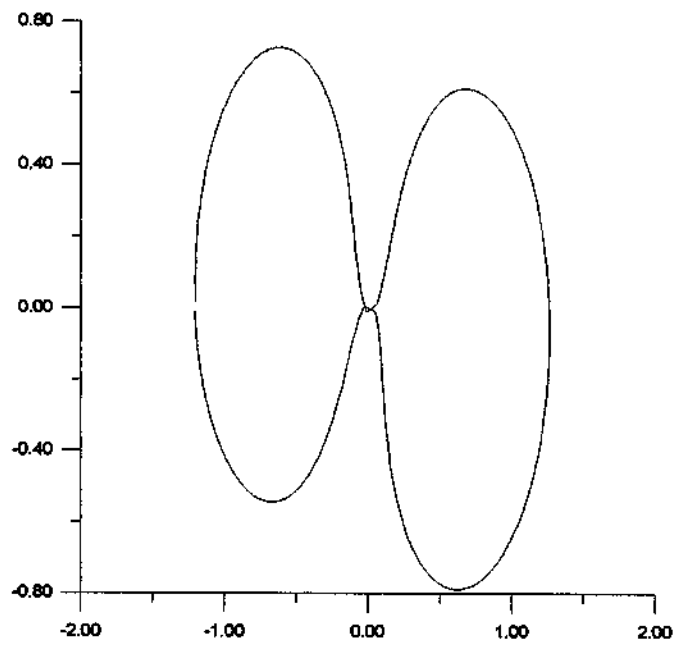


FIG. VI.6 - $\text{EPS} = 10^{-3}$

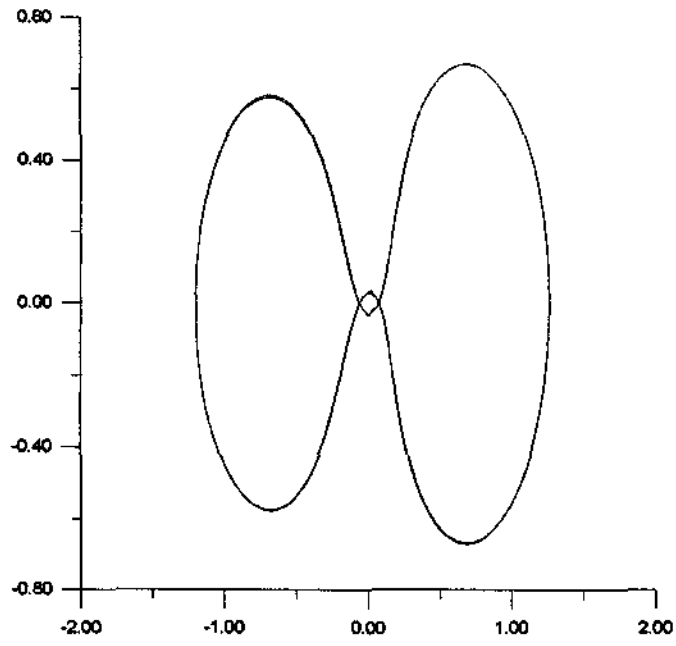


FIG. VL7 - $EPS = 10^{-4}$ a 10^{-15}

⊖ 3ª Dinâmica (elíptico no sistema fixo)

