

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

TÍTULO : DINÂMICA DE ATITUDE E CONTROLE DE SATÉLITES FLEXÍVEIS

**Aluno : Mateus Vieira Barros Júnior
Orientador : Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza**

INDÍCE

1) RESUMO	pág 01
2) OBJETIVO	pág 02
3) INTRODUÇÃO TEÓRICA	pág 03
3.1 – Dinâmica do corpo rígido	pág 04
3.1.1 – Derivação de um vetor num sistema rotativo de coordenadas	pág 04
3.1.2 – Movimento geral de uma partícula	pág 05
3.1.3 – Momento de um corpo rígido	pág 06
3.1.4 – Energia cinética de um corpo rígido	pág 07
3.1.5 – Equações de movimento	pág 08
3.2 – Estabilização de atitude	pág 10
3.3 – Estabilização nos três eixos	pág 12
3.4 - Torques perturbadores	pág 13
3.4.1 – Torque devido ao gradiente de gravidade	pág 13
3.4.2 – Torque devido à radiação solar	pág 15
3.5 – Momento de roda fixo com jatos de gás	pág 17
3.5.1 – Controle do eixo pitch	pág 19
3.5.2 – Controle dos eixos roll e yaw	pág 22
3.6 – Sistema de rodas de reação nos três eixos	pág 31
3.7 – Efeitos da flexibilidade estrutural	pág 32
4) RESULTADOS	pág 35
4.1 – Situação prática	pág 35
4.2 – Simulação	pág 39
4.2.1 – Resolução da equação diferencial	pág 39
4.2.2 – Influência dos parâmetros nos erros de atitude e velocidades	pág 39
5) COMENTÁRIOS FINAIS	pág 46
6) APÊNDICE	pág 47

1) RESUMO

Neste trabalho de iniciação científica foi analisada a dinâmica de atitude de um satélite flexível assim como os processos de estabilização de seu movimento através das equações que regem sua dinâmica e suas leis de controle.

Através dos conceitos físicos à respeito dos corpos rígidos foram obtidas neste relatório as equações da dinâmica de um corpo rígido aplicáveis aos satélites flexíveis. Obtidas as equações físicas foram feitas associações destas equações com as equações de movimento obtendo-se as equações de controle para cada eixo do satélite.

Com essas equações de controle foram determinados os parâmetros do sistema de controle de atitude de um satélite flexível numa situação prática. Foi realizado uma simulação modificando os parâmetros obtidos para observar o comportamento do sistema mediante essas modificações.

2) OBJETIVO

Analisar a dinâmica de atitude assim como os processos de estabilização do movimento de um satélite rígido e flexível através do estudo das equações que regem a sua dinâmica e as suas leis de controle.

Com essas análises serão determinados os parâmetros do sistema de controle de atitude de um satélite flexível numa situação prática.

3) INTRODUÇÃO TEÓRICA

Satélites de comunicação requerem grandes precisão para as antenas. Esta exigência é obtida através do sistema de controle de atitude que mantém a atitude do satélite, sua orientação no espaço nos limites permitidos. Este sistema consiste de sensores para a determinação da atitude e atuadores que aplicam os torques corretivos. Os torques perturbadores vêm de várias fontes como a pressão solar, o gradiente de gravidade, e a falta de alinhamento dos jatos de gás do satélite. O sistema de controle de atitude fornece também a atitude desejada para manobras de órbita.

Um diagrama de bloco de um sistema de controle de atitude é mostrado na Figura 1.

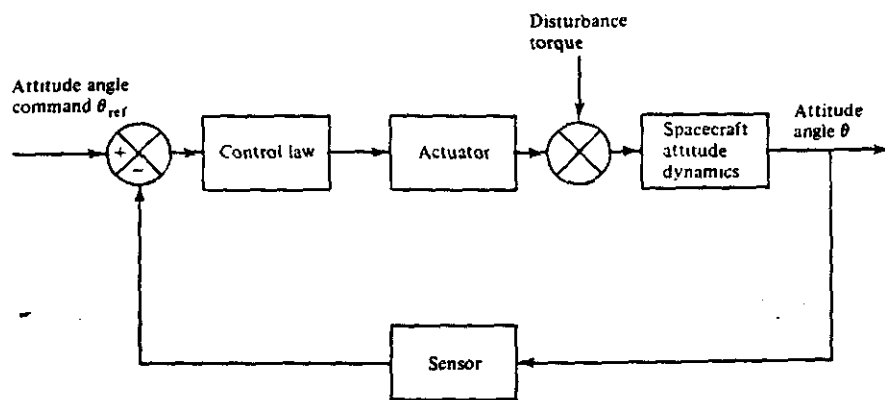


Figura 1 – Diagrama de bloco de um sistema de controle de atitude

Os elementos básicos de um sistema de controle de atitude são: a dinâmica de atitude do satélite, os sensores de atitude, as leis de controle, atuadores e os torques perturbadores.

A dinâmica de atitude de um satélite prediz o movimento do satélite como resultado da perturbação e dos torques controladores. A dinâmica de órbita trata do movimento do centro de massa do satélite. Por outro lado a dinâmica de atitude diz respeito ao movimento de rotação do corpo do satélite em torno do seu centro de massa. Os sensores fornecem informações da atitude do satélite. As saídas dos sensores são usadas pelas leis de controle para determinar os torques controladores necessários. Os torques controladores são fornecidos pelos atuadores, podendo ser uma combinação dos momentos da roda, das rodas de reação e dos jatos de gás. Para projetar um sistema de controle é necessário estimar os torques perturbadores.

Neste trabalho serão analisadas as equações que regem a dinâmica de atitude do satélite e suas leis de controle. Numa situação prática será determinado os torques perturbadores para a partir daí estabelecer os parâmetros de atitude e controle do satélite flexível.

3.1-DINÂMICA DE UM CORPO RÍGIDO

A dinâmica de atitude de um satélite é baseada fundamentalmente nas equações dinâmicas de um corpo rígido. Estas equações, entretanto, são modificadas devidos à flexibilidade nos casos de satélites flexíveis requerendo uma alta precisão nas atitudes. Os movimentos de atitude são normalmente representados com o corpo do satélite fixado num sistemas de coordenadas havendo rotação e aceleração. Consequentemente o movimento relativo e a transformação de coordenadas são importantes regras na dinâmica de atitude.

