



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

## **ESTUDO DE MANOBRAS ORBITAIS UTILIZANDO ALGORÍTMO GENÉTICO**

**RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO  
CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)**

Bolsista – Wagner Frederico Cesar Mahler (ETEP Faculdades,  
Bolsista PIBIC/CNPq)  
e-mail: [wagner.mahler@gmail.com](mailto:wagner.mahler@gmail.com)

Orientador – Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos  
(DMC/INPE)  
e-mail: [denilson@dem.inpe.br](mailto:denilson@dem.inpe.br)

## RESUMO

O estudo de manobras orbitais pode abranger desde a correção da trajetória de um veículo no momento de seu lançamento até a manutenção de um de um satélite em sua órbita nominal. Estudar esse assunto é de extrema importância no ramo espacial.

Ao se tratar deste assunto, custos são uma das incógnitas que mais interferem em um projeto. De microcomponentes a combustíveis, a construção de um veículo pode acontecer ou não de forma satisfatória, tudo dependerá das condições iniciais de projeto.

Neste estudo em particular, serão analisados problemas, adotando métodos que possibilitem uma melhoria durante o lançamento de um veículo e sua possível permanência no espaço. Para isso as equações do sistema e métodos de otimização utilizando algoritmo genético serão utilizados e suas respectivas simulações realizadas em MATLAB. Todavia, esses estudos são complexos e, para melhor compreender seu comportamento, estudou-se primeiramente o controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel em malha aberta e malha fechada. Tratando-se de um sistema intrinsecamente instável, foram analisadas duas condições: a primeira, linearizando as equações diferenciais do movimento do sistema, modelando e estudando o comportamento do controle dos estados a serem medidos (posição e velocidade angular, posição e velocidade linear da plataforma móvel) e a segunda, tratou do mesmo problema, porém, de forma não linear. Em ambos os casos observou-se a solução em malha fechada, mais especificamente através de um sistema LQR (*Linear Quadratic Regulator*).

Os resultados obtidos neste estudo indicam o potencial da utilização do sistema proposto em situações instáveis, ou seja, não triviais e com certo grau de complexidade, onde se tem um controle em retroalimentação. Os resultados obtidos indicam o potencial da utilização do sistema LQR proposto em situações instáveis comparados a um sistema em malha aberta.

Iniciado em agosto de 2010, o estudo referente a manobras orbitais utilizando algoritmos genéticos segue até o presente momento, junho de 2011, com pretensões de prorrogar os estudos que objetivam avaliar métodos que possibilitem obter missões espaciais cada vez mais satisfatórias.

## AGRADECIMENTOS

Baruch H' por capacitar a cada dia, aos meus familiares e amigos por todo incentivo. Ao INPE e a CNPq por todo apoio prestado e aos meus mestres por todo conhecimento transmitido.

Em especial faço questão de citar um nome e dedicar este trabalho a ele, meu tio Dr. Carlos Alberto Gallo, muito obrigado por tudo!

*Se alguém disser: "eu me esforcei, porém não encontrei [consegui]" – não creias; "Eu não me esforcei e encontrei" – não creias; "Eu me esforcei e encontrei" – acredita!  
(Talmud, Meguilá 6b)*

*"Di teg asoj vi valizen, der selber Moos Alle zenen, der es selber Modell un der selber farb vend zich Nur vus me'pakt ein derin. - Os dias são como malas, todas do mesmo tamanho, modelo e cor, o que muda apenas é o que colocamos dentro."*

## SUMÁRIO

1. MOTIVAÇÃO .....	5
2. INTRODUÇÃO .....	6
3. TRANSFERÊNCIA ORBITAL.....	7
3.1. Transferência de Hohmann .....	7
3.2. Transferência BI-ÉPÍTICA TRI-IMPULSIVA .....	8
4. DESCRIÇÃO DO MODELO .....	11
5. MODELO MATEMÁTICO.....	13
6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	16
6.1. Dados.....	16
6.2. LQR.....	18
6.3. Planta do Sistema .....	19
7. ANALOGIA.....	21
8. CONCLUSÃO .....	22
9. REFERÊNCIAS.....	23

## 1. MOTIVAÇÃO

Desde os primórdios o homem tem observado o espaço e tentado entender as perguntas que surgiam e o indagavam. Aos poucos a luz do conhecimento foi trazendo brilho através de equações que explicavam ou tentavam explicar o que era observado. Da *Philosophiae* lançada pelos gregos até a Relatividade de Einstein, o homem adquiriu ferramentas para poder expandir seus horizontes terrestres em busca da conquista espacial.

Foi durante a segunda guerra mundial com a famosa *Vergeltungswaffe 2* ou simplesmente V2, primeiro míssil balístico lançado verticalmente do solo.

Após a grande guerra, durante a corrida armamentista entre E.U.A. e U.S.S.R. a ciência evolui ainda mais e em 1969 Yuri Gagarin chega ao espaço. Daí por diante o homem já foi a Lua, sondas adentraram os primeiros quilômetros da atmosfera de Saturno e outras vagam pelo espaço em busca de vida fora da Terra (missão Galileu).

