

**INPE - INSTITUTO NACIONAL
DE
PESQUISAS ESPACIAIS**

**INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC)
RELATÓRIO PRELIMINAR**

TÍTULO

**MODELAMENTO DE
SATÉLITES
ARTIFICIAIS
RÍGIDO/FLEXÍVEIS**

ORIENTADOR: LUIZ CARLOS GADELHA DE SOUZA

ELABORADO POR: ALEXANDRE BIZARRO FERNANDES

**SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
- 1997 -**

INDICE

<u>1- INTRODUÇÃO</u>	PÁG.02
<u>2- ANÁLISE DO MATERIAL BIBLIOGRÁFICO</u>	PÁG.03
<u>3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</u>	PÁG.05
<u>4- RESULTADOS</u>	PÁG.06
<u>5- CONCLUSÃO</u>	PÁG.07
<u>6- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	PÁG.08

1. INTRODUÇÃO

O trabalho apresentado neste relatório tem por objetivo estudar diferentes metodologias associadas ao modelamento de satélites artificiais rígido/flexíveis, a fim de confrontar o grau de representatividade versus o grau de dificuldade de cada um dos métodos.

Nesta primeira fase do nosso trabalho procuramos nos familiarizar com o assunto abordado, ou seja, modelamento de satélites rígidos/flexíveis, dando uma ênfase maior aos diversos tipos de amortecedores de nutação. Estudamos e compreendemos a importância desse componente para a vida útil do satélite.

A maioria dos veículos exige a execução de movimentos de atitude que ajustam o vetor do momento angular durante pelo menos uma fase de sua missão. Muitos desses veículos estarão rodando durante parte ou todo o seu tempo de vida no espaço.

Métodos de se executar movimentos envolvendo a movimentação sobre o centro de massa são a preocupação inicial desse trabalho. Tanto as técnicas de torque aplicado quanto as dissipativas serão estudadas. Além da implementação de tais movimentos, os métodos de determinação de atitude e sensores associados são discutivos, porque é importante medir a atitude do veículo antes e depois dos ajustes do vetor de momento.

Para satélites estabilizados por rotação é praticamente mandatório a inclusão de um amortecedor de nutação passivo ou ativo. Os amortecedores passivos são muito eficientes e confiáveis além de requerer pouca massa e espaço. Os amortecedores de nutação têm a função de alinhar o eixo de "spin" com o vetor quantidade de movimento angular, amortecendo assintoticamente movimentos de cone originados por perturbações ambientais ou torques de manobra e/ou controle de atitude.

Deseja-se sempre obter um mínimo tempo de amortecimento. Isto pode ser atingido ajustando o amortecedor variando-se certos parâmetros. Entretanto, não é aconselhável regular o amortecedor muito precisamente, conforme as tolerâncias de fabricação, mudanças da taxa de rotação e variações de temperatura aumentariam demais uma variação na constante de tempo de amortecimento e podem algumas vezes tornar os amortecedores instáveis e, portanto, inúteis.

A taxa de rotação é uma fator crítico no projeto de amortecedores. Qualquer mudança na taxa de rotação nominal afetará o desempenho do amortecedor, e o aumento na taxa de rotação acima do valor nominal pode tornar o amortecedor instável quando ajustado com precisão. Em tais casos, os amortecedores deveriam ser projetados para taxas de rotação 10% acima das taxas de rotação nominal.

2. ANÁLISE DO MATERIAL BIBLIOGRÁFICO

Métodos de se executar movimentos envolvendo a movimentação sobre o centro de massa (2) são essenciais para o controle e estabilização dos movimentos de um satélite. Existem técnicas de torque aplicado e dissipativas.

A estabilização da rotação (3) é um método comum, o qual independe da atitude e contorno de órbita.

Usamos o gradiente gravitacional para manter a Terra direcionada à uma antena ou outro instrumento, isto tem tido sucesso e é apropriado também para missões restritas de pequena excentricidade orbital.

Este princípio pode ser explicado simplesmente considerando o movimento da atitude de um satélite composto por duas massas, conforme mostra a figura 1.

O centro de massa segue uma órbita circular. A deflexão constante de uma região vertical causa um torque restaurador gerado por um desequilíbrio de forças atuando sobre duas massas iguais.

A força centrífuga atuante sobre a massa 1 é maior que a força gravitacional, porque estas duas forças são iguais apenas no centro de massa. O oposto acontece com a massa 2 onde a força gravitacional é maior que a centrífuga.

Então é criado um outro torque que força as duas massas irem em direção a uma região de orientação vertical.