• 1ª Órbita

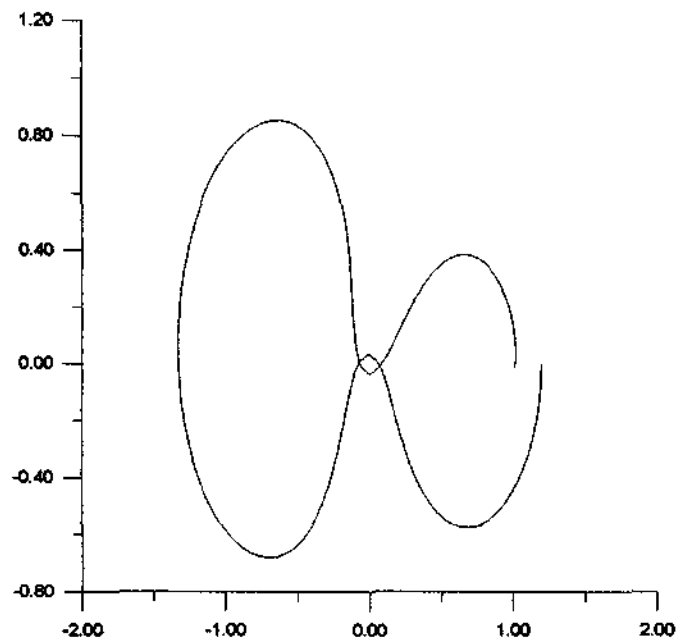


FIG. VL8 - $EPS = 10^{-1}$

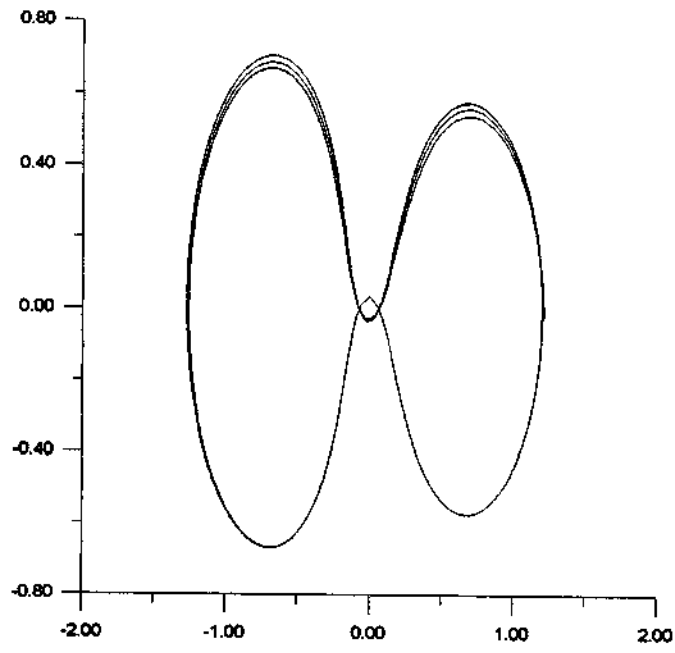


FIG. VL9 - EPS = 10^{-2} a 10^{-15}

• 10^3 Órbita

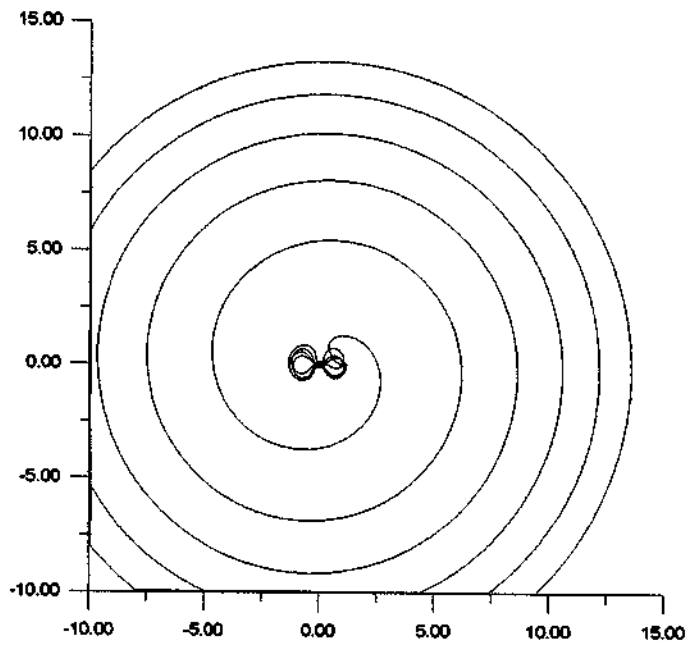


FIG. VL10 - EPS = 10^{-1}

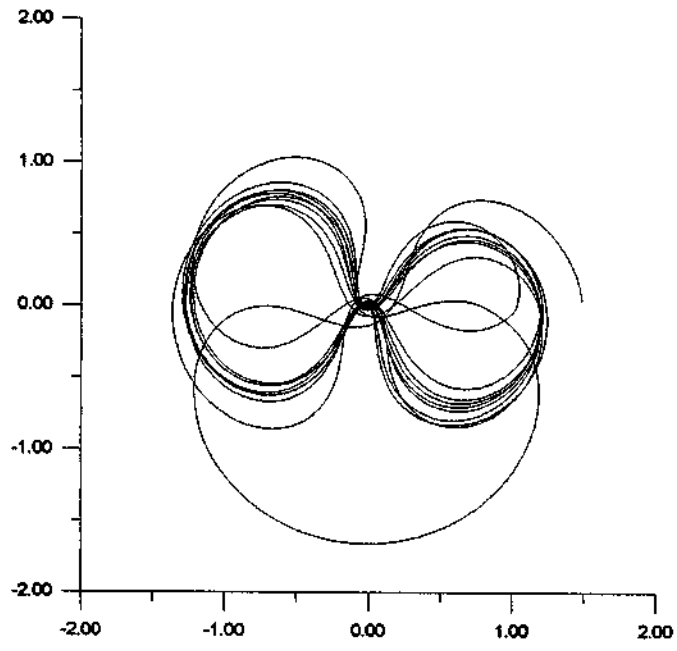


FIG. VI.11 - $\text{EPS} = 10^{-2}$

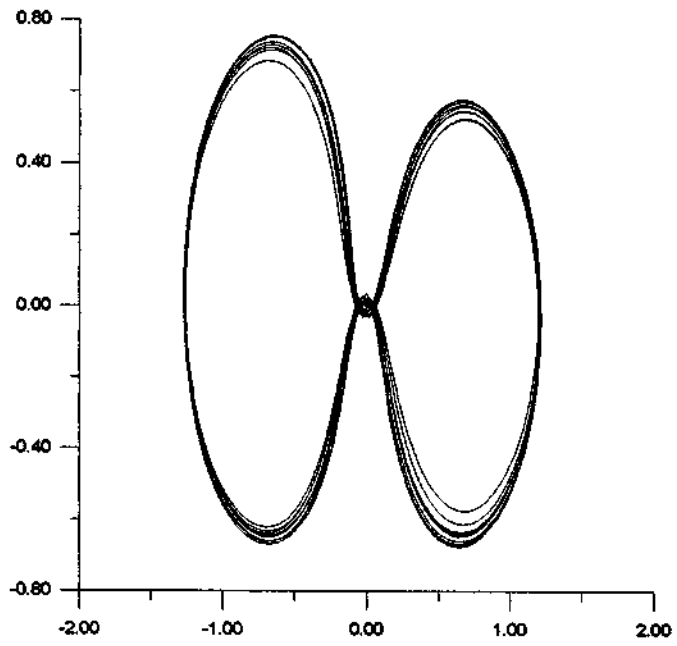


FIG. VI.12 - $\text{EPS} = 10^{-3}$

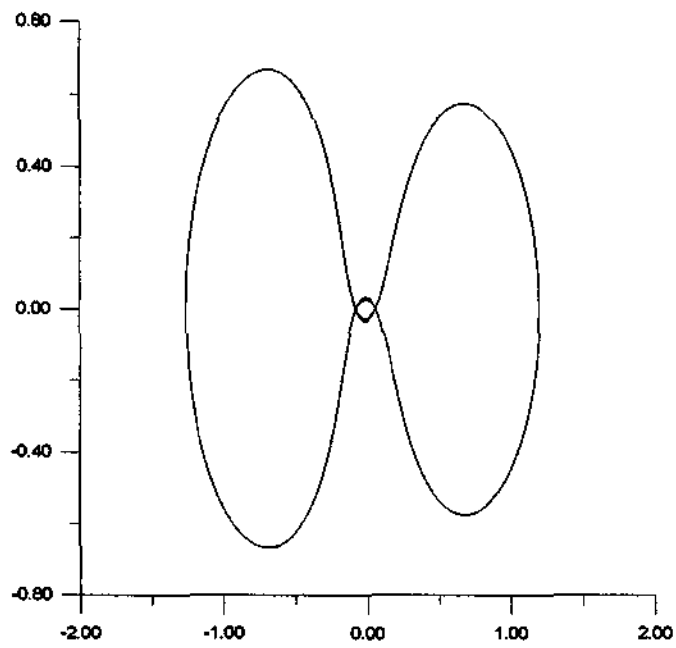


FIG. VI.13 - EPS = 10^{-4} A 10^{-15}

⊙ 4ª Dinâmica (elíptico no sistema girante-pulsante)

