

ESTUDO DE TRAJETÓRIAS ESPACIAS

Gislaine de Felipe

Aluna da Universidade de Taubaté - Bolsa PIBIC / CNPQ

R: Aimorés, nº 371 - Guaratinguetá - SP - 12.500-000

Orientador: Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Engenheiro de Desenvolvimento Tecnológico,

INPE - DMC - CP 515 - São José dos Campos - SP - 12227-010

O objetivo deste trabalho é o estudo de trajetórias para veículos espaciais. Em particular, será estudado trajetórias obtidas com o modelo matemático dado pelo problema restrito tri-dimensional de três corpos. Trata-se de uma continuação dos trabalhos desenvolvidos por Moreira e Prado (1995), que estuda trajetórias obtidas com o modelo de dois corpos e Prado (1993), Prado (1995) e Prado e Broucke (1995) que estudam trajetórias no modelo dado pelo problema restrito plano de três corpos.

Esse modelo significa que estudaremos o movimento de uma partícula de massa desprezível (como um veículo espacial) em um sistema governado por dois corpos dotados de massa finita (como os sistemas Terra-Lua, Sol-Terra, etc...). Este trabalho não pretende estudar uma missão específica, mas sim efetuar um estudo numérico geral de trajetórias aonde o veículo espacial faça uma passagem próxima do menor corpo de massa finita.

Essas trajetórias serão numericamente classificadas de acordo com os efeitos causados pelo encontro do veículo espacial com o corpo celeste. Esses efeitos são as variações da Energia e do Momentum Angular do veículo espacial entre os instantes imediatamente anterior e posterior ao encontro. Do ponto de vista dessas duas grandezas, temos quatro categorias possíveis para a classificação de cada trajetória:

- Elíptica direta (Energia negativa e Momento Angular positivo);
- Elíptica retrógrada (Energia negativa e Momento Angular negativo);
- Hiperbólica direta (Energia positiva e Momento Angular positivo);
- Hiperbólica retrógrada (Energia positiva e Momento Angular negativo).

As grandezas utilizadas para descrever as condições iniciais de cada trajetória foram: a) Dois ângulos (α e β) e uma distância para especificar a posição do periapse em um sistema de coordenadas esféricas centrado no segundo corpo; b) A magnitude da velocidade do veículo neste instante; c) A razão entre as massas dos dois primários usado como $\mu = 0.0121$ em todas as simulações mostradas nesse trabalho. O trabalho consistiu então de simulações numéricas para um conjunto de condições iniciais. Foi utilizado um integrador de Runge-Kutta combinado com a dinâmica clássica do problema restrito-circular de três corpos em três dimensões. As equações de movimento utilizadas foram:

$$y'' = -2x' + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}; \quad x'' = 2y' + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}; \quad z'' = -\frac{\mu^* z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}$$
$$r_1 = ((x+\mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}; \quad r_2 = ((x-\mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}; \quad \mu^* = 1 - \mu.$$

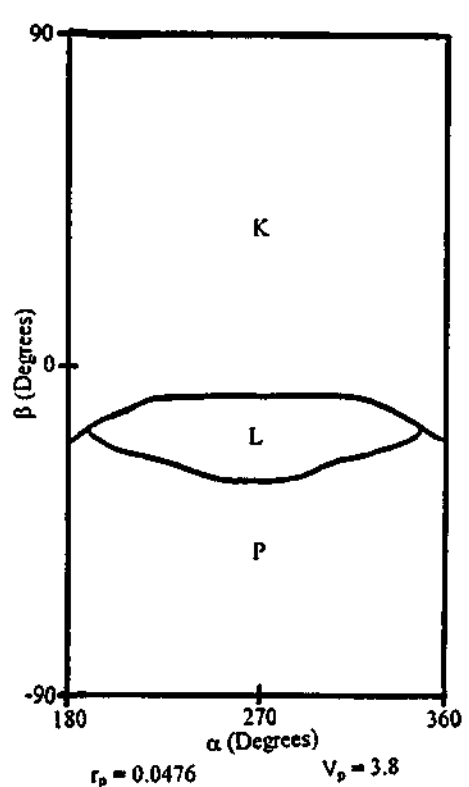
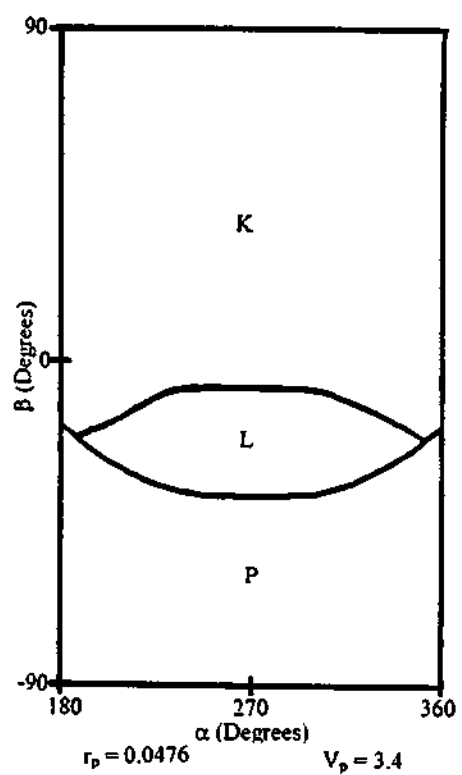
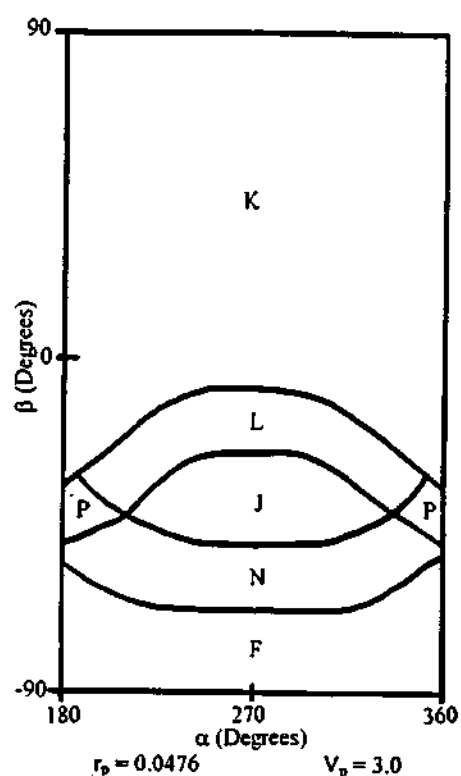
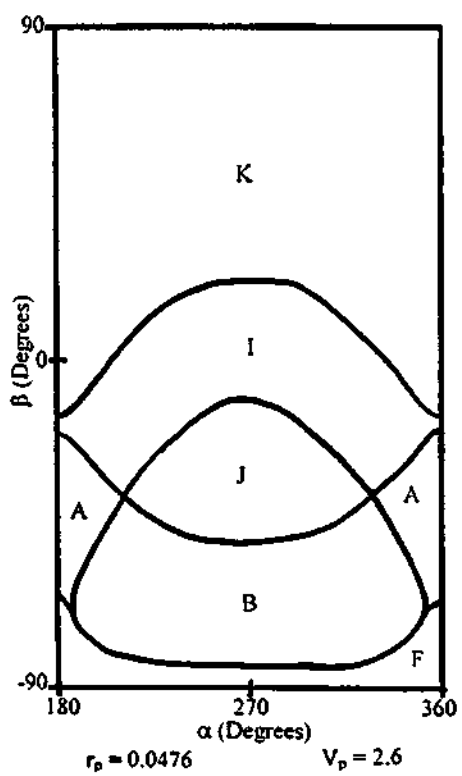
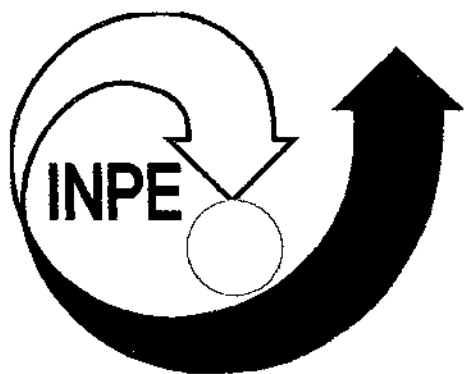


FIG.1 - RESULTADOS DE ALGUMAS SIMULAÇÕES



*Relatório Final
de Iniciação Científica
CNPQ*

Estudo de Trajetórias Espaciais

Bolsista: Gislaine de Felipe

Orientador: Antonio F. Bertachini A. Prado

junho/96



Índice

Capítulo I - Cronograma do Projeto	pág. 1
Capítulo II - Uma Introdução à Análise e Planejamento de Missões	pág. 3
Capítulo III - Princípios Básicos da Mecânica Celeste	pág. 8
Capítulo IV - Desenvolvimento de um Programa para o Problema Restrito de Três Corpos	pág. 17
Capítulo V - A manobra Assistida por Gravidade e Algumas Aplicações	pág. 20
Revisão Histórica	pág. 26
Capítulo VI - Estudo Numérico de Manobras Assistida por Gravidade	pág. 29
Capítulo VII - Estudo de Manobras Assistidas por Gravidade no Espaço Tridimensional	pág. 36
Capítulo VIII - Resultados	pág. 39
Capítulo IX - Conclusões	pág. 48
Referências	pág. 49



Capítulo I - Cronograma do Projeto

O projeto desenvolvido no INPE sobre o tema Otimização de Trajetórias no Problema de dois e três corpos obedeceu ao seguinte cronograma:

- a) um estudo inicial teórico relativo as atividades necessárias a execução do projeto;
- b) o desenvolvimento de programas, incluindo o seu aperfeiçoamento, testes e discussão de resultados;
- c) a confecção do relatório.

A fase inicial de Treinamento ocorreu durante os primeiros dois meses e incluiu um estudo sobre os princípios básicos da teoria da Mecânica Celeste por meio de apostilas desenvolvidas no próprio INPE, as quais continuaram a ser utilizadas no decorrer do projeto. Estes estudos foram acompanhados pelo meu orientador o qual auxiliou-me na aprendizagem e desenvolvimento do projeto.

Numa outra fase, providenciou-me a sequência dos trabalhos a serem realizados, e a oportunidade de participar de um curso de Mecânica Celeste com o prof. Pascal Brousse do CNES - França. Durante esta fase também prestei suporte às aulas de Pós-Graduação do INPE, sempre em temas compatíveis com o meu curso de Graduação em Taubaté e com meu trabalho de Iniciação Científica no INPE.

Já na fase de Aprendizagem, tive a oportunidade de aprender e utilizar vários Softwares permitindo-me entre outras coisas, a elaboração deste relatório.

São eles:

- Microsoft Fortran 5.0
- Grapher 4.0
- Word for Windows 6.0
- Paintbrush
- Instant Artist
- HP Desksacan II
- Corel Draw 5.0



Tendo uma base desses conhecimentos básicos, dei início ao desenvolvimento do projeto, onde formulei um algoritmo para estudar as trajetórias espaciais e otimização no problema de dois e três corpos.

Desenvolvi então programas em Fortran, os quais geram dados de posição e velocidade num determinado intervalo de tempo, para a confecção de trajetórias de veículos espaciais.

O programa inicial consistiu na observação do movimento de um corpo na órbita ao redor de outros dois mais pesados, no plano cartesiano. É o problema conhecido na literatura como problema restrito de três corpos plano e circular.

A próxima etapa foi a expansão do programa para o caso mais geral de três dimensões.

Uma extensão do projeto inicial consistiu no estudo das manobras de Swing-by que utilizam um corpo celeste para alterar a Energia e Momento Angular de um veículo espacial. Esse tópico é uma extensão de uma publicação de meu orientador no American Astronautical Society em fev/ 93 (Jupiter Swing-by Trajectories passing near the Earth, fevereiro, 1993).

Para este estudo desenvolvi um software para simular uma grande variedade de condições iniciais para estas órbitas e classificá-las de acordo com os efeitos causados pelo encontro na órbita da nave espacial. Os resultados são mostrados em forma de gráficos que permitem a visualização dos efeitos medidos.

Foram apresentados no II Seminário de Iniciação Científica do INPE e foi um dos trabalhos escolhidos para representar o INPE na próxima Jornada Nacional de Iniciação Científica.

Além disso, estes resultados farão parte de trabalhos já aceitos para apresentação em dois outros congressos: o 47th International Astronautical Congress, a ser realizado na China em outubro de 1996 e o VIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, a ser realizado em novembro de 1996.



Capítulo II - Uma Introdução à Análise e Planejamento de Missões

Este capítulo tem por objetivo uma rápida descrição de como proceder a uma análise e planejamento de missões espaciais. Ele foi escrito com base no trabalho de Prado (1994).

A análise de missões espaciais é um conjunto de procedimentos que tem como meta transformar um ou mais objetivos, vínculos desejados de uma missão em formas de obtê-los.

Exemplos de missões espaciais são:

- comunicação;
- previsão de tempo;
- navegação;
- exploração científica;
- manufatura de materiais do espaço;
- estudo dos recursos naturais da Terra; etc...

Algumas técnicas básicas são aplicadas, até agora com sucesso, para a análise das missões. São elas:

- **definição de objetivos:** "qual o motivo e o por quê da missão?";
- **caracterização da missão:** estabelecer os instrumentos de medida que serão levados à bordo;
- **avaliação da missão:** verificar os conceitos da missão e gerar gráficos e tabelas informativo;
- **definição dos requisitos da missão:** estabelecer todos os requisitos da missão e especificá-los para os especialistas;

OBSERVAÇÃO: Cada etapa deve ser muito bem documentada em relatórios, possibilitando informações para etapas posteriores.

Alguns tipos de missões são descritas a seguir:

-Satélites de COMUNICAÇÃO: "mantém o mundo unido por laços invisíveis..."

Usados para: - telefonia, transmissão de televisão, etc...



A "LUA" foi o primeiro satélite de comunicação da Terra, pois foi usada duas vezes para refletir um sinal de volta à Terra:

Ano: 1951 (primeira vez)

Ano: 1955 (segunda vez)

- "SPUTNIK-1" - (soviético) - Primeiro satélite artificial da Terra, mas não retransmitia imagens nem voz humana de volta à Terra

Ano: 1957;

- Projeto - "SCORE" - (americano) - retransmitiu a voz humana pela primeira vez, com uma mensagem natalina do presidente norte-americano Dwight D. Eisenhower

Ano: 1958;

- "ECHO 1 e 2" - satélites balões de órbita baixa e grande volume que refletiam sinais de volta para a Terra

Ano: começo dos anos 60;

- "TELSTAR 1" - (americano) - primeiro satélite ativo de comunicações

Data: 10/07/1962;

- "TELSTAR 2" - Ano: 1963;

- "RELAY E SYNCOM": -RELAY 1: de órbita baixa,

Data: 13/12/1962;

: - SYNCOM 2: de órbita geo - síncrona,

Data: 26/07/1963;

A combinação desses dois satélites gerou uma conversa ao vivo entre o Rio de Janeiro, Lagos (Nigéria) e New-Jersey (E.U.A.);

- "SYNCOM 3" - transmitiu as Olimpíadas do Japão

Data: 08/1964;

- "BRASILSAT 1 e 2" - (brasileiros) - transmitem imagens de televisão e sinais em órbita geo-estacionária

- "MOLNIYA" - (antiga União Soviética) - rede de comunicação doméstica formada por um conjunto de satélites com órbitas altamente elípticas e apogeu no hemisfério Norte. Cada série Molniya é composta por 4 pares de satélites com 90 graus de espaçamento entre eles.

- "MOLNIYA 2" - Ano: 1971;

- "MOLNIYA 3" - Ano: 1974;



- "STATSIONAR 1" - (antiga União Soviética) de órbita geo-estacionária

Ano: 1975;

- satélites de SENSORIAMENTO REMOTO: "observam a Terra continuamente, usualmente de uma órbita polar..."

Usados para estudar características geológicas, vegetação e outros recursos terrestres.

- "LANDSAT 1" - (NASA) - primeiro satélite de sensoriamento remoto captando sinais da superfície da Terra e enviando-a de volta para a Terra, aonde aparelhos captadores transformam estes sinais em imagens finais.

Ano: 1972;

- "LANDSAT 2" - Ano: 1978;

- "LANDSAT 3" - Ano: 1978;

- "LANDSAT 4 e 5" - Ano: 1982;

- "HCMM" - (americano) - Missão de Mapeamento da Capacidade de Calor

Ano: 1978;

- "SEASAT" - (americano) - estuda os oceanos do Mundo, colhendo informações sobre os ventos, temperaturas, alturas das ondas, tempestades, etc...

Ano: 1978;

- "COSMOS - 1076" - (antiga União Soviética) - estuda os oceanos

Ano: 1979;

- "METEOR-PRIRODA" - continuou os estudos de recursos terrestres

Ano: 1981;

- "SPOT 1" - (francês) - que estudou a agricultura, as florestas, exploração de minérios, óleos e a produção de mapas

Ano: 1986;

- "ERS 1" - (europeu) - ligado à topografia

Ano: 1989;

- "TOPEX" - (europeu e americano) - também topográfico

Ano: 1991;

- "MOS 1" - (japonês) - topográfico

Ano: 1987;

- "RADARSAT" - (canadense) - topográfico

Ano: 1991;



E ainda por lançar, nesta área:

-“MECB” - (brasileiro)

Ano previsto: 1998;

-“CBERS 1 e 2” - (chinês e brasileiro)

Ano previsto: à partir de 1997;

-**Sistemas de NAVEGAÇÃO**: “propiciam um meio mais rápido e preciso de determinar a posição de um receptor capaz de captar os sinais enviados pelos satélites”.

Grande número de aplicações, tais como: submarinos, no caso de precisarem lançar mísseis, localização de um usuário na superfície da Terra, determinação de atitude e órbita de outros satélites, etc...

-“TRANSIT” - (americano) - série de satélites de órbita quase polar

Ano: 1959;

-“TRANSIT 5A” - missões operacionais

Ano: 1962;

-“COSMOS 192” - (antiga União Soviética) - série de satélites semelhantes à série TRANSIT

Ano: 1971;

-“GPS” - Sistema de Posicionamento Global - (norte-americano):

experimento atualmente composto de 24 satélites em torno da Terra, dispostos em 6 planos orbitais com uma separação de 60° em seus nodos orbitais, sendo que em cada plano existem quatro satélites espaçados de 90° .

