DINÂMICA EM ESPAÇOS CURVOS

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/INPE - CNPq/MCTI)

PROCESSO: 160014/2014-0

Pedro Henrique Meert Ferreira - Bolsista PIBIC/INPE - CNPq/MCTI
Laboratório de Astrofísica e Radioastronomia
Centro Regional Sul de Pesquisas Espaciais
LAR/CRS/INPE - MCTI
E-mail: ferreiraphm@gmail.com

Dr. Nelson Jorge Schuch
Orientador
Pesquisador Titular Sênior III
Centro Regional Sul de Pesquisas Espaciais - CRS/INPE - MCTI
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
INPE/MCTI
E-mail: njschuch@gmail.com

Santa Maria, Julho 2015.

DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO PROGRAMA: PIBIC/INPE - CNPq/MCTI

PROJETO

DINÂMICA EM ESPAÇOS CURVOS

PROCESSO: 160014/2014-0

Relatório elaborado por **PEDRO HENRIQUE MEERT FERREIRA**
relatando as atividades executadas por:

Pedro Henrique Meert Ferreira - Bolsista PIBIC/INPE - CNPq/MCTI
E-mail: ferreiraphm@gmail.com

Dr. Nelson Jorge Schuch
Orientador
Pesquisador Titular Sênior III
Centro Regional Sul de Pesquisas Espaciais - CRS/INPE - MCTI
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/MCTI
E-mail: njschuch@gmail.com

Professor Dr. Orimar Antônio Battistel
Coorientador
Departamento de Física - CCNE/UFSM
E-mail: orimar.battistel@gmail.com

Local de Trabalho/Execução do Projeto:

Laboratório de Astrofísica e Radioastronomia, Centro Regional Sul de Pesquisas Espaciais - LAR/CRS/INPE - MCTI.

Trabalho desenvolvido no âmbito do Convênio INPE - UFSM, através do Laboratório de Ciências Espaciais de Santa Maria - LACESM/UFSM.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é resolver a equação de Einstein para um corpo massivo e com carga elétrica que possua simetria esférica. Para tal obtemos a métrica de Reisner-Nordstrom com a utilização do teorema de Birkhoff, que apresenta a métrica de uma forma generalizada para casos onde há simetria esférica. O tensor de curvatura é calculado e o tensor de Ricci, que aparece na equação de Einstein, é obtido. Como o corpo possui carga elétrica, o tensor momento-energia é não nulo. Este tensor é calculado a partir da segunda lei de Newton para o caso relativístico. Os coeficientes da métrica são obtidos através da equação de Einstein e as quantidades relacionadas ao tensor momento-energia são obtidas a partir das equações de Maxwell.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

No início do século XX prosperou a ideia de que as leis físicas não podem depender do observador, o que significa que as formas matemáticas que as representam devem ser invariantes frente a mudanças no sistema de referência. Uma ideia bastante simples e razoável, mas que colocava em contradição os dois conjuntos de leis conhecidas na virada do referido século: as leis de Newton para a mecânica e as de Maxwell para o eletromagnetismo. Isto porque as transformações no sistema de referência que deixavam um conjunto de leis invariante não mantinham o outro.

É neste contexto que surge a Teoria da Relatividade de Einstein, estabelecendo as adequadas transformações frente as quais as leis físicas tornam-se invariantes ou independentes do observador. As ideias iniciais, contidas no desenvolvimento da Relatividade Restrita, estabelecem transformações entre sistema de referência que se movem relativamente com velocidade constante, portanto entre referencias inerciais.

A Teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein alguns anos depois surgiu da necessidade de estender estas ideias para um referencial qualquer. Isto pode ser visto no princípio da Relatividade Geral, que pode ser formulado de uma maneira simples como se segue:

> Princípio da Relatividade Geral - Todos os referenciais são equivalentes para a descrição de sistemas físicos, independente de seu estado de movimento.

Uma vez que as leis da Física devem ser universais, parece óbvio que elas devam ter as mesmas formas matemáticas independentes do referencial utilizado. Do contrário, dois observadores ao aplicá-las chegariam a conclusões contraditórias a respeito dos mesmos fenômenos naturais. Porém foram necessários mais de 400 anos de estudos até que se chegasse a uma formulação consistente da Mecânica onde este princípio pôde ser incorporado. Foi estudando a interação gravitacional que, em 1915, Albert Einstein com a publicação da sua Teoria Geral da Relatividade apresentou pela primeira vez uma maneira sistemática de entender como fazer com que referenciais não inerciais possam ser utilizados para a descrição de fenômenos naturais apartir de suas leis universais.

1.1 O Princípio da Relatividade

Aquilo que conhecemos como mecânica newtoniana é representada pelo seu conjunto de três leis. A primeira estabelece a distinção entre referencias inerciais e acelerados.

A segunda estabelece a relação entre causa e efeito propriamente dita, com formas diferentes para os dois tipos de referencias acima mencionados, ao passo que a terceira estabelece a necessidade de vínculos entre entes interagentes. Neste contexto, devido à interação gravitacional entre partículas massivas, é possível estabelecer a equação de movimento para qualquer uma delas de acordo com a lei da gravitação clássica como

$$m_N \frac{d^2 \vec{x_N}}{dt^2} = G \sum_M \frac{m_M m_M (\vec{x_M} - \vec{x_N})}{|\vec{x_M} - \vec{x_N}|^3}, \tag{1.1}$$

onde $\vec{x_N}$ é o vetor posição da partícula de massa m_N e $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ é a constante da gravitação universal. A equação acima é a equação que descreve o movimento da N-ésima partícula na presença das demais que fazem parte do sistema e foi escrita tendo como escolha um referencial inercial. Evidentemente que haverão outras M-1 equações, cada qual representando a equação de movimento das demais partículas. O conjunto de equações será por isso acoplado. O aspecto interessante para nossos propósitos é o fato de esta equação ser invariante frente ao seguinte conjunto de transformações:

$$\begin{aligned} \vec{x'} &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d}, \\ t' &= t + \tau. \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\vec{v}, \vec{d}, \vec{a}$ são vetores constantes e a matriz R é ortogonal, isto é, $R = R^T$. Este conjunto de transformações estabelece o chamado grupo de transformações de Galileu. A forma matemática da lei de interação permanece a mesma para quaisquer dois observadores em referenciais inerciais e para qualquer escolha do sistema de coordenadas dentro de cada referencial.

Em 1864 J.C. Maxwell publicava a sua teoria sobre o Eletromagnetismo, nesta teoria estava previsto que ondas eletromagnéticas se propagam em um meio com uma velocidade bem determinada que depende apenas das propriedades eletromagnéticas deste meio. No vácuo a velocidade de tais ondas e, portanto, da luz, é denominada c.

Alguns anos depois, Michelson e Morley verificaram em um célebre experimento que a velocidade da luz é constante e é independente do referencial inercial, ou seja, dois observadores em movimento relativo percebem a luz se propagando com a mesma velocidade. Isto é claramente conflitante com a relatividade de Galileu, uma vez que esta previa que observadores com velocidades relativas perceberiam a luz se propagando com velocidades diferentes. Esta constatação colocou em conflito os dois conjuntos de leis até então consagradas válidas: as de Newton da Mecânica e as de Maxwell para o eletromagnetismo. Isto porque enquanto as leis de Newton são invariantes frente a transformações de Galileu as de Mawell não o são. E como ficou demonstrado no experimento de Michelson e Morley, as transformações de Galileu não poderiam explicar a velocidade constante e idêntica para a luz num mesmo meio para dois observadores com movimento relativo.

Neste momento histórico já se sabia que as leis do eletromagnetismo apresentavam invariância frente a um tipo particular de transformações, as transformações de Lorentz. Nestas transformações era possível estabelecer a observação de Michelson e Morley. Assim em 1905 Albert Einstein propôs algo que levaria a uma mudança radical na concepção das leis da mecânica newtoniana. Ele adotou as transformações de Lorentz como sendo as corretas transformações entre referenciais inerciais frente as quais as leis físicas devem exibir invariância. Com isso a teoria de Maxwell estava correta e a de Newton deveria receber modificações para exibir covariância, ou seja invariância frente a transformações de Lorentz.

Assim, seguindo estas ideias Einstein construiu a Teoria da Relatividade Restrita fundamentada em dois postulados.

> *Princípio da Relatividade - As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.*
>
> *Princípio da Invariância da Velocidade da Luz - No vácuo a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.*

É importante frisar o conceito de referencial inercial: São um conjunto 3-dimensional de objetos para medir distâncias espaciais onde em cada ponto existe um relógio, além disto, todos os relógios estão sincronizados. Assim, um objeto que faz parte ou está atrelado a um referencial inercial é um objeto que não perturba a sincronia dos relógios e permanece em posição espacial constante naquele referencial. [1]

A proposta de Einstein estabeleceu implicações surpreendentes a respeito do comportamento de entes com velocidades significativas comparadas a da luz no vácuo, portanto com energias muito altas. Entre as mais notáveis estão a dilatação do tempo, a contração do comprimento e a equivalência entre massa e energia, esta última expressa pela famosa equação $E = mc^2$.

Apesar de surpreendentes as predições foram pouco a pouco confirmadas em diversos experimentos. A aceitação da teoria além de contar com os novos experimentos levou em consideração o fato de a nova mecânica, a relativística, tornar-se equivalente a mecânica Newtoniana no regime de baixas velocidades relativas, onde as transformações de Lorentz se reduzem àquelas de Galileu. A teoria de Einstein para movimento relativo entre referencias inerciais ficou conhecida como Relatividade Especial ou Restrita. O próximo passo de Einstein seria desenvolver a teoria da Relatividade Geral, ou seja, para referenciais com movimentos relativos quaisquer.

1.2 Equivalência entre massa inercial e massa gravitacional

A construção das ideias da Relatividade Geral invariavelmente leva a modificações conceituias importantes relativamente à Relatividade Restrita.

Na teoria Newtoniana a atração gravitacional é explicada através de uma lei de forças de ação à distância, isto é, quando se pergunta “Por que um objeto cai em direção à Terra quando solto de determinada altura acima do solo?” a resposta é “Porque a Terra o atrai’. Em Relatividade Geral a abordagem é um pouco diferente. A interação gravitacional é entendida da mesma maneira que entendemos a interação eletromagnética, ou seja, através de campos que permeiam o espaço na presença de corpos “carregados” (neste caso a carga seria a massa).

É fato que a ação da gravidade é universal, pois o carater desta interação é independente de qualquer propriedade física do corpo que sofre ação do campo gravitacional, i.e. forma geométrica, massa, tamanho. Este é um indício de que a interação gravitacional se dá por intermédio de propriedades que estão relacionadas somente ao espaço no qual está inserindo o corpo responsável pela ação gravitacional. Essa universalidade deve-se a um fato experimental amplamente verificado: a equivalência entre a massa inercial e massa gravitacional dos corpos que possuem essa propriedade.

Massa inercial é definida pela segunda lei de Newton $\vec{F} = m_i\vec{a}$. Nesta lei a massa é a constante de proporcionalidade entre a força aplicada a um corpo e a aceleração adquirida pelo corpo devido à força aplicada e é uma propriedade intrínseca do corpo no qual a força foi aplicada.

Já massa gravitacional é a fonte geradora do campo gravitacional. Em uma região onde temos um campo gravitacional uniforme dado por $\vec{g}$, estabelecido por uma distribuição de massa gravitacional, então a força gravitacional associada a um corpo massivo é dada por $\vec{F} = m_g\vec{g}$. A universalidade da interação gravitacional deve-se ao fato de que quando esta força é utilizada para descrever a dinâmica deste corpo massivo e que possui massa inercial m_i, isto nos leva a:

$$\vec{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\vec{g}. \tag{1.3}$$

A razão $\frac{m_g}{m_i}$ medida experimentalmente difere da unidade de uma parte em 10^{11}, de acordo com os resultados experimentais[2]. Este fato já era conhecido e vastamente difundido antes do surgimento da Teoria Geral da Relatividade. Consta que o próprio Newton tinha conhecimento deste fato, porém não o havia interpretado.