• 1ª Órbita

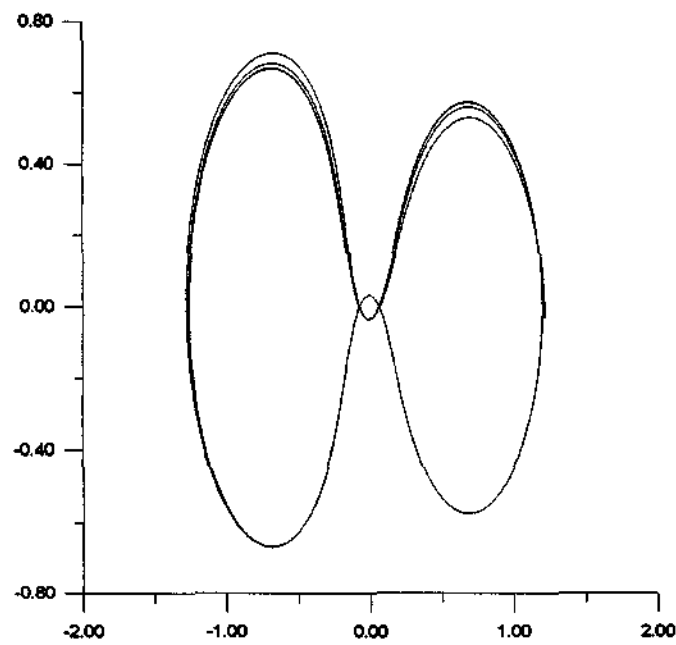


FIG. VI.14 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

• 10ª Órbita

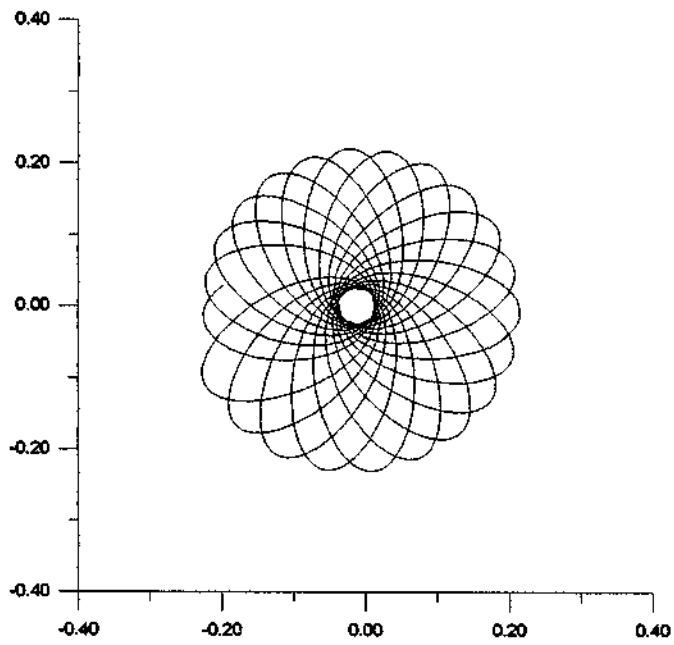


FIG. VI.15 - $\text{EPS} = 10^{-1}$

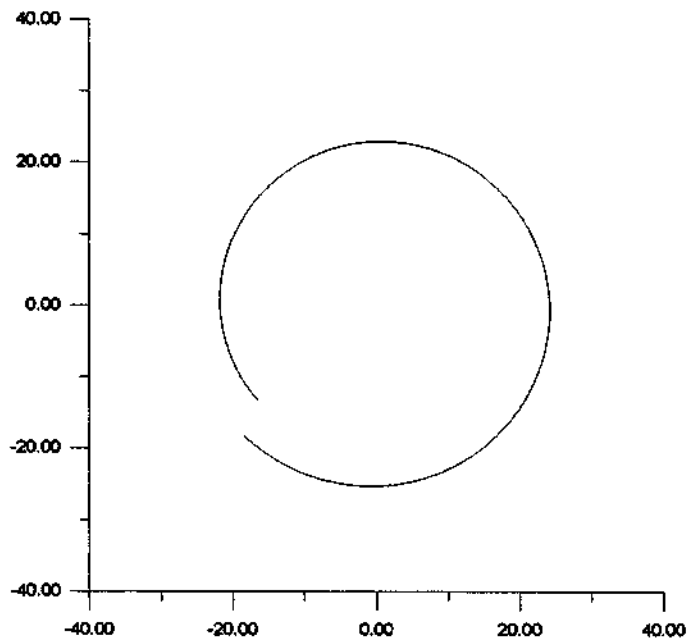


FIG. VI.16 - $\text{EPS} = 10^{-2}$

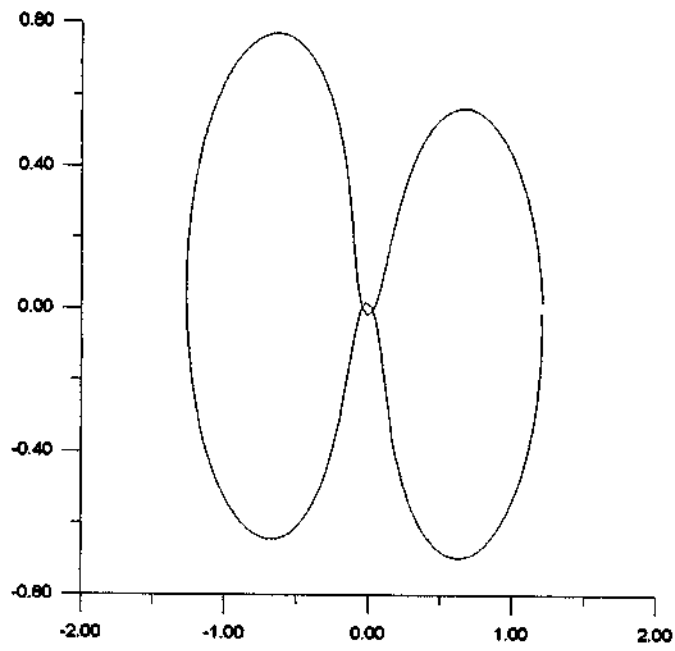


FIG. VI.17 - $\text{EPS} = 10^{-3}$

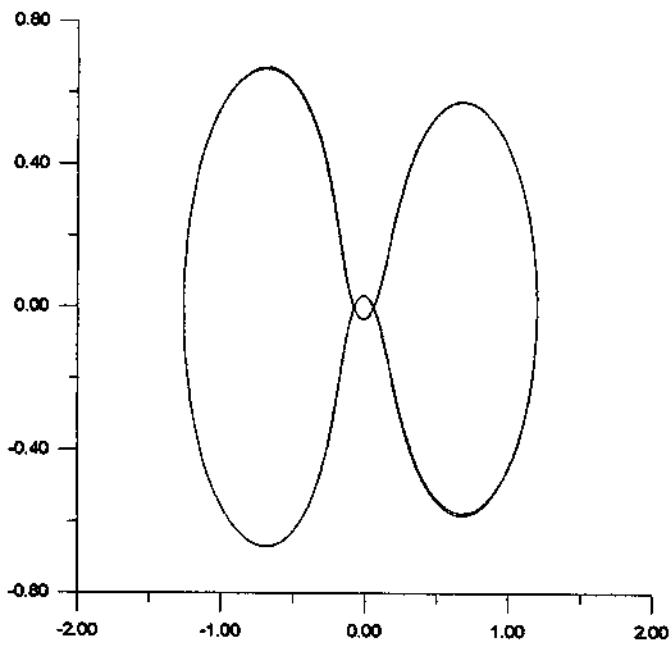