Data: 22/02/1978 (primeiro da série);

-“GLONASS” - Sistema de Navegação Global por Satélites - (antiga União Soviética) equivalente ao GPS, lançados em trios.

Os três primeiros são:

-“COSMOS 1413”;

-“COSMOS 1414”;

-“COSMOS 1415”;

Data: 12/10/1982;



- OUTRAS MISSÕES:

- **satélites CIENTÍFICOS**: destinados à objetivos científicos (campo magnético, fluxo de partículas, distribuição de frequência de radiação que circunda a Terra, etc...), incluem satélites geodésicos e cartográficos.

-**"VOYAGER 1 e 2 "**- sondas que estudam outros corpos celestes, colhendo dados científicos e tirando fotos.

- **satélites METEOROLÓGICOS**: fotografam os sistemas nebulosos, ajudando na agricultura e previsão do tempo.

Ano: 1960;

-**"NIMBUS"** - (americano);

-**"TIROS "** - (americano);

-**"METOR"** - (antiga União Soviética), usaram também alguns satélites da série **MOLNIYA e COSMOS**;

A quantidade e variedade das missões são muito grandes e foge aos objetivos desse trabalho cobrir todas as variantes.

Capítulo III - Princípios Básicos da Mecânica Celeste

3.1 - Introdução:

Este capítulo tem por objetivo uma rápida descrição dos princípios básicos da Mecânica Orbital. A principal referência é Silva (1994).

No movimento orbital as forças que agem nos corpos envolvidos são as mesmas que mantêm os satélites artificiais em movimento em torno da Terra, ou ainda as mesmas que mantêm a própria Terra em torno do Sol, que é o corpo principal no sistema Solar. Num exemplo, assumindo a Terra como corpo principal, os satélites seriam os corpos secundários, sendo suas trajetórias denominadas ÓRBITAS.

O primeiro a estudar esse tipo de movimento foi **Johannes Kepler** que, baseado em dados de **Tycho Brahe**, estabeleceu as três leis do movimento planetário que também são aplicadas à satélites artificiais orbitando a Terra:

Primeira Lei: (1609) - "A órbita de cada planeta é uma elipse tendo o Sol por um dos focos".

Segunda Lei: (1609) - "A linha que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais".

Terceira Lei: (1619) - "O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol".

Quando o movimento ORBITAL for CIRCULAR ocorre um equilíbrio de duas forças:

: - Atração gravitacional (F_g);

: - Força centrífuga (F_c);

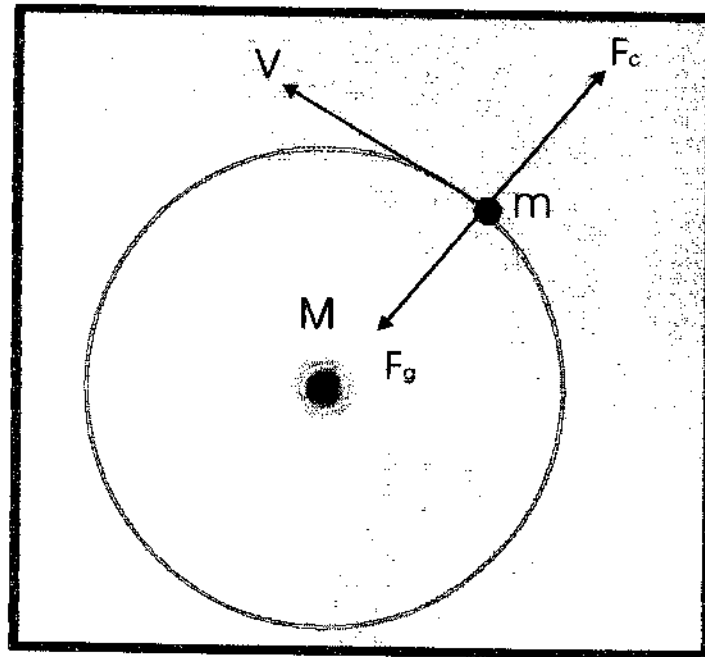


FIG 1-. Satélites em órbita circular (fig. tirada de Silva, 1994)

Essas forças são dadas pelas expressões:

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

onde: G é a constante universal de gravitação

M é a massa da Terra

r é o raio da trajetória

m é a massa do satélite

v é a velocidade orbital do satélite

Já que as forças atuantes estão em equilíbrio " v " só depende do " r ", pois:

$$GM = 398601,2 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

Lembre-se que: $r = R + h$

onde: R é o raio da Terra = 6378,16 km

h é a altitude do satélite em relação à superfície da Terra.

3.2-Geometria das Órbitas

Levando em consideração a **GEOMETRIA DAS ÓRBITAS**, elas podem ser de três tipos básicos: elíptica, parabólica ou hiperbólica. Quanto ao **SENTIDO DE ROTAÇÃO** elas podem ser diretas (sentido anti-horário) ou retrógradas (sentido horário).

A seguir, estudaremos o chamado “**PROBLEMA DOS DOIS CORPOS**”, que é o movimento de dois corpos girando em torno do centro de massa do sistema formado por eles.

A equação que soluciona este problema é:

$$r = \frac{p}{1 + \cos f}$$

onde: r é o raio vetor que vai do foco da cônica ao satélite

f é a anomalia verdadeira

e é a excentricidade da cônica

p é o parâmetro da cônica

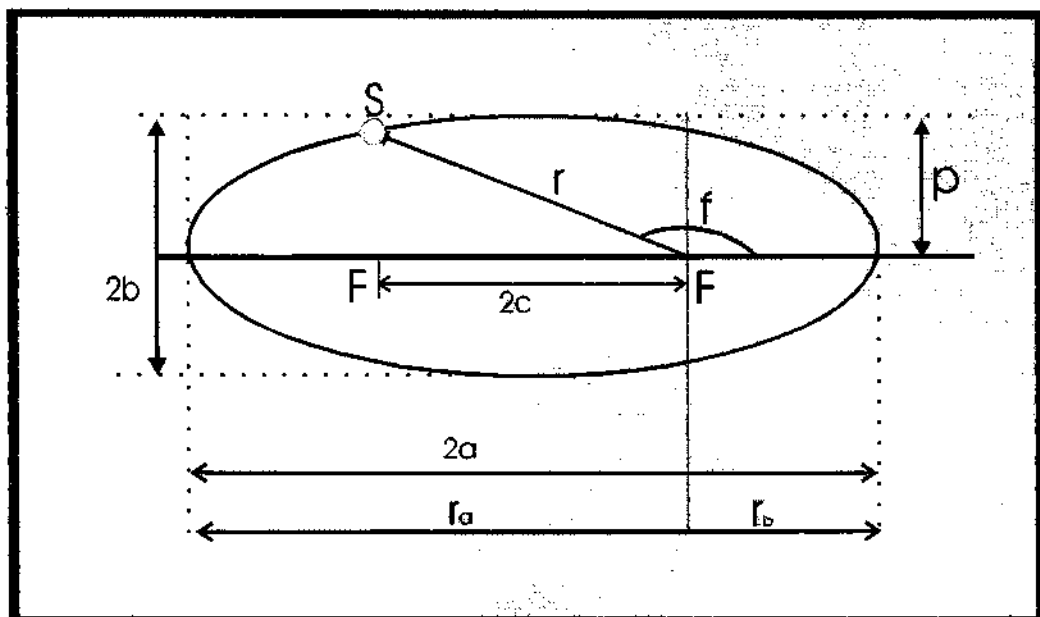


FIG 2 -. Geometria da Elipse (fig. tirada de Silva, 1994)

RELAÇÕES VÁLIDAS PARA ELÍPSE:

$$p = a(1 - e^2)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$E = -\frac{\mu}{2a}$$

$$2a = r_a + r_p$$

$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

onde: a é o semi-eixo maior da elipse
 b é o semi-eixo menor da elipse
 p é o parâmetro da cônica
 r_a é a distância do apoapse (ponto mais distante do foco)
 r_p é a distância do periapse (ponto mais próximo do foco).

OBS: E é a energia mecânica específica, ou seja, a soma da energia potencial específica com a energia cinética específica.

$$\text{Assim: } E = \frac{-\mu}{2a} = -\frac{\mu}{r} + \frac{v^2}{2}$$

Então a velocidade orbital pode ser calculada através da equação:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

3.3 - Órbita no espaço

As órbitas no espaço, às vezes são denominadas de acordo com suas inclinações e excentricidades. Por exemplo: uma órbita com $I = 0^\circ$ é chamada de **órbita equatorial**, enquanto que uma órbita com $I = 90^\circ$, será chamada de **órbita polar**. Uma órbita com I qualquer, mas com $e = 0$ é chamada de **órbita circular**, enquanto que para $e > 0$, a órbita é **excêntrica**.

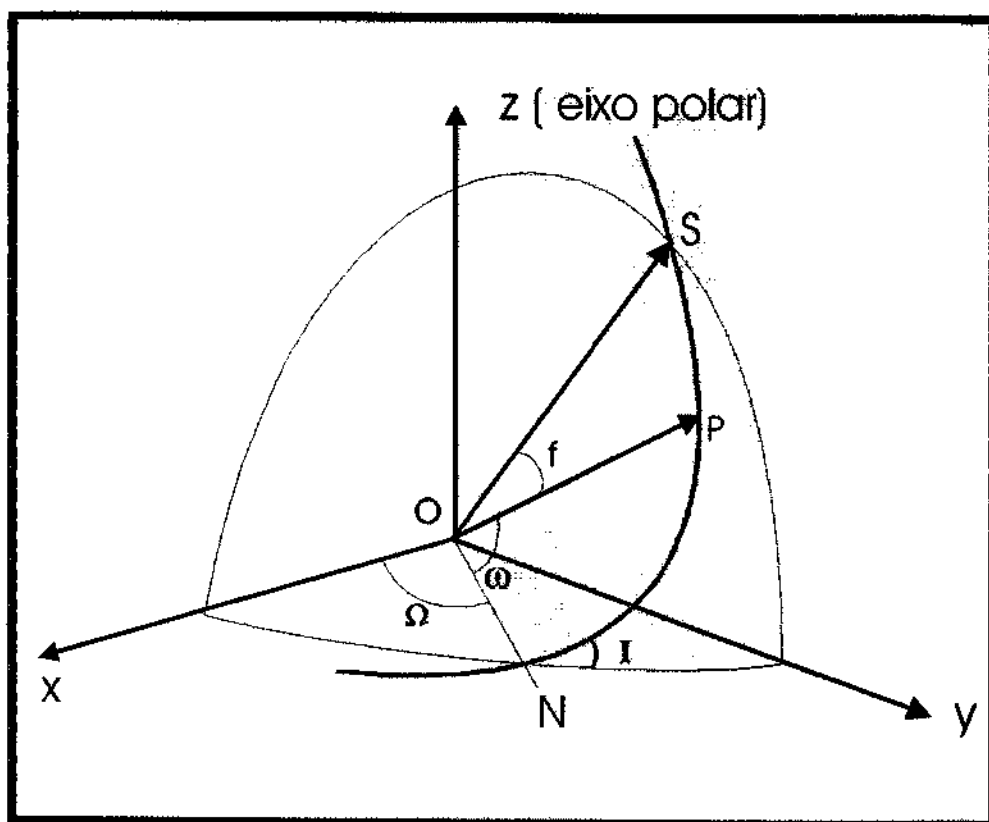


FIG 3 - da órbita no espaço (fig. tirada de Silva, 1994)

onde: I é a inclinação da órbita

Ω é a longitude do nodo ascendente

ω é o argumento do perigeu (P)

S representa o satélite na órbita

3.4 - Momento angular de um satélite

O momento angular específico (h), é uma outra quantidade associada ao movimento orbital a qual representa o “**momento angular total do satélite dividido pela sua massa.**” (para o problema dos dois corpos, h é constante e isso faz com que o plano da órbita seja fixo no espaço).

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

onde: r é o vetor posição da órbita;
 v é o seu vetor velocidade;
 os quais estão no plano da órbita.

O plano da órbita possui uma certa inclinação em relação ao equador, fazendo existir três componentes para cada vetor:

$$\mathbf{r} = r_x + r_y + r_z$$

$$\mathbf{v} = v_x + v_y + v_z$$

3.5 - Lançamento de Satélites Artificiais

Lançar um satélite é transportá-lo de um ponto da superfície da Terra à uma dada órbita.

Isto é feito através de um foguete. Uma das formas mais comuns de foguete, são os de múltiplos estágios que possuem duas ou mais fases propulsadas separadas por fases sem propulsão. Na última fase da missão, o último estágio do foguete, juntamente com o satélite, caminham até uma órbita intermediária de onde o satélite é finalmente separado e caminha para a sua própria órbita através da aplicação de um incremento na velocidade.



Em seguida o satélite é mantido na órbita para a qual foi planejado operando por toda vida útil, dependendo de seus equipamentos e de seu combustível para correções de órbita.

3.6 - Requisitos de Lançamento

Para se lançar um satélite é necessário observar que:

- a órbita do satélite pertence a um plano fixo;
- a base de lançamento está na superfície da Terra, sendo que a mesma se encontra em movimento de rotação;

Então é necessário conhecermos o tempo em que a região orbital cruza o plano orbital desejado, e verificar que existe um vínculo para a inclinação de acordo com a latitude (ϕ): $I \geq (\phi)$

Lembre-se que o plano de todas as órbitas passa pelo centro da Terra.

3.7 - Velocidade de Escape

A velocidade de escape é a velocidade necessária para que qualquer corpo escape de um dado campo gravitacional.

A equação da velocidade de escape é dada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

No ponto de escape a curva tem energia nula (parábola).

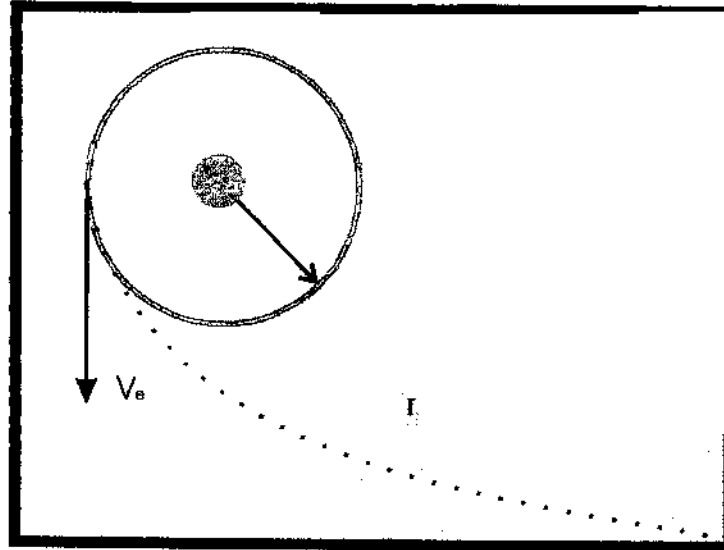


FIG 4 - . Velocidade de escape (fig. tirada de Silva, 1994)

3.8 - Perturbações Orbitais

Algumas perturbações podem afetar a órbita nominal dos satélites, afastando-os dos valores específicos. Essas perturbações são classificadas de acordo com seu efeito perturbador na órbita:

- Perturbação secular** (varia monotonicamente no tempo).
- Perturbação de curto período** (é uma perturbação periódica com período igual ou menor do que a do período orbital do satélite).
- Perturbação de longo período** (é uma perturbação periódica, cujo período tem duração maior que o período orbital do satélite).



As principais forças perturbadoras que afetam a órbita de um satélite tem origem na:

-não esfericidade da distribuição da massa da Terra: porque na realidade a Terra não é nem esférica nem homogênea, sendo ligeiramente achatada e bojuda no equador;

-no arrasto ou fricção produzido pela atmosfera terrestre com o satélite: porque a força não gravitacional que atua nos satélites de baixa altitude age no sentido oposto ao movimento do satélite e tende a diminuir a energia da órbita;

-na atração gravitacional de um terceiro corpo: porque as forças gravitacionais do Sol e da Lua causam variações periódicas em todos os elementos da órbita; mas somente ω , Ω , M , tem variações seculares;

-na pressão de radiação solar: porque a luz solar transfere momento ao satélite, e isso desloca a sua órbita.

Capítulo IV- Desenvolvimento de um Programa para o Problema Restrito de Três Corpos

Neste capítulo é feito um estudo de trajetórias espaciais dentro do problema restrito de três corpos. Utilizei o problema abaixo descrito como motivação para a confecção dos programas.

Uma cápsula Apollo navegando no sistema Terra-Lua foi escolhida para descrever o movimento de um corpo em órbita ao redor de dois corpos muito mais pesados. Assim, supõe-se que a massa da Apollo é desprezível em comparação com as massas da Terra e da Lua. Os três corpos são assumidos como pertencendo a um mesmo plano no espaço e então podemos definir um sistema de coordenadas cartesianas de duas dimensões neste plano. A origem está localizada no centro de massa do sistema Terra-Lua, o eixo horizontal é a linha que atravessa a Terra e a Lua; e a distância entre eles é considerada igual a uma unidade. Assim, se μ é a razão entre a massa da Lua e a massa total do sistema da Terra-Lua, então a Lua e a Terra estão localizadas nas coordenadas $(1 - \mu, 0)$ e $(-\mu, 0)$, respectivamente. Será utilizado um sistema girante de coordenadas, que é um sistema de coordenadas que gira à medida que a Lua gira ao redor da Terra.