O grande fato é que para se obter modelos ideais pesquisas são desenvolvidas e é de suma importância saber que um país que pretende obter tecnologias espaciais precisa cultivar e incentivar este tipo de cultura em sua população.

Para desenvolver uma situação que se aproxima de um resultado ótimo, muitos fatores deverão ser levados em consideração. Forças de atrito durante um lançamento, tendência do veículo lançador rotacionar devido à quantidade de empuxo gerado por suas turbinas adotando como trajetória uma órbita desgovernada, perturbações de ventos solares ou qualquer outro tipo de radiação cósmica em meio espacial, atração gravitacional, economia de combustível, são condições que devem ser levadas em consideração durante a fase de projeto. Em nível de iniciação científica muitos destes fatores não serão estudados devido à complexidade do assunto. Todavia analisar-se-á situações onde manobras sejam possíveis utilizando a captura gravitacional de astros, minimização do gasto de combustível e transferências orbitais.

Serão utilizadas as equações do movimento, implementação de algoritmos evolutivos simulados em MATLAB.

## 2. INTRODUÇÃO

O estudo de manobras orbitais caracteriza-se por se tratar de um assunto desafiador em tentar definir o menor custo e a melhor trajetória durante uma missão.

Hoje em dia se conhece casos clássicos de manobras onde diversos institutos de pesquisas concentram sua atenção tentando buscar a melhor maneira de se customizar uma missão.

Para cada situação existe uma condição ideal. Em outras palavras, não existe uma manobra ideal, única, que seja a solução de todos os problemas, mas sim uma manobra adequada para cada situação a se analisar.

Outro ponto importante a se tratar é a definição do problema de múltiplos corpos. Esta análise é de suma importância já que a ação de forças de todos os corpos do sistema influi no movimento do veículo. A grande ideia é definir durante o início da análise quantos corpos estarão efetivamente envolvidos gravitacionalmente e quais corpos serão considerados pontos massivos perturbadores do sistema.

Este trabalho tratará a priori de manobras orbitais, como o trabalho é desenvolvido em nível de iniciação científica necessitou-se, a primeira estância, compreender de forma efetiva o comportamento de um sistema dinâmico intrinsecamente instável, tais como as equações do movimento e suas soluções através da utilização de malhas de controle. Como o assunto de manobras é complexo por ser bastante abrangente, a abordagem do estudo de sistemas dinâmicos fez-se necessária ajudando na compreensão do movimento de um corpo, que neste caso foi a modelagem de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, e as ferramentas utilizadas para o controle.

### 3. TRANSFERÊNCIA ORBITAL

A ideia principal consiste em fazer uma manobra de transferência de uma órbita a outra com o menor gasto de combustível possível. Entretanto, as condições iniciais serão relevantes, pois o tipo de transferência (elíptica, circular, parabólica etc.) influi no problema.

#### 3.1. Transferência de Hohmann

A transferência de Hohmann trata de uma manobra bi impulsiva em um campo gravitacional Newtoniano entre órbitas coplanares e circulares com o tempo livre (Marec, 1979).

A Figura 3.1 ilustra a proposta da transferência de Hohmann.

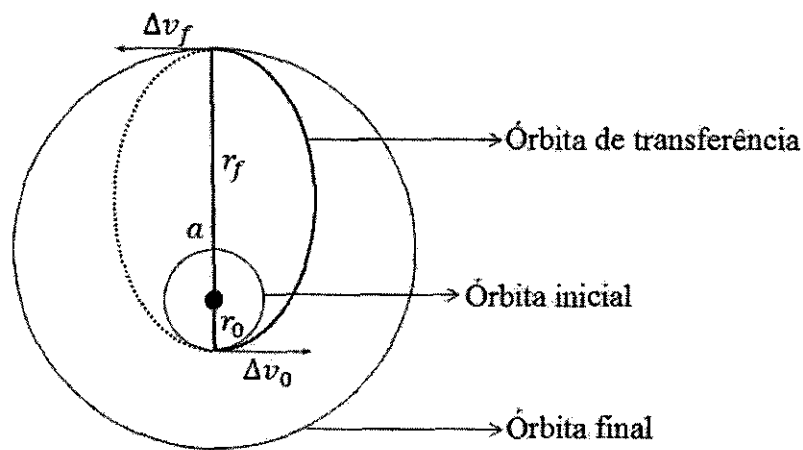


Figura 3.1 – Transferência de Hohmann.

Esta transferência possui resultado ótimo somente quando a razão entre os raios do perigeu  $r_0$  e apogeu  $r_f$  é menor que 11,93876. Neste caso o gasto de combustível será mínimo devido o menor  $\Delta v$ . Para se efetuar a transferência aplica-se um impulso inicial  $\Delta v_0$  na órbita de origem (circular) de raio  $r_0$  fazendo com que o veículo passe por uma órbita de transferência (órbita elíptica) até chegar ao apogeu de raio  $r_f$  onde o segundo impulso  $\Delta v_f$  será dado colocando então o veículo sobre sua nova órbita, órbita final (circular) (Santos, 2006).