FIG. VI.18 - $\text{EPS} = 10^{-4} \text{ A } 10^{-15}$

5. CONJUNTO DE TRAJETÓRIAS - MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 7ª E 8ª ORDEM

⊙ 1ª Dinâmica (regularizada)

• 1ª Órbita

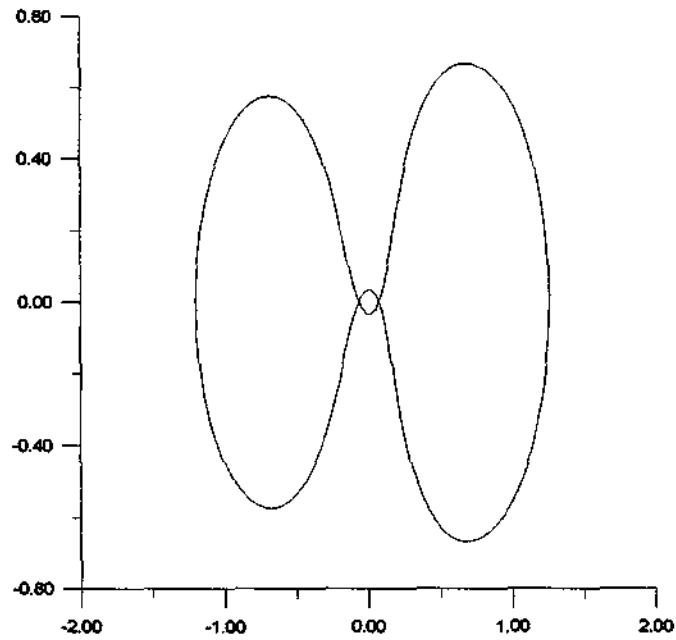


FIG. VL19 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

• 10ª Órbita

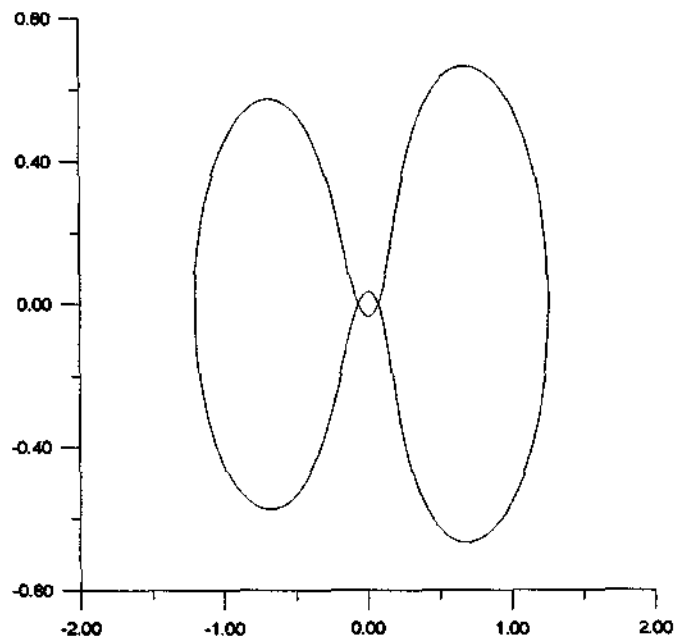


FIG. VL20 - EPS = 10^{-1} A 10^{-15}

⊙ 3ª Dinâmica (elíptico no sistema fixo)