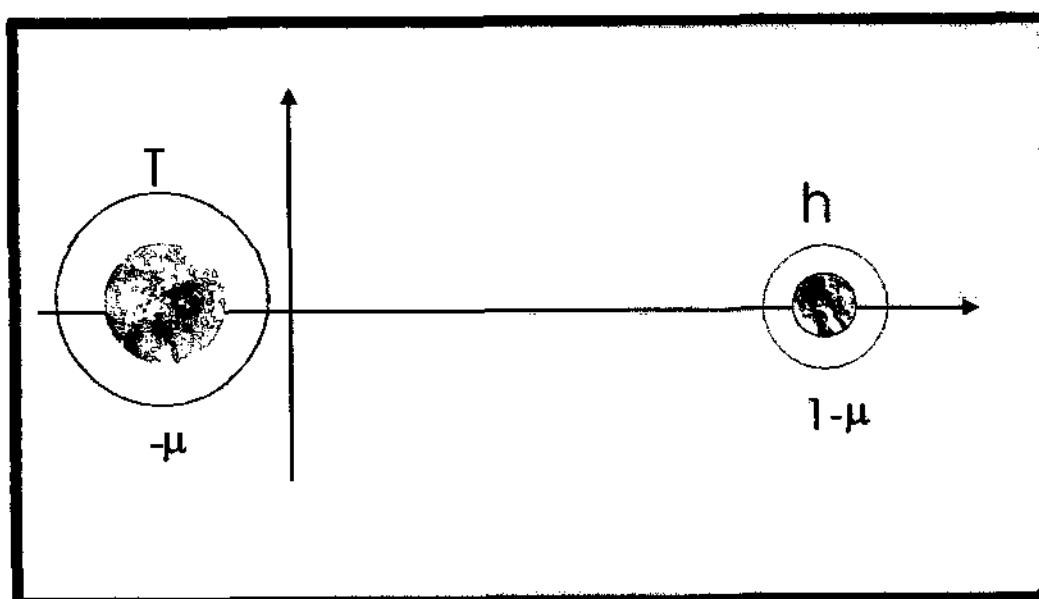


FIG. 5 - Sistema de coordenadas

A posição da Apollo em função do tempo é $(x(t), y(t))$. As equações de movimento deste sistema, deduzidas a partir das leis de Newton e da lei da gravitação universal, são: (Szebehely, 1967)

$$\begin{aligned}x'' &= 2y' + x - \frac{\mu^*(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \mu^*)}{r_2^3} \\y'' &= -2x' + y - \frac{\mu^*y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}\end{aligned}\quad \text{aonde:} \quad (I)$$

$$r_1 = ((x + \mu)^2 + y^2)^{1/2}$$

$$r_2 = ((x - \mu)^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\mu^* = 1 - \mu$$

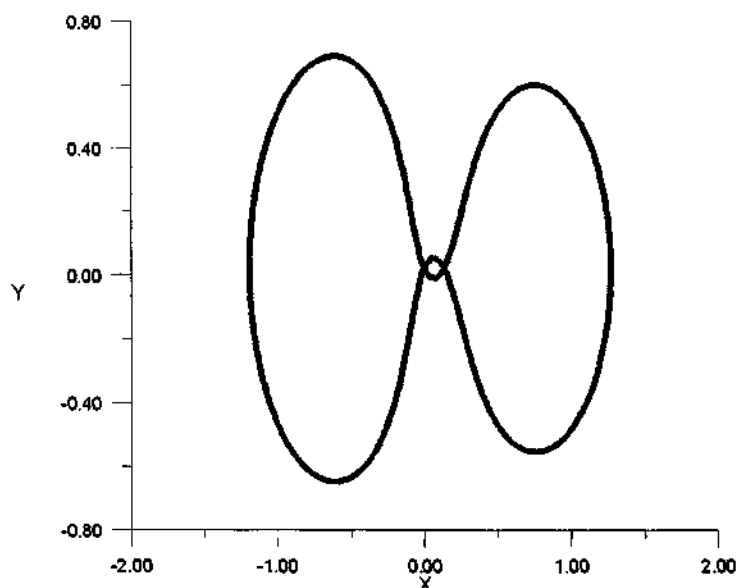
As condições iniciais colocadas no programa, para validação do mesmo, são as obtidas da literatura: $x(0) = 1,2$; $x'(0) = 0$

$$y(0) = 0; y'(0) = -1,04935751$$

$$\mu = 0,0121; \mu^* = 1 - \mu$$

Usando integradores Runge - Kutta 78, a solução encontrada foi periódica no tempo final $T = 6,19216933$. Isto significa que a Apollo parte do lado mais longínquo da Lua com altitude 0,2 vezes a distância Terra-Lua e com certa velocidade. A órbita obtida traz a Apollo para muito perto da Terra, e leva-a num laço grande ao lado oposto à Lua relativamente à Terra, e novamente a traz para perto da Terra e finalmente a leva de volta à posição e velocidades iniciais.

Graficamente:



Expandindo o programa, tornei-o mais geral, acrescentando a terceira dimensão e utilizando um banco de dados para a entrada de dados.

A posição de Apollo em função do tempo, agora é $(x(t), y(t), z(t))$. As equações de movimento deste sistema, deduzidas à partir das leis de Newton e da lei da gravitação universal, são: (Szebehely, 1967)

$$\begin{aligned}x'' &= 2y' + x - \frac{\mu^*(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \mu^*)}{r_2^3} \\y'' &= -2x' + y - \frac{\mu^*y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \\z'' &= -\frac{\mu^*z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}\end{aligned} \quad (\text{II})$$

aonde:

$$\begin{aligned}r_1 &= ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\r_2 &= ((x - \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\end{aligned}$$

As condições iniciais colocadas no programa são para conferir os dados

$$\begin{aligned}x(0) &= 1,2, \quad x'(0) = 0 \\y(0) &= 0, \quad y'(0) = -1,04935751 \\z(0) &= 0, \quad z'(0) = 0\end{aligned}$$

A solução encontrada foi a mesma obtida anteriormente, e já mostrada

Capítulo V - A Manobra Assistida por Gravidade e Algumas Aplicações

5.1 - Introdução:

Neste capítulo a manobra assistida por gravidade é definida e explicada. Essa manobra é também conhecida usualmente como Swing-by. Inicialmente é apresentado um tratamento matemático deste problema baseado numa sequência de interações de 2 corpos. Os resultados principais são derivados deste modelo simples. A apresentação de uma revisão histórica da literatura disponível neste problema é também incluída. Para ex. de aplicações é mostrado como usar o satélite de um planeta para reduzir o custo de missões planetárias e inter-planetárias.

5.2 - A descrição matemática do Swing-by:

O modelo simples de 2 corpos é usado para cada parte da missão. Esta abordagem é usualmente chamada "*patched conics*". Esse trabalho é baseado em Brouck (1988).

É assumido que o sistema é formado por três corpos: M_1 , um corpo macivo no centro do sistema cartesiano; M_2 , um planeta ou satélite de M_1 que é um corpo menor em uma órbita Kepleriana em volta de M_1 ; M_3 , uma nave espacial com massa desprezível ou uma partícula que está viajando em uma órbita genérica ao redor de M_1 , quando faz um encontro com M_2 . Este encontro altera a órbita de M_3 , em relação a M_1 e isto é chamado uma Manobra Swing-by.

De acordo com estas hipóteses, as órbitas de M_1 e M_2 não se alteram.



A fig. descreve o evento e mostra algumas das variáveis envolvidas.

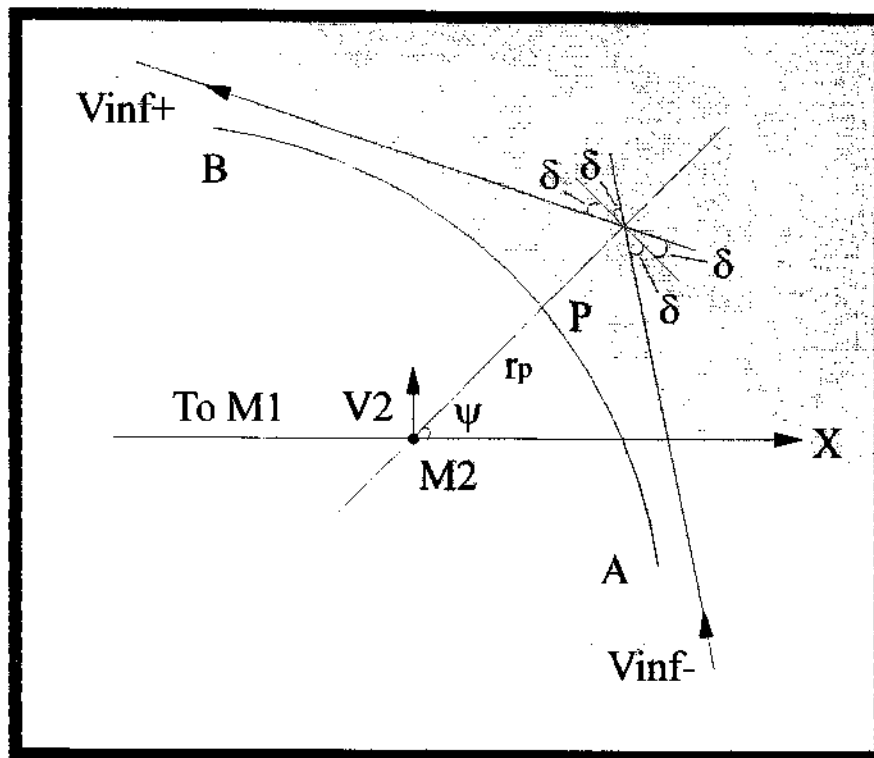


FIG 6-. A manobra Swing-by e algumas de suas variáveis:

As variáveis são:

\vec{V}_2 = a velocidade de M_2 relativo à M_1 ;

$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$ = vetores de velocidade da nave espacial relativa à M_2 antes e depois do encontro;

\vec{V}_i, \vec{V}_o = vetor velocidade na nave espacial relativo à M_1 antes e depois do encontro em um movimento inercial

δ = metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre \vec{V}_∞^- and \vec{V}_∞^+);

r_p = a distância do encontro (ponto P) entre M_2 e M_3 .

Ψ = o ângulo entre a linha periapse (linha conectando M_2 a P) e linha M_1 - M_2 .

Para encontrar as equações necessárias é necessário primeiro usar a teoria das órbitas hiperbólicas para se obter uma expressão para o δ . Esta expressão é:

$$\sin(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (5.1)$$

onde: $\mu_2 = M_2 = Gm_2$, sendo G a cte gravitacional.

À partir desta equação e da última figura é possível identificar que as variáveis independentes que descrevem completamente a manobra Swing-by são os três parâmetros seguintes:

- i) $|\tilde{V}_\infty|$, a magnitude de velocidade da nave espacial no infinito;
- ii) r_p , a distância periapse;
- iii) Ψ o ângulo de aproximação.

A aproximação "patched conics" tem três fases:

- i) Na primeira M_2 é negligenciado e o movimento de M_3 ao redor de M_1 é considerado uma órbita Kepleriana;
- ii) Na segunda, é assumido que M_3 entra na esfera de influência de M_2 . Então a velocidade \tilde{V}_∞^- é calculada à partir da equação abaixo:

$$\tilde{V}_\infty^- = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 \quad (5.2)$$

(ver fig. 7) e o efeito de M_1 é negligenciado. O movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico no caso de interesse para a presente pesquisa. Nesta órbita hiperbólica a nave espacial M_3 escapa de M_2 e seu vetor velocidade (com relação a M_2) rotaciona por um ângulo 2δ , mas mantém sua magnitude constante. Então a nave espacial cruza novamente a esfera de influência de M_2 , e a abandona para retornar para uma órbita Kepleriana em torno de M_1 .

Neste ponto a velocidade \tilde{V}_∞^+ é dado por:

$$\tilde{V}_\infty^+ = \tilde{V}_0 - \tilde{V}_2 \quad (5.3)$$

iii) Após o que a nave espacial está em uma nova órbita Kepleriana ao redor de M_1 e o Swing-by está completado.

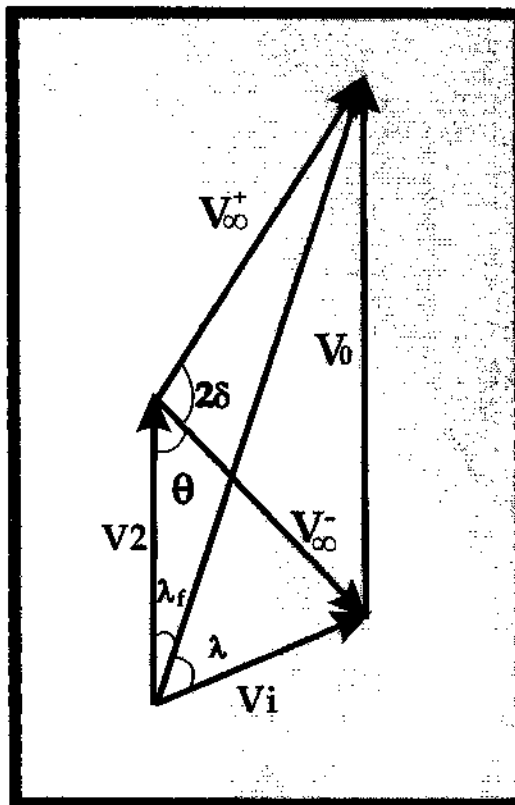


Fig 7 - Soma de vetores velocidades

onde : V_1 = velocidade inercial antes do SB

: V_0 = velocidade inercial depois do SB

: V_2 = velocidade inercial do corpo

: \vec{V}_{∞}^- = velocidade angular do corpo antes do SB

: \vec{V}_{∞}^+ = velocidade angular do corpo depois do SB

O estudo das diferenças entre as órbitas antes e após esse encontro (etapas i, e iii) e algumas de suas aplicações são os principais tópicos desse capítulo.

A primeira quantidade importante calculada é $\Delta\vec{V} = \vec{V}_0 - \vec{V}_1$, a diferença entre as velocidades inerciais antes e após o Swing-by. A partir de um diagrama de adição de vetores é possível demonstrar que:

$$\Delta V = |\Delta\vec{V}| = 2|\vec{V}_{\infty}^-| \sin(\delta) = 2V_{\infty}^- \sin(\delta) \quad (5.4)$$

e que $\Delta\vec{V}$ faz um ângulo $\Psi + 180^\circ$ com a linha M_1-M_2 (ver fig. 8).

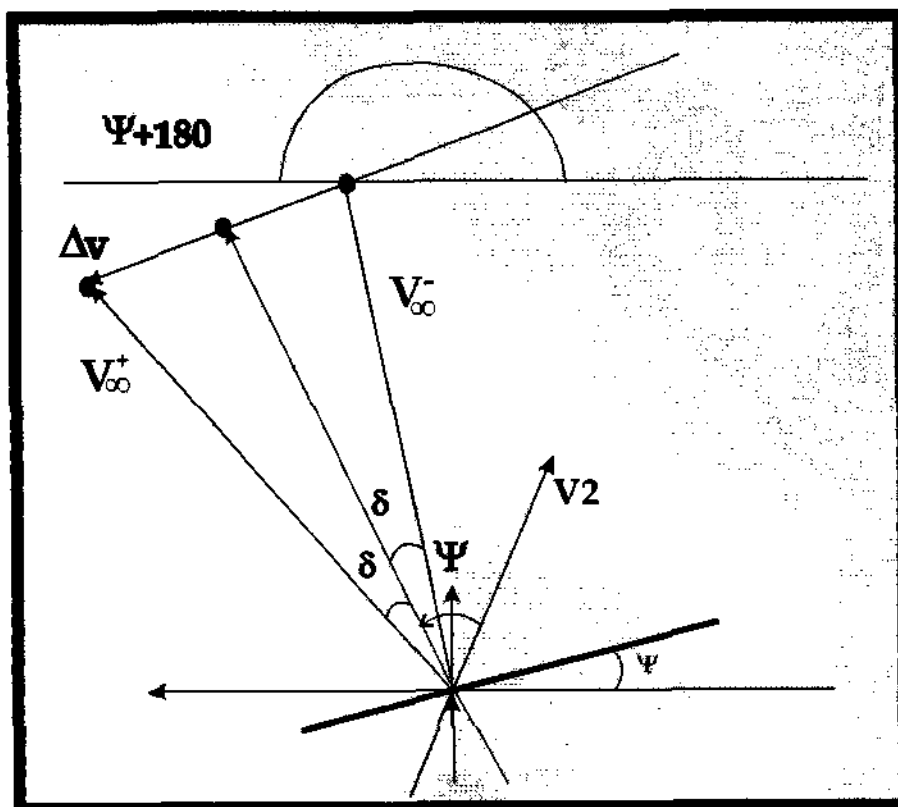


Fig. 8 - Vetores velocidade

Este fato fornece os seguintes componentes para o incremento na velocidade:

$$\Delta \dot{X} = -2V_{\infty} \sin(\delta) \cos(\psi) \quad (5.5a)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_{\infty} \sin(\delta) \sin(\psi) \quad (5.5b)$$

A segunda quantidade importante é o momento angular C . à partir de sua definição, é possível obter a expressão: $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$, que nos fornece a equação $\Delta C = X\Delta\dot{Y} + \Delta X\dot{Y} - Y\Delta\dot{X} - \Delta Y\dot{X}$ para sua primeira variação. Esta equação se torna $\Delta C = d\Delta\dot{Y}$ sob a condição de que o encontro é instantâneo ($\Delta X = \Delta Y = 0$) e que para $t = 0$, temos $X = d$ e $Y = 0$. Então, combinando este resultado com a expressão para $\Delta\dot{Y}$ (equação 5.5-b) o resultado é:

$$\omega \Delta C = -2V_2 V_{\infty} \sin(\delta) \sin(\psi) \quad (5.6)$$

A terceira e última quantidade derivada aqui é variação da energia. Isto é feito por subtração direta da energia após o encontro: $E_+ \left(= \frac{1}{2} \left[(\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2 \right] \right)$, da energia antes $E_- \left(= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \right)$. O resultado é:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin(\delta) \left[V_\infty \sin(\delta) - (\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi)) \right] \quad (5.7)$$

Esta equação pode ser simplificada (Broucke, 1988) para

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\psi) \quad (5.8)$$

Olhando para equações 5.6 e 5.8 um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta E = \omega \Delta C \quad (5.9)$$

Algumas consequências importantes dessas equações podem ser derivadas estudando a equação 5.8 com maiores detalhes. Os parâmetros V_2 e V_∞ são quantidades positivas (eles são as magnitudes dos dois vetores velocidades), assim como $\sin(\delta)$ (porque $0 < \delta < 90^\circ$). Então o único parâmetro que afeta o sinal de ΔE é o $\sin(\psi)$.