3.1.1) DERIVAÇÃO DE UM VETOR NUM SISTEMA ROTATIVO DE COORDENADAS

Em muitas situações é conveniente referir um vetor a um sistema de coordenadas giratória. Em tais casos a derivação em relação ao tempo consiste em duas partes: uma devido à taxa de mudança do vetor relativo em relação aos eixos em movimento e a outra devido à rotação dos eixos. Sendo XYZ o sistema inercial e xyz os eixos com velocidade angular ω relativo a XYZ como mostrado na Figura 2 . Então se \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} são vetores unitários ao longo dos eixos x , y e z respectivamente, o vetor r pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

A derivada em relação ao tempo é simplesmente:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} \quad (2)$$

As derivadas em relação ao tempo de um vetor unitário são:

$$\dot{\vec{i}} = \omega \times \vec{i} \quad (3.a)$$

$$\dot{\vec{j}} = \omega \times \vec{j} \quad (3.b)$$

$$\dot{\vec{k}} = \omega \times \vec{k} \quad (3.c)$$

Além disso, introduzindo a notação:

$$\dot{\vec{r}}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (4)$$

onde a velocidade relativa é conhecida como a taxa de mudança de r em relação a xyz, logo a equação (2) toma a forma abaixo :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{rel} + \omega \times \vec{r} \quad (5)$$

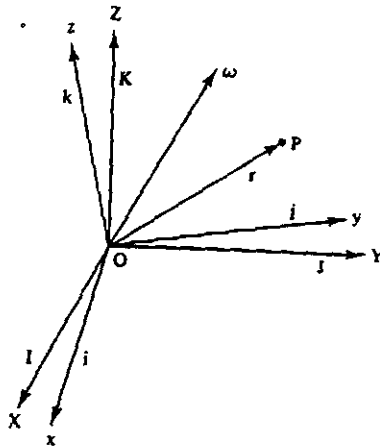


Figura 2 – Derivadas de um vetor num sistema de coordenadas rotacionais

3.1.2) MOVIMENTO GERAL DE UMA PARTÍCULA

Esta aproximação pode ser usada para desenvolver expressões para um movimento geral de uma partícula. Num caso mais geral o eixo xyz é capaz não somente de rotação relativa a XYZ mas também de translação, como mostrado na Figura 3 abaixo. Denotando a origem de xyz por C, o vetor posição de uma partícula P em relação a XYZ pode ser escrita na forma

$$\vec{R} = \vec{R}_C + \vec{r} \quad (6)$$

onde \vec{R}_C é vetor radial de O a C e \vec{r} é o vetor posição de P em relação a xyz.

Diferenciando a equação (6) em relação ao tempo, obtêm-se a velocidade absoluta de P na forma

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_C + \dot{\vec{r}} \quad (7)$$

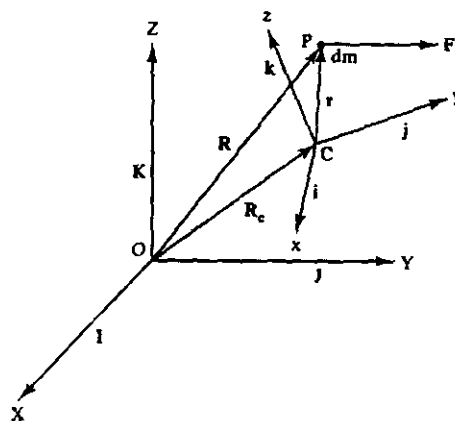


Figura 3 – Movimento geral de uma partícula

Notando que $\dot{\vec{R}}_C = \vec{V}_C$ é a velocidade da origem C e voltando à equação (5), obtêm-se a velocidade absoluta de P como segue:

$$\vec{V} = \vec{V}_C + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (8)$$

onde $\vec{V}_{rel} = \dot{\vec{R}}_{rel}$ é a velocidade de P em relação a xyz.

A aceleração absoluta de p pode ser obtida diferenciando a equação (8), obtendo :

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}_C + \frac{d}{dt}(\vec{V}_{rel}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (9)$$

Mas $\dot{\vec{V}}_C = \vec{A}_C$ é a aceleração de C . Além disso de acordo com a equação(4) pode-se escrever :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_{rel}) = \ddot{x}\vec{i} + \dot{x}\dot{\vec{i}} + \ddot{y}\vec{j} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{z}\dot{\vec{k}} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} \quad (10)$$

onde $\vec{A}_{rel} = \ddot{\vec{R}}_{rel}$ é a aceleração de P relativo a xyz. Inserindo a equação (10) na equação (9) e retornado a equação (5), obtêm-se a aceleração de P na forma abaixo

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11)$$

onde $2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$ é conhecida como a aceleração de Coriolis.

3.1.3) MOMENTO DE UM CORPO RÍGIDO

O momento linear de uma partícula é definido como o produto de sua massa pela sua velocidade. Sendo dm um elemento infinitesimal de massa num corpo rígido e \vec{V} a velocidade do elemento (figura 3) ; o momento linear de um corpo rígido pode ser escrito na forma

$$\vec{P} = \int_m \vec{V} dm \quad (12)$$

onde m é a massa . Substituindo a equação (8) na equação (12) e assumindo que os eixos xyz fixado no corpo rígido , então $\vec{V}_{rel} = 0$, obtêm-se:

$$\vec{P} = \int_m (\vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = m\vec{V}_C + \vec{\omega} \times \int_m \vec{r} dm \quad (13)$$

A equação (13) pode ser simplificada de maneira significativa escolhendo a origem C de sistema coordenado rotativo coincidir com o centro de massa (cm) do corpo rígido. Neste caso pela definição tem-se $\int_m \vec{r} dm = 0$. Logo segue:

$$\vec{P} = m\vec{V}_C \quad (14)$$

ou, o momento linear de um corpo rígido é igual ao produto de sua massa pela velocidade no seu centro de massa.

O momento angular de uma partícula dm em relação ao ponto C é definido como o momento em relação a C do momento linear:

$$\vec{h}_C = \vec{r} \times \vec{V} dm \quad (15)$$

Usando a mesma aproximação como a utilizada para o momento linear, o momento angular de um corpo rígido pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\vec{H}_C &= \int_m \vec{r} \times \vec{V} dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \left(\int_m \vec{r} dm \right) \times \vec{V}_C + \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm\end{aligned}\quad (16)$$

Mais uma vez considerando a origem C do sistema xyz coincidindo com o centro de massa de um corpo rígido a equação (16) se reduz a:

$$\vec{H}_C = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \quad (17)$$

Escrevendo o vetor velocidade angular ω através de suas componentes tem-se:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (18)$$

E retornando às equações (1), a (17) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{H}_C &= [I_{xx}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{zz}\omega_z] \vec{i} + [-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z] \vec{j} + \\ &\quad [-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z] \vec{k}\end{aligned}\quad (19)$$

onde:

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) dm & I_{yy} &= \int_m (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} &= \int_m (x^2 + y^2) dm\end{aligned}\quad (20)$$

são os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos x,y e z respectivamente e:

$$I_{xy} = \int_m xy dm \quad I_{xz} = \int_m xz dm \quad I_{yz} = \int_m yz dm \quad (21)$$

são os produtos de inércia. Os eixos no qual os produtos de inércia são zero são chamados eixos principais de inércia.