Considere a seguinte situação: em uma região onde da presença de campos capazes de gerar ação de forças, encontra-se uma caixa, dentro da qual está um observador que dispõe de aparelhos para realizar medidas. Naturalmente, este observador não sente nenhuma força capaz de alterar seu movimento. Imagine também que uma força, cuja origem não tem importância, atua sobre a caixa em alguma direção, fazendo com que a caixa comece a adquirir velocidades cada vez mais altas. Assim, a aceleração será transmitida ao observador através do "chão" da caixa, e o observador terá de realizar uma força contra o fundo da caixa. Se esse observador agora solta algum objeto a certa distância do fundo da caixa, essa força não será transmitida ao objeto, mas o observador há de verificar que o objeto se desloca para o fundo da caixa com movimento acelerado. Além disto, o observador poderá notar que este experimento pode ser realizado com os mais variados corpos, sendo que todos os corpos reagirão da mesma maneira, independente de sua massa, forma, etc. Assim, este observador há de concluir que só pode estar em uma região onde existe um campo gravitacional.

Matematicamente, podemos verificar esta equivalência considerando a seguinte transformação na segunda lei de Newton [2]: $\vec{x'} \to \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$,

$$m\vec{g} = m\frac{d^2\vec{x'}}{dt^2} \to 0 = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \tag{1.4}$$

ou seja, no referencial acelerado o campo gravitacional desaparece.

Com o que foi dito acima, ficamos inclinados a pensar que um campo gravitacional como o da Terra, por exemplo, também pode ser substituído por um referencial acelerado. Porém note que tudo o que foi mencionado trata apenas de experimentos locais, enquanto o campo gravitacional terrestre é homogêneo apenas localmente. Globalmente sabemos que o campo gravitacional possui simetria esférica, e portanto seria simples verificar que, em uma situação análoga à do experimento acima, objetos abandonados pelo observador em regiões diferentes responderiam de maneiras diferentes (Figura 1.1). Concluimos assim que apesar de tudo o que foi dito, campos gravitacionais ainda possuem alguma propriedade especial, a qual veremos adiante, é a manifestação da curvatura no espaço-tempo.

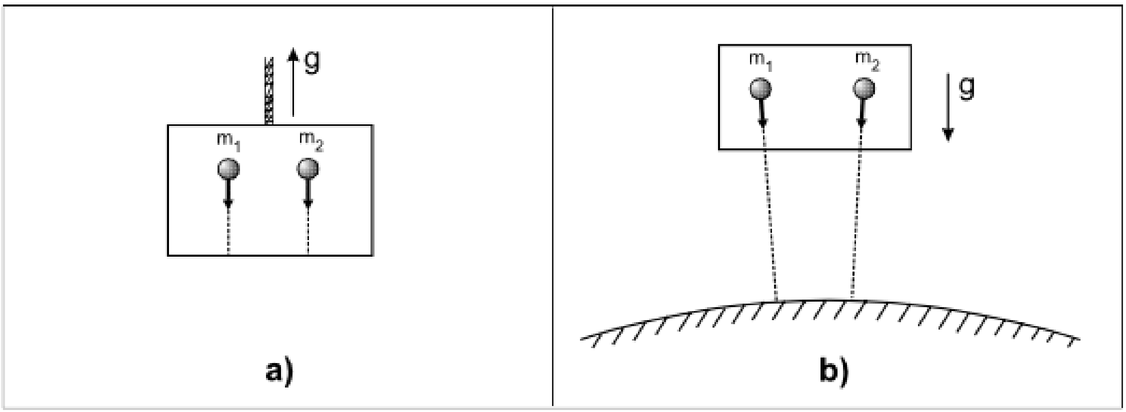

Figura 1.1: (a) Dois objetos são abandonados de pontos diferentes dentro da caixa e o efeito é similar ao efeito gerado por um campo gravitacional uniforme; (b) Dois objetos são abandonados em pontos diferentes porém a trajetória de cada um deles é levemente diferente do outro devido ao campo ter direção radial.

Afim de ilustrar a necessidade da geometria não-Euclidiana considere o seguinte exemplo: um disco está em rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Sobre o disco encontram-se dois observadores que dispõem de aparelhos para realização de medidas, um sob o centro e outro na periferia. O observador no centro do disco mede o perímetro e o diâmetro, e ao realizar a divisão do primeiro pelo segundo irá obter o valor $\pi = 3,14159...$. Por outro lado, o observador que se encontra na periferia do disco poderá medir o mesmo diâmetro que o observador do centro, porém o perímetro que ele irá obter será diferente devido à contração de Lorentz. Assim, ao realizar a mesma divisão que o observador do centro, o observador na periferia do disco obterá $\pi \neq 3,14159...$. A conclusão a que chegamos então é que a geometria percebida pelo observador na periferia do disco não pode ser Euclidiana.

Capítulo 2

GEOMETRIA E GRAVITAÇÃO

O conteúdo discutido neste capítulo foi baseada nos capítulos 2 e 3 de [3].

A interação gravitacional é a manifestação da curvatura do espaço- tempo. Essa ideia vem do fato de que a interação gravitacional é universal, pois todos os corpos reagem à gravidade. Então o mais provável é que isto seja um efeito provocado devido as condições às quais o espaço no qual estamos inseridos se encontra do que uma interação de ação à distância definida em cada ponto do espaço. Dito isto, precisamos entender de maneira mais precisa o significado da palavra curvatura neste contexto, e esta descrição pode ser encontrada na Geometria Diferencial.

A Geometria Diferencial pode ser vista como a união da Geometria Analítica e da Análise (Cálculo diferencial e integral). Portanto, são utilizadas técnicas de análise para o estudo de propriedades locais e globais de curvas e superfícies no espaço n-dimensional. Uma definição de importância fundamental em Relatividade Geral é a de Variedade Diferenciável: é a generalização de uma superfície n-dimensional, que possui parametrizações locais que são contínuas e diferenciáveis. Além disso, localmente a superfície pode ser aproximada pelo espaço Euclidiano de dimensões equivalentes, de forma que as definições para cálculo como as conhecemos sejam válidas.

As variedades diferenciáveis são importantes porque (i) fornecem a estrutura matemática necessária para definirmos objetos como vetores, tensores e operadores lineares em espaços curvos; (ii) conceitos de geometria como curvatura, torsão, etc..., passam a ter uma definição de propriedade intrínseca da variedade. Para o estudo da curvatura, especificamente, é necessário a introdução de alguns conceitos que tornam claros o modo como entendemos a curvatura do espaço-tempo, são eles o Tensor Métrico, Derivada Covariante, Transporte Paralelo e a Geodésica.

O Tensor Métrico $g_{\mu\nu}$ é uma função bilinear definida em todos os pontos de uma variedade diferenciável, M. Esta função tem como argumento dois vetores definidos no espaço tangente ao ponto em questão, T_pM, e leva esse par de vetores nos números reais. Formalmente:

$$g_{\mu\nu} : (T_pM, T_pM) \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Este tensor é utilizado para definição do produto interno em cada ponto, portanto, carrega informação sobre distâncias e ângulos na variedade. Algumas propriedades do tensor métrico que devem ser destacadas são: o tensor métrico é simétrico $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, tem determinante não nulo, e portanto, possui função inversa definida da seguinte maneira:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma}. \tag{2.2}$$

A Derivada Covariante é o operador diferencial que substitui derivadas parciais quando generalizamos este conceito para espaços curvos. Logo, para o caso particular quando consideramos o espaço plano (i.e. espaço Euclidiano) devemos obter a derivada parcial. A derivada covariante, portanto, deverá ter um termo de correção para a derivada parcial no caso de espaços que não são planos. Esse termo de correção são os chamados coeficientes de conexão, e veremos adiante que esses coeficientes contém toda a informação necessária sobre a curvatura - no caso da Relatividade Geral. A Derivada covariante de um vetor é definida da seguinte maneira:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \tag{2.3}$$

onde $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ são os chamados símbolos de Christoffel ou, coeficientes da conexão de Levi-Civita. Os coeficientes dessa conexão específica tem algumas propriedades especias, a primeira delas é que eles podem ser descritos completamente pela métrica e suas derivadas

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \tag{2.4}$$

neste ponto já podemos notar porquê no espaço Euclidiano não há necessidade de introduzir este tipo de operador. Como a métrica é dada por δ_{ij} todos os coeficientes de conexão são identicamente nulos. Note que apesar da notação utilizada, os coeficientes de conexão não são tensores. Assim, como a derivada parcial convencional não é, porém a soma desses dois objetos forma um tensor.

De maneira análoga à maneira como foi definida a derivada covariante de um vetor, definimos a derivada covariante de 1-forma da seguinte maneira:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda, \tag{2.5}$$

para qualquer 1-forma ω.
Com estes conceitos define-se a derivada covariante de um tensor misto como se segue:

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} + \ldots - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_m} - \Gamma^\sigma_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_m} - \ldots \tag{2.6}$$

Tendo em mãos as ferramentas para comparar tensores em uma variedade, agora veremos brevemente o significado de Transporte Paralelo. Quando calculamos derivadas no espaço Euclidiano, queremos comparar duas quantidades e o “quão rápido”elas variam. Introduzimos a derivada covariante a fim de poder fazer o mesmo com tensores, a derivada covariante cumpre o papel de comparar um tensor como se ele fosse “transportado paralelamente”. Em outras palavras, uma conexão define uma maneira específica de manter tensores constantes (ao longo de uma trajetória), assim podemos comparar dois tensores na vizinhança de um ponto.

Como exemplo da importância deste conceito, consideremos o transporte paralelo de um vetor sobre uma superfície esférica como ilustrado na figura 2.1.

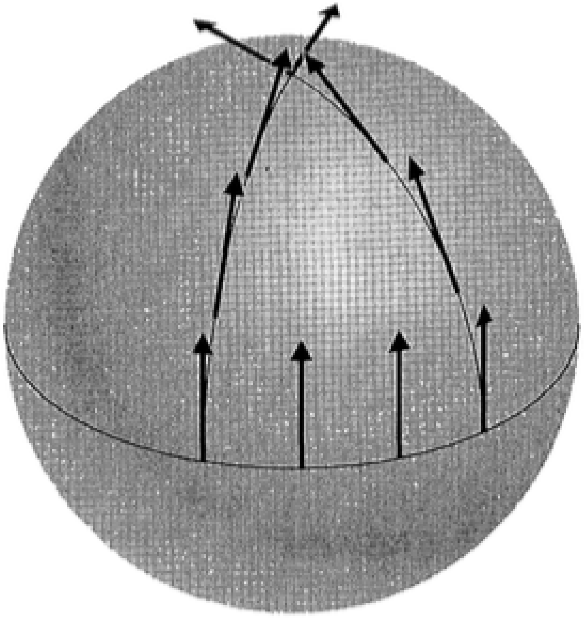

Figura 2.1: Dois vetores transportados paralelamente ao longo de trajetos diferentes em uma superfície esférica.

Note que apesar dos dois vetores serem paralelos no início da trajetória, ao final dela os dois vetores formam um ângulo diferente de zero entre si.

Seja $x^\mu(t)$ uma curva parametrizada, exigimos que o tensor $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}$ seja constante ao longo desta curva através da seguinte equação:

$$\frac{D}{dt}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m} = \frac{dx^\sigma}{dt}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m} = 0. \tag{2.7}$$

Na primeira igualdade temos a definição de derivada covariante direcional (na direção $x^\mu(t)$), e dizemos que o tensor $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_m}$ é transportado paralelamente ao longo da curva se a segunda igualdade é satisfeita.

Com a definição de transporte paralelo é fácil introduzir as geodésicas. As geodésicas são uma generalização para o que são linhas retas no espaço Euclidiano, isto é, a trajetória que minimiza a distância entre dois pontos. Apesar de pensarmos sempre em linhas retas como o caminho que minimiza a distância entre dois pontos em um plano, podemos pensar em em uma linha reta de outra forma: a linha reta é a curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente. Acontece que estes dois conceitos são coincidentes apenas se a conexão adotada for a conexão de Levi-Civita.

Assim, as geodésicas em um espaço curvilíneo são os trajetos que transportam paralelamente o vetor tangente à curva. O vetor tangente à curva $x^\mu(t)$ é $\frac{dx^\mu(t)}{dt}$, pelas definições acima, esse vetor é paralelamente transportado se

$$\frac{D}{dt}\frac{dx^\mu(t)}{dt} = 0, \tag{2.8}$$

ou, expandindo a definição da derivada covariante direcional

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \tag{2.9}$$

Esta é a equação da geodésica, e talvez uma das equações mais importantes da teoria.