• 1ª Órbita

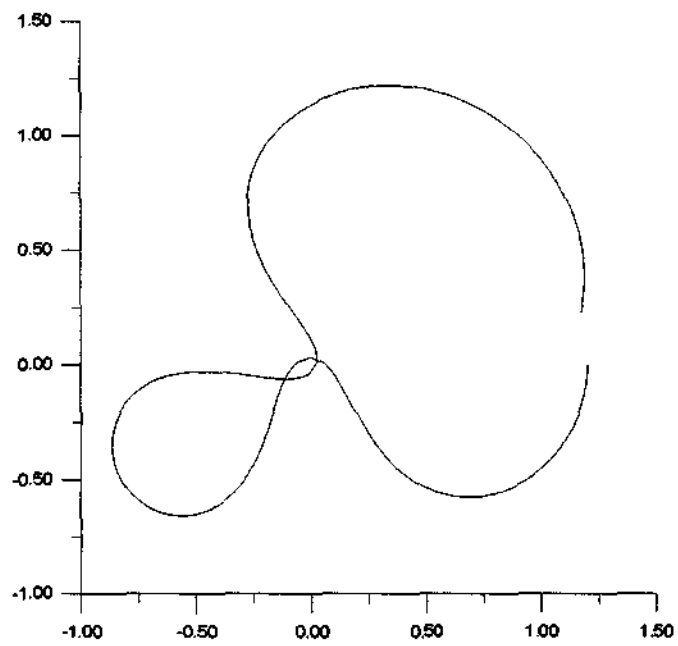


FIG. VI.21 - $\text{EPS} = 10^{-1}$

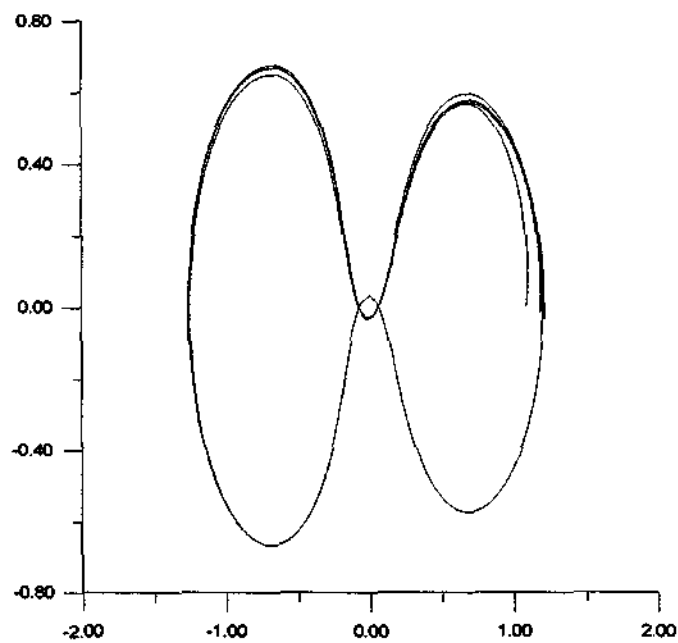


FIG. VI.22 - $\text{EPS} = 10^{-2}$ A 10^{-13} E $\text{EPS} = 10^{-15}$

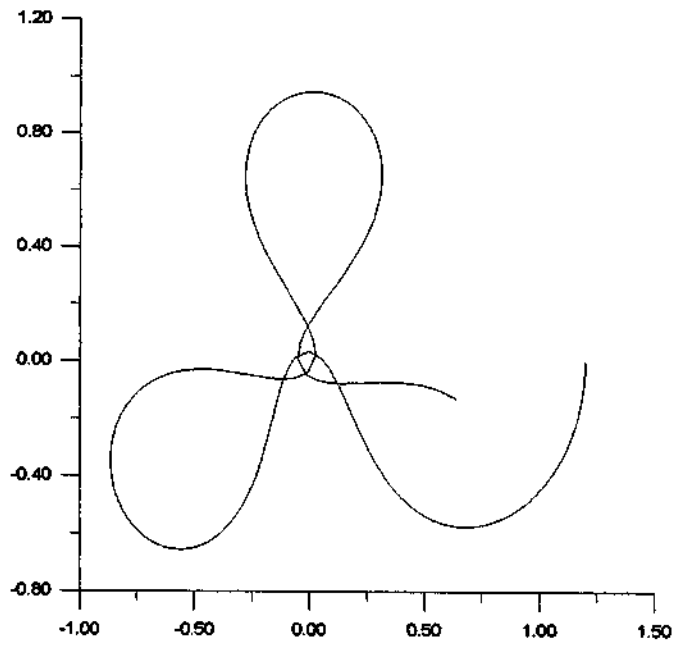


FIG. VI.23 - $\text{EPS} = 10^{-14}$

• 10^8 Órbita

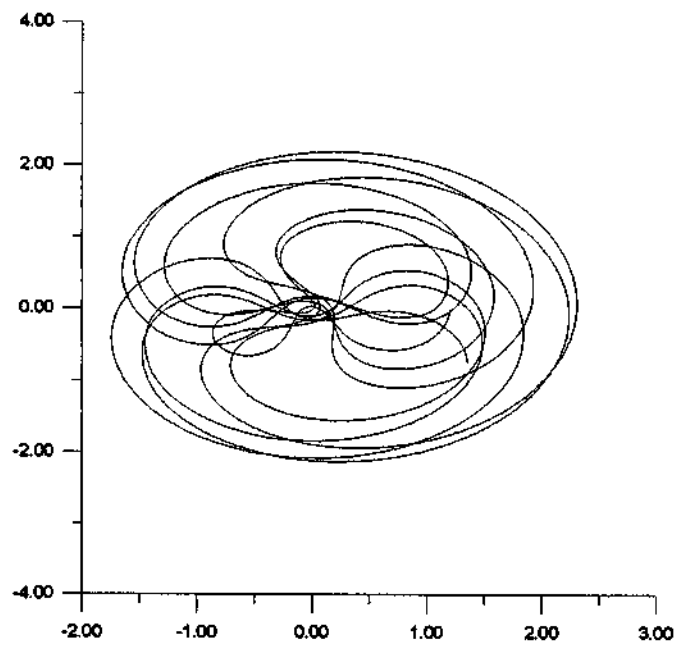


FIG. VI.24 - $\text{EPS} = 10^{-1}$