Deve ser notado que para um sistema coordenado fixado no corpo, os momentos e produtos de inércia são constantes. A equação (19) pode ser escrita na forma matricial abaixo:

$$\vec{H}_C = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (22)$$

3.1.4) ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO RÍGIDO

A energia cinética de um corpo rígido é definida como:

$$T = \frac{1}{2} \int_m \vec{V} \cdot \vec{V} dm \quad (23)$$

Usando a equação (8) com $V_{rel} = 0$, a equação (23) se reduz a:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{V}_C \bar{V}_C + \bar{V}_C \left(\bar{\omega} \times \int_m \bar{r} dm \right) + \frac{1}{2} \int_m (\bar{\omega} \times \bar{r}) (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \quad (24)$$

Se C for o centro de massa de um corpo rígido, a primeira integral será nula resultando então:

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} [I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2\omega_x \omega_z I_{xz} - 2\omega_y \omega_z I_{yz} - 2\omega_x \omega_y I_{xy}] \quad (25)$$

O primeiro termo da equação (25) representa a energia cinética do corpo como se ele estivesse em translação pura e os termos restantes constituem a energia cinética do corpo como se ele estivesse em rotação pura ao redor de C. A energia cinética de rotação, T_{rot} , pode ser expressa na forma matricial abaixo:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

3.1.5) EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações do movimento são baseadas na segunda lei de Newton, que diz que a variação do momento linear com o tempo equivale à força que age sobre a partícula. Deve ser notado que a lei de Newton é aplicada somente a movimentos relativos em sistemas de coordenadas inerciais.

Vamos considerar uma partícula de massa m , movendo-se sob a ação de uma força F como mostrado na figura 3. De acordo com a segunda lei de Newton pode-se escrever:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} (m\bar{V}) = m\dot{\bar{V}} = m\bar{a} \quad (27)$$

O momento angular de uma partícula relativo a um ponto arbitrário C é:

$$\bar{h}_c = \bar{r} \times m\bar{V} \quad (28)$$

A derivada do momento angular em relação ao tempo vale:

$$\dot{\bar{h}}_c = \dot{\bar{r}} \times m\bar{V} + \bar{r} \times m\dot{\bar{V}} \quad (29)$$

Utilizando as equações (7) e (27) obtêm-se a expressão abaixo:

$$\dot{\bar{h}}_c = \dot{\bar{r}} \times m(\dot{\bar{R}}_c \times \bar{r}) + \bar{r} \times \bar{F} = -\dot{\bar{R}}_c \times m\bar{r} + \bar{r} \times \bar{F} \quad (30)$$

Pela definição, entretanto, o momento da força F em relação ao ponto C é:

$$\bar{M}_c = \bar{r} \times \bar{F} \quad (31)$$

Substituindo a equação (30) na equação (31), obtêm-se:

$$\bar{M}_c = \dot{\bar{h}}_c + \dot{\bar{R}}_c \times m\bar{r} \quad (32)$$

As equações de força e momento (equações 27 e 32), foram obtidas para uma partícula única, mas elas podem ser estendidas para equacionar o movimento de corpos rígidos. Sabendo que para corpos rígidos não há momento relativo no sistema de coordenadas xyz e usando a equação (11), pode-se escrever a equação de força do movimento

$$\vec{F} = \int_m \vec{a} dm = \int_m [\vec{a}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm \quad (33)$$

onde \vec{F} é a resultante das forças externas atuando no corpo rígido e m é a massa total do corpo. Note que forças atrativas no corpo rígido são forças internas e se cancelam mutuamente. Se C coincide com o centro de massa do corpo rígido, então $\int_m \vec{r} dm = 0$:

Logo a equação (33) se reduz a:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c \quad (34)$$

o que quer dizer que um corpo rígido move-se como se fosse uma simples partícula de massa igual à massa total do corpo rígido, concentrada no centro de massa C onde está aplicada a força a resultante F das forças externas.

A equação de momento do movimento em torno de C é da forma abaixo :

$$\vec{M}_c = \dot{\vec{H}}_c + \int_m \vec{R}_c \times \dot{\vec{r}} dm \quad (35)$$

Onde \vec{M}_c é a resultante dos momentos externos em relação a C e \vec{H}_c é o momento angular do corpo rígido em relação a C . Utilizando a equação a equação (35) e lembrando que para um corpo rígido $\dot{\vec{r}}_{rel} = 0$, pode-se escrever

$$\int_m \vec{R}_c \times \dot{\vec{r}} dm = \vec{R}_c \times (\vec{\omega} \times \int_m \vec{r} dm) \quad (36)$$

Mas se C for o centro de massa do corpo tem-se $\int_m \vec{r} dm = 0$. A equação (35) se reduz:

$$\vec{M}_c = \dot{\vec{H}}_c \quad (37)$$

ou, o momento das forças externas em relação ao centro de massa de um corpo rígido é igual à taxa de variação do momento angular com o tempo em relação ao centro de massa.

Será mais conveniente expressar o momento angular em termos das componentes ao longo dos eixos x , y , z na forma:

$$\vec{H}_c = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k} \quad (38)$$

Pelo fato de x , y , e z serem os eixos de rotação, pode-se usar a equação (5) para a derivada de um vetor expressa em termos dos eixos de rotação e podemos escrever a equação (37) na forma abaixo :

$$\vec{M}_c = \dot{\vec{H}}_{c,rel} + \vec{\omega} \times \vec{H}_c \quad (39)$$

As equações (34) e (39) podem ser escritas em termos de componentes como segue:

$$F_x = m\ddot{x}_c \quad (40.a)$$

$$F_y = m\ddot{y}_c \quad (40.b)$$

$$F_z = m\ddot{z}_c \quad (40.c)$$

$$M_x = \dot{H}_x + \omega_y H_z - \omega_z H_y \quad (40.d)$$

$$M_y = \dot{H}_y + \omega_z H_x - \omega_x H_z \quad (40.e)$$

$$M_z = \dot{H}_z + \omega_x H_y - \omega_y H_x \quad (40.f)$$

Onde H_x , H_y e H_z são dados pela equação (22). No caso especial em que os eixos de rotação x , y e z coincide com os eixos principais de inércia, as componentes do momento angular são reduzidas a

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x \\ H_y &= I_{yy}\omega_y \\ H_z &= I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (41)$$

Substituindo a equação (41) nas equações (40.d) a (40.f) as equações de momento se tornam:

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) \\ M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(I_{xx} - I_{zz}) \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) \end{aligned} \quad (42)$$

que são conhecidas como as equações de momento de Euler.