Finalmente, estamos em condições de falar sobre curvatura. Esta quantidade é expressa através do Tensor de Riemann, que é obtido através dos coeficientes de conexão. O tensor de Riemann é definido pela seguinte expressão:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \tag{2.10}$$

note que este tensor é anti-simétrico nos últimos dois índices. Por esta definição podemos fazer uma série de observações a respeito desse tensor: como ele contém quatro índices, em princípio possui 4^n componentes independentes. Isto deixa evidente o porque é difícil falar em curvatura. Obviamente, com tudo o que já foi exposto até aqui, é claro que este tensor possui diversas propriedades de simetria devido aos termos que estão na sua definição reduzindo consideravelmente o número de componentes independentes deste objeto, mas mesmo assim, os resultados obtidos com a utilização dele são bastante contra-intuitivos. Outra propriedade interessante é que por ser dependente apenas dos coeficientes de conexão, podemos afirmar que se o tensor de Riemann é identicamente nulo, então necessariamente a métrica tem componentes constantes, implicando assim que o espaço em questão é plano.

2.1 A Gravidade como Curvatura do Espaço-Tempo

Com tudo o que foi visto até agora ficará claro como é a interpretação da gravitação no contexto da RG. Imaginemos dois referenciais O e O': um inercial e outro na presença de um campo gravitacional (não inercial portanto). Uma partícula atrelada a O' percebe seu movimento como se fosse uma trajetória retilínea, porém O percebe a trajetória como se fosse uma curva determinada pela ação do campo gravitacional sobre a partícula. A equação (2.9) se encaixa perfeitamente nesta situação, pois é a equação que descreve a trajetória equivalente a uma linha reta no plano.

Quando falamos que a interação gravitacional é interpretada como um campo que permeia o espaço-tempo estavamos nos referindo ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$. E a relação entre as propriedades do espaço-tempo e a matéria/energia se da através da Equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

onde μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, R é a curvatura escalar, Λ é a constante cosmológica e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Esta equação estabelece a relação entre a métrica do espaço-tempo e o tensor de energia-momento do(s) corpo(s) em questão.

O tensor de Ricci é obtido tomando a contração no tensor de Riemann: $R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu}$. Para o caso da Conexão de Levi-Civita esta é a única contração independente, isto é, todas as outras contrações são nulas ou estão relacionadas a esta. A curvatura escalar, consequentemente, é obtida tomando-se o traço do tensor de Ricci $R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Para uma discussão sobre o significado geométrico e interpretações físicas do tensor de Riemann, tensor de Ricci e curvatura escalar ver [4].

Como podemos perceber, a equação (2.11) fornece um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) não lineares que, em princípio, são 16 equações acopladas, uma para cada componente do tensor métrico, o que torna o problema extremamente complexo. Felizmente o tensor métrico é um tensor simétrico, reduzindo imediatamente as 16 EDPs a um conjunto de 10 EDPs acopladas. Outro vínculo imposto é, que reduz ainda mais a quantidade de equações é a identidade de Bianchi $\nabla^{\mu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = 0$. As equações obtidas a partir de (2.11), então, são de fato 6 equações independentes.

A equação (2.11) satisfaz todos os critérios necessários que uma equação deve satisfazer para descrição do campo gravitacional como o entendemos hoje, são elas: *(i)* Satisfaz o princípio da covariância de Lorentz, isto é, na ausência de campo gravitacional a Teoria da Relatividade Restrita emerge naturalmente; *(ii)* é invariante por sistema de coordenadas (o que é evidente visto que a equação é escrita em tensores); *(iii)* prevê todos os fatos verificados experimentalmente, como por exemplo, o redshift gravitacional, deflexão de raios luminosos e o atraso de pulsos eletromagnéticos; *(iv)* se reduz à teoria da gravitação de Newton quando consideramos o limite de campo fraco no regime de baixas velocidades [5].

Capítulo 3

O PROBLEMA DE REISNER-NORDSTRÖM

O problema que investigaremos pode ser formulado de um modo simples: Consideremos um corpo de massa M e com carga elétrica q e estático, ou seja, com momento angular identicamente nulo. Queremos estudar as propriedades do espaço-tempo na região externa deste corpo (vácuo).

Trata-se de um problema relativamente simples, que surge no contexto de buracos negros. Embora tenha significativa relevância teórica, não corresponde a uma situação experimental possível, pois um buraco negro carregado atrairia cargas de sinal oposto e se tornaria eletricamente neutro.

Na relatividade geral, propriedades do espaço-tempo estão, todas, relacionadas com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Assim, utilizamos as chamadas equações de Einstein-Maxwell para obter esta quantidade. As equações relevantes são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

$$g^{\lambda\nu}\nabla_{\lambda}F_{\nu\mu} = 0, \tag{3.2}$$

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0. \tag{3.3}$$

A primeira é a equação de Einstein enquanto que as demais nada mais são que as equações de Maxwell escritas em termos do tensor do campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, dado pela expressão:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Como é comum em Relatividade Geral, na equação (3.1) adotamos $c = 1$. Além disso, a notação na equação (3.3) indica que esta é uma equação antissimétrica nos índices entre os colchetes. Assim, temos a forma expandida:

$$\nabla_{\mu}F_{\nu\rho} + \nabla_{\nu}F_{\rho\mu} + \nabla_{\rho}F_{\mu\nu} = 0$$

onde o fator de normalização foi omitido, uma vez que a equação é identicamente nula.

Devido à simetria esférica do problema, aplicamos o Teorema de Birkhoff [3], que fornece a prova de que a solução da forma genérica

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.5}$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

é a única solução da equação de Einstein para o caso estático com simetria esférica no vácuo.

O referido teorema é o ponto de partida para a obtenção do tensor métrico. Através das equações de Einstein-Maxwell determinaremos $\alpha(r,t)$ e $\beta(r,t)$. Já sabemos qual é a solução de Scharwchild (3.43) [3], assim, a solução a ser obtida deverá reduzir-se a esta no caso em que a carga elétrica tender a zero.

O tensor momento energia que aparece no lado direito da equação de Einstein é identificado com o tensor momento energia do campo eletromagnético;

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{3.6}$$

Para determinar explicitamente a forma do tensor métrico precisamos resolver a equação (3.1). Antes de fazer isto vamos calcular todas as quantidades que aparecem nesta equação. Este será o objetivo das próximas duas sessões. Para auxiliar na compreensão da notação utilizada, o apêndice A é recomendado.

3.1 Tensor Momento-Energia do Campo Eletromagnético

Componentes do Tensor Campo Eletromagnético

Começamos pelo lado direito de (3.1), considerando o Tensor momento-energia do campo eletromagnético $T_{\mu\nu}$. Como podemos perceber em (3.6), este tensor é escrito em termos do tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Devido à simetria esférica e o fato da fonte do campo não estar em movimento a equação (3.4) tem todas as suas componentes angulares nulas. Isto porque, caso houvesse alguma direção na qual o campo elétrico ou magnético fosse mais intenso, então a simetria esféricas não seria satisfeita, isto é: $E_2 = E_3 = B_2 = B_3 = 0$. Então as únicas componentes não nulas serão: $F_{tr} = -F_{rt}$ e $F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta}$.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ -E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_r \\ 0 & 0 & -B_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que as componentes do campo associadas ao campo elétrico, são dadas por uma função da forma:

$$F_{tr} = E_r(r,t) = f(r,t). \tag{3.8}$$

Já as componentes associadas ao campo magnético devem ser examinadas com mais cuidado. Seja a quantidade totalmente antissimétrica $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\lambda\rho}$ definida da seguinte maneira:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu\nu\lambda\rho \text{ é permutação par de 0123,} \\ -1, & \text{se } \mu\nu\lambda\rho \text{ é permutação ímpar de 0123,} \\ 0, & \text{no caso de dois ou mais índices repetidos.} \end{cases}$$

Esta quantidade é um pseudo-tensor (para mais informações sobre isto ver [6]). O tensor de Levi-Civita é definido em termos desta quantidade pela seguinte expressão:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{|g|}\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{3.9}$$

Onde: g é o determinante do tensor métrico. Podemos utilizar a métrica para "subir" (ou "descer") índices de $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ mas não de $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\lambda\rho}$.

De acordo com (3.7) e (3.9) temos então:

$$\begin{aligned} B_r =& g_{11}\epsilon^{01\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ =& \frac{g_{11}}{\sqrt{|g|}}\tilde{\epsilon}^{01\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ =& \frac{g_{11}}{\sqrt{|g|}}(\tilde{\epsilon}^{0123}F_{23} + \tilde{\epsilon}^{0132}F_{32}) \\ B_r =& \frac{2g_{11}}{\sqrt{|g|}}F_{\theta\phi}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tomando o determinante da métrica, dada pela equação (3.5), é imediato que $g \propto r^4\sin^2\theta$. De maneira similar ao campo elétrico, o campo magnético não depende das coordenadas θ e ϕ. Assim temos:

$$F_{\theta\phi} = B_r = g(r,t)r^2\sin\theta. \tag{3.11}$$

Onde $r^2\sin\theta$ é um fator de escala.

Tensor momento energia

Há várias maneiras de se obter este tensor. Em textos mais avançados normalmente é usado o formalismo variacional para obtenção desta quantidade (por exemplo [7],[8]). Aqui adotaremos uma abordagem mais simples, que é a adotada em [6], onde se faz uso da segunda lei de Newton.

Primeiramente escrevemos:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p},$$

onde $\vec{F}$ é a força resultante que atua sobre a partícula e $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear associado. Na forma covariante esta equação toma a forma:

$$f^\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau}, \tag{3.12}$$

onde f^ν é a componente do quadrivetor força, u_μ é o quadrivetor velocidade da partícula e τ é o tempo próprio. Uma abordagem mais detalhada sobre estes conceitos pode ser encontrada em diversos livros de relatividade restrita. Como tal, nas referências [2],[3],[6]. Antes de apresentar os cálculos, ainda cabe ressaltar que a métrica que estamos considerando, dada em (3.5), possui uma propriedade denominada compatibilidade métrica, isto é, $\nabla^{\mu} g_{\mu\nu} = 0$.

Por outro lado, a força de Lorentz na forma covariante é escrita da seguinte maneira

$$f^{\mu} = qF^{\mu\nu} u_{\nu}, \tag{3.13}$$

onde q é a carga elétrica associada à partícula. A partir da igualdade entre (3.12) e (3.13) obtemos:

$$m\frac{du^{\mu}}{d\tau} = qF^{\mu\nu} u_{\nu}. \tag{3.14}$$

O lado esquerdo da equação (3.14) corresponde à partícula, enquanto que o lado direito ao campo eletromagnético. É nesta parte da equação que estamos interessados. A fim de usarmos as equações de Maxwell vamos reescrever (3.14) em termos das distribuições de carga e massa. Assim, fazemos a substituição $m \to \mu$ e $q \to \rho$:

$$\mu\frac{du^{\mu}}{d\tau} = \rho F^{\mu\nu} u_{\nu}. \tag{3.15}$$

Sendo $j^{\mu} = (\rho, \vec{j})$ o quadrivetor corrente elétrica, as equações de Maxwell para uma partícula com distribuição de carga e corrente j^{μ} são:

$$\begin{cases} \nabla^{\lambda} F_{\lambda\mu} = 4\pi j_{\mu}, \\ \nabla_{\mu} F_{\nu\lambda} + \nabla_{\nu} F_{\lambda\mu} + \nabla_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Utilizando estas equações juntamente com a identidade $j^{\mu} = \gamma\rho u^{\mu}$, onde $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, a lei de Newton (3.15) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mu\frac{du^{\mu}}{dt} = \nabla_{\rho}\left[F^{\rho}_{\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\rho\mu} F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda}\right], \tag{3.17}$$

o desenvolvimento detalhado das operações acima, encontra-se no apêndice B. Como foi mencionado acima, a segunda lei de Newton diz que a força resultante que atua sobre a partícula é igual à taxa de variação do momento linear associado à partícula.