O cálculo desta transferência é mostrado abaixo (Chobotov, 1996):

Considerando a vis-viva:

$$v^2 = \mu \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (1)$$

Aplicando-se no problema:

$$v_0^2 = \mu \left[ \frac{2}{r_0} - \frac{2}{r_0 + r_f} \right]; \text{ onde } 2a = r_0 + r_f \rightarrow a = r_0 \left( 1 + \frac{r_f}{r_0} \right) \quad (2)$$

Desta forma:

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right] \quad (3)$$

Como  $v_{c0}^2 = \frac{\mu}{r_0}$ , então:

$$\left( \frac{v_0}{v_{c0}} \right)^2 = \left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right] \quad (4)$$

$$\frac{v_0}{v_{c0}} = \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} \right]} \quad (5)$$

$$\Delta v = v_{c0} \left[ \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} - 1 \right]} \right] \quad (6)$$

Então:

$$\Delta v_0 = v_0 \left[ \sqrt{\left[ \frac{2 \left( \frac{r_f}{r_0} \right)}{1 + \frac{r_f}{r_0}} - 1 \right]} \right] \quad (7)$$

### 3.2. Transferência Bi-Elíptica Tri-Impulsiva

Como dito a transferência de Hohmann é ótima apenas quando  $\frac{r_f}{r_0} < 11,93876$ . Isso foi demonstrado no trabalho de Hoelker e Silber (1959). O trabalho diz que quando essa razão é maior que 11,93876 a transferência de Hohmann deixa de ser ótima e então a viabilidade passa a ser a transferência bi-elíptica e tri-impulsiva.

A Figura 3.2 ilustra uma transferência bi-elíptica e tri-impulsiva.



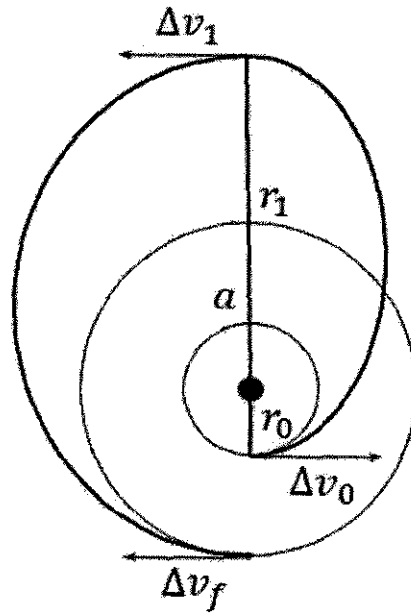


Figura 3.2 – Transferência bi-elíptica tri-impulsiva.

O veículo encontra-se no perigeu dentro de uma órbita circular de raio  $r_0$ , um impulso inicial  $\Delta v_0$  coloca o veículo numa órbita de transferência de raio  $r_1$  tal que  $r_1 > r_0$ . Quando o veículo encontra-se no apogeu, outro impulsivo  $\Delta v_1$  é dado fazendo com que o veículo se mova para outra órbita de transferência (elíptica). Então, já na posição desejada, um impulso  $\Delta v_f$  faz com que o veículo desacelere e entre em órbita circular novamente, todavia com um raio final maior que o inicial.

Tanto a órbita inicial quanto a final são concêntricas no planeta, porém com raios distintos.

O equacionamento é descrito da seguinte forma:

$$\Delta v_0 = \varepsilon_0 \left( \sqrt{\left[ \frac{2r_1}{1+r_1} - 1 \right]} \right) \quad (8)$$

$$\Delta v_1 = \left( \sqrt{\left[ \frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)} \right]} - \sqrt{\left[ \frac{2}{r_1(1+r_1)} \right]} \right) \quad (9)$$

$$\Delta v_f = \varepsilon_f \left( \sqrt{\left[ \frac{2r_f}{r_1(r_f+r_1)} \right]} - \sqrt{r_f} \right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_0 = \text{sinal} (r_1 - 1) \quad (11)$$

$$\varepsilon_f = \text{sinal} (r_1 - r_f) \quad (12)$$

Como visto na dissertação de mestrado de Santos (2005) a transferência de  $\Delta v$  mínimo ocorre com  $r_1 \rightarrow \infty$ , conhecida como transferência bi-parabólica onde as duas órbitas de transferência assumem formatos de parábola. Quanto à razão entre apogeu e perigeu tem-se:

- $\frac{r_f}{r_0} > 15,58178$  transferência bi-elíptica é superior a de transferência de Hohmann ( $r_1 > r_f$ ).
- $11,93876 < \frac{r_f}{r_0} < 15,58178$  dentro desta faixa existe um valor mínimo limite de  $r_1$  que a transferência bi-elíptica deve se utilizar para ser mais eficiente do que a de Hohmann.

A manobra orbital possui agentes perturbadores externos que podem ou não serem considerados durante a análise de um problema, tudo irá depender do tratamento de um modelo real ou ideal. A quantidade de perturbações irá definir a proximidade do estudo ao modelo real. Portanto, uma missão deve ser considerada de sucesso desde o momento de seu lançamento até sua entrada e permanência na órbita desejada, sempre tentando aproximar-se do modelo real.