3.2 – ESTABILIZAÇÃO DE ATITUDE

Os sistemas de controle de atitude do satélite podem ser classificados em duas categorias gerais : estabilização por spin e estabilização nos três eixos. A estabilização por spin é baseada na rigidez giroscópica devido à rotação de todo ou parte do satélite. Há duas subdivisões desta classe : a estabilização por simples spin ou a estabilização por duplo spin. Na estabilização por simples spin, o corpo inteiro gira em torno do eixo principal mínimo ou máximo de inércia. Os satélites de comunicação mais antigos tais como Syncom e Intelsat I e II foram estabilizados por simples spin. A limitação básica destes satélites foram que eles não puderam usar antenas orientadas para Terra, necessitando portanto de uma antena que possa apontar para todas as direções consequentemente com um ganho da antena para a Terra muito baixo.

Esta limitação é superada num satélite estabilizado por duplo spin o qual se divide em duas partes: a plataforma externa e o parte móvel interna, cada parte girando em diferentes taxas. A plataforma consiste de antenas e equipamentos de comunicação orientados para a Terra girando a uma revolução por dia. O parte móvel interna gira a uma alta taxa de spin (geralmente de 60 rpm) para fornecer rigidez giroscópica. No caso da estabilização nos três eixos, todo o satélite com exceção dos painéis solares que são orientados para o sol, pode ser orientado para diferentes direções. Por exemplo para a Terra uma estrela, etc. Os torques controladores ao longo dos três eixos são produzidos pela combinação dos momentos das rodas, das rodas de reação, do torque magnético e dos jatos de gás.

O sistema de coordenadas utilizados no controle de atitude como mostrado na figura abaixo. O sistema de coordenadas fixo inercial $X_0Y_0Z_0$ é utilizado para determinar a posição orbital do satélite.

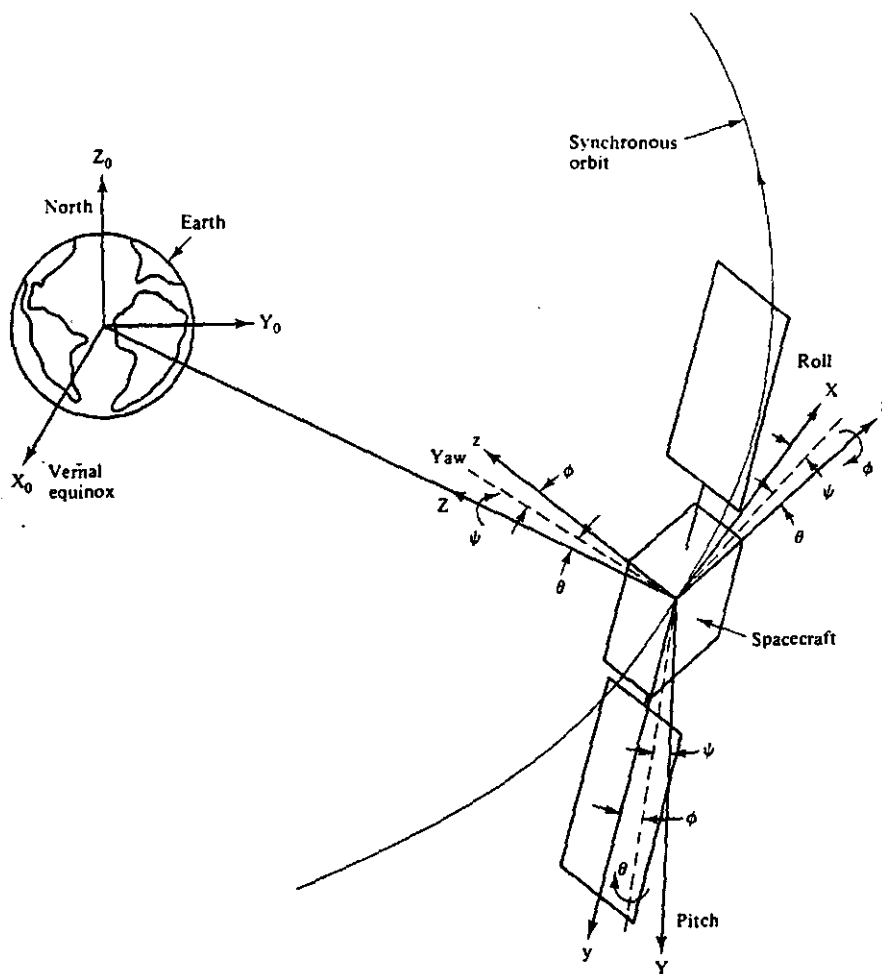


Figura 4 – Sistemas coordenados no controle de atitude

O movimento de atitude de um satélite é na maioria das vezes descrito em termos de um sistema de três eixos coordenados, chamados de ,roll, pitch e yaw.

O eixo roll ,X, está ao longo do vetor de velocidade orbital; o eixo yaw ,Z, está ao longo do vetor que liga o centro de massa da Terra com o centro de massa do satélite; e o eixo pitch é perpendicular ao plano formado pelos eixos yaw e roll tendo o sentido do vetor resultante do produto vetorial dos vetores yaw e roll. O sistema coordenado XYZ é também denominado de sistema coordenado orbital. A origem do sistema de coordenadas é o centro de massa do satélite . Ele está girando em relação ao sistema fixo $X_0Y_0Z_0$ com a velocidade angular de uma revolução por diária. A perturbação de atitude de um satélite no sistema de coordenadas XYZ é obtida através das rotações a seguir : ψ em torno do eixo Z, θ em torno do eixo Y, e ϕ em torno do eixo X. Os ângulos ψ, θ e ϕ são chamados respectivamente de erros : yaw , pitch e roll .

3.3 – ESTABILIZAÇÃO NOS TRÊS EIXOS

Os torques controladores ao longo dos eixos no sistema de estabilização por três eixos são produzidos através de várias combinações dos momentos de roda, das rodas de reação e dos jatos de gás. Há dois tipos de sistemas de estabilização nos três eixos: um sistema de momentos com momento de roda ao longo do eixo pitch, e um sistema de momento nulo com a roda de reação ao longo de cada eixo.