No caso relativístico podemos escrever a forma mais geral:

$$f^{\nu} = \nabla_{\mu} T^{\mu\nu}, \tag{3.18}$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento energia associado à partícula. De acordo com (3.17), temos então:

$$T^{\mu\nu} = (F^{\mu}_{\rho} F^{\nu\rho}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}. \tag{3.19}$$

Este é o tensor momento-energia do campo eletromagnético. Suas componentes estão associadas ao vetor de Poynting e às componentes do momento associadas ao campo eletromagnético. Uma propriedade que pode ser vista diretamente é que este tensor é simétrico, i.e. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Isto não poderia ser diferente, uma vez que este tensor aparece do lado direito da equação de Einstein. Outra propriedade, que não é tão diretamente obtida, é o fato de que o tensor momento-energia associado ao campo eletromagnético tem traço nulo:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} =& g^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\ =& F_{\mu\rho}F^{\mu\rho} - F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\ =& 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde usamos $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$.

As componentes relevantes do tensor momento energia são as seguintes:

$$\begin{cases} T_{tt} = \frac{1}{2}f^2e^{-2\beta} + \frac{1}{2}g^2e^{2\alpha}, \\ T_{rr} = -\frac{1}{2}f^2e^{-2\alpha} - \frac{1}{2}g^2e^{2\beta}, \\ T_{tr} = 0, \\ T_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^2r^2 + \frac{1}{2}r^2f^2e^{-2(\alpha+\beta)}, \\ T_{\phi\phi} = T_{\theta\theta}\sin^2\theta. \end{cases} \tag{3.21}$$

A título de ilustração apresentamos detalhadamente o cálculo de uma das componentes:

$$\begin{aligned} T_{tt} &= F_{t\rho}F_{t\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}g_{tt}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\ &= F_{tr}F_{tr}g^{rr} - \frac{1}{2}g_{tt}(-f^2e^{2(\alpha+\beta)} + g^2) \\ &= f^2e^{-2\beta} + \frac{1}{2}e^{2\alpha}(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\ T_{tt} &= \frac{1}{2}f^2e^{-2\beta} + \frac{1}{2}g^2e^{2\alpha}. \end{aligned}$$

O cálculo explícito das demais quantidades é apresentado no apêndice (C). No mesmo apêndice encontra-se uma prova de que $T^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$.

3.2 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, é uma das quantidades que aparecem no lado esquerdo da equação (3.1). Como já foi mencionado anteriormente, é este tensor que contém informação sobre a curvatura do espaço-tempo. Antes de calcular suas componentes, vamos demonstrar que a curvatura escalar, R, é nula. Isto é, o traço de $R_{\mu\nu}$ é zero.

Tomando o traço de (3.1) obtemos

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}.$$

Utilizando (3.20) e $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ obtemos

$$R - 2R = 0 \to R = 0.$$

Portanto, a equação (3.1) é reduzida a:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{3.22}$$

Na sessão 2 foi mencionado que o tensor de Ricci é obtido a partir da contração de dois índices do tensor de Riemann (2.3). Retomando a expressão para este tensor:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\mu}. \tag{3.23}$$

Como este tensor está relacionado com os símbolos de Christoffel, primeiro devemos calcular estas quantidades. Poderíamos explicitar todos os termos aplicando diretamente a equação (2.4). Todavia, como estamos trabalhando com uma métrica diagonal vamos fazer uso de 4 identidades que facilitam muito o cálculo dos símbolos de Christoffel. São elas:

$$\begin{cases} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0, \\ \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}\partial_\lambda g_{\mu\mu}, \\ \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \partial_\mu(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}), \\ \Gamma^\lambda_{\lambda\lambda} = \partial_\lambda(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}). \end{cases} , \quad \mu \neq \nu \neq \lambda \tag{3.24}$$

Estas equações estão demonstradas no apêndice E. Com o conjunto de identidades (3.24) construímos a tabela 3.1, que será muito útil no cálculo das componentes do tensor de Ricci.

t	r	θ	ϕ
$\Gamma^t_{tt} = \partial_t\alpha$	$\Gamma^r_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha$	$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$	$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0$
$\Gamma^t_{rt} = \partial_r\alpha$	$\Gamma^r_{rt} = \partial_t\beta$	$\Gamma^\theta_{tt} = 0$	$\Gamma^\phi_{tt} = 0$
$\Gamma^t_{t\phi} = 0$	$\Gamma^r_{r\phi} = 0$	$\Gamma^\theta_{\phi\theta} = 0$	$\Gamma^\phi_{rr} = 0$
$\Gamma^t_{t\theta} = 0$	$\Gamma^r_{rr} = \partial_r\beta$	$\Gamma^\theta_{rr} = 0$	$\Gamma^\phi_{\theta\theta} = 0$
$\Gamma^t_{rr} = e^{2(\beta-\alpha)}\partial_t\beta$	$\Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\beta}$	$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$	$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^t_{\theta\theta} = 0$	$\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2\beta}\sin^2\theta$	$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$	$\Gamma^\phi_{t\phi} = 0$
$\Gamma^t_{\phi\phi} = 0$	$\Gamma^r_{r\theta} = 0$	$\Gamma^\theta_{t\theta} = 0$	$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$

Tabela 3.1: Coeficientes de Conexão para a métrica dada por (3.5). As colunas indicam a coordenada que aparece no índice superior dos coeficientes de conexão.

Utilizando a tabela 3.1 e (3.23) obtemos os seguintes valores para as componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$\begin{cases} R_{tt} = -(\partial_t\beta)^2 - \partial_t\partial_t\beta + \partial_t\beta\partial_t\alpha + [(\partial_r\alpha)^2 + \partial_r^2\alpha - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha]e^{2(\alpha-\beta)}, \\ R_{rr} = -\partial_r^2\alpha + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta - (\partial_r\alpha)^2 + e^{2(\beta-\alpha)}[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta], \\ R_{tr} = \frac{2}{r}\partial_t\beta, \\ R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1, \\ R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta. \end{cases} \tag{3.25}$$

Os resultados dos cálculos desta sessão podem ser encontrados em [3] e [9], os quais apresentam pequenas discordâncias entre si, em passos intermediários. Os que apresentaremos aqui concordam com [9]. O resultado final, entretanto, é o mesmo.

O cálculo explícito de cada uma das componentes (3.25) pode ser encontrado no apêndice D. A título de ilustração no que se segue, apresentaremos o cálculo de uma das componentes em detalhes:

$$
\begin{aligned}
R_{tr} &= -\partial_r\Gamma^{\alpha}_{t\alpha} + \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}_{tr} - \Gamma^{\alpha}_{r\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \\
R_{tr} &= -\partial_r(\Gamma^{t}_{tt} + \Gamma^{r}_{tr}) + (\partial_t\Gamma^{t}_{tr} + \partial_r\Gamma^{r}_{tr}) - (\Gamma^{t}_{r\rho}\Gamma^{\rho}_{tt} + \Gamma^{r}_{r\rho}\Gamma^{\rho}_{tr}) + (\Gamma^{t}_{t\rho}\Gamma^{\rho}_{rt} + \Gamma^{r}_{r\rho}\Gamma^{\rho}_{rt} + \Gamma^{\theta}_{\theta\rho}\Gamma^{\rho}_{rt} + \Gamma^{\phi}_{\phi\rho}\Gamma^{\rho}_{rt}) \\
R_{tr} &= \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{t}_{tt} + \Gamma^{t}_{rr}\Gamma^{r}_{tt} + \Gamma^{r}_{tr}\Gamma^{t}_{tr} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{t}_{rt} - \Gamma^{t}_{tt}\Gamma^{t}_{rt} \cdots \\
&\quad - \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{r}_{rt} - \Gamma^{r}_{rt}\Gamma^{t}_{rt} - \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}\Gamma^{t}_{rt} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{\phi}_{\phi t}\Gamma^{t}_{rt} + \Gamma^{\phi}_{\phi r}\Gamma^{r}_{rt} \\
R_{tr} &= \Gamma^{t}_{rr}\Gamma^{r}_{tt} - \Gamma^{r}_{rt}\Gamma^{t}_{rt} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{\phi}_{\phi r}\Gamma^{r}_{rt} \\
&= \partial_t\beta.\partial_r\alpha - \partial_t\beta.\partial_r\alpha + \frac{1}{r}\partial_t\beta + \frac{1}{r}\partial_t\beta \\
R_{tr} &= \frac{2}{r}\partial_t\beta
\end{aligned}
$$

Com isso determinamos todas as quantidades que estão na equação (3.22). Podemos, finalmente, resolvê-la.

3.3 Resolvendo as equações de Einstein-Maxwell

Se colocamos as componentes das equações (3.21) e (3.25) na equação (3.22) obtemos um conjunto de equações diferenciais acopladas. As expressões são significativamente longas e por isso, não vamos apresentar todo o sistema explicitamente. Ao invés disto, vamos usar as equações individualmente para obter formas explícitas para as quantidades, até então, indeterminadas.

Para a componente tr da equação (3.22) temos:

$$\frac{2}{r}\partial_t\beta = 0. \tag{3.26}$$

Ou seja, β é independente da variável t, $\beta(r,t) = \beta(r)$. Utilizando isto e a equação (3.8), podemos perceber que:

$$e^{2\beta(r)}R_{tt} + e^{2\alpha(r,t)}R_{rr} = 0.$$

Resolvendo esta equação obtemos $\alpha(r,t) + \beta(r) = const.$. Agora, redefinimos a componente temporal na equação (3.5) para $dt \to e^{const}dt$, e assim escrevemos: $\alpha(r,t) + \beta(r) = 0$. Portanto, temos

$$\alpha(r,t) = \alpha(r) = -\beta(r). \tag{3.27}$$

Todas as outras componentes fornecem equações diferenciais que dependem das funções $f(r,t)$ e $g(r,t)$, que são as funções que descrevem os campos elétrico e magnético, respectivamente. Para obter essas funções explicitamente, vamos resolver as equações de Maxwell para o tensor $F_{\mu\nu}$ da equação (3.7).

Resolução das equações de Maxwell

As equações de Maxwell, (3.2) e (3.3), são as seguintes:

$$
\begin{cases}
g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu\lambda} = 0, \\
\nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0.
\end{cases}
$$

A equação (3.3) está escrita sem abreviação nos índices, já que vamos utilizá-la neste formato. Nossa tarefa nesta sessão é obter uma forma explícita para as funções que aparecem no tensor do campo eletromagnético, isto é, resolver as equações de Maxwell para o tensor (3.7):

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gr^2\sin\theta \\ 0 & 0 & -gr^2\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \text{onde } f = f(r,t) \text{ e } g = g(r,t).$$

Primeiro vamos obter a forma explícita de $f(r,t)$, que é a função associada ao campo elétrico. Para a primeira equação de Maxwell (3.2), temos a componente radial dada pelo seguinte:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\nabla_\mu F_{\nu r} &= 0 \\ \nabla_t F_{tr} &= \partial_t F_{tr} - \Gamma^\alpha_{tt}F_{\alpha r} - \Gamma^\alpha_{rt}F_{t\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

Levando em conta as componentes do tensor $F_{\mu\nu}$ pode-se ver que esta é a única componente não nula para a coordenada r. Desenvolvendo a soma em α:

$$\partial_t F_{tr} - \Gamma^t_{tt}F_{tr} - \Gamma^r_{rt}F_{tr} = \partial_t F_{tr} - F_{tr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{rt}) = 0 \tag{3.29}$$

Olhando na tabela 1 vemos que: $\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{rt} = \partial_t\alpha + \partial_t\beta = 0$ assim, (3.29) se reduz a

$$\partial_t F_{tr} = \partial_t f = 0 \tag{3.30}$$

Isto é, $f = f(r)$.