De forma evolutiva e gradual, pretende-se compreender, da melhor forma, o movimento do veículo com suas devidas perturbações. Como a intenção é dar continuidade a este trabalho, primeiramente estudou-se um sistema dinâmico terrestre através do modelo de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, para abstrair melhor o conceito do que são forças perturbadoras em sistemas instáveis durante um lançamento e como este sistema pode ser controlado.

#### 4. DESCRIÇÃO DO MODELO

O pêndulo invertido é um mecanismo com característica dinâmica estável e instável dependendo do estado a qual ele está submetido. O sistema que será estudado é composto por um carro que se move para frente e para trás sobre um eixo horizontal. Sobre ele um pêndulo com uma massa esférica homogênea foi instalado de modo que o mesmo não terá movimento de translação, possuindo somente o grau de liberdade de mover-se para frente e para trás como mostra a Figura 4.1.

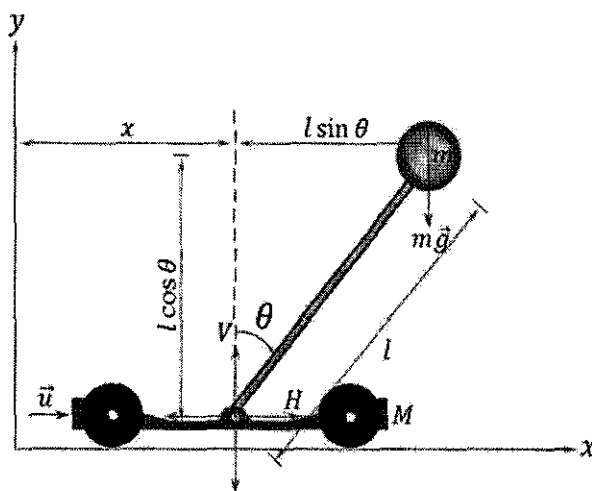


Figure 4.1 – Pêndulo invertido sobre uma superfície móvel, com uma massa homogênea concentrada no topo da haste.

A estabilidade do pêndulo está contida na condição de  $\theta = 90^\circ$  e  $\dot{x} = 0$ , todavia para que o sistema seja estudado com eficácia na implementação de um controle através da utilização de malhas adotar-se-á um sistema instável, ou seja,  $\theta \neq 0$  e  $\dot{x} \neq 0$ .

O sistema é composto por um carro que se move para frente e para trás sobre um eixo horizontal. Sobre ele um pêndulo foi instalado de modo que o mesmo não terá movimento unidimensional, possuindo somente o grau de liberdade de mover-se para frente e para trás. Esta situação representa uma plataforma útil para o estudo de muitos outros mecanismos complexos, como por exemplo, sistema de controle de mísseis, veículos lançadores, veículo de transporte humano, o que futuramente pode se apresentar como alternativa de transporte automático para áreas urbanas como mostra o trabalho de Tirmant, Baloh, Vermeiren, Guerra e Parent (2002), estudos de robôs autônomos baseados nesse mesmo conceito têm sido realizados pela NASA, apresentando resultados significativos, como pode ser visto em Ambrose, Savely e Goza

(2004). A simples brincadeira de equilibrar um lápis ou um cabo de vassoura na ponta dos dedos seria uma forma razoável de exemplificar o problema tratado neste estudo.

Como visto no trabalho de Miller, Sutton e Werbos (1995), o sistema do pêndulo invertido possui características dinâmicas intrinsecamente instáveis. Através de um controle externo o movimento oscilatório do mesmo pode ser controlado mantendo conservada a posição vertical ou qualquer outra posição que se desejar. O trabalho de Vendramini e Silva (2010) modela o sistema e utiliza compensadores lineares PID e MFAC (*Model – Free Adaptive Control*) o que consiste resumidamente de uma rede neural artificial neural dinâmica o qual necessita realizar uma ação de controle dado a realimentação de duas variáveis de interesse.

O intuito deste trabalho é simular esta dinâmica não linear do pêndulo, comparando a um veículo lançador no momento de seu lançamento, utilizando malhas de controle do tipo LQR (*Linear Quadratic Regulator*), minimizando os estados de saída através de quatro variáveis de entrada.

## 5. MODELO MATEMÁTICO

O pêndulo encontra-se parado na vertical. Uma perturbação externa faz com que o pêndulo comece a cair formando um ângulo  $\theta$  com a posição inicial. Desta forma, o carro que se encontrava parado, começa a mover-se para frente ou para trás, aplicando pequenas quantidades de força contrária ou a favor do movimento de queda do pêndulo, vai depender da forma a qual o pêndulo se moveu (frente ou trás), de forma a fazer com que o pêndulo retome sua posição vertical. Baseado nesta situação foram escritas as equações de estado do pêndulo e do carro.

$$I\ddot{\theta} = V\sin\theta - H\cos\theta \quad (13)$$

O movimento horizontal do centro de gravidade da haste é a força resultante atuante no eixo x do pêndulo:

$$m\ddot{x}_G = H \quad (14)$$

$$\ddot{x} = \frac{H}{m} - l\cos(\theta)\ddot{\theta} + l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 \quad (15)$$