No sistema de momento de roda, o momento angular ao longo do eixo pitch fornece uma rigidez giroscópica. Nestes sistemas, os eixos roll e pitch são controlados diretamente e o eixo yaw é controlado indiretamente devido ao acoplamento dos erros roll e yaw, eliminando conseqüentemente a necessidade de um sensor yaw. Nos sistemas de roda de reação, todos os três eixos são controlados independentemente, sendo para isso necessário um sensor yaw. O momento da roda pode ser estabelecido em relação a um ou dois eixos. O torque controlador em relação ao eixo pitch advém da mudança de velocidade da roda de momento. O torque em relação ao eixo roll advém dos jatos de gás e das rodas de reação.

As equações linearizadas do movimento de um satélite estabilizado nos três eixos são derivadas primeiras. A velocidade angular do satélite pode ser expressa em termos da velocidade orbital, ω_0 , e dos erros angulares de atitude, ψ , θ , e ϕ que são conhecidos como erros yaw, pitch e roll, respectivamente, como segue abaixo:

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} - \omega_0 \begin{Bmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi \\ -\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi \end{Bmatrix} \quad (43)$$

$$\approx \begin{Bmatrix} \dot{\phi} - \omega_0 \psi \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \omega_0 \phi \end{Bmatrix}$$

O momento angular do sistema pode ser escrito na forma:

$$\vec{H} = \vec{H}_w + \vec{H}_b \quad (44)$$

onde:

$$\vec{H}_w = [h_x \quad h_y \quad h_z]^T \quad (45.a)$$

$$\vec{H}_b = [I_{xx}\omega_x \quad I_{yy}\omega_y \quad I_{zz}\omega_z]^T \quad (45.b)$$

são os momentos angulares das rodas e do satélite, respectivamente, onde I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são os momentos principais de inércia do satélite e ω_x , ω_y e ω_z são as velocidades angulares dos eixos x , y e z dado pela equação (43). Introduzindo (44), nas equações (45) e (43) na equação (39) e ignorando os termos não linear, obtém-se a equação de momento na forma :

$$\vec{M} \equiv \begin{cases} \dot{h}_x + I_{xx}(\ddot{\phi} - \omega_0\dot{\psi}) + h_z(\dot{\theta} - \omega_0)\dot{h}_z(\dot{\psi} + \omega_0\phi) - (I_{zz} - I_{yy})\omega_0(\dot{\psi} + \omega_0\phi) \\ \dot{h}_y + I_{yy}\ddot{\theta} + h_x(\dot{\psi} + \omega_0\phi) - h_z(\dot{\phi} - \omega_0\psi) \\ \dot{h}_z + I_{zz}(\ddot{\psi} - \omega_0\dot{\phi}) + h_y(\dot{\phi} + \omega_0\psi) - h_x(\dot{\theta} - \omega_0) - (I_{yy} - I_{xx})\omega_0(\dot{\phi} - \omega_0\psi) \end{cases} \quad (46)$$

Os momentos externos surgem de três principais fontes: o gradiente gravitacional, a pressão solar de radiação, e os momentos controladores advindos dos atuadores.

Denotando os torques individuais de \vec{M}_G , \vec{M}_S e \vec{M}_C respectivamente pode-se escrever :

$$\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_S + \vec{M}_C \quad (47)$$

As expressões para o gradiente de gravidade e os torques devido à pressão solar são obtidos nas sessões seguintes.

3.4 – TORQUES PERTURBADORES

3.4.1) TORQUE DEVIDO AO GRADIENTE DE GRAVIDADE

O corpo de um satélite sofre um torque do gradiente gravitacional devido a variação das distâncias entre o satélite e o centro de massa da Terra.

A força gravitacional correspondente a um elemento diferencial de massa dm , mostrado como o ponto P na figura 11, é :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mu_e \vec{R} dm}{|\vec{R}|^3} = \mu_e \frac{\vec{R}_0 - \vec{r}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|^3} dm = \frac{\mu_e (\vec{R}_0 - \vec{r}) dm}{R_0^3} \left[1 + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^2} + O\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right] \\ &\cong \frac{\mu_e (\vec{R}_0 - \vec{r}) dm}{R_0^3} \left(1 + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^2} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

onde é assumido que $r/R_0 \ll 1$. O momento gravitacional do satélite é obtido usando a equação (48) e notando que $\int r dm = 0$ pois \vec{r} é um vetor medido do centro de massa do satélite. O resultado é:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \int \vec{r} \times \vec{F} dm \\ &= \frac{3\mu_e}{R_0^5} \int (\vec{r} \times \vec{R}_0) (\vec{r} \cdot \vec{R}_0) dm \end{aligned} \quad (49)$$

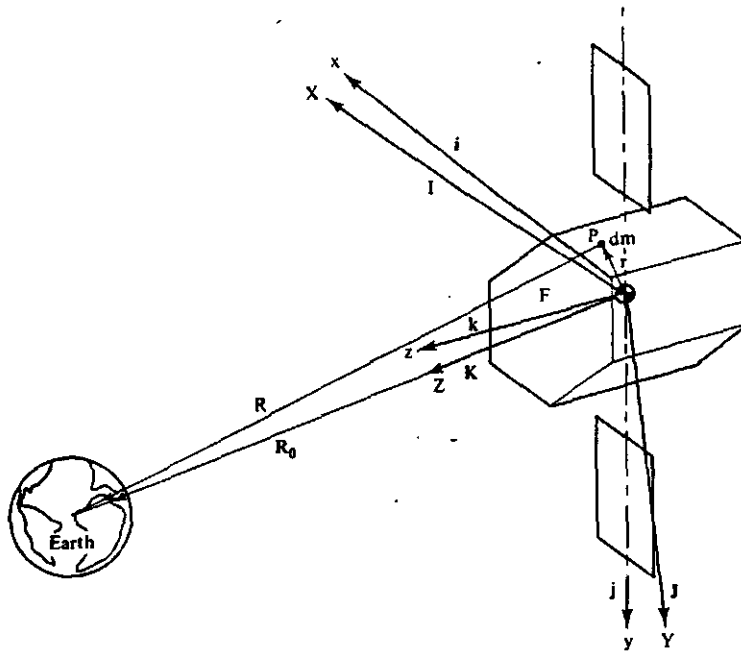


Figura 5 – Gradiente do momento gravitacional no satélite

Os vetores unitários \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ao longo dos eixos do corpo do satélite, assim como os eixos principais de inércia são relacionados com os vetores unitários \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} ao longo dos eixos orbitais como segue:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \quad (50) \end{aligned}$$