Agora vamos calcular a componente t da equação (3.2). Para isto, faremos o uso da identidade (E.21), demonstrada no apêndice E.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}). \tag{3.31}$$

Onde g é o determinante da métrica e $T^{\mu\nu}$ um tensor antissimétrico. Neste ponto podemos garantir que $\sqrt{|g|} = r^2\sin\theta$, e, portanto, se usarmos a métrica para escrever $F_{\mu\nu}$ com índices contravariantes obteremos:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\mu(r^2\sin\theta g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}F_{\lambda\rho}). \tag{3.32}$$

Então a componente t fica:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu t} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\mu(r^2\sin\theta g^{\mu\lambda}g^{t\rho}F_{\lambda\rho}) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_r(r^2\sin\theta g^{rr}g^{tt}F_{rt}) \\ &= \partial_r(r^2F_{rt}) = \partial_r(r^2 f(r)) = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Na passagem da segunda para a terceira igualdade utilizamos $g^{rr}g^{tt} = -1$. A equação (3.33) admite $f(r) = const/r^2$ como solução. Utilizando o teorema de Gauss para o fluxo de um campo vetorial e identificando $const = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$, sendo q a carga elétrica associada ao corpo. Portanto:

$$f(r) = \frac{q}{\sqrt{4\pi}r^2}. \tag{3.34}$$

Para o campo magnético utilizamos a equação (3.3). Utilizando a definição de derivada covariante obtemos o seguinte:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} F_{\mu\alpha} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} F_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} F_{\nu\alpha} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} F_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} F_{\lambda\alpha} = 0.$$

Note que devido à antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$ os termos contendo coeficientes de conexão se anulam, restando apenas:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \tag{3.35}$$

Calculando (3.35) para $\mu = t;\ \nu = \theta;\ \lambda = \phi$ e levando em consideração que $F_{t\theta} = F_{t\phi} = 0$, encontramos

$$\partial_t F_{\theta\phi} = 0 \rightarrow g = g(r). \tag{3.36}$$

Calculando a mesma equação, mas agora para $\mu = r;\ \nu = \theta;\ \lambda = \phi$ e notando que as componentes $F_{r\theta} = F_{r\phi} = 0$, temos:

$$\partial_r F_{\theta\phi} = \partial_r(r^2 g(r)) = 0,$$

e, da mesma forma que para o campo elétrico, temos que $g(r) = const/r^2$. Utilizando o teorema de Gauss para o fluxo de um campo vetorial neste caso, obtemos a equação associada ao campo magnético;

$$g(r) = \frac{p}{\sqrt{4\pi} r^2}. \tag{3.37}$$

A constante p está associada à ”carga magnética”do corpo. Este termo será levando em consideração, porém para que este termo não seja nulo seria necessária a existência de monopólos magnéticos, o que até hoje não foi observado [10].

Portanto, o tensor do campo eletromagnético tem a seguinte expressão:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 & qr^{-2} & 0 & 0 \\ -qr^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\sin\theta \\ 0 & 0 & -p\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

Expressão da Métrica

Agora nos resta apenas uma variável a ser determinada, $\alpha(r)$. Vamos determiná-la a partir da equação

$$R_{\theta\theta} = 8\pi G T_{\theta\theta}. \tag{3.39}$$

Pelas equações (3.21) e (3.25) temos a seguinte equação diferencial:

$$e^{-2\beta}(r[\partial_r\beta - \partial_r\alpha] - 1) + 1 = 8\pi G\left[\frac{1}{2}r^2 g^2 + \frac{1}{2}r^2 f^2 e^{-2(\alpha+\beta)}\right], \tag{3.40}$$

substituindo (3.27), (3.34) e (3.37) em (3.40)

$$-e^{2\alpha}\left[2r\left(\frac{d}{dr}\alpha\right) + 1\right] + 1 = \frac{G}{r^2}\left[q^2 + p^2\right]. \tag{3.41}$$

Como os dois lados da equação (3.41) dependem apenas da variável r substituímos a derivada parcial por uma derivada total. Agora, notemos que o lado esquerdo é uma diferencial exata, então utilizamos técnicas de Equações Diferenciais Parciais Ordinárias para obter uma solução:

$$\frac{d}{dr}(re^{2\alpha}) = e^{2\alpha} + e^{2\alpha}2r\frac{d}{dr}\alpha.$$

Portanto a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dr}(re^{2\alpha}) = 1 - G\frac{1}{r^2}\left(q^2 + p^2\right).$$

Esta equação pode ser resolvida por integração direta em dr

$$\begin{aligned} re^{2\alpha} &= \int \left[1 - G\frac{1}{r^2}(q^2 + p^2)\right] dr \\ &= 1 + G\frac{1}{r}(q^2 + p^2) + Const. \\ &\Rightarrow e^{2\alpha} = 1 + \frac{Const.}{r} + \frac{G}{r^2}(q^2 + p^2). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Para identificar a constante, vamos exigir que a solução (3.42) seja idêntica à solução de Scharwzchild [3], ou seja, quando $q \to 0, p \to 0$, devemos ter uma solução do tipo

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{R_S}{r}. \tag{3.43}$$

Onde $R_S = -2GM$ é chamado de Raio de Scharwzchild. M é a massa da partícula e G a constante da gravitação de Newton. Assim, temos

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{R_S}{r} + \frac{G}{r^2}(q^2 + p^2). \tag{3.44}$$

Substituindo este resultado na equação (3.27) e (3.44) em (3.5) obtemos a expressão da métrica de Reisner-Nordström

$$ds^2 = -\left[1 + \frac{R_S}{r} + \frac{G}{r^2}(q^2 + p^2)\right] dt^2 + \left[1 + \frac{R_S}{r} + \frac{G}{r^2}(q^2 + p^2)\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.45}$$

Com $d\Omega^2 = d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, a métrica de uma superfície esférica. Uma forma mais compacta de escrever (3.45) é fazendo

$$\Delta = 1 + \frac{R_S}{r} + \frac{G}{r^2}(q^2 + p^2),$$

assim:

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Isto conclui o cálculo do tensor métrico.

Capítulo 4

CONCLUSÃO

No presente trabalho, nos propomos ao estudo das propriedades de um corpo carregado e massivo, com simetria esférica, porém estático. Para tal, resolvemos as equações de Einstein-Maxwell. Na relatividade geral a geometria do espaço tempo está associada ao campo gravitacional. O tensor métrico é o que define a distância entre dois pontos de certo intervalo no espaço-tempo. Consequentemente isto altera a trajetória das partículas para observadores em referenciais inerciais. Isto é identificado como a ação do campo gravitacional.

Há uma consequência da expressão (3.45) que pode ser vista diretamente da expressão, e podemos interpreta-la à luz de conceitos apresentados e discutidos em [3]. A equação obtida para a métrica não contém nenhum termo que depende do tempo, isto significa que há um vetor de Killing associado a coordenada t. Geometricamente significa que há uma isometria relacionada à esta coordenada. Fisicamente isto é interpretado como a conservação de energia (através do teorema de Noether) relacionada ao movimento de partículas sob a ação do campo gravitacional produzido pelo corpo.

Quando descrevemos o problema, foi dito que apesar de não descrever nenhum sistema físico real, esta análise tem relevância teórica. Esta relevância reside no fato de a carga elétrica (e magnética) associadas ao corpo alterarem a geometria do espaço tempo em sua vizinhança. Note que na equação (3.45) há um termo que depende de q e p, ou seja, quanto maior a carga elétrica (e magnética) do corpo, maior a curvatura atribuída à presença do corpo naquela região do espaço-tempo. Fisicamente isto significa que as cargas elétrica e magnética também estão associadas ao campo gravitacional. Como perspectiva seria interessante estudar um corpo estático com massa M e carga Q distribuídas uniformemente em outras formas geométricas tais como a cilíndrica. Porém um desafio ainda mais significativo seria considerar o corpo girando, isto é, tendo momento angular.

Apêndices

Apêndice A

Notação e conceitos básicos

Dedicamos este apêndice apenas para explicar alguns conceitos fundamentais para compreensão dos cálculos realizados no trabalho. A ideia não é que o leitor aprenda matemática a partir do material contido aqui, mas que facilite a compreensão através da relação de conceitos familiares com símbolos que num primeiro momento parecem abstratos, como $T_{\mu\nu}$.

No que se segue os índices latinos vão de 1 a 3, e índices em grego de 0 a 3. Assim $i, j... = \{1, 2, 3\}$ e $\mu, \nu... = 0, 1, 2, 3$. As coordenadas serão representadas por $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ - os índices não devem ser confundidos com expoentes. Além disto, utilizaremos a chamada convenção de Einstein para somatórias. Trata-se de uma simplificação da notação para as somas de índices: toda vez que índices aparecem repetidos em uma expressão está implícito uma soma naquele(s) índice(s), por exemplo:

$$\sum_{0}^{3} x_\mu x^\mu = x_\mu x^\mu. \tag{A.1}$$

Os índices que são somados são chamados índices mudos, e podem ser substituídos por outros índices desde que a equação mantenha consistência, portanto:

$$x_\mu x^\mu = x_\nu x^\nu. \tag{A.2}$$

Já os índices que não são somados, mas aparecem na equação, são índices livres e não podem ser substituídos.

Um símbolo de grande importância é o delta de Kronecker, definido da seguinte maneira:

$$\delta^\nu_\mu = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ 1. & \mu = \nu \end{cases} \tag{A.3}$$

Este símbolo nada mais é que a matriz identidade escrita em componentes. Quando utilizamos a notação indicial este símbolo é bem frequente, pois como representa a identidade a única mudança que sua atuação exerce é a substituição de um índice, isto é:

$$\delta^\nu_\mu v^\mu = v^\nu. \tag{A.4}$$

Note que a representação com um índice em cima e outro em baixo é mera convenção, o delta de Kronecker é um invariante, por isto pode ser representado com dois índices em baixo ou em cima sem perder seu significado.

Vetores

Para fazermos a transição entre a notação usual e a notação indicial, devemos estender o conceito de vetores. Na física clássica estamos acostumados a trabalhar com vetores no espaço euclidiano tridimensional, neste contexto vetores são representados da seguinte maneira:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \tag{A.5}$$

Ou, ainda:

$$\vec{v} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}. \tag{A.6}$$

Note que na segunda representação (A.6) adotamos um sistema de coordenadas (cartesiano) explicitamente. Devido a particularidades do espaço euclidiano estamos acostumados com diversas propriedades que podem ser utilizadas para operar com vetores, dentre elas o fato de que neste caso todos os vetores pertencem à mesma classe de objetos, assim um vetor que liga o ponto (1,1,1) ao ponto (2,2,2) será representado pelo mesmo vetor que liga (0,0,0) à (1,1,1).

A Relatividade (Restrita e Geral) é formulada em 4 dimensões devido à necessidade de incorporar a coordenada temporal junto com as coordenadas espaciais. Neste contexto utilizamos a noção de quadrivetores, que podemos pensar como uma extensão de vetores do espaço tridimensional.

Aqui é importante uma observação. Há outras propriedades que são diferentes no espaço euclidiano, no espaço-tempo de minkowski (da relatividade restrita) e nos espaços-tempos utilizados em relatividade geral. Essas propriedades dizem respeito ao comportamento dos vetores frente a algumas transformações de coordenadas, porém esta discussão está além do propósito deste texto mas pode ser encontrada com grandes detalhes em [3] e [6].

Uma diferença imediata do espaço-tempo da relatividade para o espaço euclidiano é que perdemos a operação que chamamos de produto vetorial. Isto porque não é possível definir tal operação num espaço com 4 dimensões.

Vetores são objetos geométricos, e por isto carregamos uma noção intuitiva sobre isto. Porém há um plano de fundo matemático que estabelece as regras com as quais operamos com vetores, assim faz-se necessário lembrar o conceito de espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de objetos que podem ser somados entre si e multiplicados por escalares (números) de maneira linear é um espaço vetorial. Matematicamente: Se V é um espaço vetorial, $v, w \in V$ e $(a, b) \in$ **R**, então

$$(a + b)(v + w) = av + aw + bv + bw. \tag{A.7}$$

Como em Relatividade Geral trabalhamos com espaço-tempo com curvatura, todos esses conceitos devem ser levados em consideração no ambiente de variedades. Por isto, os vetores são definidos no plano tangente a cada ponto da variedade, que em geral é chamado de T_pM. A figura A ilustra essa ideia em duas dimensões. A união de todos os espaços tangentes de uma variedade é chamado de *Tangent Bundle*.