O movimento vertical do centro de gravidade da haste é a força resultante atuante no eixo y do pêndulo:

$$m\ddot{y}_G + mg = V \quad (16)$$

$$V = -ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + mg \quad (17)$$

A equação que define o movimento horizontal do carro é:

$$M\ddot{x} = u - H \quad (18)$$

$$\ddot{x} = \frac{u-H}{M} \quad (19)$$

Substituindo ( 3 ) em ( 7 ):

$$\frac{H}{m} - l\cos(\theta)\ddot{\theta} + l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 = \frac{u-H}{M} \quad (20)$$

$$H = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\cos(\theta)\ddot{\theta} - \left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + u\left(\frac{m}{M+m}\right) \quad (21)$$

Substituindo ( 5 ) e ( 9 ) em ( 1 ):

$$I\ddot{\theta} = (-ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + mg)l\sin(\theta) - \left[\left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\cos(\theta)\ddot{\theta} - \left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + u\left(\frac{m}{M+m}\right)\right]l\cos(\theta) \quad (22)$$

Considerando  $I = 0$ :

$$0 = (-ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - ml\sin(\theta)\ddot{\theta} + mg)l\sin(\theta) - \left[\left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\cos(\theta)\ddot{\theta} - \left(\frac{Mm}{M+m}\right)l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + u\left(\frac{m}{M+m}\right)\right]l\cos(\theta) \quad (23)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-ml\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + g\sin(\theta)}{l(M+m\sin^2(x_1))} + u\left[\frac{\cos(\theta)}{l(M+m\sin^2(\theta))}\right] \quad (24)$$

$$\ddot{x} = \frac{m\sin(x_1)x_2^2}{(M+m)} + \frac{m^2l\sin(x_1)\cos^2(x_1)x_2^2 - mg\cos(x_1)\sin(x_1)}{(M+m)(M+m\sin^2(x_1))} - u\left[\frac{m\cos^2(\theta)}{(M+m)(M+m\sin^2(\theta))}\right] \quad (25)$$

As equações dos estados são:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{x} \end{cases} \quad (26)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (27)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-ml\sin(x_1)x_2^2 + g\sin(x_1)}{l(M+m\sin^2(x_1))} \quad (28)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (29)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{m\sin(x_1)x_2^2}{(M+m)} + \frac{m^2l\sin(x_1)\cos^2(x_1)x_2^2 - mg\cos(x_1)\sin(x_1)}{(M+m)(M+m\sin^2(x_1))} \quad (30)$$

Utilizando o método da matriz Jacobiana para a linearização do problema, obteve-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (31)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-ml\sin(x_1)x_2^2 + g\sin(x_1)}{l(M+m\sin^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{m\sin(x_1)x_2^2}{(M+m)} + \frac{m^2l\sin(x_1)\cos^2(x_1)x_2^2 - mg\cos(x_1)\sin(x_1)}{(M+m)(M+m\sin^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B = u \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(x_1)}{1(M+m \sin^2(x_1))} \\ 0 \\ \frac{-m \cos^2(x_1)}{1(M+m)(M+m \sin^2(x_1))} \end{bmatrix} \quad (33)$$

## 6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A Tabela 1 mostra as condições iniciais:

$M$ (massa do carro)	100 kg
$m$ (massa da esfera)	2 kg
$g$ (aceleração da gravidade)	9,81 $m/s^2$
$l$ (comprimento da haste)	2 m
$x_1$ (posição angular inicial)	0,5235 rad
$x_2$ (velocidade angular inicial)	0,5 rad/s
$x_3$ (posição inicial do carro)	2 m
$x_4$ (velocidade inicial do carro)	1,5 m/s

O controle foi obtido através da linearização do sistema utilizando a matriz Jacobiana em torno dos pontos de equilíbrio  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Substituindo os dados da Tabela 1 na equação ( 34 ), obteve-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,03939794334 & -0,0086161998580 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,003343461999 & 0,01009488240 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4330373937 \\ 0 \\ -0,0001463441253 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Sabendo a priori que o sistema possui um caráter intrinsecamente instável, foram simuladas diversas situações no software MATLAB, analisando o comportamento do controle do pêndulo através dos parâmetros de entrada.

Todos os valores de entrada foram atribuídos de forma aleatória. Primeiramente, o sistema foi simulado através de um sistema não retroalimentativo, ou seja, em malha aberta.

### 6.1. Dados

O gráfico (Figura 6.1) mostra os estados (ângulo, velocidade angular, deslocamento na horizontal e velocidade na horizontal) que são as variáveis da lei de controle, que atua sobre o carro e que conseqüentemente interfere no movimento do pêndulo.