A conclusão é que para valores de ψ no intervalo $0 < \psi < 180^\circ$, ΔE é negativo (decréscimo de energia), e para ψ no interalo $180^\circ < \psi < 360^\circ$, ΔE é positivo (acréscimo em energia).

Então as conclusões finais são:

* Se o Swing-by ocorre na frente de M_2 há um decréscimo na energia de M_3 , com uma perda máxima quando $\psi = 90^\circ$ ($\Delta\vec{V}$ oposto a \vec{V}_2);

* Se o Swing-by ocorre na atrás de M_2 há um aumento na energia de M_3 , com um ganho máxima quando $\psi = 270^\circ$ ($\Delta\vec{V}$ alinhado a \vec{V}_2).



Revisão Histórica

A importância das trajetórias assistidas pela gravidade (ou Swing-by) podem ser bem entendidas pelo número de missões que voaram ou estão programadas para voar usando esta técnica. Um exemplo bem sucedido foi o das missões Voyager que voaram para planetas exteriores do sistema solar, com o uso de swing-by sucessivos nos planetas visitados onde ganhavam energia, (Kohlhase e Penzo, 1977). As trajetórias swing-by tem uma variedade de aplicações, tais como:

1- o uso do planeta Vênus para uma viagem da Terra até Marte (Szebehely, 1965; Hollister e Prussing, 1966; Striepe e Braum, 1991);

2 - o uso do planeta Júpiter para fazer uma alteração no plano orbital na trajetória da nave espacial. Para fazer isso foi obtido um plano orbital perpendicular a eclíptica com a finalidade de observar os polos do Sol na missão Ulysses (Carvell, 1985);

3 - o uso de swing-by com a Terra ou outro planeta interior para atingir o exterior do sistema solar (Byrnes e D'amario, 1982; D'amario e Byrnes, 1983; Weistein 1992; Swenson, 1992);

4 - o uso da Lua para lançar uma nave espacial para uma órbita elíptica ou hiperbólica ao redor da Terra (Nock e Uphoff, 1979);

5 - o uso de sucessivos swing-bys com a Lua para obter geometrias desejáveis das órbitas das naves espaciais ao redor da Terra, tais como os satélites que observam fenômenos solares. Maiores detalhes são dados por Farquhar e Dunham (1981) e Marsh e Howell (1988);

6 - o uso de múltiplos swing-bys com propulsão nos satélites de um grande planeta (Júpiter ou Saturno) para fazer uma viagem através desses satélites. Métodos de otimização são aplicados nesse caso para economizar combustível usado na parte propulsiva da missão, (D'amario et. al., 1979; D'amario, Byrnes e Stanford, 1981 e 1982). O número de swing-bys neste tipo de missão é superior a dez.

Todas as aplicações acima estão no campo da astronáutica, sendo muito recentes se comparada a literatura no campo da astronomia. A mecânica celeste do swing-by já é conhecida pelos astrônomos há cerca de 150 anos. Laplace, entendeu o mecanismo completo da assistência pela gravidade. Posteriormente, alguns pesquisadores derivaram equações analíticas para os efeitos do swing-by e/ou produziram resultados numéricos neste tópico, especialmente no problema de escape e captura de cometas por Júpiter (veja Broucke, 1988; Broucke e Prado (1993) para maiores detalhes), que é essencialmente o mesmo problema.



O conceito de assistência pela gravidade, no programa espacial americano, apareceu inicialmente em JPL, no início dos anos sessenta. O primeiro documento do JPL que encontramos nesse assunto foi um *Memorando* (312-130) elaborado por M. Minovich (1961), datado de 23/agosto/1961. Este documento contém as fórmulas para alterações de energia no semi-eixo maior. Uma revisão bem detalhada da atividade de Minovitch foi efetuada recentemente (Dowling et. al., 1990 e 1991).

Outra aplicação importante da assistência pela gravidade, originado inicialmente no JPL, é a missão múltipla planetária e especialmente a grande viagem entre os planetas, concebida por Gary Flandro (1966). As numerosas aplicações são bem conhecidas para serem descritas em detalhes neste trabalho. Algumas delas são citadas brevemente:

- 1973-74: - Mariner 10 para Venus + Mercúrio + Mercúrio;
- 1972: - Pionner 10 para Júpiter + exterior do sistema solar (OOSS);
- 1973: - Pionner 11 para Júpiter + Saturno + OOSS;
- 1977: - Voyager 2 para Júpiter + Saturno + Urano + Netuno + OOSS;
- 1989: - Galileo para Vênus + Terra + Marte + Júpiter + satélites de Júpiter;
- 1990: - Ulisses para Júpiter + Sol (fora da eclíptica).

Além das atividades do JPL na assistência pela gravidade lunar, outro ramo importante de contribuições é dado por R. W. Farquhar e seu grupo. Este trabalho foi bem documentado em uma edição especial do *Journal of Astronautical Sciences* (vol.33, nº 3, 1985) nos artigos de Farquhar, Muhonen, Church, Dunham, Davis, Efron, Yomans e Schanzle (Farquhar, Muhonen e Church, 1985; Muhonen, Dunham e Davis, 1985; Dunham e Davis, 1985; Efron, Yomans e Schanzle, 1985). A missão ICE (ISEE-3) para a Lua e para o cometa Giacobini-Zimmer são especialmente marcantes.

Uma aplicação marcante, mais recente, da assistência pela gravidade foi o encontro com a Lua da nave espacial japonesa Muses-A/Hiten em 5 de agosto de 1990 e a captura lunar em 19 de dezembro. O trabalho feito no JPL por E. A. Belbruno e J. K. Miller (Belbruno 1987 e 1990; Belbruno e Miller, 1991) foi relacionado com esta missão ou muito semelhante em natureza. Um estudo numérico deste tipo de problema de captura foi recentemente publicado por pesquisadores japoneses (Yamakawa et. al. , 1992). Uma segunda missão japonesa envolvendo um swing-by lunar foi Geotail em 1992.



O conceito de assistência pela gravidade não é descrito em muitos livros de mecânica celeste. Uma exceção é H. O. Huppe, "Introduction to Astronautics" (1967), páginas 144-147 no volume 1 e páginas 159-62, no volume 2.

Existem também os livros de M. H. Kaplan (1976, páginas 90-95) e R.B. Battin (Astronautical Guidance, 1965, páginas 150-155). Battin fornece o diagrama fundamental para as trocas de velocidade, na página 151.

Os conceitos básicos da assistência pela gravidade são também descritos por C. Uphoff (1989) em um Simpósio AAS realizado em abril 1989.

No futuro este tópico poderá ser muito importante, porque a economia em combustível obtida pelas manobras assistidas pela gravidade tem um grande impacto no custo total da missão. A redução deste custo é atualmente a grande prioridade.

Capítulo VI - Estudo Numérico de Manobras Assistidas por Gravidade

A seguir, foi estudado o trabalho sobre Manobras Swing-by (trajetórias espaciais assistidas por gravidade) que utilizam Júpiter para alterar a Energia e o Momento Angular (Prado, 1993).

O problema principal é simular e classificar trajetórias passando próximo à Júpiter. É dada atenção especial para checar se alguma dessas trajetórias passa próximo à Terra antes e/ou depois do encontro com Júpiter.

Para resolver esse problema é assumida a presença de três corpos: O Sol, Júpiter, e uma terceira partícula de massa desprezível (a nave espacial).

É assumido também que o sistema total (Sol + Júpiter + nave espacial) satisfaz as hipóteses do problema de três corpos restrito plano circular; (ou seja: *todos os corpos são pontos de massa, o Sol e Júpiter estão em órbitas circulares em torno do seu centro de massa*).

Com isso, o problema consiste em estudar o movimento da nave espacial próximo ao encontro com o planeta Júpiter (seu movimento é estudado somente próximo a este ponto, porque quando a nave espacial está distante de Júpiter o sistema é governado pela dinâmica de dois corpos, Sol + Nave espacial, onde não há variação de Energia ou Momento Angular).

A Energia e o Momento Angular da nave espacial são calculadas antes e depois do encontro, para detectar a troca de órbita durante a aproximação.

As órbitas são classificadas em 4 categorias:

- *elíptica direta* (Energia negativa e Momento Angular positivo)
- *elíptica retrógrada* (Energia negativa e Momento Angular negativo)
- *hiperbólica direta* (Energia positiva e Momento Angular positivo)
- *hiperbólica retrógrada* (Energia positiva e Momento Angular negativo)

O problema é identificar a categoria da trajetória da nave antes e depois do encontro.

A figura abaixo explica a geometria desenvolvida neste encontro:

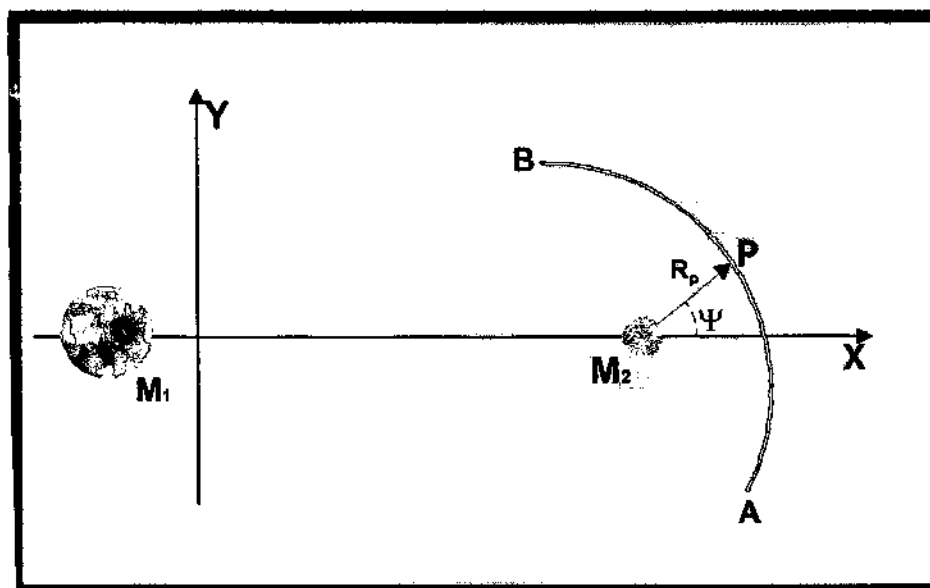


FIG 9 - Geometria do encontro

A nave espacial parte do ponto A, cruza a linha horizontal (Sol-Júpiter), passa por P (periapse da trajetória da nave em torno de Júpiter), e vai para B.

Antes do ponto A e depois de do ponto B a Energia é constante, desprezando-se o efeito gravitacional de Júpiter.

Duas das condições iniciais são identificadas na figura:

- a distância do periapsis R_p (dist. medida entre o ponto P e o centro de Júpiter)
- ângulo ψ (medido do eixo horizontal na direção anti-horária)

A segunda parte do problema é identificar se uma dessas trajetórias passa próximo a Terra em uma ou ambas as direções de tempo (antes e depois do encontro).

Para esse propósito, estendemos a integração numérica em cada direção de tempo até que um dos seguintes eventos ocorra:

a) A nave espacial atinge uma posição dentro da órbita da Terra em volta do Sol. Assumimos que a nave espacial cruza o caminho da Terra no espaço e, em condições próprias de tempo, nós podemos obter um encontro com a Terra.



b) A nave espacial vai para longe do Sistema Solar sem cruzar o caminho da Terra.

Nós assumimos que não há caminho de volta e que não é possível o encontro com a Terra.

c) A nave permanece no sistema Solar, mas leva muito tempo para um encontro com o caminho da Terra. Assumimos que um encontro útil com a Terra não é possível.

Os resultados consistem em gráficos que mostram a mudança da órbita da nave espacial devido ao encontro com o planeta Júpiter para uma grande variedade de condições iniciais. Primeiramente é feita a classificação de todos os encontros entre Júpiter e a nave espacial, de acordo com a troca obtida na órbita da nave espacial

São usadas as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P para esta classificação. Elas estão relacionadas com as órbitas de acordo com as regras mostradas na tabela abaixo.

TABELA 1 Regras para o estabelecimento de letras para as órbitas

Antes:	Elíptica	Elíptica	Hiperbólica	Hiperbólica
Depois:	Direta	Retrógrada	Direta	Retrógrada
Elíptica Direta	A	E	I	M
Elíptica Retrógrada	B	F	J	N
Hiperbólica Direta	C	G	K	O
Hiperbólica Retrógrada	D	H	L	P

Para indicar que uma dessas duas órbitas tem possibilidades de 1 ou 2 encontros com a Terra, utiliza-se as seguintes convenções:

1) Letras MAIÚSCULAS para órbitas que não cruzam o caminho da Terra ao redor do Sol e não têm possibilidade de um encontro com a Terra;

2) Letras MINÚSCULAS para órbitas que cruzam o caminho da Terra em volta do Sol, em uma única direção de tempo. Essas órbitas podem ser usadas para enviar uma nave espacial da Terra para Júpiter ou além;



3) Letras MINÚSCULAS NEGRITO para órbitas que cruzam o caminho da Terra ao redor do Sol para ambas direções de tempos. Essas órbitas podem ser usadas para enviar uma nave espacial da terra para Júpiter de 2 modos diferentes: ou da Terra para Júpiter e de Júpiter para a Terra sem manobras adicionais, se a condição própria de tempo puder ser encontrada.

Os resultados consistem, com essas regras definidas, em assinalar uma dessas letras a uma posição em um diagrama bidimensional que tem o parâmetro ψ no eixo horizontal e o parâmetro J no eixo vertical.

É feito um gráfico para cada valor desejado da distância do perigeu. o mesmo intervalo para as variáveis Ψ ($180^\circ \leq \Psi \leq 360^\circ$) e J ($-1,45 \leq \Psi \leq 1,55$) que foram usados no trabalho de Broucke, são utilizados aqui, porque eles são muito adequados para mostrar as principais características dos gráficos.

O intervalo usado foi de ($180^\circ \leq \Psi \leq 360^\circ$) porque ($0^\circ \leq \Psi \leq 180^\circ$) é simétrico. Assim existe a correspondência entre esses dois intervalos: I-C, J-G, L-O, B-E, N-H, M-D. As órbitas A, F, K e P são inalteradas.

Para decidir o melhor intervalo de valores para o terceiro parâmetro (dist. perigeu). Foram feitas algumas simulações exploratórias. Foi verificado que para valores maiores do que 50 vezes o raio de Júpiter, os efeitos do swing-by são muito pequenos, com exceção de poucos casos.

Então foi decidido fazer gráficos para os valores 1.1, 1.5, 2.0, 5.0, 10.0, e 50.0 raios de Júpiter, os quais mostram bem a evolução das figuras.

A figura 2 mostra os diagramas que cobrem os intervalos desejados.

Partindo de um estudo detalhado desses gráficos e de valores numéricos não mostrados nesse trabalho pode-se confirmar as previsões teóricas de que:

1) Quando o vôo é em frente de Júpiter ($0^\circ \leq \Psi \leq 180^\circ$) há uma perda de energia. Essa perda é máxima quando $\psi = 90^\circ$

2) Quando o vôo é por trás de Júpiter ($180^\circ \leq \Psi \leq 360^\circ$) há um aumento de Energia. Este aumento é máximo quando $\psi = 270^\circ$

Para entendermos melhor o processo, algumas trajetórias são mostradas nos referenciais fixo e rotacional (fig 11). Foram escolhidas órbitas do tipo N, J, e B como

exemplos A tabela 2 dá valores numéricos para essas trajetórias, incluindo as condições iniciais.