Apesar de todas as definições geométricas que temos para um vetor, para fins de cálculo, precisamos introduzir uma maneira de realizar operações de uma maneira mais eficiente. Fazemos isto introduzindo uma base de vetores, assim podemos representar diferentes vetores em um espaço vetorial através de suas componentes. Uma

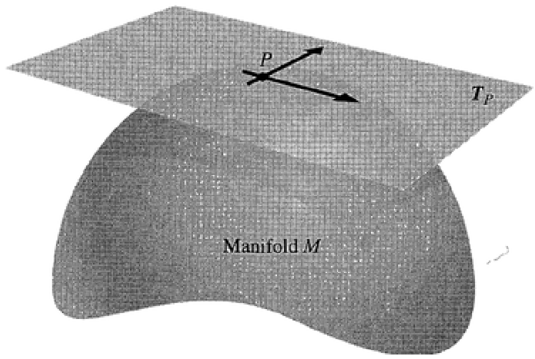

Figura A.1: Base de vetores representada no plano tangente do ponto p da variedade M em duas dimensões.

base de vetores é um conjunto de vetores linearmente independente. Para um dado espaço vetorial é possível definir um número infinito de conjunto de vetores linearmente independentes, porém qualquer que seja o conjunto de vetores que forma esta base, seu número será sempre o mesmo. A este número damos o nome de dimensão do espaço vetorial.

Agora consideremos que para cada ponto p de uma variedade M definimos uma base para o espaço vetorial T_pM associado ao ponto - chamaremos esta base de $\hat{e}_{(\mu)}$. Não vamos especificar qual é esta base, ao invés disso vamos imaginar que esta é uma base "adaptada"para o nosso sistema de coordenadas x^μ. Assim o vetor $\hat{e}_{(1)}$ aponta na "direção x" do nosso sistema. (Note que isto nos permite fazer uma análise bem mais geral, apesar de mais abstrata!)

Nesta base um quadrivetor será escrito da seguinte maneira:

$$A = A^\mu \hat{e}_{(\mu)}. \tag{A.8}$$

Os coeficientes A^μ são as componentes de A na base $\hat{e}_{(\mu)}$. Como ficará claro mais adiante, normalmente não é feita menção à base, mas nos referimos "ao vetor A^μ".

Um exemplo simples de vetor no espaço tempo é o vetor tangente a uma curva parametrizada. Uma curva é caracterizada pelas coordenadas como funções de um parâmetro, $x^\mu(\lambda)$. O vetor tangente $V(\lambda)$ tem as seguintes componentes:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \tag{A.9}$$

Estas são as componentes do vetor, o vetor enquanto entidade geométrica é dado por $V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$.

Antes de darmos o próximo passo cabe ressaltar algumas coisas: (i) Vetores são entidades matemáticas independentes de um sistema de coordenadas a ser adotado ou não, um sistema de coordenadas nos dá uma representação do vetor através das suas componentes. Obviamente o mesmo vetor pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas, para isto devemos respeitar a relação de transformação entre os sistemas em questão. (ii) A notação para os vetores da base $\hat{e}_{(\mu)}$ é apenas uma maneira de lembrar que estas não são componentes de um vetor, mas formam um conjunto de vetores sob as quais definimos as componentes do vetor propriamente dito.

Vetores duais (1-forma)

Tendo definido vetores no espaço vetorial vamos definir outro espaço associado (de dimensão igual), que é chamado de espaço dual. Vetores duais são definidos no chamado espaço cotangente, e é denotado por um asterisco. Assim, o espaço cotangente a um ponto p de uma variedade M é denotado por T_p^*M. Este espaço é o conjunto de todas as aplicações lineares que levam vetores do espaço tangente nos números reais. Em termos matemáticos: se $\omega \in T_p^*M$ então

$$\omega(av + bw) = a\omega(v) + b\omega(w) \in \mathbf{R} \tag{A.10}$$

Estas aplicações lineares formam um espaço vetorial entre si, isto é:

$$(a\omega + b\eta)(v) = a\omega(v) + b\eta(v). \tag{A.11}$$

Por causa disto podemos definir uma base para o espaço dual, $\hat{\theta}^{(\mu)}$, exigindo que:

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{A.12}$$

Assim, escrevemos os duais em componentes como:

$$\omega = \omega_{\mu}\hat{\theta}^{(\mu)}. \tag{A.13}$$

De modo análogo aos vetores, normalmente denotamos os duais apenas por ω_{μ}.

A notação de componentes facilita a compreensão da atuação de um dual em um vetor:

$$\begin{aligned} \omega(v) =& \omega_{\nu}\hat{\theta}^{(\nu)}v^{\mu}\hat{e}_{(\mu)} \\ =& \omega_{\nu}v^{\mu}\hat{\theta}^{(\nu)}\hat{e}_{(\mu)} \\ =& \omega_{\nu}v^{\mu}\delta^{\nu}_{\mu} \\ =& \omega_{\mu}v^{\mu} \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Por este motivo normalmente não se representam vetores e seus duais utilizando a base explicitamente: a representação se encarrega de eliminar esta necessidade. Como vetores e seus duais são independentes da representação, este número não depende do sistema de coordenadas adotado (é um invariante).

Campos vetoriais são definidos em TM como uma função que atribui um vetor a cada ponto do espaço tempo. Da mesma forma vamos definir um campo de vetores duais como sendo uma aplicação que atua em um campo vetorial produzindo uma função escalar.

Através de (A.14) podemos ver que vetores são os duais dos seus próprios duais. Em outras palavras, podemos interpretar vetores como objetos que ”atuam inversamente” nos seus duais, gerando números reais:

$$V(\omega) \equiv \omega(V) = \omega_{\mu}v^{\mu}. \tag{A.15}$$

O exemplo mais simples de um vetor dual no espaço-tempo é o gradiente de uma função escalar - o conjunto de derivadas parciais com relação às coordenadas x^{μ} - que (na linguagem da geometria diferencial) é denotado por um d:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\hat{\theta}^{(\mu)}. \tag{A.16}$$

Como já foi dito na observação acima, há uma diferença quando objetos como os da equação (A.16) se transformam frente a mudanças de coordenadas e os da equação (A.9). Em alguns casos há convenção de nomes para vetores e seus duais devido à colocação dos índices na representação: Vetores (índices em cima) são ditos vetores contravariantes enquanto que vetores duais (índice em baixo) são chamados vetores covariantes.

Tensores

Tensores são a generalização natural de vetores e vetores duais. Assim como definimos os vetores duais como uma aplicação linear que atua em vetores para produzir um número real, definimos um tensor de ordem (ou rank) (k, l) como uma aplicação multilinear que leva k vetores e l vetores duais nos números reais:

$$T : T_p^* \times \text{... l-vezes ...} \times T_p^* \times T_p \times \text{... k-vezes ...} \times T_p \rightarrow \mathbf{R}. \tag{A.17}$$

Onde $\times$ denota um produto cartesiano, por exemplo: $T_p \times T_p$ é o espaço de pares de vetores ordenados (em analogia com os números reais: $\mathbf{R}^2$ é o espaço formado por pares de números reais ordenados). Multilinearidade significa que um tensor atua linearmente em cada um de seus argumentos. Para um tensor de ordem (1,1), por exemplo, temos:

$$T(a\omega + b\eta, cv + dw) = acT(\omega, v) + adT(\omega, w) + bcT(\eta, v) + bdT(\eta, w). \tag{A.18}$$

Nesta perspectiva, escalares são tensores de ordem (0,0), vetores ordem (1,0) e duais têm ordem (0,1).

O espaço de todos os tensores de ordem fixa (k, l) formam um espaço vetorial de acordo com a definição que foi dada anteriormente. Para construir uma base para estes objetos devemos introduzir uma operação chamada produto tensorial, denotada por $\otimes$. Seja T um tensor de ordem (k, l) e S um tensor de ordem (m, n) então o produto tensorial de T com S é um tensor de ordem $(k + m, l + n)$ denotado por

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(k)}, \omega^{(k+1)}, ..., \omega^{(k+m)}, v^{(1)}, ..., v^{(l)}, v^{(l+1)}, ...v^{(l+n)}) \\ = T(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(k)}, v^{(1)}, ..., v^{(l)}) \times S(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(m)}, v^{(1)}, ...v^{(n)}) \end{aligned} \tag{A.19}$$

Note que $\omega^{(\mu)}$ e $V^{(\mu)}$ são duais e vetores distintos, não componentes.

Com isto, podemos definir uma base para tensores de ordem arbitrária tomando o produto tensorial das bases dos vetores e duais. Para evitar exposição de mais equações com diversos fatores consideremos exemplos de tensores escritos em componentes para 3 ordens diferentes: (0,2), (1,1) e (2,0).

$$T = T_{\mu\nu} \hat{\theta}^{(\mu)} \hat{\theta}^{(\nu)}, \tag{A.20}$$

$$T = T^{\mu}_{\nu} \hat{e}_{(\mu)} \hat{\theta}^{\nu}, \tag{A.21}$$

$$T = T^{\mu\nu} \hat{e}_{(\mu)} \hat{e}_{(\nu)}. \tag{A.22}$$

Assim como para os vetores e para os duais, os tensores geralmente são denotados por suas componentes.

Note que apesar da definição que demos para tensores como sendo aplicações lineares que levam um certo número de vetores e duais nos números reais, nada nos força a atuar todas as componentes de um tensor em um conjunto de vetores e duais. Assim, um tensor (1,1), é uma aplicação linear que leva vetores em vetores:

$$T^{\mu}_{\nu} : V^{\nu} \rightarrow T^{\mu}_{\nu} V^{\nu}. \tag{A.23}$$

Da mesma forma esta ideia pode ser estendida para tensores de ordem arbitrária.

Uma operação bem comum quando trabalhamos com tensores é chamada de contração. Esta operação reduz a ordem do tensor, produzindo um novo objeto. Um exemplo claro é o tensor de Ricci, que é a contração do tensor de Riemann. A fim de ilustração, considere a contração do tensor $T^{\alpha}_{\mu\nu}$ nos índices α e ν:

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} \rightarrow T^{\alpha}_{\mu\alpha}, \tag{A.24}$$

Desta forma um tensor de ordem (1,2) passa a ser um vetor dual (tensor (0,1)).

Tensor Métrico

Um exemplo de tensor que tem uma grande importância, não somente em Relatividade Geral, mas em diversos ramos da Física e da Matemática é o tensor métrico. Este tensor é o que define o produto interno entre dois vetores na variedade, isto é, define distâncias e ângulos. Além disto, outra propriedade deste tensor é que ele nos permite transformar vetores em seus duais e vice versa: em termos dos símbolos dizemos que a métrica pode ser utilizada para“abaixar” e “levantar” índices.

A métrica é um tensor simétrico e não degenerado (que possui inversa). Como foi definido na sessão 1.X, é um tensor (0,2) que tem como argumento dois elementos do espaço tangente ao ponto (vetores). Por convenção denotamos o tensor métrico por $g_{\mu\nu}$. Quando nos referimos à métrica estamos falando do elemento de linha do espaço em questão, que é chamado de ds^2 e tem a seguinte definição

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{A.25}$$

Como exemplo considere o espaço euclidiano, que tem a métrica dada pelo Delta de Kronecker δ_{ij}. Temos então

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{A.26}$$

desenvolvendo as somatórias obtemos a bem conhecida expressão para a distância entre dois pontos no espaço tridimensional:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{A.27}$$

Podemos representar tensores de ordem 2 como matrizes, assim é possível utilizar todo ferramental fornecido pela álgebra linear sobre este assunto. Um teorema, que pode ser encontrado em textos elementares sobre o assunto, prova que a inversa de uma matriz é única, assim definimos a inversa do tensor métrico da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{A.28}$$

Como $g_{\mu\nu}$ é simétrico, $g^{\mu\nu}$ também é. Do ponto de vista de matrizes esta relação estabelece que $[g_{\mu\nu}]^{-1} = g^{\mu\nu}$.