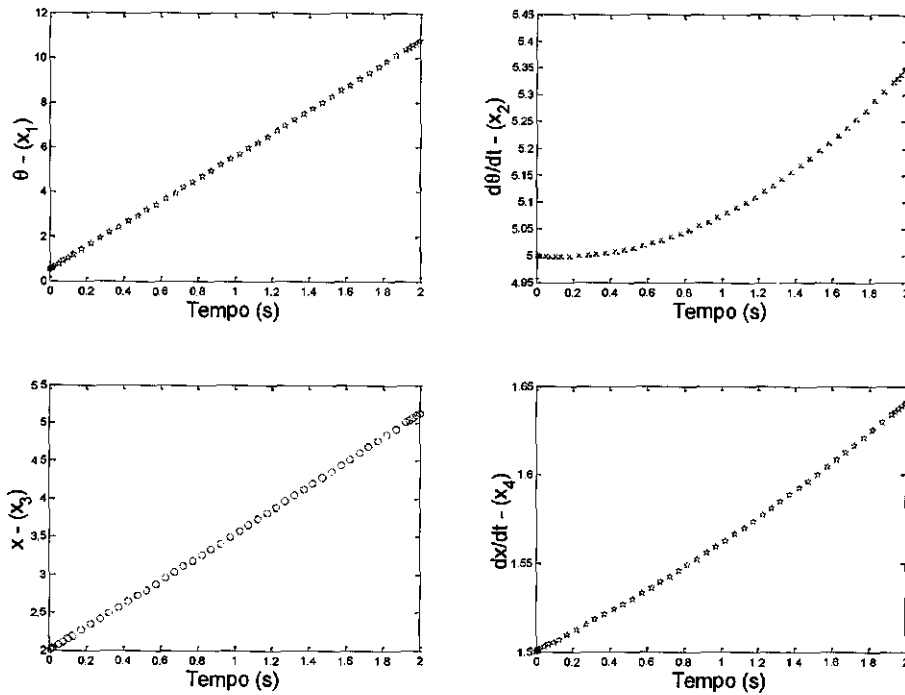


Figura 6.1 – Pêndulo invertido em malha aberta  $t = 2s$ .

Com base nos dados obtidos nos gráficos pode-se observar que no instante em que o pêndulo começa a cair ( $x_1$ ) adquirindo uma velocidade angular ( $x_2$ ), neste momento o carro começa a acelerar, ganhando certa velocidade como se observa em ( $x_4$ ) passando a atuar com pequenas quantidades de força, variando seu espaço ( $x_3$ ) na mesma direção de queda do pêndulo perdurando ainda mais seu movimento de queda. Como o sistema não é retroalimentaivo, o sistema atua de forma satisfatória no carro até próximo dos 2 segundos onde se observou que o espaço angular varia de forma linear.

Após este instante, o pêndulo começa a variar seu espaço angular de tal forma que mesmo aumentando a velocidade do carro, percorrendo um percurso maior, a queda torna-se inevitável como mostra a Figura 6.2.

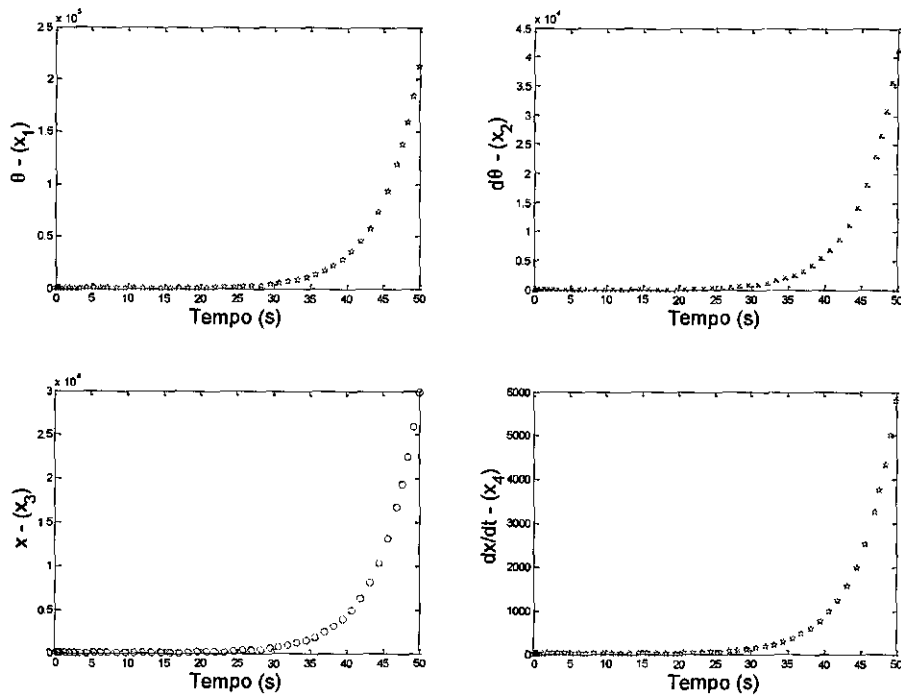


Figura 6.2 – Pêndulo invertido em malha aberta  $t = 50s$ .

Como solução deste problema será implementado um sistema em malha fechada.

## 6.2. LQR

Como o controle em malha aberta não possui um resultado tão satisfatório para este problema, como pode-se observar nos dados coletados das simulações anteriores, será utilizado um sistema LQR para tentar obter dados mais eficientes. Quando se trata de um sistema intrinsecamente instável, este problema pode ser solucionado utilizando um controle em malha fechada (feedback).