Usando a equação (50), o vetor $\vec{R}_0 = R_0 \vec{K}$ pode ser escrito nas coordenadas fixas do satélite como:

$$\vec{R}_0 = R_0 (-\sin \theta \vec{i} + \sin \phi \cos \theta \vec{j} + \cos \phi \cos \theta \vec{k}) \quad (51)$$

Substituindo a equação (51) na equação (49), o gradiente do momento de gravidade toma a seguinte forma:

$$\vec{M}_G = \frac{3\mu_e}{R_0^3} \begin{Bmatrix} (I_{zz} - I_{yy}) \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta \\ -(I_{xx} - I_{zz}) \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ -(I_{yy} - I_{xx}) \sin \theta \cos \theta \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Sabendo que

$$\omega_0^2 = \frac{\mu_e}{R_0^3} \quad (53)$$

onde ω_0 é a velocidade angular orbital. Inserindo a equação (53) na equação (52) e assumindo que os ângulos θ e ϕ são pequenos, o gradiente do momento de gravidade se reduz a

$$\vec{M}_G \cong 3\omega_0^2 \begin{Bmatrix} \phi(I_{zz} - I_{yy}) \\ \theta(I_{zz} - I_{xx}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

3.4.2) TORQUE DEVIDO À PRESSÃO RADIÇÃO SOLAR

As forças da radiação solar são devidas aos fótons incidindo na superfície do satélite. Em geral a fração, ρ_s , indicam os fótons “specularly reflected”, a fração, ρ_d , indicam os fótons “diffusely reflected”, e a fração, ρ_a , será absorvida pela superfície.

A superfície, A , intercepta o raio de radiação através da seção transversal $A \cos \psi$, onde ψ , como mostrado na figura 6, é o ângulo entre o vetor unitário \vec{n} ao longo da superfície normal e o vetor \vec{S} ao longo da direção dos fótons incidentes. Se o raio inteiro é absorvido (isto é, se $\rho_d = 1$), a força desenvolvida é $PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{S}$, onde P é a pressão da radiação solar. Pelo fato do momento dos fótons interceptados pela superfície mudar de várias maneiras, como mostrado na figura 12, a força de radiação, \vec{F}_a , devido aos fótons absorvidos é

$$\vec{F}_a = \rho_a PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{S} \quad (55)$$

Se a fração dos fótons incidentes refletir “specularly”, como num espelho, a fração ρ_s , e a força \vec{F}_s , devido aos fótons refletidos “specularly” é dada por

$$\vec{F}_s = 2\rho_s PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{n} \quad (56)$$

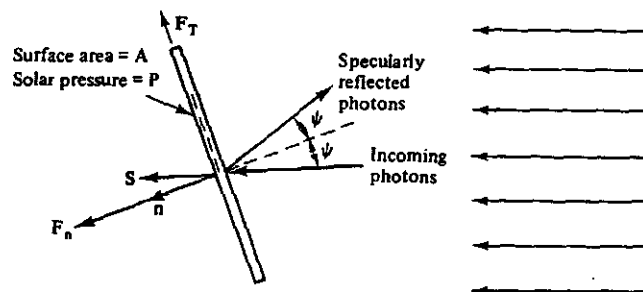


Figura 6 – Força da radiação solar na superfície

A fração, ρ_d , dos fótons incidentes é assumida ser refletida “diffusely”. O momento dos fótons incidentes pode ser considerado como “parados” na superfície e radiado novamente para dentro do hemisfério. Integrando o momento correspondente ao hemisfério, a componente tangencial do momento “de partida” é cancelada devida a simetria, restando apenas a componente normal à superfície. A força total, \vec{F}_d , causada pelos fótons refletidos “diffusely” é dada por

$$\vec{F}_d = \rho_d PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{S} + \frac{2}{3}\rho_d PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{n} \quad (57)$$

Combinando as equações (55) e (57), a força total devido à radiação da pressão solar é

$$\vec{F} = PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\left\{(\rho_a - \rho_d)\vec{S} + \left(2\rho_s + \frac{2}{3}\rho_d\right)\vec{n}\right\} \quad (58)$$

Notando que $\rho_a + \rho_d + \rho_s = 1$, o momento da pressão solar de radiação \vec{M}_s é

$$\vec{M}_s = PA(\vec{n} \cdot \vec{S})\vec{r}\left\{(1 - \rho_s)\vec{S} + 2\left(\rho_s + \frac{1}{3}\rho_d\right)\vec{n}\right\} \quad (59)$$

onde \vec{r} é o vetor do centro de massa do satélite até o centro de pressão da área dada, A . Da figura 13, o vetor unitário \vec{S} é

$$\vec{S} = \sin \delta \vec{I}_0 + \cos \delta \vec{K}_0 = \sin \alpha \cos \delta \vec{I} + \sin \delta \vec{J} + \cos \alpha \cos \delta \vec{K} \quad (60)$$

onde δ é a declinação do sol, positiva do equinócio vernal para o equinócio de outono; α é o ângulo orbital medido do local do satélite ao meio dia; $\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0$ são os vetores ao longo do eixo orbital do satélite ao meio-dia; e $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, são vetores unitários ao longo dos eixos orbitais a um ângulo orbital α .

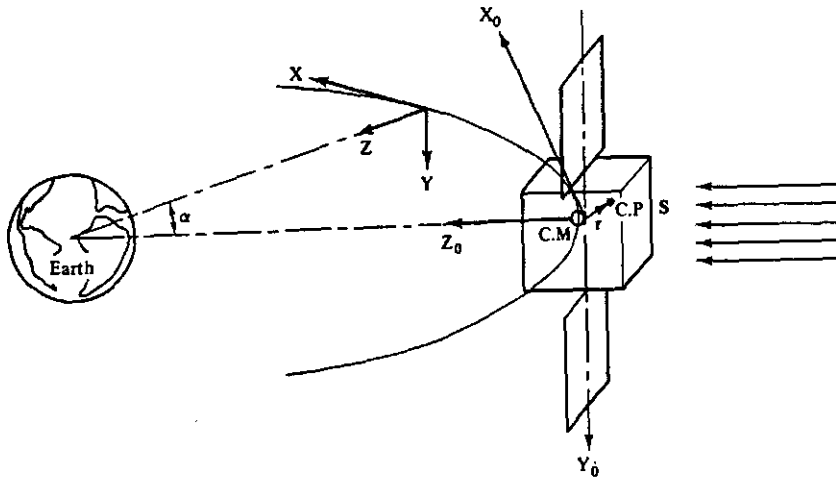


Figura 7 – Pressão do momento da radiação solar no satélite

Para um satélite estabilizado nos três eixos, o solar “array” contribui com a maior parte do momento da pressão solar. Pelo fato do painel solar “está na trilha do sol” em relação ao eixo pitch, como mostrado na figura 7, o vetor \vec{n} é dado por