De acordo com a equação (A.23) podemos utilizar a métrica para transformar um vetor de um dual da seguinte maneira:

$$v_\mu = g_{\mu\lambda} v^\lambda. \tag{A.29}$$

Observe que a consistência nos índices é mantida. O mesmo pode ser feito para tensores de ordem superior, porém devemos usar um tensor métrico para cada índice, desta forma temos:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} T^{\lambda\sigma}. \tag{A.30}$$

O presente apêndice tem por objetivo introduzir ou esclarecer alguns aspectos crucias da linguagem matemática usual da relatividade geral, essencial para o o desenvolvimento ou leitura de qualquer texto do assunto. Entre estes aspecto, questões básicas a respeito da notação indicial e o significado de objetos representados por esses símbolos. O importante é perceber que isto é apenas uma notação que simplifica bastante as equações e que reduz significativamente os cálculos. Um bom exemplo da aplicação desses conceitos em outra área da Física pode ser encontrado no apêndice C, onde são utilizadas diversas operações com tensores no contexto do eletromagnetismo.

Apêndice B

Calculo do Tensor Momento-Energia do Campo Eletromagnético

Neste apêndice vamos obter o tensor momento energia do campo Eletromagnético:

$$T^{\mu\nu} = (F^{\mu}_{\rho} F^{\nu\rho}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda}. \tag{B.1}$$

Onde estamos utilizando unidades gaussianas.

Partimos da lei de Newton que, para uma partícula com quadrivetor velocidade u^{μ}, é c.f. (3.15)

$$\mu \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \rho F^{\mu\nu} u_{\nu}, \tag{B.2}$$

e das equações de Maxwell para uma distribuição associada ao quadrivetor corrente elétrica j^{μ}, (3.16)

$$\nabla^{\lambda} F_{\lambda\mu} = 4\pi j_{\mu}, \tag{B.3}$$

$$\nabla_{\mu} F_{\nu\lambda} + \nabla_{\nu} F_{\lambda\mu} + \nabla_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0. \tag{B.4}$$

Vamos ainda precisar da seguinte identidade [6]:

$$j^{\mu} = \gamma \rho u^{\mu}, \tag{B.5}$$

onde $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Substituindo ρ de (B.5) em (B.2) temos:

$$\mu \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \gamma^{-1} j_{\nu} F^{\mu\nu}. \tag{B.6}$$

O fator γ pode ser eliminado utilizando a seguinte relação $d\tau = \gamma dt$. Então

$$\mu \frac{du^{\mu}}{dt} = j_{\nu} F^{\mu\nu}. \tag{B.7}$$

O lado direito desta equação, que diz respeito ao campo eletromagnético, é a parte que vamos reescrever daqui por diante.

Multiplicando (B.3) por $F^{\mu\nu}$ em ambos os lados e substituindo em (B.7) obtemos

$$\frac{1}{4\pi} j_{\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\nabla^{\lambda} F_{\lambda\nu}) F^{\mu\nu}, \tag{B.8}$$

utilizando a regra do produto temos $\nabla^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\mu\nu}) - F_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F^{\mu\nu} = (\nabla^\lambda F_{\lambda\nu})F^{\mu\nu}$ e reescrevemos (B.8)

$$\frac{1}{4\pi}j_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[\nabla^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\mu\nu}) - F_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F^{\mu\nu}]. \tag{B.9}$$

Fazendo alguns desenvolvimentos algébricos podemos reescrever o segundo termo:

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\nabla^\nu F^{\lambda\mu} \\ &= \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\nabla^\nu F^{\mu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\nabla^\nu F^{\mu\lambda} + \nabla^\lambda F^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{B.10}$$

Onde na passagem da segunda para a terceira linha utilizamos o fato de que $F_{\nu\lambda}\nabla^\nu F^{\lambda\mu} = F_{\lambda\nu}\nabla^\nu F^{\mu\lambda}$. Usando a equação de Maxwell (B.4) para reescrever o termo entre parênteses de (B.10)

$$\frac{1}{2}F_{\lambda\nu}(\nabla^\nu F^{\mu\lambda} + \nabla^\lambda F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\nabla^\mu F^{\nu\lambda}. \tag{B.11}$$

Vamos usar a regra do produto outra vez, porém agora atentando para os índices do tensor $F^{\mu\nu}$, que são iguais:

$$-\frac{1}{2}F_{\lambda\nu}\nabla^\mu F^{\nu\lambda} = \frac{1}{4}\nabla^\mu F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}. \tag{B.12}$$

Assim, (B.9) tem a seguinte expressão:

$$\frac{1}{4\pi}j_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[\nabla^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\nabla^\mu F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}]. \tag{B.13}$$

Ainda podemos desenvolver um pouco mais os termos do lado direito em (B.13). O primeiro termo do lado direito pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\nabla^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\mu\nu}) = \nabla^\lambda(g_{\lambda\rho}F^\rho_\nu F^{\mu\nu}) = \nabla_\rho(F^\rho_\nu F^{\mu\nu}), \tag{B.14}$$

já o segundo

$$\nabla^\mu F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} = \nabla_\rho g^{\rho\mu}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}. \tag{B.15}$$

Assim, (B.13) toma a seguinte forma

$$\frac{1}{4\pi}\left[\nabla^\lambda(F_{\lambda\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\nabla^\mu F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}\right] = \nabla_\rho\left[\frac{1}{4\pi}(F^\rho_\nu F^{\mu\nu}) - \frac{1}{16\pi}g^{\rho\mu}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}\right]. \tag{B.16}$$

Agora voltamos à segunda lei de Newton (B.2) $\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = \rho F^{\mu\nu}u_\nu$, a cada lado da equação associamos a derivada de um tensor momento-energia i.e. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu$. No presente caso, o lado esquerdo refere-se à particula enquanto o direito ao campo eletromagnético. Portanto, o tensor momento energia do campo eletromagnético é identificado com a quantidade entre colchetes em (B.16):

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F^\mu_\rho F^{\nu\rho}) - \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}, \tag{B.17}$$

que em unidades gaussianas (B.17) é exatamente o tensor apresentado em (B.1).

Por fim, vamos mostrar que $T^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\mu\nu} \\
&= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(\frac{1}{4\pi}(F^{\mu}_{\rho}F^{\nu\rho}) - \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}) \\
&= \frac{1}{4\pi}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}(F^{\mu}_{\rho}F^{\nu\rho}) - \frac{1}{16\pi}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\mu\nu}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{4\pi}(F_{\alpha\rho}F^{\rho}_{\beta}) - \frac{1}{16\pi}g_{\alpha\beta}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Substituindo $\alpha, \beta \to \mu\nu$ e utilizando unidades gaussianas:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{B.19}$$

Apêndice C

Componentes do Tensor Momento Energia do Campo Eletromagnético

Vamos calcular as componentes do tensor momento energia do campo eletromagnético

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{C.1}$$

O tensor $F_{\mu\nu}$ é calculado no capítulo 3.1, e tem a seguinte expressão:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f(r,t) & 0 & 0 \\ -f(r,t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(r,t)r^2\sin\theta \\ 0 & 0 & -g(r,t)r^2\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ e sua inversa $g^{\mu\nu}$ possuem as seguintes componentes de acordo com (5.5):

$$g_{tt} = -e^{2\alpha};\ g_{rr} = e^{2\beta};\ g_{\theta\theta} = r^2;\ g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta, \tag{C.3}$$

$$g^{tt} = -e^{-2\alpha};\ g^{rr} = e^{-2\beta};\ g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2};\ g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \tag{C.4}$$

Antes de determinar cada uma das componentes vamos fazer o calculo do fator $F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}$ que aparece em (C.1), pois esta quantidade não depende das componentes de $T_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} =& F_{\nu\lambda}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\nu}g^{\beta\lambda} \\ =& F_{tr}F_{\alpha\beta}g^{\alpha t}g^{\beta r} + F_{rt}F_{\alpha\beta}g^{\alpha r}g^{\beta t} + F_{\theta\phi}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\theta}g^{\beta\phi} + F_{\phi\theta}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\phi}g^{\beta\theta} \\ =& F_{tr}F_{tr}g^{tt}g^{rr} + F_{rt}F_{rt}g^{rr}g^{tt} + F_{\theta\phi}F_{\theta\phi}g^{\theta\theta}g^{\phi\phi} + F_{\phi\theta}F_{\phi\theta}g^{\phi\phi}g^{\theta\theta} \\ =& 2(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2). \end{aligned} \tag{C.5}$$

As componentes relevantes são as seguintes:

$$\begin{aligned} T_{rr} =& F_{r\rho}F_{r\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}g_{rr}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\ =& F_{rt}F_{rt}g^{tt} - \frac{1}{2}g_{rr}(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\ =& -\frac{1}{2}f^2e^{-2\alpha} - \frac{1}{2}g^2e^{2\beta}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
T_{\theta\theta} =&F_{\theta\rho}F_{\theta\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}g_{\theta\theta}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\
=&F_{\theta\phi}F_{\theta\phi}g^{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\
=&(gr^2\sin\theta)^2\frac{1}{r^2\sin^2\theta} - \frac{1}{2}r^2(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\
=&\frac{1}{2}g^2r^2 + \frac{1}{2}r^2f^2e^{-2(\alpha+\beta)}.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
T_{\phi\phi} =&F_{\phi\rho}F_{\phi\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}g_{\phi\phi}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\
=&F_{\phi\theta}F_{\phi\theta}g^{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\
=&(gr^2\sin\theta)^2\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta(-f^2e^{-2(\alpha+\beta)} + g^2) \\
=&\frac{1}{2}g^2r^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta f^2e^{-2(\alpha+\beta)} \\
=&T_{\theta\theta}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
T_{tr} =&F_{t\rho}F_{r\lambda}g^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}g_{tr}F_{\nu\lambda}F^{\nu\lambda} \\
=&F_{tr}F_{rt}g^{tr} = 0.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

A componente T_{tt} é calculada nno capítulo 3.1. Todas as outras componentes de $T_{\mu\nu}$ são nulas.

Apêndice D

Componentes do Tensor de Ricci

No capítulo 3.2 apresentamos uma expressão para as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\alpha}. \tag{D.1}$$

Nos cálculos a seguir apresentamos a resolução passo a passo para cada componente. Os passos são basicamente desenvolver somatorias (índices repetidos) nas componentes e identificar as que não são nulas, utilizando a tabela 3.1 (sessão 3.2), cancelar e reorganizar termos. Realmente não há nenhum passo que exija alguma espécie de artimanha ou reescrever algum termo fazendo desenvolvimentos algébricos nos cálculos.

As componentes não nulas do tensor de Ricci são as seguintes:

- R_{tt}

$$\begin{aligned} R_{tt} =& \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{tt} - \partial_t \Gamma^\alpha_{t\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{tt} - \Gamma^\alpha_{t\rho}\Gamma^\rho_{t\alpha} \\ =& (\partial_t \Gamma^t_{tt} + \partial_r \Gamma^r_{tt}) - (\partial_t \Gamma^t_{tt} + \partial_t \Gamma^r_{tr})... \\ & ... + (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{tt})... \\ & ... - (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^r_{t\rho}\Gamma^\rho_{tr} + \Gamma^\theta_{t\rho}\Gamma^\rho_{t\theta} + \Gamma^\phi_{t\rho}\Gamma^\rho_{t\phi}) \end{aligned} \tag{D.2}$$

Devido à extensão do segundo e do terceiro termo vamos expandi-los separadamente e depois colocar o resultado na expressão (D.2)

$$\begin{aligned} (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{tt}) =& \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{tt}... \\ & ... + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{tt} \end{aligned}$$

$$(\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{tt} + \Gamma^r_{t\rho}\Gamma^\rho_{tr} + \Gamma^\theta_{t\rho}\Gamma^\rho_{t\theta} + \Gamma^\phi_{t\rho}\Gamma^\rho_{t\phi}) = \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{tr}\Gamma^r_{tr}$$

Voltando para (D.2)

$$\begin{aligned} R_{tt} =& (\partial_t \Gamma^t_{tt} + \partial_r \Gamma^r_{tt}) - (\partial_t \Gamma^t_{tt} + \partial_t \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tt}... \\ & ... + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{tt}... \\ & ... - (\Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{tr}\Gamma^r_{tr}) \end{aligned} \tag{D.3}$$

Cancelando alguns termos

$$R_{tt} = \partial_r \Gamma^r_{tt} - \partial_t \Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} - \Gamma^r_{tr}\Gamma^r_{tr} \tag{D.4}$$