O sistema possui uma equação diferencial matricial de entrada com funções matriciais de ajustes e penalidades. São funções matriciais variantes no tempo  $A(t)$  e  $B(t)$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são funções matriciais, reais, simétricas, sendo as duas primeiras semi definidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas por partes em relação a  $t$ , como é apresentado no trabalho de Ximena (2008).

$$U(t) = R^{-1}(t)B_T(t)P(t) \quad (35)$$

onde  $P(t)$  é o vetor de variáveis adjuntas ou co-estado. A existência de  $R^{-1}(t)$  é assegurada, pois  $R(t)$  é uma matriz definida positiva. Essa lei de controle representa a solução do problema em malha aberta. Prova-se também que  $P(t)$  pode ser dado por:

$$P(t) = K(t)X(t) \quad (36)$$

Equação de Riccati em sua forma geral, onde  $K(t)$  é a solução da equação diferencial matricial:

$$\dot{k}(t) = k(t)A(t) - A^T(t)k(t) - Q(t) + k(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)k(t) \quad (37)$$

A equação de controle pode ser definida através da substituição da equação (20) na equação (19). Portanto, tem-se:

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)k(t)X(t) \quad (38)$$

### 6.3. Planta do Sistema

Para simular este processo, escreveram-se as matrizes de penalidades de forma aleatória, a matriz de ganho e utilizou-se a função Simulink do MATLAB para modelar o sistema, apresentado na Figura 6.3.

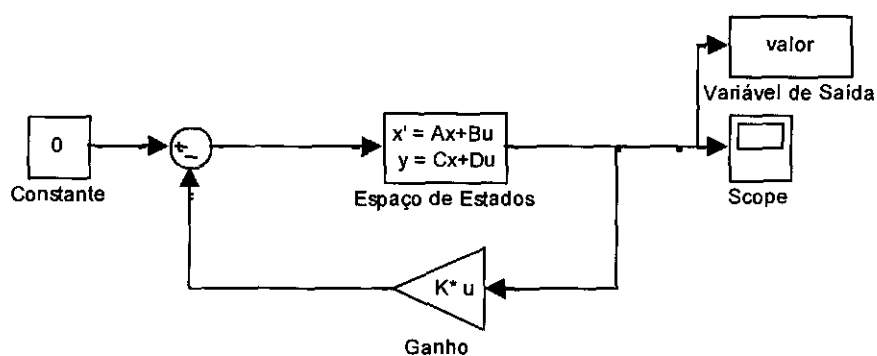


Figura 3.3 – Planta do sistema de controle em feedback.

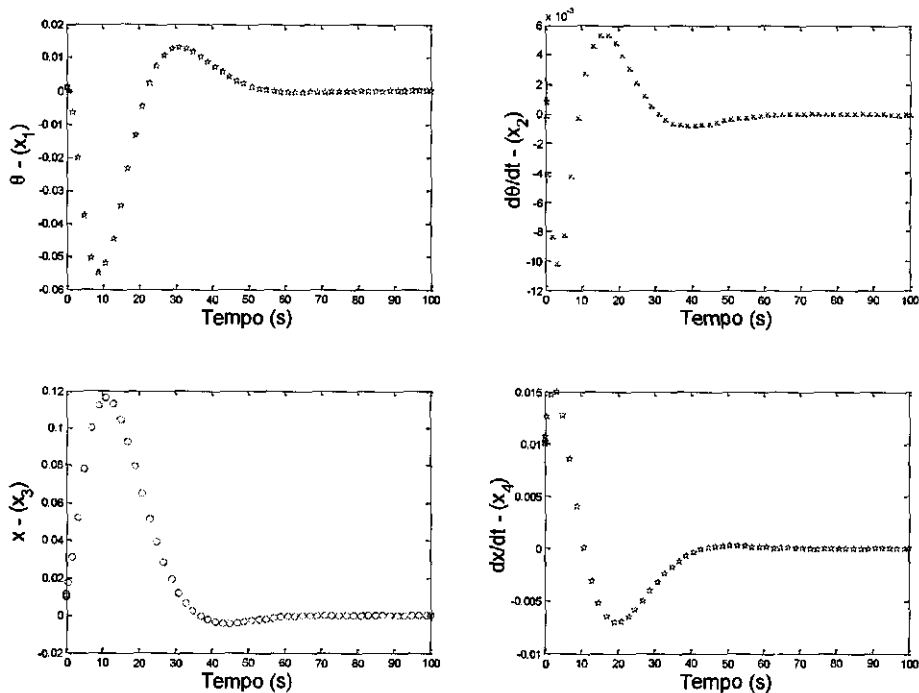


Figura 6.4 – Solução do pêndulo invertido para  $t = 100s$ .

O gráfico (Figura 6.4) mostra as mesmas condições propostas pelo controle em malha aberta, os estados (ângulo, velocidade angular, deslocamento na horizontal e velocidade na horizontal). Uma força é aplicada no pêndulo de modo que o mesmo começa a cair ( $x_1$ ) adquirindo uma velocidade angular ( $x_2$ ). Assim que a estabilidade é perturbada por esta

força o carro se desloca ( $x_3$ ) aplicando pequenas quantidades de força, novamente favoráveis ou contrárias

(puxar ou empurrar o carro), tudo dependerá do movimento de queda do pêndulo, perdurando a posição vertical para o mesmo. Este comportamento foi observado para  $t = 100s$ .