Os valores numéricos para os limites envolvidos mostrados nesse trabalho são: (em unidades canônicas)

- 1) distância de Júpiter aos pontos A e B (d_{sj}): 0,5;
- 2) distância limite para a nave espacial ser considerada muito longe do Sistema Solar: 2,0
- 3) tempo limite para a integração numérica quando navegando por uma passagem perto da Terra: 10,0

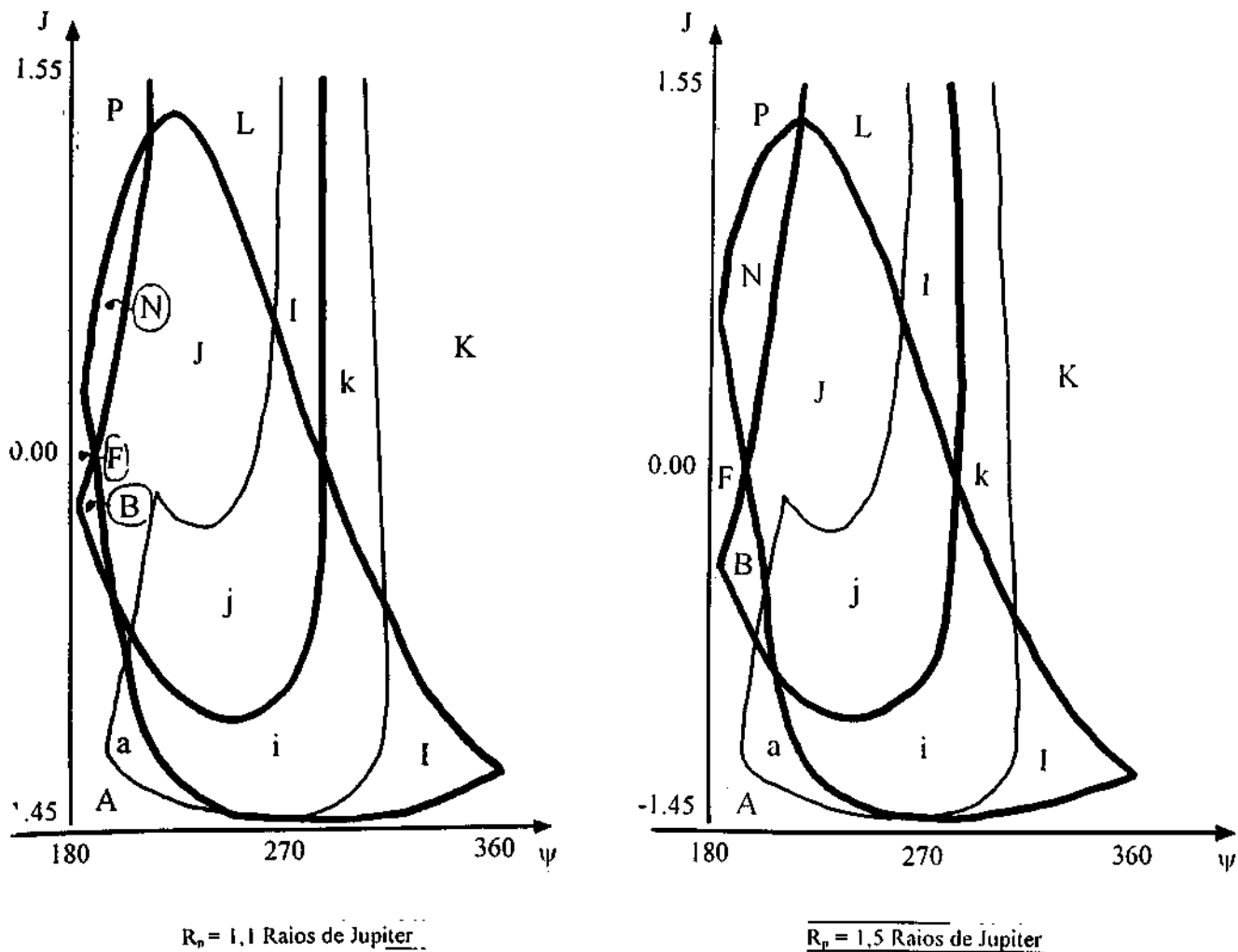


FIG. 10 - Resultados para $R_p = 1.1, 1.5, 2.0, 5.0, 10.0, 50.0$

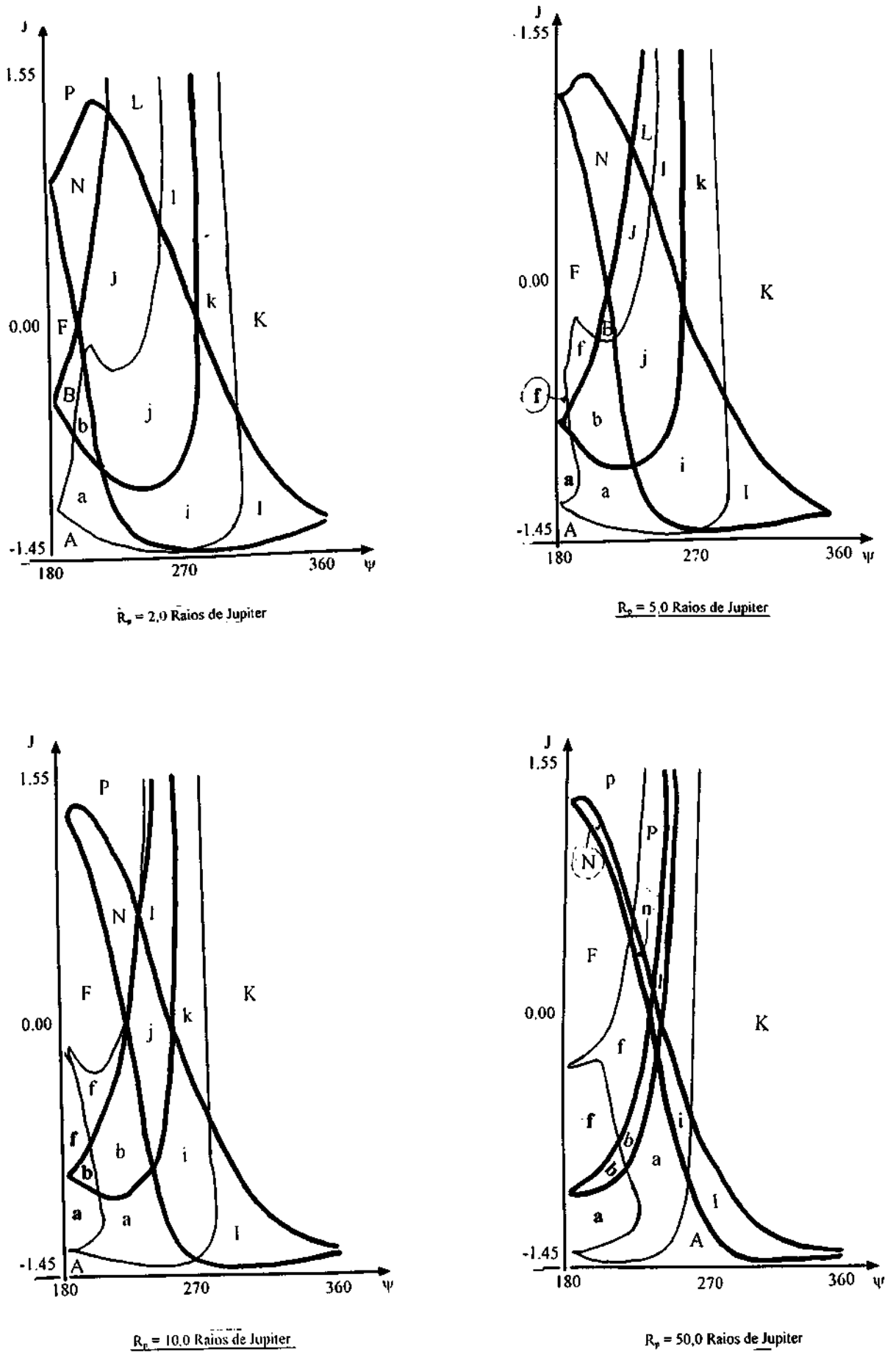


FIG. 10 (cont.) - Resultados para $R_p = 1.1, 1.5, 2.0, 5.0, 10.0, 50.0$

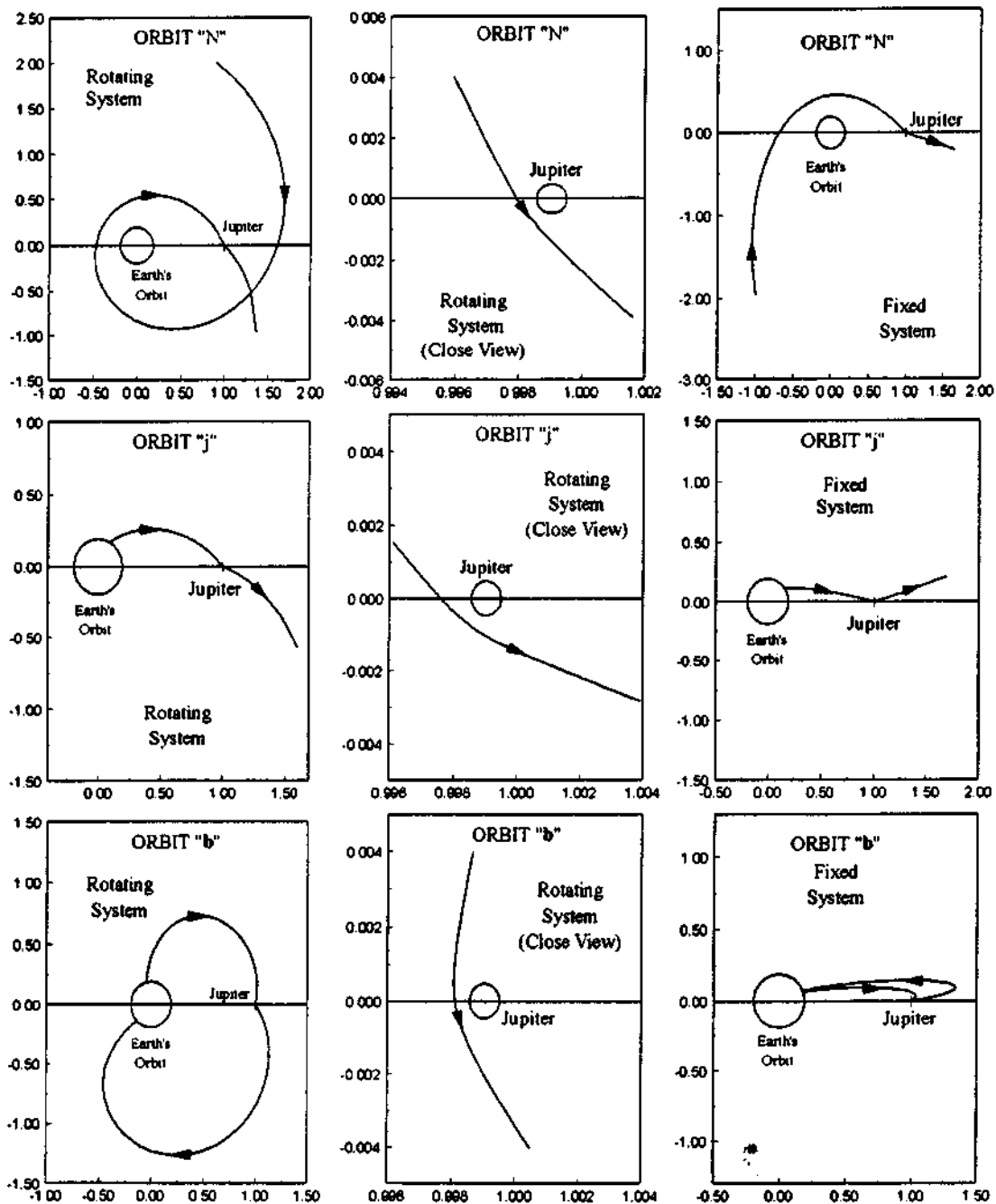


FIG 11 - Exemplos de trajetórias em rotação e sistema referencial fixo

TABELA 2:

orbit	J	R_p	ψ	E_-	E_+	ΔE	C_-	C_+	ΔC
N	0.70	$10R_J$	216	-0.2021	0.2706	0.4727	-0.9021	-0.4294	0.4727
j	0.00	$10R_J$	237	-0.2872	0.4631	0.7503	-0.2872	0.4631	0.7503
b	-0.85	$10R_J$	192	-0.9573	-0.7450	0.2123	-0.1073	0.1050	0.2123

Capítulo VII - Estudo de Manobras Assistidas por Gravidade no Espaço Tridimensional

A partir do estudo do trabalho do capítulo anterior, estendi esse estudo para a terceira dimensão.

Para isto assumimos o sistema total M_1, M_2, M_3 satisfazendo a hipótese do problema restrito tridimensional circular de três corpos:

- a unidade de distância é a distância entre M_1 (o Sol) e M_2 (Júpiter);
- a velocidade angular (ω) de rotação de M_1 e M_2 é assumida ser um;
- a massa do secundário (M_2) é dada por $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ (onde m_1 e m_2 são as massas

reais de M_1 e M_2 , respectivamente) e a massa de M_1 é $(1 - \mu)$, para fazer com que a massa total do sistema seja unitária;

- a unidade de tempo é definida de maneira que o período dos dois primários seja 2π ;
- a constante gravitacional é um.

As equações de movimento utilizadas foram as equações II.

A figura mostra a geometria do problema estudado.

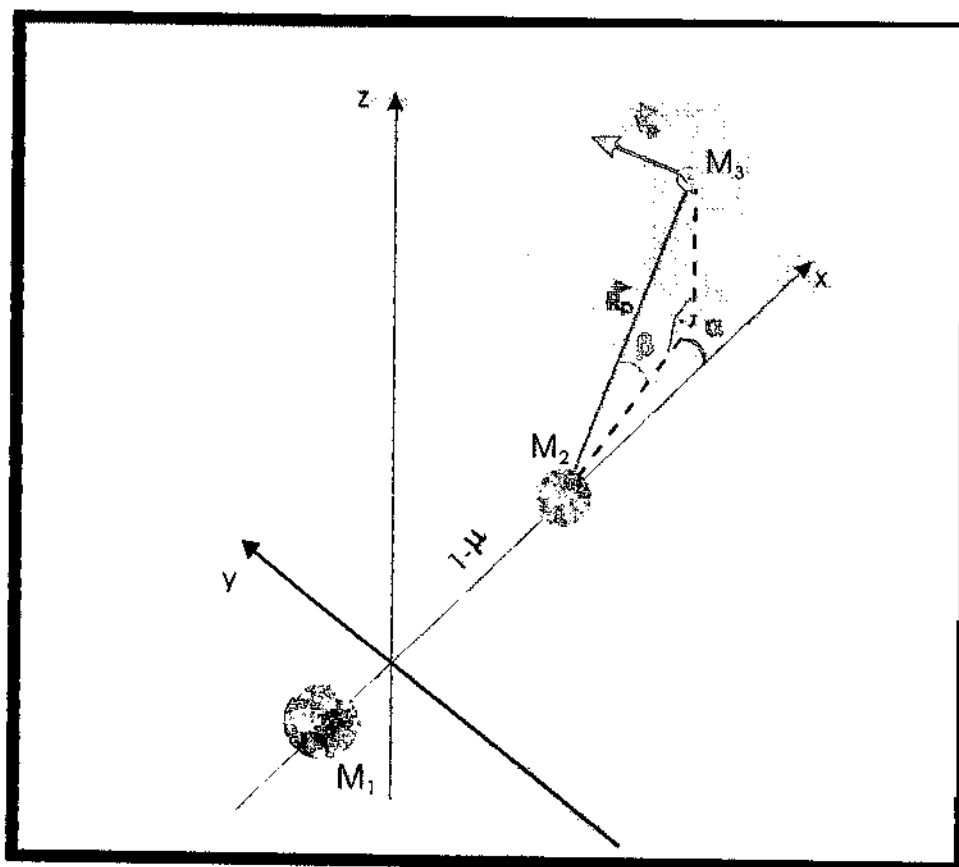


FIG 12 - Geometria para o encontro em 3D

A origem do sistema de referência é situado no centro de massa dos corpos envolvidos. O eixo "x" é a linha que une M_1 e M_2 (no tempo inicial); o eixo "y" é perpendicular ao eixo "x"; e o eixo "z" completa o sistema usual de referência.

As variáveis utilizadas para descrever o problema foram:

a) Dois ângulos: α = ângulo entre a projeção do vetor \vec{R}_p no plano x-y e o eixo x, contado no sentido anti horário e; β = ângulo entre o vetor posição \vec{R}_p e o plano orbital (x-y) dos primários e uma distância (R_p) para especificar a posição do periapse em um sistema de coordenadas esféricas centrado no segundo corpo;

b) A magnitude da velocidade (V_p) do veículo neste instante; (a direção foi assumida como paralela ao plano x-y e perpendicular ao vetor \vec{R}_p)

c) A razão entre as massas dos dois primários, usado como $\mu = 0.0121$ em todas as simulações feitas nesse trabalho (assumindo o sistema Terra-Lua).



O modelo desenvolvido e implementado neste trabalho é aplicável a qualquer sistema de três corpos (Sol-Júpiter-satélite, Terra-Lua-satélite, etc...). O sistema Terra-Lua-satélite foi usado apenas como um exemplo representativo desse problema.

Com base nesse modelo, desenvolvemos o seguinte procedimento para resolver esse problema (baseado em Prado, 1993):

- a) Damos valores arbitrários para os parâmetros: R_p , V_p , α e β ;
- b) A posição inicial e velocidade iniciais são calculadas decompondo os vetores (ver FIG.12). As equações utilizadas são:

$$x = (1-\mu) + R_p \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$y = R_p \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$z = R_p \sin \beta$$

$$V_x = -V_p \cdot \sin \alpha + R_p \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$V_y = V_p \cdot \cos \alpha - R_p \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$V_z = 0$$

b) Integramos as equações de movimento para frente no tempo até que a distância entre M_2 e a espaçonave seja maior do que o limite d . Nós calculamos então, a Energia ($E+$) e o momento angular depois do encontro;

c) a nave espacial foi recolocada no perigeu P , e daí nós integramos numericamente sua órbita de retorno no tempo até a distância d seja alcançada novamente. Nós calculamos então, a Energia ($E-$) e o momento angular antes do encontro;

Os valores limites usados para os cálculos foram:

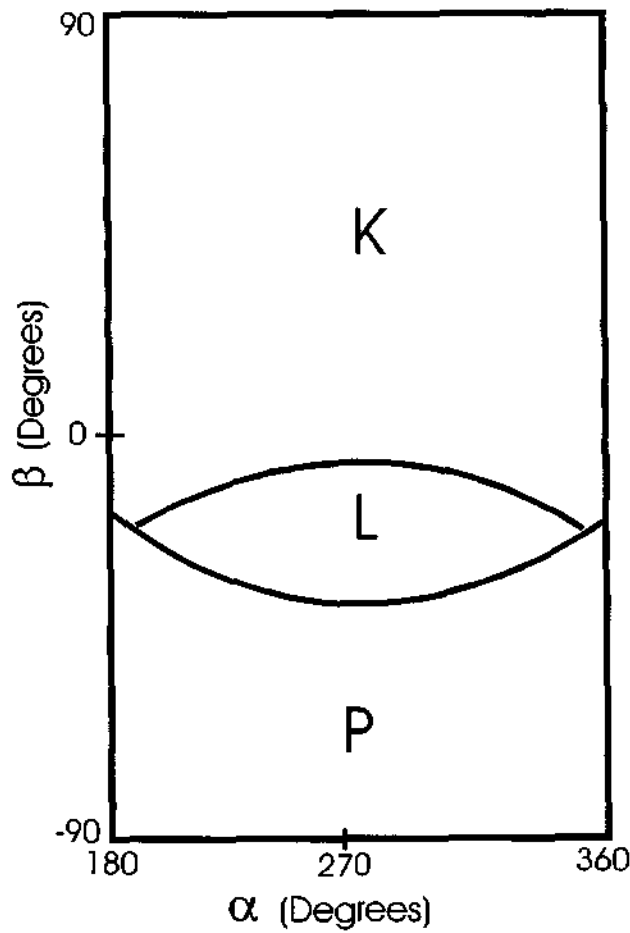
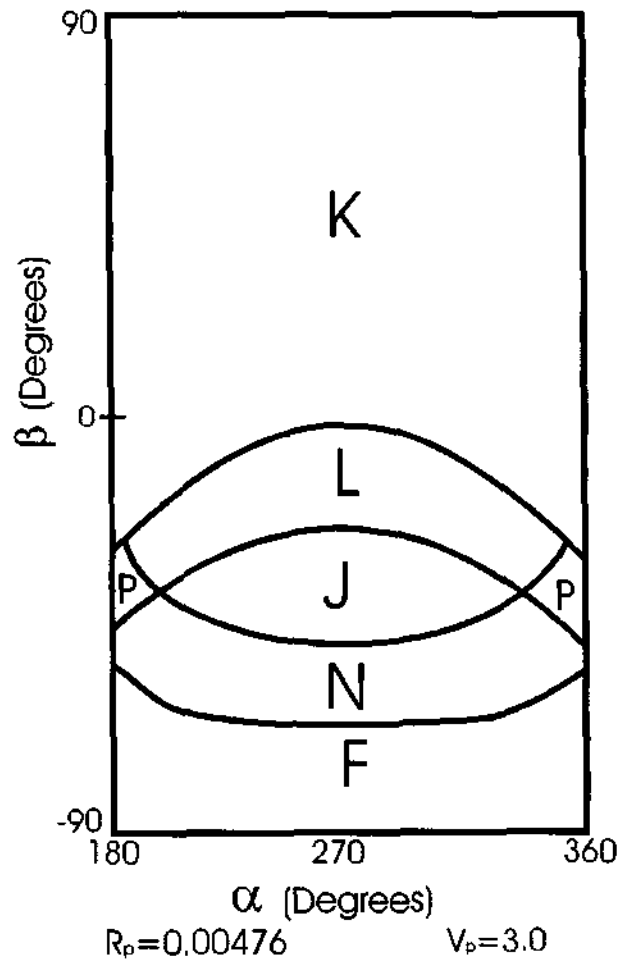
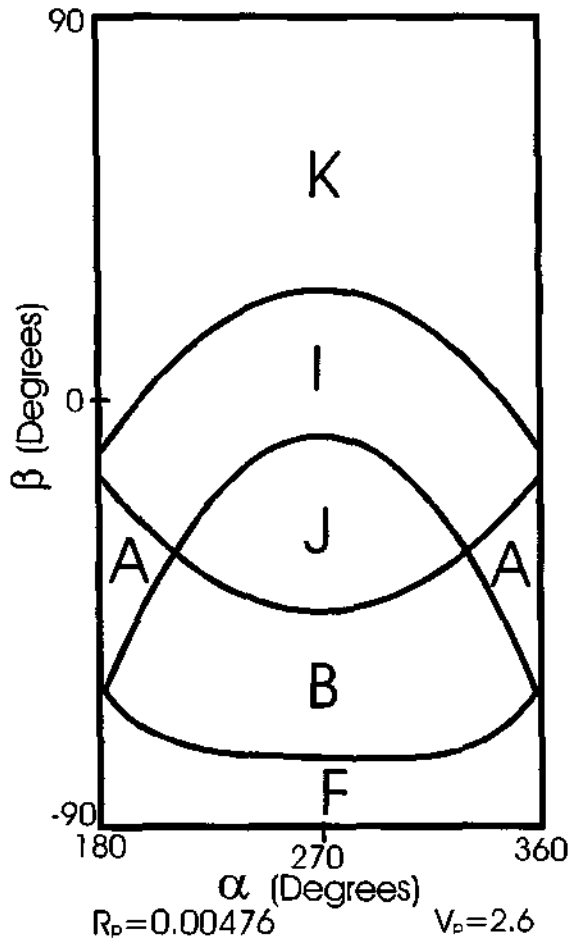
- 1) distância de M_2 aos pontos A e B (d): 0,5;
- 2) distância limite para a nave espacial ser considerada muito longe do sistema: 2,0
- 3) tempo limite para a integração numérica: 10,0

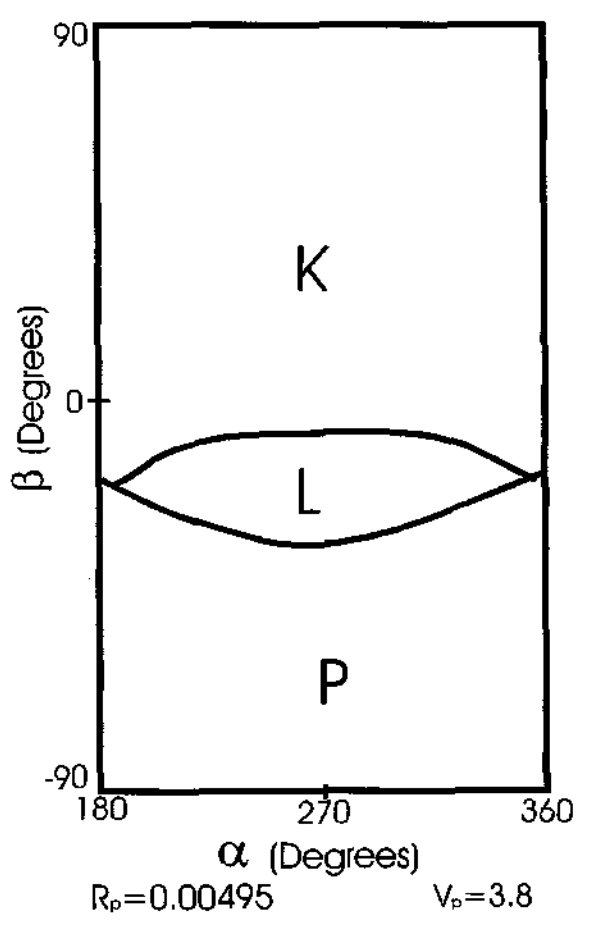
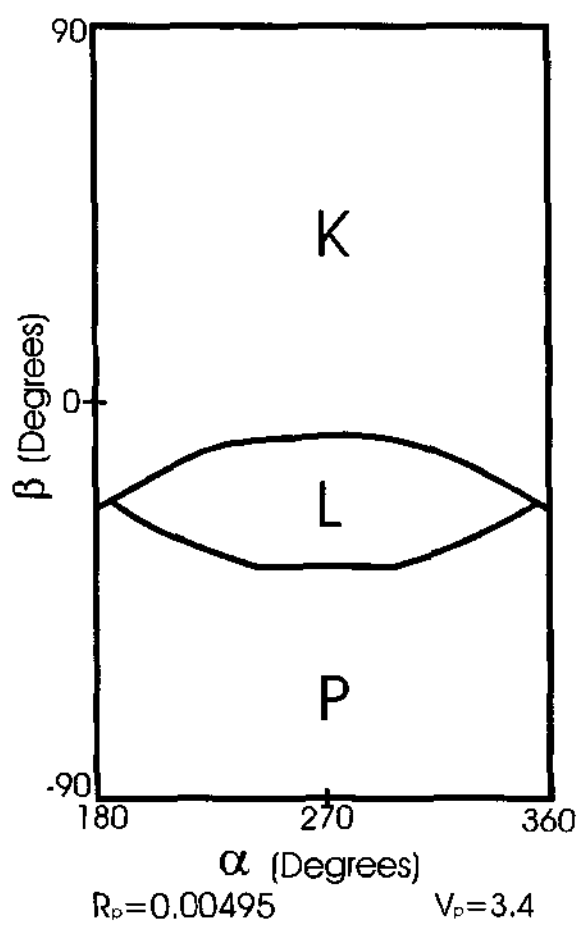
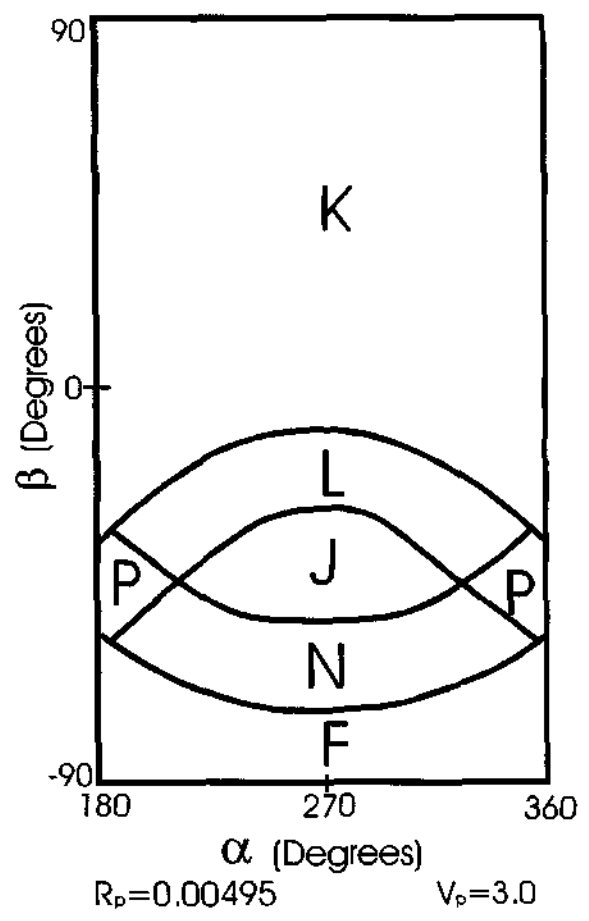
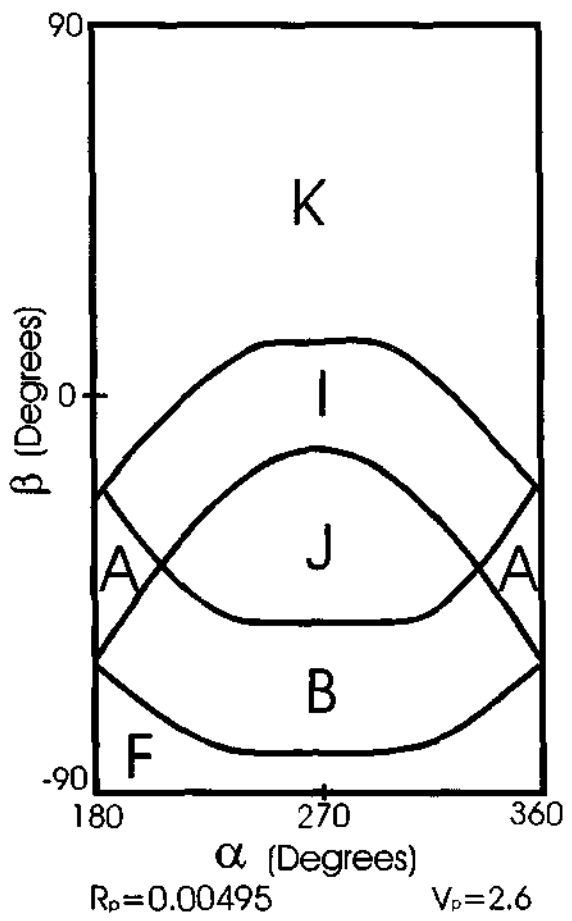


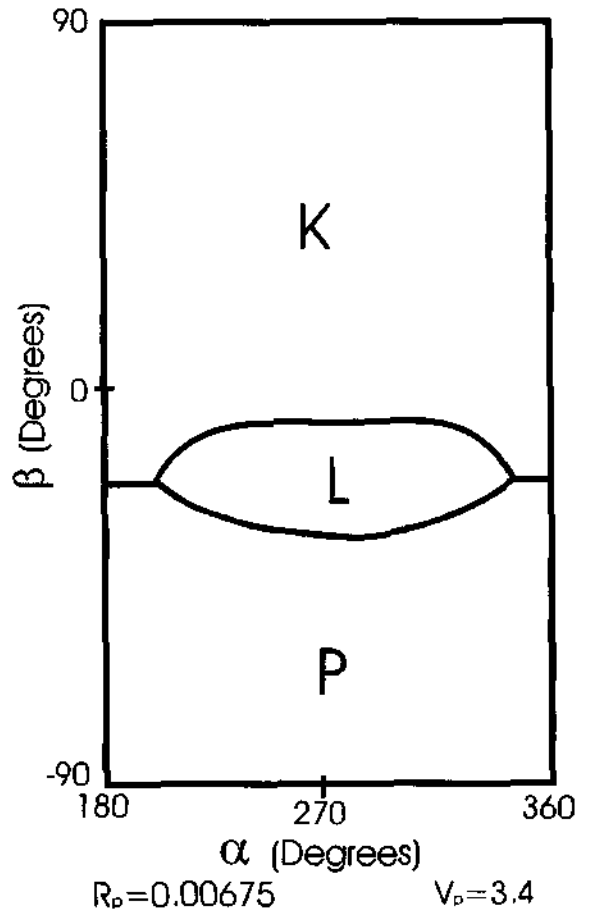
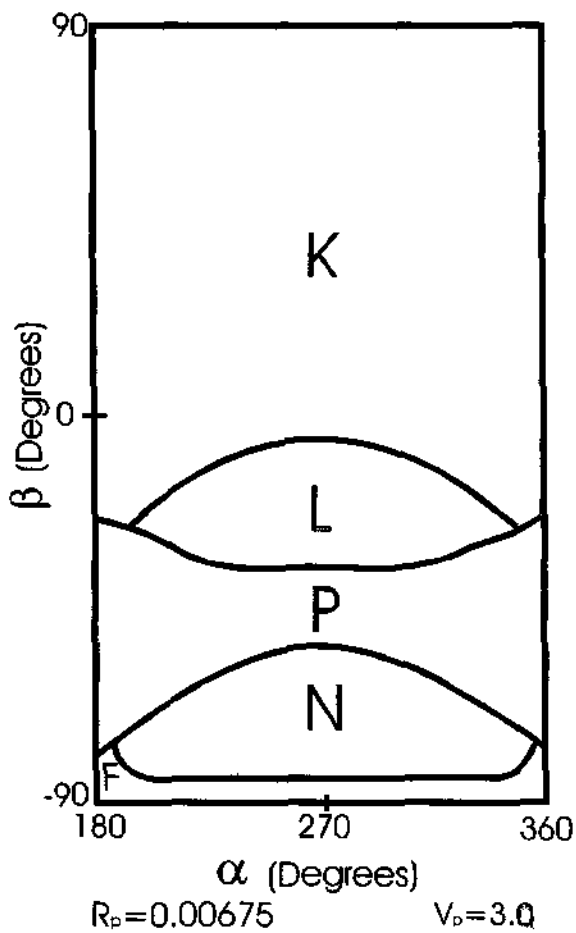
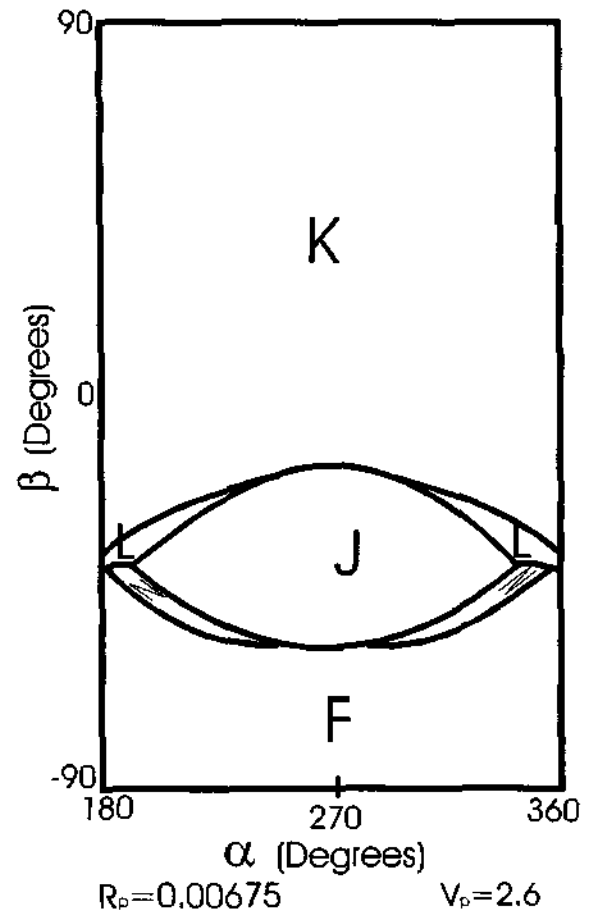
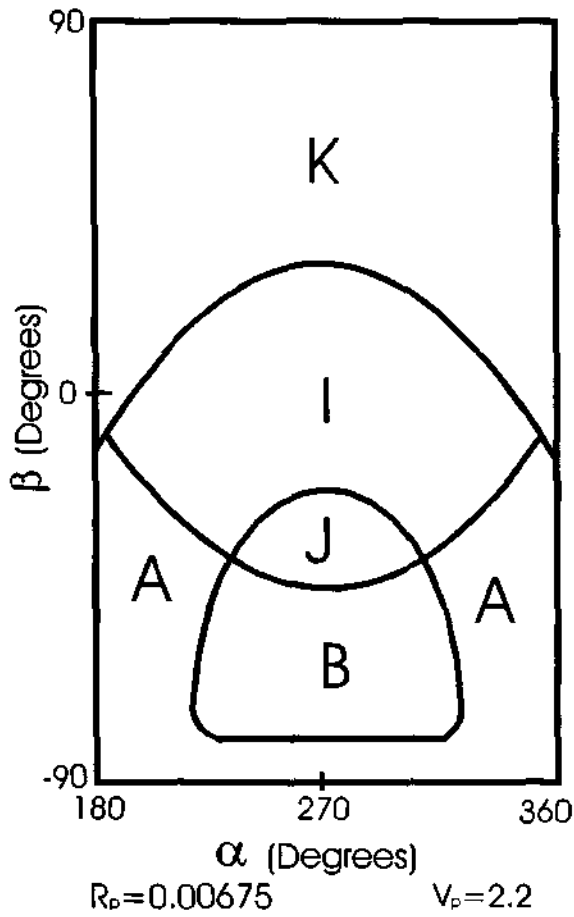
Capítulo VIII - Resultados