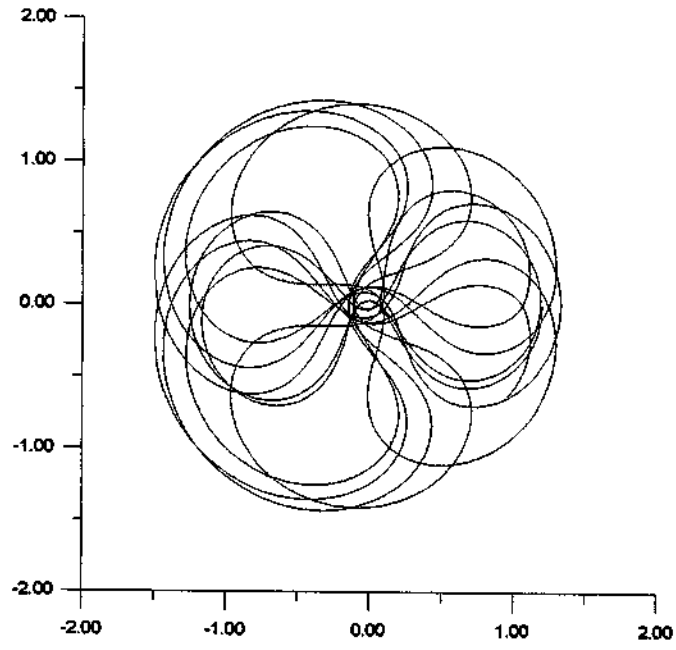


FIG. VI.25 - $\text{EPS} = 10^{-2}$

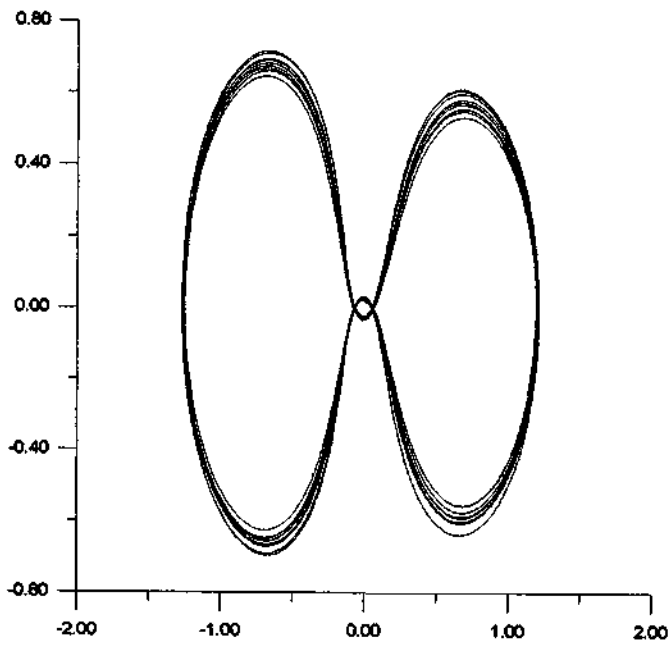


FIG. VI.26 - $\text{EPS} = 10^{-3}$

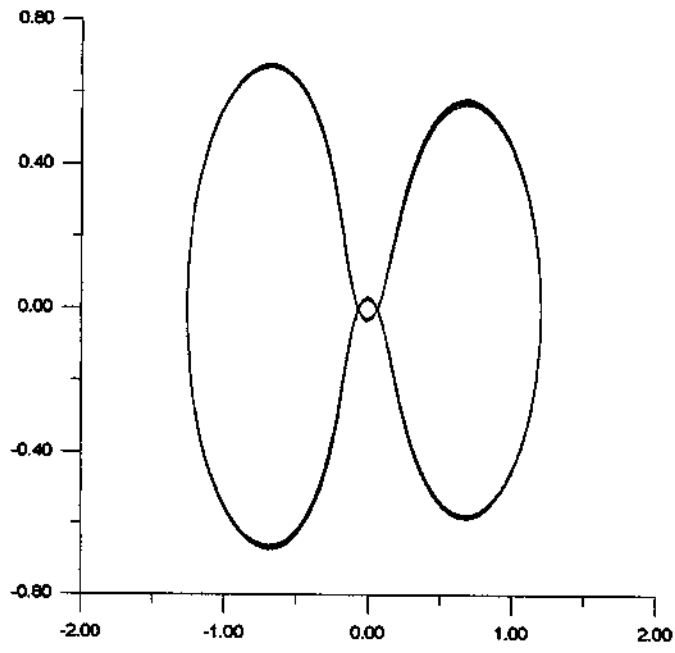


FIG. VI.27 - EPS = 10^{-4}

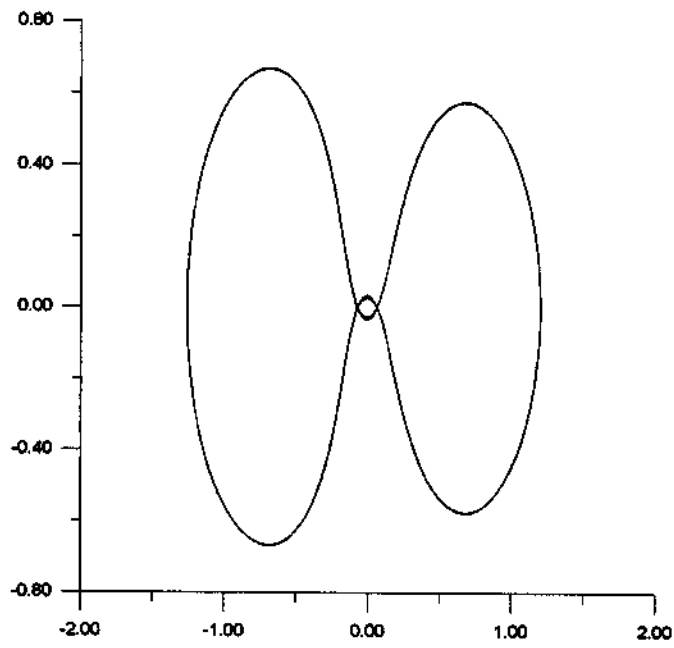


FIG. VI.28 - EPS = 10^{-5} A 10^{-10}

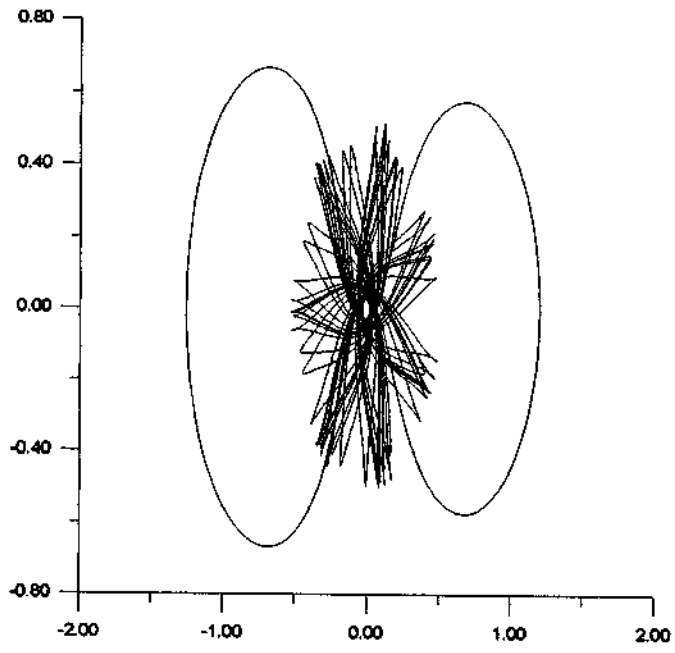