## 7. ANALOGIA

Ao estudar o sistema pêndulo invertido observou-se que o comportamento de um foguete ou um veículo lançador são semelhantes no momento do lançamento, porém com um grau de liberdade menor.

O foguete encontra-se inicialmente sobre sua plataforma de lançamento preso por agarras que o mantem imóvel sobre seu eixo vertical. Assim que o foguete inicia a queima do combustível, as agarras se desprendem, o mesmo começa a subir devida uma quantidade enorme de empuxo que é gerado pelas tubeiras. Porém, esta força de empuxo combinada com a força peso, gera um binário de forças que ocasionam um torque sobre seu centro de massa. Adicionando perturbações externas, como por exemplo, a ação do vento, o problema do lançamento torna-se algo extremamente complexo, entretanto solucionável.

Quando acionadas as tubeiras, um sistema de controle avançadíssimo detecta este torque enviando um sinal para as tubeiras que se movimentam de forma a anular essa tendência de rotação fazendo com que o foguete possa subir de forma regular até a órbita desejada onde se iniciam as outras etapas de uma missão espacial.

O intuito desta analogia foi apresentar o modelo do pêndulo invertido para compreender melhor a primeira etapa, que foi o lançamento. Como pretende-se dar continuidade nos estudos, as próximas etapas se concentram em estudar as manobras orbitais, propostas inicialmente.

## 8. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste estudo indicam o potencial da utilização do sistema proposto em situações instáveis, ou seja, não triviais e com certo grau de complexidade. Apesar de ter apresentado um sistema em malha aberta mesmo sabendo que as condições não eram adequadas para tal, o resultado foi satisfatório já que o mesmo pode ser controlado por dois segundos. Logo após este tempo o ângulo assumiu valores elevados e com isso sua velocidade angular também. Como o sistema não é retroalimentado, o pêndulo perderá o controle e cairá mesmo ainda sobre a atuação da compensação que o carro faz sobre seu movimento aplicando-lhe uma velocidade contrária ao seu movimento de ascendência.

Para a resolução deste problema, foi implementado um sistema em malha fechada, onde se tem um controle em retroalimentação podendo então controlar da melhor forma o movimento de oscilação do pêndulo perdurando ainda mais seu movimento. Os resultados obtidos indicam o potencial da utilização do sistema LQR proposto em situações instáveis comparados a um sistema em malha aberta.

Como a ideia do trabalho é utilizar um controle eficiente para a situação proposta, conclui-se que no sistema em malha fechada obteve-se melhores resultados, devido à retroalimentação, controlando o movimento de oscilação do pêndulo.

## 9. REFERÊNCIAS

- MAREC, J.P., 1979, "Optimal Space Trajectories", Elsevier, New York, NY, EUA.
- CHOBOTOV, V.A. Orbital motion. 2. ed.. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- HOELKER, R.F.; SILBER, R. The bi-elliptic transfer between circular coplanar orbits. Alabama: Army Ballistic Missile Agency, Redstone Arsenal, Jan. 1959. (DA TechMemo 2-59).
- SANTOS, D. P. S .Aplicações em Manobras Espaciais do Problema de Múltiplos Encontros. Dissertação de Mestrado do Curso de Pós Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Evandro Marconi Rocco e Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 31 de agosto de 2005.
- ALTENDORFER, R.; SARANLI, U.; KOMSUOGLU H.; KODITSCHKEK D.; BUERHLER, M., MOORE, N., MCMORDIE, D., BROWN JR, H.B., FULL, R.; Evidence for Spring Loaded Inverted Pendulum Running in a Hexapod Robot; Experimental Robotics VIII, p. 291-302, 2001;
- AMBROSE, R. O., SAVELY, R. T., GOZA, S. M., et alii (2004). Mobile manipulation using NASAS's Robonaut. IEEE Conference on Robotics and Automation, 2: 2104-2109.
- MILLER III, W. T., SUTTON, R. S. AND WERBOS, P. J (1995). Neural Networks for Control.
- OGATA, K., Engenharia de controle moderno. 3a Edição, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1995.
- TIRMANT, H., BALOH, M., VERMEIREN, L., GUERRA, T. M. AND PARENT, M. (2002). B2, an alternative two wheeled vehicle for an automated urban transportation system. IEEE Intelligent Vehicle Symposium, 2:594-603.

VENDRAMINI, G., DA SILVA, P. S., Controle de um Pêndulo Invertido sobre uma Plataforma Móvel Utilizando PID e MFAC (Model-Free Adaptive Control).

XIMENA C. M. C.; Investigação de Técnicas de Controle Multivariáveis no Controle de Atitude de um Satélite Rígido – Flexível; Dissertação de Mestrado do Curso de Pós - Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, 2008. PID e MFAC (Model-Free Adaptive Control).

Battin, R.H. Astronautical guidance. New York; McGraw-Hill, 1965.

Battin, R.H. A new solution for Lambert's problem. In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 19., 1968, Oxford, Proceedings: Pergamon, 1968. p. 131-150. v. 2.