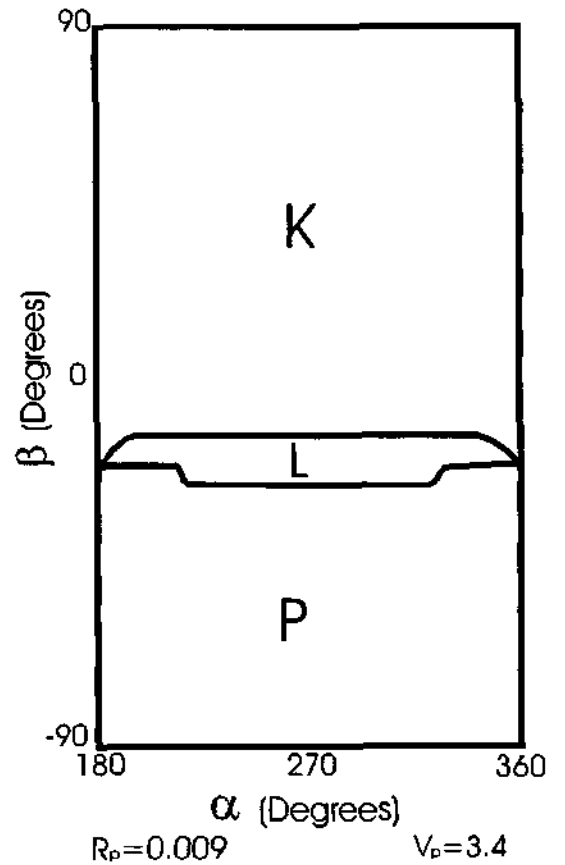
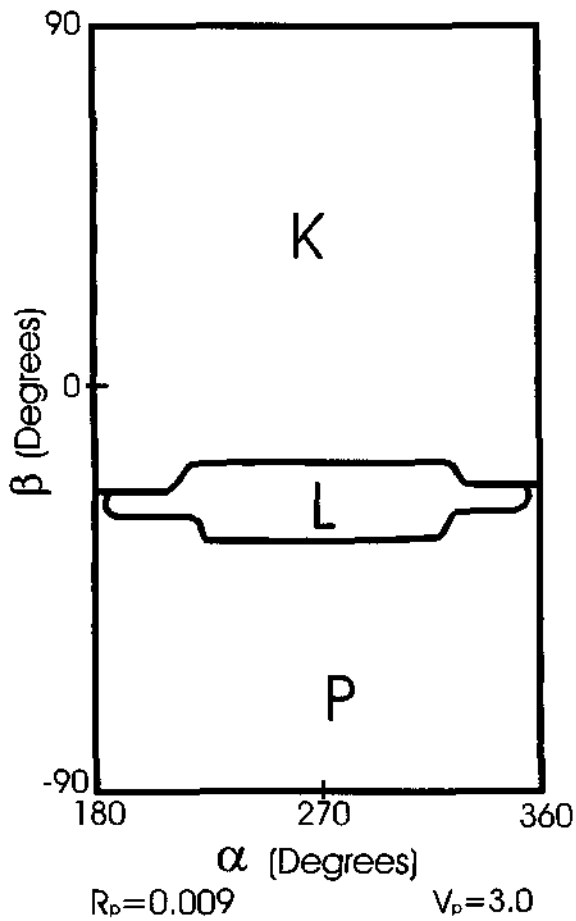
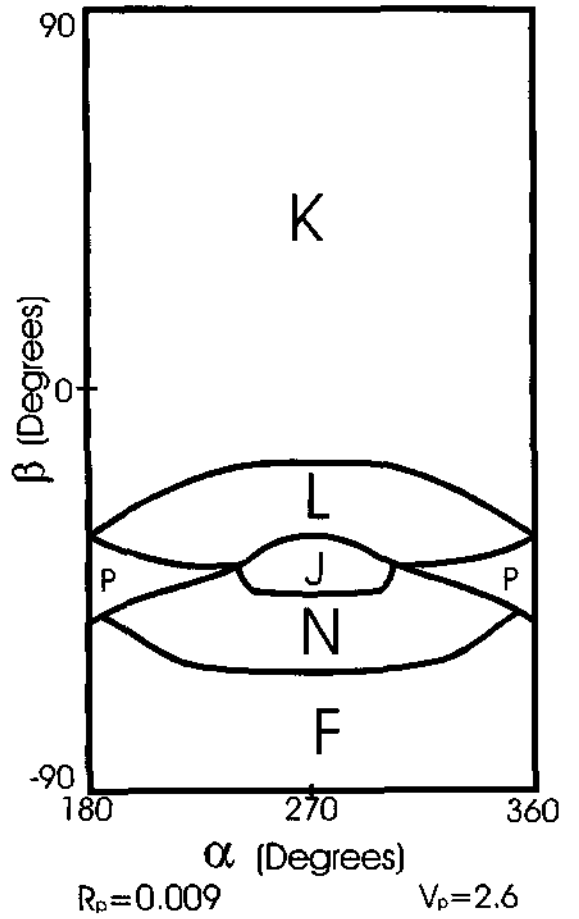
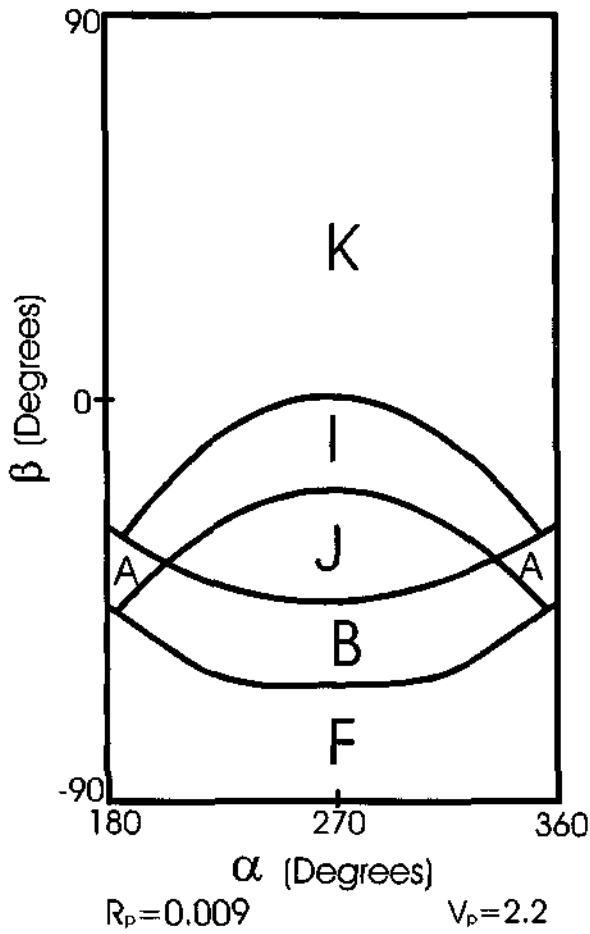
Os resultados consistem de gráficos que mostram a troca de órbita da nave espacial devido a um encontro com M_2 . Usando a classificação de órbitas já mostrada na tabela 1, os resultados consistem de atribuir uma destas letras a uma posição em um diagrama bidimensional que tem o ângulo α (em graus) no eixo horizontal e o ângulo β (em graus) no eixo vertical. Um gráfico é feito para quaisquer valores de R_p e V_p .

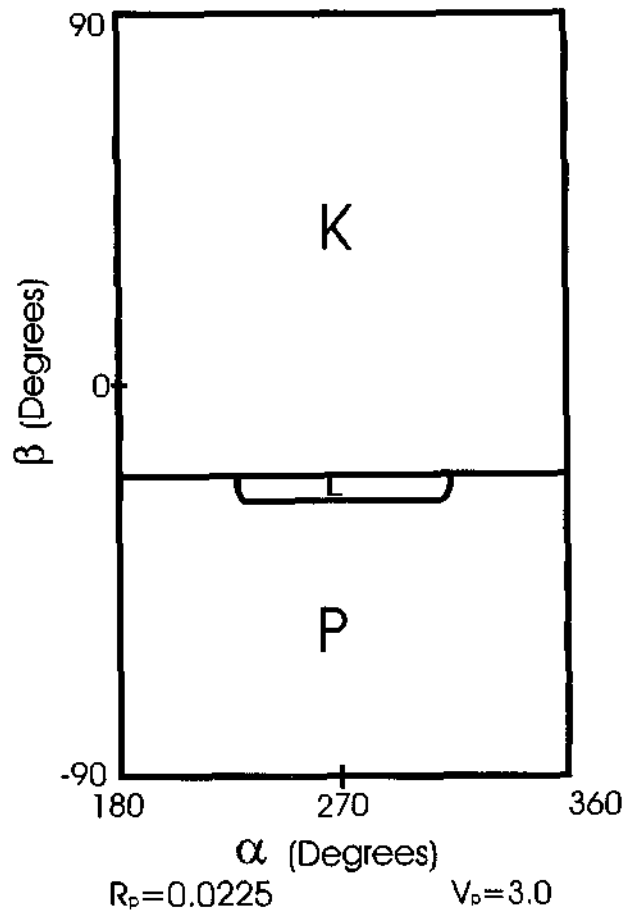
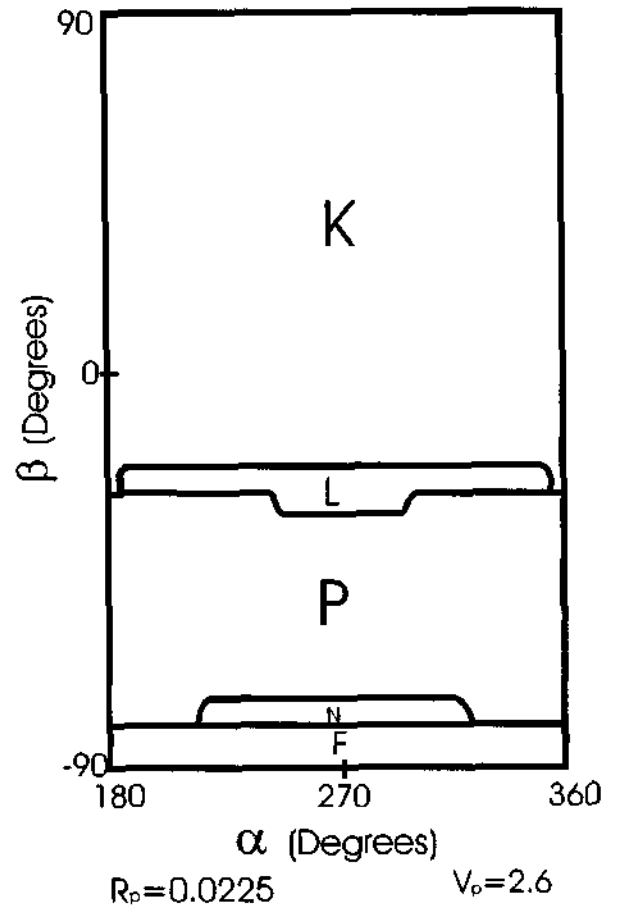
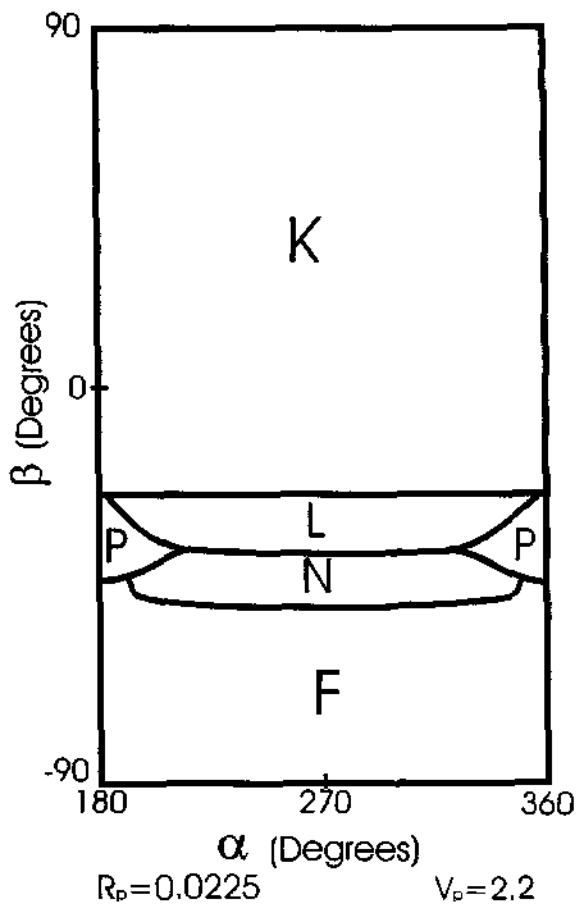
As figuras mostram os resultados obtidos.

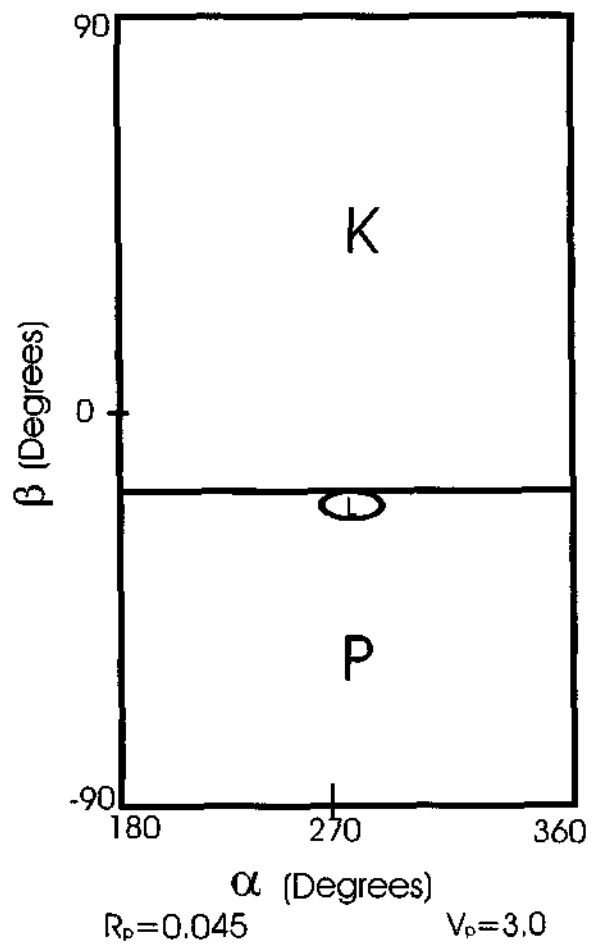
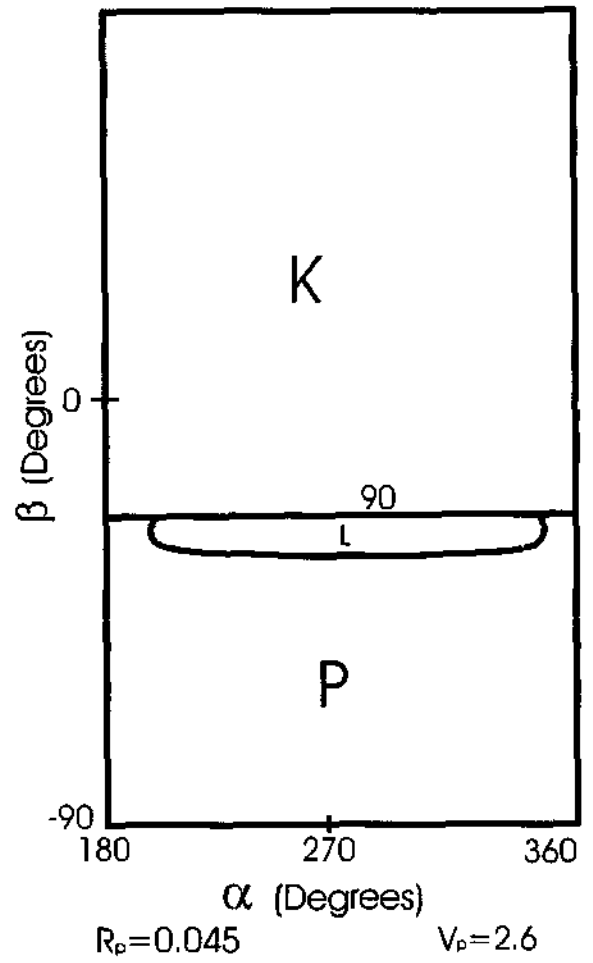
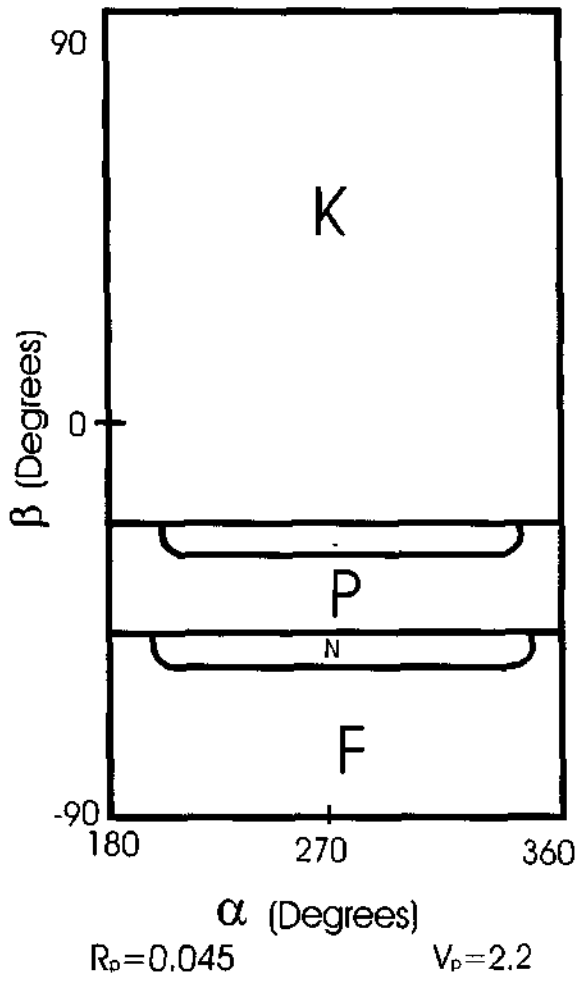














De acordo com estas regras é possível identificar as seguintes famílias de órbitas:

- a) órbitas que resultam em escape (transferência de elíptica para hiperbólica), que são representadas pelas letras I, J, M, N e que aparecem entre o centro ($\beta = 0^\circ$) e a parte inferior de alguns dos gráficos (para velocidades inferiores);
- b) órbitas que resultam em captura (transferência de hiperbólica para elíptica), que são representados pelas letras C, D, G, H, e que não aparecem nos gráficos mostrados neste trabalho;
- c) órbitas elípticas (transferência de elíptica para elíptica), que são representadas pelas letras A, B, E, F e que aparecem na parte inferior de alguns dos gráficos (para velocidades inferiores);
- d) órbitas hiperbólicas (transferência de hiperbólica para hiperbólica), que são representadas pelas letras K, L, O, P e que aparecem na parte superior dos gráficos e que são as únicas famílias possíveis para velocidades superiores;
- e) órbitas que trocam a direção do movimento de direta para retrógrada, e que são representadas pelas letras E, M, G, O, e que não aparecem nos gráficos mostrados nesse trabalho;
- f) órbitas que trocam a direção do movimento de retrógrada para direta, e que são representadas pelas letras B, D, J, L, que aparecem no centro inferior do gráfico;
- g) órbitas retrógradas, que são representadas pelas letras F, H, N, P que aparecem na maioria das partes inferiores dos gráficos
- h) órbitas diretas, que são representadas pelas letras A, C, I, K que aparecem no topo dos gráficos.