Reorganizando e substituindo os símbolos da tabela 1:

$$\begin{aligned}R_{tt} =&\partial_r\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tr}\Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{tt} + (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\phi_{\phi r} - \Gamma^t_{tr})\Gamma^r_{tt} - \partial_t\Gamma^r_{tr} \\ =& -(\partial_t\beta)^2 - \partial_t\partial_t\beta + \partial_t\beta\partial_t\alpha + [(\partial_r\alpha)^2 + \partial_r^2\alpha - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha]e^{2(\alpha-\beta)}\end{aligned} \tag{D.5}$$

- R_{rr}

$$\begin{aligned}R_{rr} =&\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{rr} - \partial_r\Gamma^\alpha_{r\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{rr} - \Gamma^\alpha_{r\rho}\Gamma^\rho_{\alpha r} \\ =&(\partial_t\Gamma^t_{rr} + \partial_r\Gamma^r_{rr}) - (\partial_r\Gamma^t_{rt} + \partial_r\Gamma^r_{rr} + \partial_r\Gamma^\theta_{r\theta} + \partial_r\Gamma^\phi_{r\phi})... \\ &... + (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{rr}) \\ &... - (\Gamma^t_{r\rho}\Gamma^\rho_{tr} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\theta_{r\rho}\Gamma^\rho_{\theta r} + \Gamma^\phi_{r\rho}\Gamma^\rho_{\phi r})\end{aligned} \tag{D.6}$$

Terceiro e quarto termo

$$\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{rr} = \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{rr}$$

$$\Gamma^t_{r\rho}\Gamma^\rho_{tr} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{rr} + \Gamma^\theta_{r\rho}\Gamma^\rho_{\theta r} + \Gamma^\phi_{r\rho}\Gamma^\rho_{\phi r} = \Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi r} \tag{D.7}$$

Então

$$\begin{aligned}R_{rr} =&(\partial_t\Gamma^t_{rr} + \partial_r\Gamma^r_{rr}) - (\partial_r\Gamma^t_{rt} + \partial_r\Gamma^r_{rr} + \partial_r\Gamma^\theta_{r\theta} + \partial_r\Gamma^\phi_{r\phi})... \\ &... + (\Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{rr})... \\ &... - (\Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi r})\end{aligned} \tag{D.8}$$

Cancelando alguns termos iguais

$$\begin{aligned}R_{rr} =&(\partial_t\Gamma^t_{rr} + \partial_r\Gamma^r_{rr}) - (\partial_r\Gamma^t_{rt} + \partial_r\Gamma^r_{rr} + \partial_r\Gamma^\theta_{r\theta} + \partial_r\Gamma^\phi_{r\phi})... \\ &... + (\Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{rr}) - (\Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi r})\end{aligned} \tag{D.9}$$

Substituindo os valores e reorganizando os termos

$$\begin{aligned}R_{rr} =&(\partial_t e^{2(\beta-\alpha)}\partial_t\beta) - (\partial_r\partial_r\alpha + \partial_r\frac{1}{r} + \partial_r\frac{1}{r})... \\ &... + (\partial_t\alpha e^{2(\beta-\alpha)}\partial_t\beta + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}\partial_r\beta + \frac{1}{r}\partial_r\beta)... \\ &... - ((\partial_r\alpha)^2 + \partial_t\beta e^{2(\beta-\alpha)}\partial_t\beta + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2})\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}R_{rr} =&\partial_t^2\beta e^{2(\beta-\alpha)} + e^{2(\beta-\alpha)}2(\partial_t\beta)^2 - e^{2(\beta-\alpha)}2\partial_t\alpha\partial_t\beta - \partial_r^2\alpha... \\ &... + \partial_t\alpha\partial_t\beta e^{2(\beta-\alpha)} + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta - (\partial_r\alpha)^2 - (\partial_t\beta)^2 e^{2(\beta-\alpha)}\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2\alpha + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta - (\partial_r\alpha)^2 + e^{2(\beta-\alpha)}(\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta) \tag{D.12}$$

- $R_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} =&\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^\alpha_{\theta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^\alpha_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\alpha} \\ =&\partial_r\Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^\phi_{\theta\phi} + (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta})... \\ &... - (\Gamma^t_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta t} + \Gamma^r_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\phi}) \end{aligned} \tag{D.13}$$

Terceiro e quarto termo

$$\begin{aligned} (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta}) =&\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\theta\theta}, \\ (\Gamma^t_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta t} + \Gamma^r_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\theta\phi}) =&\Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{\theta\phi}. \end{aligned} \tag{D.14}$$

Cancelando os símbolos repetidos e substituindo os símbolos na expressão

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} =&\partial_r\Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^\phi_{\theta\phi} + (\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\theta\theta})... \\ &... - (\Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{\theta\phi}) \\ \\ =&- (e^{-2\beta} - 2re^{-2\beta}\partial_r\beta) + \csc^2\theta - (r\partial_r\alpha e^{-2\beta} + r\partial_r\beta e^{-2\beta} + e^{-2\beta})... \\ &... - (-e^{-2\beta} + \cot^2\theta) \\ \\ =&(-1 + r[\partial_r\beta - \partial_r\alpha])e^{-2\beta} + \csc^2\theta - \cot^2\theta. \end{aligned} \tag{D.15}$$

Usando $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$ obtemos

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}(r[\partial_r\beta - \partial_r\alpha] - 1) + 1. \tag{D.16}$$

- $R_{\phi\phi}$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} =&\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\phi\phi} - \partial_\phi\Gamma^\alpha_{\phi\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} - \Gamma^\alpha_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\alpha} \\ =&\partial_r\Gamma^r_{\phi\phi} + \partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} + (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi})... \\ &... - (\Gamma^t_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi t} + \Gamma^r_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi r} + \Gamma^\theta_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi}) \end{aligned} \tag{D.17}$$

Terceiro e quarto termo

$$\begin{aligned} (\Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi}) =&\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi} \\ \\ (\Gamma^t_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi t} + \Gamma^r_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi r} + \Gamma^\theta_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi}) =&\Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi} \end{aligned} \tag{D.18}$$

De volta na expressão original

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} =&\partial_r\Gamma^r_{\phi\phi} + \partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} + (\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi})... \\ &... - (\Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi}) \\ \\ =&- \partial_r re^{-2\beta}\sin^2\theta - \partial_\theta\sin\theta\cos\theta + (-\partial_r\alpha re^{-2\beta}\sin^2\theta - \partial_r\beta re^{-2\beta}\sin^2\theta... \\ &... - e^{-2\beta}\sin^2\theta) + (e^{-2\beta}\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ \\ =&\{[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1]e^{-2\beta} + 1\}\sin^2\theta \end{aligned} \tag{D.19}$$

Ou seja

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta \qquad \text{(D.20)}$$

Como a componente R_{tr} foi calculada no capítulo 3.2 isto finaliza o calculo das componentes não nulas do tensor de Ricci.

Apêndice E

Identidades

Neste apêndice vamos demonstrar as relações (3.24) e (3.31). Começamos com o conjunto de 4 relações dadas por (3.24):

$$\left\{\begin{array}{c} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0, \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}\partial_{\lambda} g_{\mu\mu}, \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu}(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}), \\ \Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \partial_{\lambda}(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}). \end{array}\right. , \quad \mu \neq \nu \neq \lambda \tag{E.1}$$

Queremos mostrar que estas relações são válidas para uma métrica diagonal, em particular:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2 d\Omega. \tag{E.2}$$

Estamos tomando como definição dos coeficientes de conexão a seguinte expressão:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \tag{E.3}$$

A primeira das identidades é trivial, pois pela expressão (E.3) com $\mu \neq \nu \neq \lambda$ a única componente não nula de $g^{\lambda\sigma}$ seria tomando esses dois índices iguais. Porém quando isto é feito o termo entre parênteses é todo nulo pelas condições sobre os índices.

Para a segunda relação tomamos a contração

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu} g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\mu}), \tag{E.4}$$

Agora para não anular (E.4) tomamos $\sigma = \lambda$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(\partial_{\mu} g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\mu}). \tag{E.5}$$

Portanto

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}\partial_{\lambda} g_{\mu\mu} \tag{E.6}$$

Na terceira identidade temos a seguinte contração, seguida da seleção de índices que não anulam a expressão

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} =& \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu} g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\lambda}) \\ =& \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(\partial_{\mu} g_{\lambda\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\lambda}) \end{aligned} \tag{E.7}$$

Ou seja

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\lambda}). \tag{E.8}$$

Fazendo $g^{\lambda\lambda} = (g_{\lambda\lambda})^{-1}$ obtemos

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\lambda\lambda}}(\partial_\mu g_{\lambda\lambda}), \tag{E.9}$$

Note que $g_{\lambda\lambda} \to \sqrt{(g_{\lambda\lambda})^2} = |g_{\lambda\lambda}|$ não altera a função. Como

$$\partial_\mu(ln|f(x^\mu)|) = \frac{1}{f(x^\mu)}\partial_\mu f(x^\mu), \tag{E.10}$$

utilizamos (E.10) para escrever

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \partial_\mu(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}). \tag{E.11}$$

A quarta relação é a seguinte contração

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(\partial_\lambda g_{\lambda\lambda} + \partial_\lambda g_{\lambda\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\lambda}) = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}). \tag{E.12}$$

Utilizando o mesmo raciocínio para a demonstração anterior, porém tomando $\mu \to \lambda$ obtemos

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \partial_\lambda(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}). \tag{E.13}$$

Agora vamos à demonstração de (3.31)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}) \tag{E.14}$$

Considere (E.11) escrita da seguinte maneira:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \partial_\mu(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}) = \frac{1}{\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}}\partial_\mu(\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}). \tag{E.15}$$

Aplicando a definição de derivada covariante e contraíndo os índices como em (E.14) temos

$$\nabla_\sigma T^{\mu\nu} = \partial_\sigma T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda}T^{\mu\lambda} \to \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}. \tag{E.16}$$

Fazendo a troca de índices $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} \to \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}T^{\mu\nu}$ e aplicando (E.11)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}}\partial_\mu(\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|})T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}. \tag{E.17}$$

Observe que os termos contendo derivadas parciais podem ser escritos como uma única derivada utilizando a regra do produto

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}) + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}T^{\rho\mu}. \tag{E.18}$$

Como $T^{\mu\nu}$ em questão é anti-simétrico (lembre que esta identidade aparece na resolução das equações de Maxwell ddo capítulo 3.3) o último termo é nulo:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}T^{\rho\mu} = -\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}T^{\mu\rho} \rightarrow \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}T^{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}T^{\mu\rho} = 0, \tag{E.19}$$

ou seja

$$(\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu})T^{\rho\mu} = 0, \tag{E.20}$$

pois $\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$. Portanto

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\mu}(\sqrt{|g|}T^{\mu\nu}). \tag{E.21}$$

Capítulo 5

REFERÊNCIAS

Referências Bibliográficas

[1] Albert Einstein, ***A Teoria da Relatividade Especial e Geral***. Tradução original do alemão Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro : Contraponto, 1999.

[2] Steven Weinberg, ***Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity***. John Wiley & Sons, 1972

[3] Sean Carroll, ***An introduction to General Relativity:Spacetime and Geometry***. Pearson Education, 2004.

[4] Lee C. Loveridge, ***Physical and Geometric Interpretations of the Riemann Tensor, Ricci Tensor, and Scalar Curvature***. Disponível em: http://arxiv.org/abs/gr-qc/0401099.

[5] Mario Novello, Nelson Pinto Neto, et al, ***Programa Mínimo de Cosmologia***. Jauá Editora, 2010.

[6] João Barcelos Neto, ***Matemática Para Físicos volume 1***. São Paulo: Editora Livraria da Física 2010.

[7] Dennis Lehmkuhlm, ***Mass-Energy-Momentum in General Relativity. Only there because of Spacetime?***. Disponível em: http://tinyurl.com/q4mfthd.

[8] Henrique Fleming, ***O Tensor de Momento-Energia Métrico, e o Canônico***. Disponível em: http://www.hfleming.com/temunu.pdf.

[9] Hans Stephani, ***General Relativity - 2nd Edition***. Cambridge University Press, 1990.

[10] David J. Griffiths, ***Introduction to Electrodynamics - 3rd Edition***. Prentice-Hall, Inc, 1999.