FIG. VI.29 - $\text{EPS} = 10^{-11}$

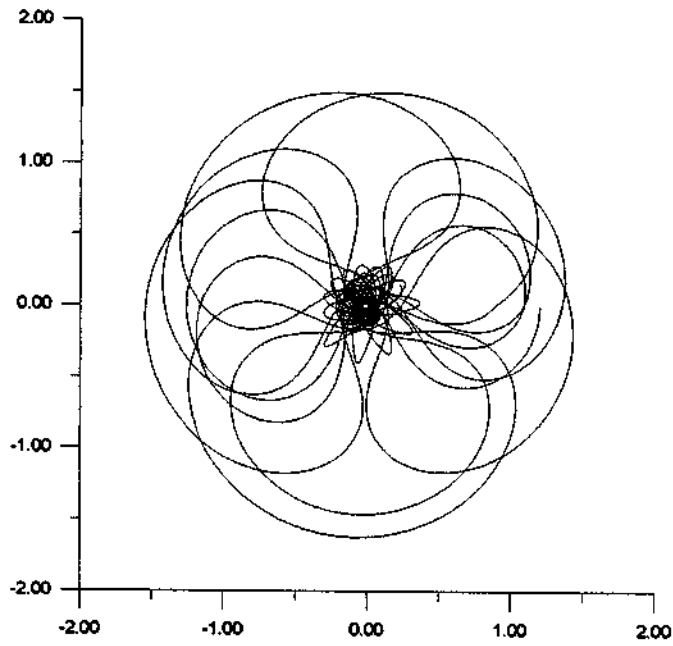


FIG. VI.30 - $\text{EPS} = 10^{-12}$

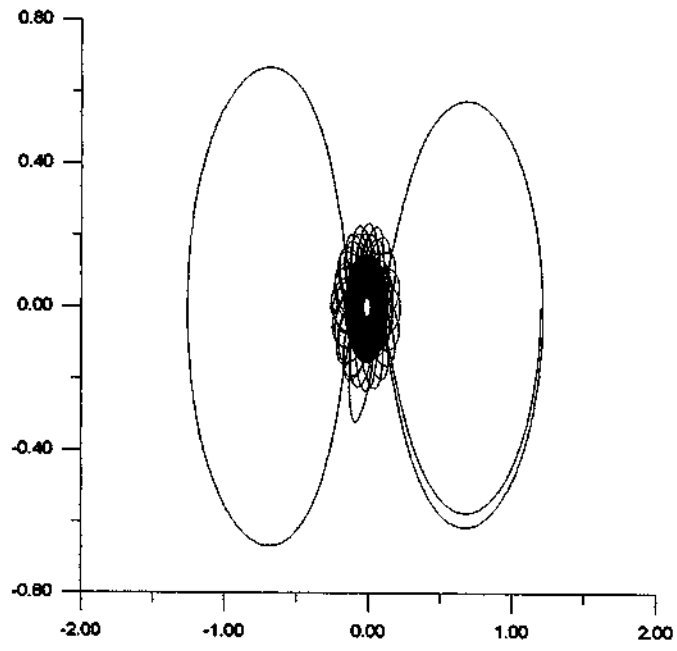


FIG. VL31 - EPS = 10^{-13}

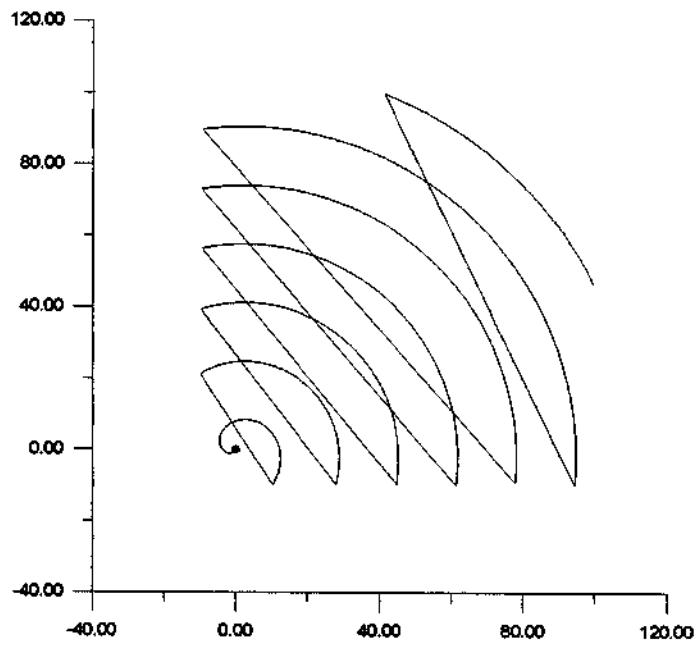


FIG. VL32 - EPS = 10^{-14}

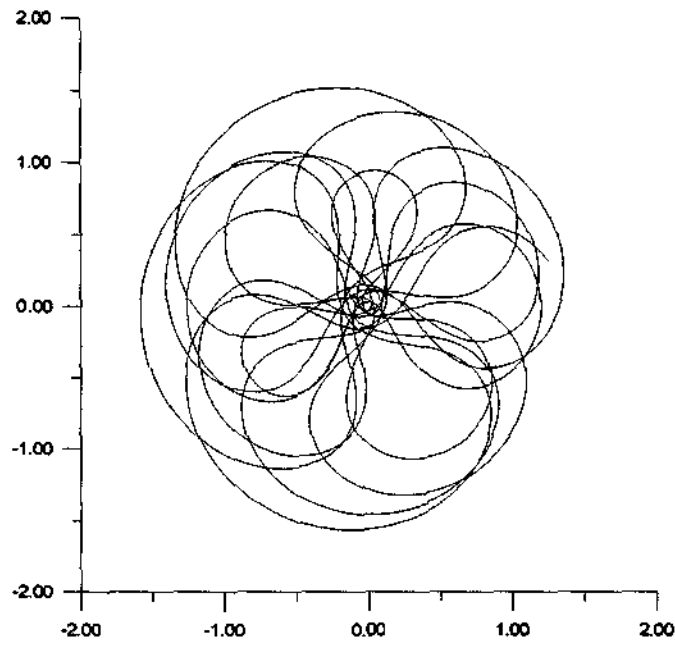


FIG. VI.33 - $\text{EPS} = 10^{-15}$

☉ 4ª Dinâmica (elíptico no sistema girante-pulsante)