$$\vec{n} = \sin \alpha \vec{I} + \cos \alpha \vec{K} \quad (61)$$

O vetor \vec{n} , normal ao painel solar, coincide com o vetor \vec{S} no equinócio, onde $\delta=0$. Substituindo as equações (60) e (61) na equação (59), obtém-se

$$\vec{M}_s = \begin{Bmatrix} PA(yK_1 \cos \alpha - zK_2) \vec{I} \\ PA(zK_1 \sin \alpha - xK_1 \cos \alpha) \vec{J} \\ PA(xK_2 - yK_1 \sin \alpha) \vec{K} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

onde foi introduzida a notação

$$K_1 = \left[(1 - \rho_s) \cos \delta + 2 \left(\rho_s + \frac{1}{3} \rho_d \right) \right] \cos \delta \quad (63.a)$$

$$K_2 = (1 - \rho_s) \cos \delta \sin \delta \quad (63.b)$$

Além disso x , y e z são componentes do vetor \vec{r} . Transformando o momento da pressão solar \vec{M}_s , para o sistema de coordenadas X_0, Y_0, Z_0 no qual gira na razão de 1 grau por dia, obtém-se

$$\vec{M}_s = PA \begin{Bmatrix} (yK_1 - zK_2 \cos \alpha - xK_2 \sin \alpha) \vec{I}_0 \\ (zK_1 \sin \alpha - xK_1 \cos \alpha) \vec{J}_0 \\ (-zK_2 \sin \alpha + xK_2 \cos \alpha) \vec{K}_0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Das equações (62) e (64), deve ser notado que a componente da radiação solar ao longo do eixo pitch (Y e Y_0) é periódica, com o período igual ao período orbital. Consequentemente o efeito “net” da componente deste torque no período de órbita “cheia” é nula. Por outro lado, as componentes ao longo dos outros eixos têm componentes temporais (não nulas unidirecionais), resultando numa mudança “net” do momento angular do satélite sobre uma órbita “cheia”. Deve ser frisado que o torque temporal em um sistema de coordenadas se torna periódico em outro sistema de coordenadas.

3.5 – MOMENTO DE RODA FIXO COM JATOS DE GÁS

A maioria dos satélites recentes que são estabilizados nos três eixos, tais como RCA Satcom, Intelsat V, e OTS/Marecs, usam um sistema de controle de atitude consistindo de momento de roda com jatos de gás (torques magnéticos no RCA Satcom). O momento de roda fornece uma rigidez giroscópica. A dinâmica de atitude de um sistema fixo de momento de roda é similar àquele utilizado no satélite estabilizado duplamente por spin. A maior diferença consiste no fato do momento angular de um satélite estabilizado por duplo spin é em geral significativamente maior do que o do satélite estabilizado nos três eixos com um momento de roda fixo. Consequentemente a razão do erro de atitude “buildup” devido aos momentos perturbadores é maior para um sistema de momento de roda fixado. Para um satélite estabilizado por duplo spin, os erros de atitude são corrigidos periodicamente por comandos da terra como no Intelsat VI. Num sistema de momento de roda fixado, entretanto, os jatos de gás são disparados de controladores eletrônicos para corrigir os erros de atitude automaticamente. O sistema é mostrado na figura 8. Os erros pitch e yaw são detectados pelos sensores da Terra.

O momento de roda é alinhado nominalmente com o eixo pitch, com o vetor momento angular ao longo do eixo pitch no sentido negativo. Consequentemente as componentes do momento angular da roda nas coordenadas fixas do satélite são

$$h_x = 0 \quad (65.a)$$

$$h_y = -h \quad (65.b)$$

$$h_z = 0 \quad (65.c)$$

onde $h = I_w \Omega$ é a magnitude do momento angular da roda, no qual I_w é seu momento de inércia e Ω é a velocidade angular. Inserindo as equações (47), (54) e (65) na equação (46), obtém-se

$$\begin{cases} M_{cx} + M_{sx} \\ M_{cy} + M_{sy} \\ M_{cz} + M_{sz} \end{cases} = \begin{cases} I_{xx}\ddot{\phi} + [4\omega_0^2(I_{yy} - I_{zz}) + \omega_0 h]\dot{\phi} + [h - \omega_0(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})]\dot{\psi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} + 3\omega_0^2\theta(I_{xx} - I_{zz}) - \dot{h} \\ I_{zz}\ddot{\psi} + [\omega_0^2(I_{yy} - I_{xx}) + \omega_0 h]\dot{\psi} - [h - \omega_0(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy})]\dot{\phi} \end{cases} \quad (66)$$

Assumindo que

$$h \gg \max[4\omega_0(I_{yy} - I_{zz}), \omega_0(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}), \omega_0(I_{yy} - I_{xx})] \quad (67)$$

as equações de movimento tomam a forma abaixo

$$\begin{cases} M_{cx} + M_{sx} \\ M_{cy} + M_{sy} \\ M_{cz} + M_{sz} \end{cases} = \begin{cases} I_{xx}\ddot{\phi} + \omega_0 h \dot{\phi} + h \dot{\psi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} + 3\omega_0^2\theta(I_{xx} - I_{zz}) - \dot{h} \\ I_{zz}\ddot{\psi} + \omega_0 h \dot{\psi} - h \dot{\phi} \end{cases} \quad (68)$$