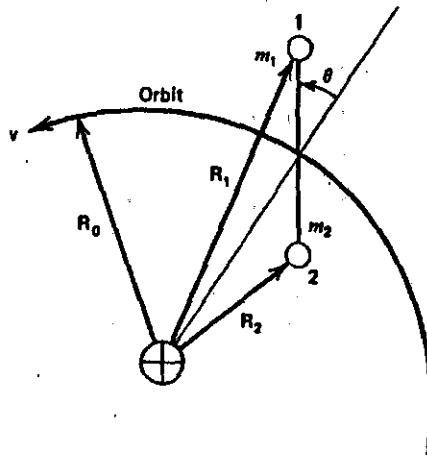


Figura 1 - Princípio de funcionamento do torque do gradiente de gravidade.

Um caso mais geral é mostrado na figura 2. Se G é a gravidade produzida pelo torque, então a equação do movimento é simplesmente

$$G = dh/dt$$

Onde h é o momento angular do corpo B sobre o seu centro de massa O dado pela equação $h_o = \int_B r \times (w \times r) dm$.

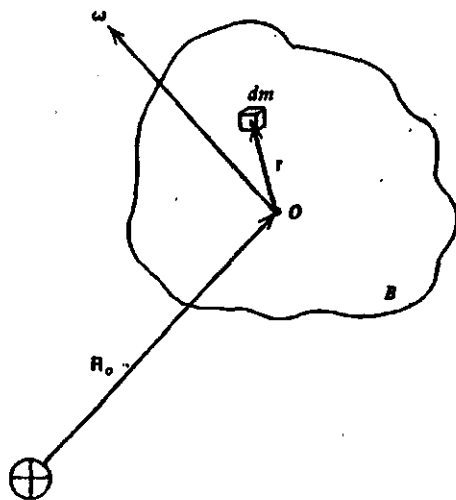


Figura 2 - Modelo geral do gradiente de gravidade.

Usando o produto do vetor triplo encontramos,

$$h = \int_B [r^2 w - (r \cdot w)r] dm$$

O torque gravitacional fica na forma

$$G = \int_B r \times \left[-\frac{\mu(R_0 + r) dm}{|R_0 + r|^3} \right] \quad (1)$$

Notando que

$$|R_0 + r|^{-3} = R_0^{-3} \left[1 + \frac{2(r \cdot R_0)}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2} \right]^{-3/2} = \frac{1}{R_0^3} \left[1 - \frac{3(r \cdot R_0)}{R_0^2} + O\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right]$$

e

$$\int_B r dm = 0$$

como r é referente ao centro de massa, a equação 1 pode ser reescrita como

$$G = \frac{3\mu}{R_0^5} \int_B (r \cdot R_0) r \times R_0 dm + \frac{\mu}{R_0} \times (\text{termos do vetor com magnitudes de terceira ordem e maior em } r/R_0)$$

Este é, por sua vez, balanceado pela taxa de h ,

$$\frac{dh}{dt} = \int_B [r^2 \dot{\omega} - (r \cdot \dot{\omega})r] dm + \int_B (r \cdot \omega)(r \times \omega) dm$$

Entretanto para satélites estabilizados por rotação é essencial o uso de um amortecedor de nutação passivo ou ativo.

Os amortecedores passivos (1) são muito eficientes e confiáveis, possuindo ainda a vantagem de requerer pouca massa e espaço.

Os amortecedores de nutação têm a função de alinhar o eixo de “spin” com o vetor quantidade de movimento angular, resultando assim no amortecimento dos movimentos de cone originados por perturbações ambientais ou torques de manobra e/ou controle de atitude.

Um dos amortecedores de nutação mais utilizados é o tipo massa-mola (1), o qual contém uma fonte e uma massa deslizadora, com uma caixa fixada rigidamente no corpo do satélite.

A aceleração linear ao longo do tubo é usada como uma função forçada para o amortecedor.

A dissipação de energia vem de uma fricção estática ou dinâmica resultando um amortecimento da nutação.

Na determinação do projeto desse tipo de amortecedor deve-se levar em conta a velocidade de “spin” e as propriedades de inércia do veículo.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

- Revisão de conceitos e definições fundamentais para o modelamento de satélites com características dinâmicas complexas, dando ênfase aos amortecedores de nutação.

- Aplicação das teorias de Lagrange e de Hamilton na formulação das equações de movimento de satélites artificiais rígido/flexíveis.

- Utilização do software MATCAD para estudo e análise das equações do amortecimento de nutação.

4. RESULTADOS

Os resultados dessa primeira fase de nosso trabalho compreendeu o equacionamento de um atuador do tipo amortecedor de nutação, usando o formalismo Lagrangeano.