• 1ª Órbita

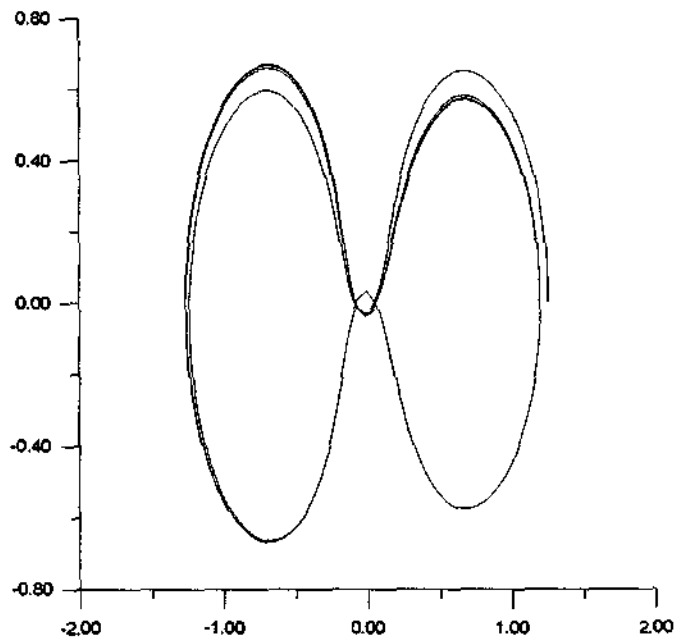


FIG. VI.34 - $\text{EPS} = 10^{-1}$ A 10^{-15}

• 10ª Órbita

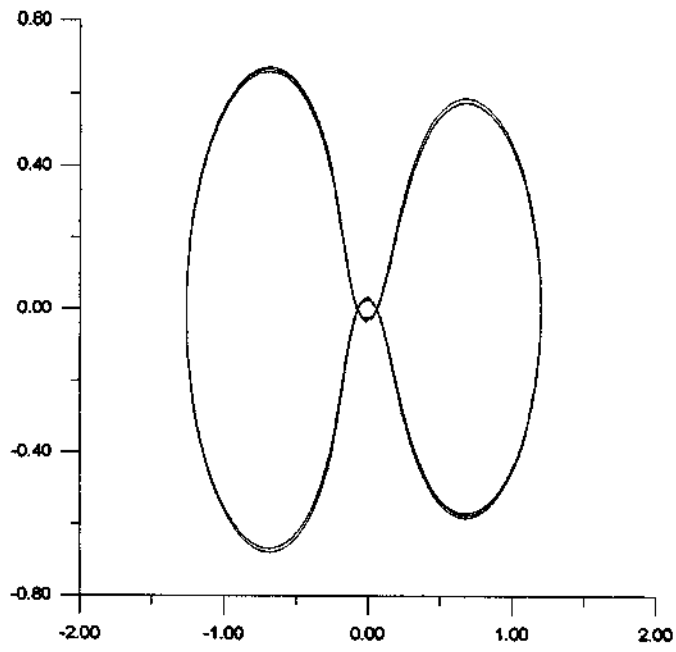


FIG. VI.35 - EPS = 10^{-1} A 10^{-10}

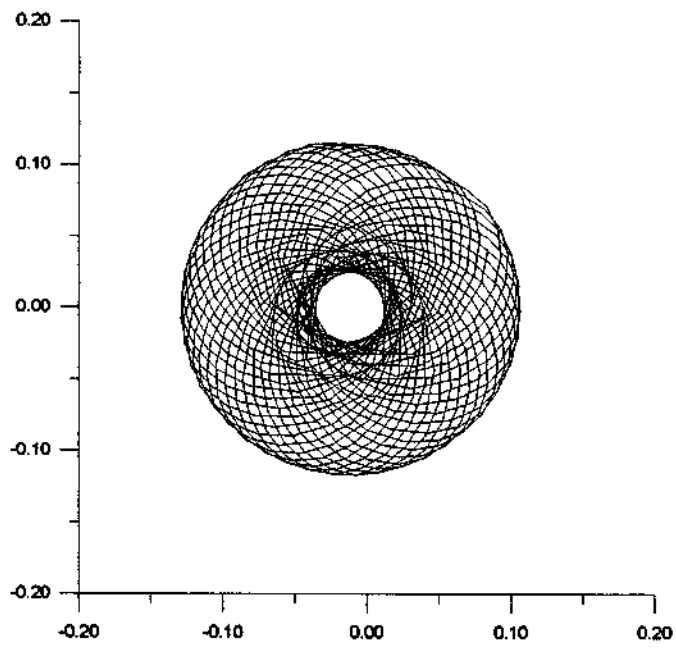


FIG. VI.36 - EPS = 10^{-11}

REFERÊNCIAS

1. Senna, J.G. - Apostila de Cálculo Numérico e Computação - DMT / FEG / UNESP;
2. Prado, A.F.B.A., “Análise e Planejamento de Missões” - DMC / INPE - apostila a ser publicada;
3. Murray, C.D. and S.F.Dermott (1997) - “Solar System Dynamics” - (in press).
4. Brouwer, D., and G.M. Clemence, Methods of Celestial Mechanics, Academic New York, 1961.
5. Kondapalli R. Rao: A Review on Numerical Methods for Initial Value Problems (INPE-3011-RPI / 088).
6. Kondapalli R. Rao; Hélio K. Kuga: Manual de Uso de um Conjunto de Integradores Numéricos para Problemas de Condições Iniciais (INPE-3830-RPI / 154).

AVALIAÇÃO DE INTEGRADORES NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DE TRAJETÓRIAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Aurea Aparecida da Silva

Aluna da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Bolsa
PIBIC / CNPq

Orientador: Dr. Antonio Fernando Bertachini de A. Prado
Divisão de Material e Controle do INPE

Co-orientador: Dr. Othon Cabo Winter
Departamento de Matemática da FEG - UNESP

O presente trabalho tem por objetivo a avaliação do desempenho de vários integradores numéricos no cálculo de trajetórias de veículos espaciais, considerando diferentes modelos para a dinâmica. Para isso, foram utilizados os seguintes modelos para dinâmica:

- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos usando regularização de Lamaitre com condições iniciais dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos sem regularização com condições iniciais dadas no sistema rotacional.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema fixo e as condições iniciais também são dadas no sistema fixo.
- dinâmica baseada no problema restrito de três corpos elíptico, onde as equações de movimento estão escritas no sistema girante-pulsante e as condições iniciais são dadas no mesmo sistema.

Para estudar tais dinâmicas foram utilizados dois métodos de integradores de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, são eles:

- 1)- método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
- 2)- método de Runge-Kutta de 7ª e 8ª ordem, com controle automático de passo.

Os testes realizados para essas dinâmicas consistem em variar o valor da precisão requerida para integração (EPS). Esses valores variam de $EPS=10^{-1}$ até $EPS=10^{-15}$; verificando, para cada valor de EPS, o tempo de integração e a trajetória obtida.

A análise dos resultados desse trabalho é feita de forma a levar em consideração o custo benefício da missão, ou seja, a precisão obtida em comparação com o tempo gasto