As linhas de contorno entre estas famílias são também famílias de órbitas interessantes. Os contornos que separam órbitas elípticas de hiperbólicas são feitos por órbitas parabólicas. Exemplos de contornos que tem órbitas parabólicas após o encontro são: A-I, B-J, F-N, F-J, F-P. Exemplos de contornos que tem órbitas parabólicas antes do encontro são: I-K, J-L, N-P, K-A, K-J, F-P. É interessante notar a existência de um contorno que é feito por órbitas parabólicas

antes e após o encontro. É o contorno P-F, que aparece, por exemplo, no caso $R_p=0,0225$ e $V_p=2,6$.

Os contornos que separam órbitas diretas das retrógradas são feitos de órbitas com momento angular zero. Isto significa que os vetores posição e velocidade são paralelos



(órbitas retilíneas). Exemplos de contornos que tem momento angular zero após o encontro são: F-B, N-J, L-P, P-K, N-L, F-A. Exemplos de contornos que tem momento angular zero antes do encontro são: K-L, I-J, A-B, K-P, K-J. De acordo com estes exemplos é fácil visualizar estas famílias olhando estas figuras.

O objetivo dessa pesquisa é fornecer um estudo genérico dessas trajetórias usando a posição e a velocidade da nave espacial durante o momento do encontro como parâmetros que podem variar num grande intervalo de valores. Não há intenção de estudar uma missão em particular. A figura 13 mostra gráficos com R_p variando de 0,00476 (100km acima da superfície da Lua) até 0,0045 (15660km acima da superfície da Lua). Alguns dos pontos importantes notados nas figuras são:

- valores positivos de β são dominados pela família K em todos os casos (órbitas hiperbólicas), enquanto que valores negativos abrangem uma grande variedade de famílias;
- para um valor fixo de R_p o aumento da velocidade reduz o número de famílias, que tem uma tendência a ser formado pelas famílias K, L e P (órbitas hiperbólicas) exclusivamente;
- quando R_p aumenta a velocidade mínima requerida para este fato também aumenta.

Capítulo IX - Conclusões

Neste trabalho o problema dos três corpos tridimensional restrito é descrito e usado para estudar a manobra de Swing-by. Alguns gráficos são feitos para representar os efeitos de um encontro na órbita de uma nave espacial. Em particular, os efeitos da terceira dimensão nesta manobra são estudados. É mostrado que as órbitas hiperbólicas (família K) dominam a região de valores de β positivos e que quando a velocidade aumenta, as famílias K, L, e P dominam os gráficos. Famílias com particularidades, tais como: órbitas com momento angular zero ou parabólicas, são mostradas nos contornos entre as principais famílias. Em geral é claro verificar que a terceira dimensão da manobra ocupa um papel importante no problema investigado.

Bibliografia

1. Broucke, R.A., "The Celestial Mechanics of Gravity Assist," AIAA paper 88-4220, Aug. 1988.
2. Broucke, R.A. and Prado, A.F.B.A., "Jupiter Swing-By Trajectories Passing Near the Earth," *Space Flight Mechanics*, edited by Robert G. Melton, Lincoln J. Wood, Roger C. Thompson, Stuart J. Kerridge, Vol. 82, Part II, Advances in the Astronautical Sciences, AAS, 1993, San Diego, pp. 1159-1176.
3. Prado, A.F.B.A., "Optimal Transfer and Swing-By Orbits in the Two- and Three-Body Problems," Ph.D. Dissertation, Univ. of Texas, Dept. of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, Austin, TX, USA, 1993.
4. Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Academic Press, New York, 1967.
5. Silva, W.C.C., "Movimento Orbital" - DMC - INPE . Apostila a ser publicada.
6. Prado, A. F. B. A., "Análise e Planejamento de Missões" - DMC - INPE - Apostila a ser publicada.
7. Rao, K. R., "Determinação de Órbita e Manobras Orbitais" - DMC - INPE - Apostila a ser publicada.
8. Kohlhase, C. E. e Penzo, P. A. (1977), "Voyager Mission Description" , *Space Science Reviews*, Vol. 21, nº 2, pp. 77-101.
9. Szebehely, V. G. (1965), "Special Orbits for the Exploration of Mars and Venus", In: AFCRL-NASA-VPI Conference on The Exploration of Mars and Venus, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA.



10. Hollister, W.M. e Prussing, J. E. (1966), "Optimum Transfer to Mars Via Venus" *Astronautica Acta*, Vol. 12, nº 2, pp. 169-179.
11. Striepe, S. A. e Braun, R. D. (1991), "Effects of a Venus Swingby Periapsis Burn During an Earth-Mars Trajectory", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 39, nº 3, pp. 299-312.
12. Carvell, R. (1985), "Ulysses- The Sun From Above and Below", *Space*, Vol. 1, pp. 18-55, Dez. 85-Fev. 86.
- 13- Byrnes, D. V. e D'amario, L. A. (1982), " A Combined Halley Flyby Galileo Mission", AIAA paper 82-1462. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, San Diego, CA, Agosto
14. D'amario, L.A. e Byrnes, D. V. (1983), " Interplanetary Trajectory Desing for the Galileo Mission", AIAA paper 83-0099. In: AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, 10-13 Jan.
15. Weinstein, S.S. (1992), "Pluto Flyby Mission Desing Concepts for Very Small and Mooderate Spacecraft", AIAA paper 92-4372. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head, SC, Agosto 10-12.
16. Swenzon, B. L. (1992), "Neptune Atmospheric Probe Mission", AIAA paper 92-4371. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head, SC, Agosto 10-12.
17. Nock, K. T. e Upholf, C. W. (1979), " Satellite Aided Orbit Capture", AAS/AIAA paper 79-165.
18. Farquhar, R. W. e Dunham, D. W. (1981), "A New Trajectory Concept for Exploring the Earth's Geomagnetic Tail", *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, nº 2, pp. 192-196.
19. Marsh, S. M. e Howell, K. C. (1988), "Double Lunar Swingby Trajectory Desing", AIAA paper 88-4289.



20. D'amario, L. A., Byrnes, D. V., Sackett, L. L. e Stanford, R. H. (1979), "Optimization of Multiple Flyby Trajectories", AAS paper 79-162. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Provincetown, MA, Junho.
21. D'amario, L. A., Byrnes, D. V e Stanford, R. H. (1982), "Interplanetary Trajectory Optimization with Application to Galileo", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, nº 5, pp. 465-471.
22. Broucke, R. A. (1988), " The Celestial Mechanics of Gravity Assist", AIAA paper 88-4220. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, MN, 15-17 Agosto.
23. Broucke, R. A e Prado, A. F. B. A. (1993), "On the Scatting of Comets by a Planet". In: 181st Meeting of the AAS, Phoenix, AZ, 3-7 Jan.
24. Flando, G. (1966), "Fast Reconnaissance Missions to the Outer Solar System utilizing Energy Derived from the Gravitational Field of Jupiter", *Astronautical Acta*, Vol. 12, nº 4.
25. Dowling, R. L., Kosmann, W. J., Minovitch, M. A. e Ridenoure, R. W. (1991), "Gravity Propulsion Research at UCLA e JPL, 1962-1964." In: 42nd Congress of the International Astronautical Federation, Montreal, Canada, 5-11 Out.
26. Farquhar, R. W., Muhonen, D. e Church, L. C. (1985). "Trajectories and Orbital Maneuvers for the ISEE-3/ICE Comet Mission", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 235-254.
27. Dunham, D, e Davis, S. (1985), "Optimization of a Multiple Lunar-Swingby Trajectories Sequence", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 275-288.
28. Efron, L., Yeomans, D. K. e Schanzle, A. F. (1985), "ISEE-3/ICE Navigation Analysis," *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 301-323.

20. D'amaro, L. A., Byrnes, D. V., Sackett, L. L. e Stanford, R. H. (1979), "Optimization of Multiple Flyby Trajectories", AAS paper 79-162. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Provincetown, MA, Junho.

21. D'amaro, L. A., Byrnes, D. V. e Stanford, R. H. (1982), "Interplanetary Trajectory Optimization with Application to Galileo", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, nº 5, pp. 465-471.

22. Broucke, R. A. (1988), "The Celestial Mechanics of Gravity Assist", AIAA paper 88-4220. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, MN, 15-17 Agosto.

23. Broucke, R. A. e Prado, A. F. B. A. (1993), "On the Scattering of Comets by a Planet". In: 181st Meeting of the AAS, Phoenix, AZ, 3-7 Jan.

24. Flando, G. (1966), "Fast Reconnaissance Missions to the Outer Solar System utilizing Energy Derived from the Gravitational Field of Jupiter", *Astronautical Acta*, Vol. 12, nº 4.

25. Dowling, R. L., Kosmann, W. J., Minovitch, M. A. e Ridenoure, R. W. (1991), "Gravity Propulsion Research at UCLA e JPL, 1962-1964." In: 42nd Congress of the International Astronautical Federation, Montreal, Canada, 5-11 Out.

26. Farquhar, R. W., Muhonen, D. e Church, L. C. (1985). "Trajectories and Orbital Maneuvers for the ISEE-3/ICE Comet Mission", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 235-254.

27. Dunham, D. e Davis, S. (1985), "Optimization of a Multiple Lunar-Swingby Trajectories Sequence", *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 275-288.

28. Efron, L., Yeomans, D. K. e Schanzle, A. F. (1985), "ISEE-3/ICE Navigation Analysis," *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 33, nº 3, pp. 301-323.



Apêndice A - Listagem do programa

```
PROGRAM SWINGBY
C
C   Declaração de variáveis:
C
C   NEQN   = nº de equações a serem integradas
C   I,J    = contadores
C   DT     = tamanho do passo inicial
C   DT1    = variação do passo atualizado
C   MI     = MSN/(MP+MSN)
C   MISTAR = 1-MI
C   MSN    = massa do satélite natural
C   MP     = massa do planeta
C   TI     = valor de tempo inicial
C   TOL    = valor de tolerância = 10E-8
C   TOUT   = próximo valor de T
C   X(NEQN) = matriz de variáveis
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H ,O-Z)
C   CHARACTER LET,S(80,80)
C   REAL*8 MI, MISTAR
C   DIMENSION X(6),XA(6),XD(6)
C   INTEGER K,I
C   COMMON MI,MISTAR
C
C   Abertura de arquivo de saída:
C
C   DERIVS = nome da subrotina dentro de ODEINT
C   ODEINT = subrotina de integração do INTEG
C
C   EXTERNAL DERIVS,RKQC
C   OPEN(2,FILE='RESJUPI.DAT')
C   OPEN(3,FILE='INPUT2.DAT')
C
C
C   INÍCIO:
C   K=1.0D0
C   READ(3,*)AI,AF,DA
C   READ(3,*)BI,BF,DB
C   READ(3,*)Rp
C   READ(3,*)Vp
C   READ(3,*)MI
C   READ(3,*)TI0
C   READ(3,*)TOL
C   NEQN = 6
C   HMIN=0.d0
C   H1=0.01d0
```



```
PI=4.0D0*DATAN(1.0d0)
RAD=PI/180.0d0
EPS=TOL
TI=TI0
MISTAR=1.0D0-MI
IKO=0
JKO=0
```

C

```
DO AG=AI,AF,DA
  IKO=IKO+1
  JKO=0
DO BG=BI,BF,DB
  JKO=JKO+1
A=AG*RAD
B=BG*RAD
2 X(1)=Rp*Dcos(A)*Dcos(B)+MISTAR
  X(2)=Rp*Dcos(B)*Dsin(A)
  X(3)=Rp*Dsin(B)
  X(4)=-Vp*Dsin(A)+Rp*Dcos(B)*Dsin(A)
  X(5)=Vp*DCOS(A)-Rp*Dcos(A)*Dcos(B)
  X(6)=0.0D0
  TI=TI0
  TOUT=TI
  DT1=0.01D0*(-1.0D0)**K
1 TOUT=TOUT+DT1
  IF (ABS(TOUT).LT.10.0D0)THEN
    CALL ODEINT(X,NEQN,TI,TOUT,EPS,H1,HMIN,NOK,NBAD,DERIVS,RKQC)
    TI=TOUT
  D=DSQRT((X(1)-MISTAR)**2+X(2)**2+X(3)**2)
  IF (K.EQ.1) THEN
    DO I=1,6
      XA(I)=X(I)
    ENDDO
  ENDIF
  IF (K.EQ.2) THEN
    DO I=1,6
      XD(I)=X(I)
    ENDDO
  ENDIF
  IF (D.LT.0.5D0) THEN
    GOTO 1
  ELSE
    IF (K.EQ.2.0D0) GOTO 3
    K=2.0D0
    GOTO 2
  ENDIF
ENDIF
3 CONTINUE
```



```
CALL TWOB(MI,XA,ENA,CANGA)
CALL TWOB(MI,XD,END,CANGD)
DE=END-ENA
DC=CANGD-CANGA
CALL CLASOR(ENA,CANGA,CLASS1)
CALL CLASOR(END,CANGD,CLASS2)
CALL LETTER(CLASS1,CLASS2,LET)
S(IKO,JKO)=LET
K=1
ENDDO
ENDDO
89 FORMAT(80A1)
DO I=IKO,1,-1
  WRITE(2,89) (S(I,J),J=1,JKO)
ENDDO
CLOSE(2)
CLOSE(3)
STOP

END

C
C
SUBROUTINE DERIVS(T,X,DX)
C
C
REAL*8 R1,R2,X(6),DX(6),T,MI,MISTAR,
* PR1,PR2
C
COMMON MI,MISTAR

R1=(X(1)+MI)**2+X(2)**2+X(3)**2
PR1=R1**1.5
R2=(X(1)-MISTAR)**2+X(2)**2+X(3)**2
PR2=R2**1.5
DX(1)=X(4)
DX(2)=X(5)
DX(3)=X(6)
DX(4)=2*X(5)+X(1)-(MISTAR*(X(1)+MI))/PR1-(MI*(X(1)-MISTAR))/PR2
DX(5)=-2*X(4)+X(2)-(MISTAR*X(2))/PR1-(MI*X(2))/PR2
DX(6)=-MISTAR*X(3)/PR1-(MI*X(3))/PR2
RETURN
END

C
```



```
SUBROUTINE TWOB(U,XR,EN,CANG)
```

```
C CANG is the z-component of the angular mamentum
```

```
C
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION XR(6)
```

```
R1=DSQRT((-XR(1)-U)**2+XR(2)**2+XR(3)**2)
```

```
R2=DSQRT((-XR(1)-U+1.0D0)**2+XR(2)**2+XR(3)**2)
```

```
G=(1.0D0-U)/R1+U/R2
```

```
EN=((XR(1)+XR(5))**2+(XR(4)-XR(2))**2+XR(6)**2)/2.0D0-G
```

```
CANG=XR(1)**2+XR(2)**2+XR(1)*XR(5)-XR(2)*XR(4)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C
```

```
SUBROUTINE CLASOR(E,C,CLASS)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
CLASS=4
```

```
IF ((E.LT.0).AND.(C.GT.0)) THEN
```

```
CLASS=1
```

```
ENDIF
```

```
IF ((E.LT.0).AND.(C.LT.0)) THEN
```

```
CLASS=2
```

```
ENDIF
```

```
IF ((E.GT.0).AND.(C.GT.0)) THEN
```

```
CLASS=3
```

```
ENDIF
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C
```

```
SUBROUTINE LETTER(CL1,CL2,LET)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
CHARACTER LET
```

```
IF ((CL1.EQ.1.0D0).AND.(CL2.EQ.1.0D0)) THEN
```

```
LET='A'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.2.0D0).AND.(CL2.EQ.1.0D0)) THEN
```

```
LET='B'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.3.0D0).AND.(CL2.EQ.1.0D0)) THEN
```

```
LET='C'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.4.0D0).AND.(CL2.EQ.1.0D0)) THEN
```

```
LET='D'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.1.0D0).AND.(CL2.EQ.2.0D0)) THEN
```

```
LET='E'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.2.0D0).AND.(CL2.EQ.2.0D0)) THEN
```

```
LET='F'
```

```
ENDIF
```

```
IF ((CL1.EQ.3.0D0).AND.(CL2.EQ.2.0D0)) THEN
```

```
LET='G'
```

```
ENDIF
```



```
IF ((CL1.EQ.4.0D0).AND.(CL2.EQ.2.0D0)) THEN
  LET='H'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.1.0D0).AND.(CL2.EQ.3.0D0)) THEN
  LET='I'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.2.0D0).AND.(CL2.EQ.3.0D0)) THEN
  LET='J'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.3.0D0).AND.(CL2.EQ.3.0D0)) THEN
  LET='K'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.4.0D0).AND.(CL2.EQ.3.0D0)) THEN
  LET='L'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.4.0D0).AND.(CL2.EQ.1.0D0)) THEN
  LET='M'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.2.0D0).AND.(CL2.EQ.4.0D0)) THEN
  LET='N'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.3.0D0).AND.(CL2.EQ.4.0D0)) THEN
  LET='O'
ENDIF

IF ((CL1.EQ.4.0D0).AND.(CL2.EQ.4.0D0)) THEN
  LET='P'
ENDIF

RETURN
```