Por ser uma pesquisa inteiramente teórica nos preocupamos em não apenas aceitar as respostas das equações de movimento apresentadas em nossas referências bibliográficas, mas também em verificar os métodos matemáticos utilizados para tais respostas.

Assim, pudemos não só conhecer esses métodos, mas também estudar sua utilização, a qual é fundamental para o trabalho proposto nessa pesquisa.

Analisando a equação final do apêndice "A", verificamos aplicando a teoria de resolução de equações diferenciais não homogêneas que a condição necessária para ocorrer estabilidade do sistema é a seguinte:

$$K_s \geq m_s \cdot W_z^2 \cdot \sin^2 \theta$$

- onde: K_s = constante elástica da mola

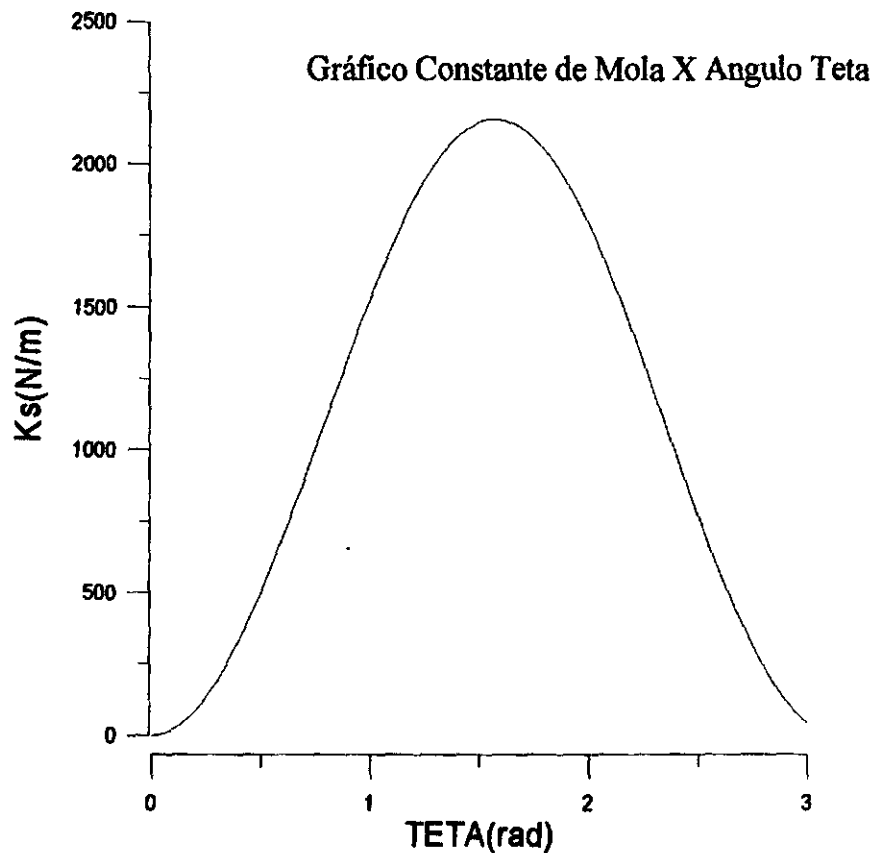
m_s = massa do satélite

W_z = velocidade de "spin"

θ = ângulo de inclinação do amortecedor em relação ao eixo de

"spin" ($0 \leq \theta \leq \pi$)

Arbitrando valores para $m_s(60)$ e $W_z(6)$, conseguimos plotar o gráfico $K_s \times \theta$, apresentado a seguir:



Obs.: O equacionamento desenvolvido para obtenção das equações do movimento do amortecedor tipo massa-mola está no apêndice "A" anexado ao relatório.

5. CONCLUSÃO

Analisando o gráfico apresentado no item 4 deste relatório chegamos à conclusão de que quanto mais perpendicular o amortecedor estiver em relação ao eixo de "spin" menor a sensibilidade necessária para a mola.

Concluimos também que se o amortecedor estiver colocado na mesma direção do eixo de "spin" o amortecimento não será possível, já que a sensibilidade necessária para a mola tenderá ao infinito.

É indiscutível a importância dos amortecedores de nutação para a vida útil do satélite, pois um dos principais aspectos no estudo e utilização de satélites é a sua atitude, a qual não pode ser controlada sem esse componente.

Uma vez compreendida a importância desse componente, é necessário também verificar qual deles se encaixa melhor no projeto do satélite a ser construído.

Observamos também que a formulação e os métodos matemáticos são extremamente complexos, porém no nosso caso partem de um único ponto, ou seja, o formalismo Lagrangeano.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1- Malik, N.K.. ISRO-ISAC-TN-06-77.
- 2- Junkis, J. L. e Kim, Y, Introduction to dynamics and control of flexible structures, AIAA - Education Series, USA, 1.993. ISBN 1-56347-054-3
- 3- Inman, D. J.; Vibration with control measurement and stability, Prentice Hall Ed., USA, 1.989. ISBN 0-13-941642-0.
- 4- Maia, L.P.M., Mecânica Analítica.
- 5- Boyce, William E. e Dprima, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.

APÊNDICE A: Equacionamento desenvolvido para obtenção das equações do movimento do amortecedor tipo massa-mola.

$$\begin{aligned} X &= X_0 + L \sin\theta \cos\phi \\ Y &= Y_0 + L \sin\theta \sin\phi \\ Z &= Z_0 + L \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_p &= L \sin\theta \cos\phi \\ Y_p &= L \sin\theta \sin\phi \\ Z_p &= L \cos\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} \rightarrow \begin{pmatrix} w_y (Z_0 + L \cos\theta) - w_z (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) \\ w_z (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) - w_x (Z_0 + L \cos\theta) \\ w_x (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) - w_y (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \begin{pmatrix} L \dot{\theta} \sin\theta \cos\phi + w_y (Z_0 + L \cos\theta) - w_z (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) \\ L \dot{\theta} \sin\theta \sin\phi + w_z (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) - w_x (Z_0 + L \cos\theta) \\ L \dot{\theta} \cos\theta + w_x (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) - w_y (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} m_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{T} \rightarrow \frac{1}{2} \left[L \dot{\theta} \sin\theta \cos\phi + w_y (Z_0 + L \cos\theta) - w_z (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[L \dot{\theta} \sin\theta \sin\phi + w_z (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) - w_x (Z_0 + L \cos\theta) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[L \dot{\theta} \cos\theta + w_x (Y_0 + L \sin\theta \sin\phi) - w_y (X_0 + L \sin\theta \cos\phi) \right]^2 \cdot m_S$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} k_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$Lg = \mathbf{I} - \mathbf{N}$$

$$Lg \rightarrow \frac{1}{2} \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + w_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) - w_z \cdot (Y_0 - L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \right]^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + w_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - w_x \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) \right]^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} \left[Lp \cdot \cos\theta - w_x \cdot (Y_0 - L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right]^2 \cdot m_S - \frac{1}{2} \cdot k_S \cdot L^2$$

$$\frac{d}{dL} Lg \rightarrow \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + w_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) - w_z \cdot (Y_0 - L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \right] \cdot m_S \cdot (w_y \cdot \cos\theta - w_z \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) + \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + w_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - w_x \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) \right] \cdot m_S \cdot (w_z \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi - w_x \cdot \cos\theta) + \left[Lp \cdot \cos\theta + w_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right] \cdot m_S \cdot (w_x \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi - w_y \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - k_S \cdot L$$

$$\frac{d}{dL} F \rightarrow C_S \cdot Lp$$

$$\frac{d}{dLp} Lg \rightarrow \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + w_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) - w_z \cdot (Y_0 - L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + w_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - w_x \cdot (Z_0 - L \cdot \cos\theta) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + \left[Lp \cdot \cos\theta - w_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right] \cdot m_S \cdot \cos\theta$$

$$\frac{d}{dLp} Lg \rightarrow \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + w_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos\theta) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + \left[Lp \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + w_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + \left[Lp \cdot \cos\theta - w_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right] \cdot m_S \cdot \cos\theta$$

$$A = \left[\frac{d}{dt} L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + wy(t) \cdot (Z_0 + L(t) \cdot \cos\theta) - wz(t) \cdot (Y_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + \left[\frac{d}{dt} L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + wx(t) \cdot (X_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - wy(t) \cdot (Z_0 + L(t) \cdot \cos\theta) \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + \left[\frac{d}{dt} L(t) \cdot \cos\theta + wx(t) \cdot (Y_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - wy(t) \cdot (X_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) \right] \cdot m_S \cdot \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} A \rightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + \left(\frac{d}{dt} wy(t) \right) \cdot (Z_0 + L(t) \cdot \cos\theta) + wy(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \cos\theta - \left(\frac{d}{dt} wz(t) \right) \cdot (Y_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) - wz(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + \left[\frac{d^2}{dt^2} L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + \left(\frac{d}{dt} wx(t) \right) \cdot (X_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) + wx(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi - \left(\frac{d}{dt} wy(t) \right) \cdot (Z_0 + L(t) \cdot \cos\theta) - wy(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \cos\theta \right] \cdot m_S \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi + \left[\frac{d^2}{dt^2} L(t) \cdot \cos\theta + \left(\frac{d}{dt} wx(t) \right) \cdot (Y_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi) + wx(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi - \left(\frac{d}{dt} wy(t) \right) \cdot (X_0 + L(t) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi) - wy(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \right] \cdot m_S \cdot \cos\theta$$

$$B = \left[\frac{Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{m_S} + \frac{w_x \cdot (Z_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta)}{m_S} + \frac{w_y \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta)}{m_S} + \frac{w_z \cdot (Z_0 - L \cdot \cos \theta)}{m_S} \right] \cdot m_S \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \dots$$

$$+ \left[Lpp \cdot \cos \theta + wp_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) + w_x \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - wp_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) + w_y \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \dots \right] \cdot m_S \cdot \cos \theta$$

$$R = \frac{d}{dL} \cdot Lg + \frac{d}{dL} \cdot F$$

$$R \rightarrow \left[Lpp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + wp_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos \theta) + w_y \cdot Lp \cdot \cos \theta - wp_z \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) - w_z \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \right] \cdot m_S \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \dots$$

$$+ \left[Lpp \cdot \cos \theta + wp_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) + w_x \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - wp_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) - w_y \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \right] \cdot m_S \cdot \cos \theta - \dots$$

$$+ \left[Lp \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta + w_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) - w_x \cdot (Z_0 + L \cdot \cos \theta) \right] \cdot m_S \cdot (w_z \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - w_x \cdot \cos \theta) - \dots$$

$$+ \left[Lp \cdot \cos \theta + w_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \right] \cdot m_S \cdot (w_x \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - w_y \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) + K_S \cdot L + C_S \cdot Lp$$

$$\left(\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot m_S + \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot m_S + \cos \theta \cdot m_S \right) \cdot Lpp + \left[w_z \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta + wp_y \cdot (Z_0 + L \cdot \cos \theta) + w_y \cdot Lp \cdot \cos \theta - wp_z \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) \right] \cdot m_S \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + K_S \cdot L \dots$$

$$+ \dots + \left[-w_x \cdot Lp \cdot \cos \theta + wp_z \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) + w_z \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - wp_x \cdot (Z_0 + L \cdot \cos \theta) \right] \cdot m_S \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - \dots$$

$$+ \dots + \left[-w_y \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + wp_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) + w_x \cdot Lp \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - wp_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \right] \cdot m_S \cdot \cos \theta - \dots$$

$$+ \dots + \left[Lp \cdot \cos \theta + w_x \cdot (Y_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) - w_y \cdot (X_0 + L \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \right] \cdot m_S \cdot (w_x \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - w_y \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) + C_S \cdot Lp$$

$$(X_0 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - Y_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \cdot wp_z + (Z_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - X_0 \cdot \cos \theta) \cdot wp_y + (Y_0 \cdot \cos \theta - Z_0 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta) \cdot wp_x \dots$$

$$+ \left[- (w_y)^2 \cdot \cos \theta^2 + 2 \cdot w_y \cdot \cos \theta \cdot w_z \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - (w_z)^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - (w_x)^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + 2 \cdot w_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot w_x \cdot \cos \theta - \dots \right] \cdot \left[(w_x)^2 \cdot \cos \theta^2 - (w_x)^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta + 2 \cdot w_x \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \cdot w_y \cdot \cos \theta - (w_y)^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{K_S}{m_S} \right] \cdot L \dots$$

$$+ \left[(w_z)^2 \cdot X_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - w_z \cdot X_0 \cdot w_x \cdot \cos \theta - w_x \cdot Z_0 \cdot w_z \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + (w_x)^2 \cdot Z_0 \cdot \cos \theta - \dots \right] \cdot \left[(w_x)^2 \cdot Y_0 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - w_x \cdot Y_0 \cdot w_y \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - w_y \cdot X_0 \cdot w_x \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta + (w_y)^2 \cdot X_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \right] - \dots$$

$$+ \left[(w_y)^2 \cdot Z_0 \cdot \cos \theta - w_y \cdot Z_0 \cdot w_z \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta - w_z \cdot Y_0 \cdot w_y \cdot \cos \theta + (w_z)^2 \cdot Y_0 \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta \right] + C_S \cdot \frac{Lp}{m_S} + Lpp$$