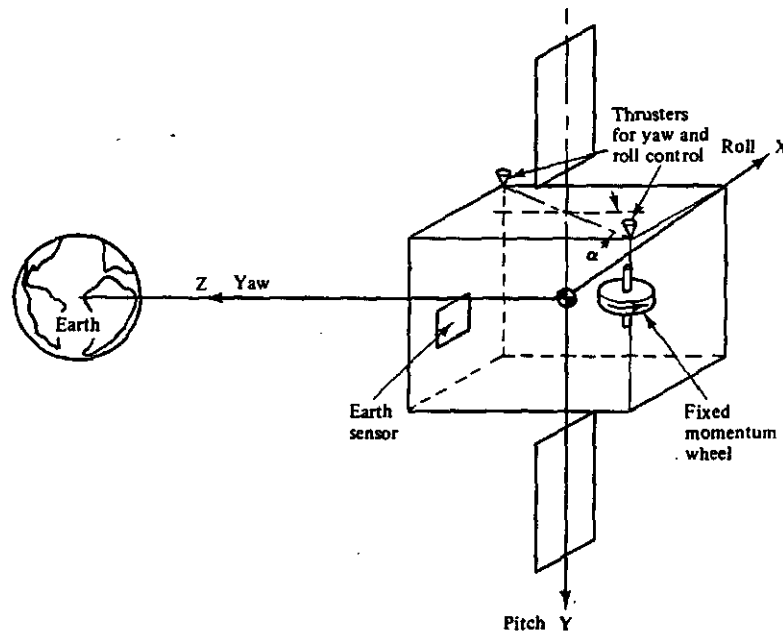


Figura 8 – Sistema de momento fixo de roda com jatos de gás

Da equação (68), é claro que para pequenos erros de atitude, a equação em relação ao eixo pitch está desacoplada das equações em relação aos eixos roll e yaw. As equações

em relação aos eixos roll e yaw são acopladas por causa do momento angular h . Por causa disso iremos discutir o controle do eixo pitch separado do controle dos eixos roll e yaw.

3.5.1) CONTROLE DO EIXO "PITCH"

Da equação (68), a equação linearizada do eixo pitch é

$$M_{cy} + M_{sy} = I_{yy}\ddot{\theta} + 3\omega_0^2(I_{xx} - I_{zz})\theta - \dot{h} \quad (69)$$

No caso de $I_{xx} = I_{zz}$, a equação (69) se reduz a

$$M_{cy} + M_{sy} = I_{yy}\ddot{\theta} - \dot{h} \quad (70)$$

O momento da pressão solar, M_{sy} , ao longo do eixo pitch é periódico como mostrado na equação (64). O erro pitch pode se controlado aplicando um torque proporcional ao erro e sua razão. O torque controlador advém da mudança do momento angular da roda de acordo com

$$\dot{h} = -K_{\theta}(\tau_{\theta}\dot{\theta} + \theta) \quad (71)$$

Substituindo a equação (71) na equação (70) e notando que $M_{cy} = 0$, a equação do eixo pitch assume a forma

$$M_{sy} = I_{yy}\ddot{\theta} + K_{\theta}\tau_{\theta}\dot{\theta} + K_{\theta}\theta \quad (72)$$

Para $K_{\theta}, \tau_{\theta} > 0$ a equação (72) é a equação de movimento para um sistema amortecido de segunda ordem. A frequência natural, ω_{θ} , e a taxa de amortecimento, ζ_{θ} , são dadas por

$$\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{K_{\theta}}{I_{yy}}} \quad \zeta_{\theta} = \frac{\tau_{\theta}}{2} \sqrt{\frac{K_{\theta}}{I_{yy}}} \quad (73)$$

O diagrama de bloco de controle é mostrado na figura 9. O momento de roda é aplicado no satélite para anular o momento externo. As funções de transferência de um controle pitch são

$$G(s) = \frac{1}{I_{yy}s^2} \quad (74)$$

$$H(s) = K_{\theta}(\tau_{\theta}s + 1) \quad (75)$$

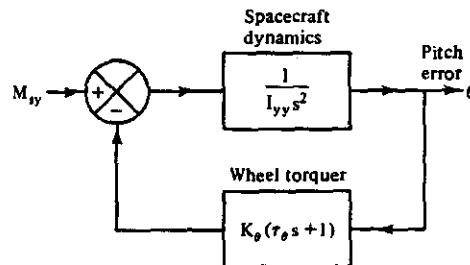


Figura 9 – Diagrama de bloco para o controle do eixo pitch

Produzindo

$$G(s)H(s) = \frac{K_\theta(\tau_\theta s + 1)}{I_{yy}s^2} \quad (76)$$

Conseqüentemente a função transferência do “open loop”, $G(s)H(s)$, possui dois pólos, um em $s = 0$ e outro em $s = -1/\tau_\theta$. O “root locus” para um controlador pitch é mostrado na figura 16.

O ponto A, no qual é geralmente um ponto de projeto, corresponde a um sistema amortecido criticamente, $\zeta_\theta = 1$. Usando a equação (73), pode-se concluir que para um sistema amortecido criticamente,

$$\tau_\theta = 2\sqrt{\frac{I_{yy}}{K_\theta}} \quad (77)$$

e a função de transferência “closed loop” é

$$\frac{\theta(s)}{M_{yy}(s)} = \frac{1}{I_{yy}\left(s + \sqrt{\frac{K_\theta}{I_{yy}}}\right)^2} \quad (78)$$

Um erro pitch vem de várias fontes, tais como um erro pitch inicial, momentos de impulso de um jato de gás durante um período de “desaturation” (para manter a velocidade da roda com um limite normal permitido) e durante “station keeping” por causa da falta de alinhamento dos jatos de gás, e o momento cíclico devido à pressão solar. O torque perturbador durante “station keeping” é geralmente grande o suficiente tal que o controle da roda é abandonado em favor do controle do jato de gás. Neste caso, a velocidade da roda é mantida constante enquanto os jatos de gás são usados para fornecer o torque controlador de atitude. Os parâmetros de um sistema controlador, como o K_θ e τ_θ , são selecionados de forma que os erros de atitude devido a essas perturbações fiquem nos limites permitidos.

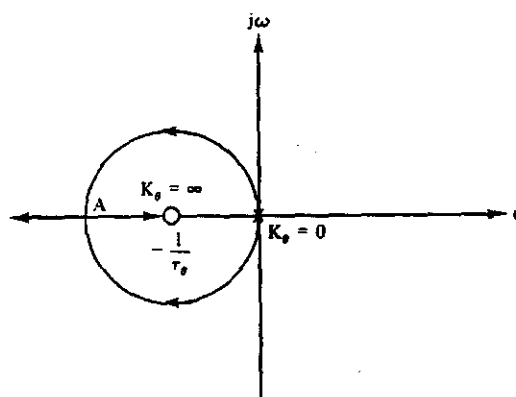


Figura 10 – Root-locus para o controle do eixo pitch

Para um sistema amortecido criticamente, a resposta devido a um erro pitch inicial é

$$\theta(t) = \theta(0) \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \quad (79.a)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_\theta} = \sqrt{\frac{I_y}{K_\theta}} \quad (79.b)$$

onde $\theta(0)$ é o erro pitch inicial. Se M_y é um momento de impulso tal qual $M_y = M_0 \delta(t)$.

Utilizando a equação (78) tem-se

$$\theta(t) = \frac{M_0}{I_{yy}} t e^{-t/\tau} \quad (80)$$

O erro pitch máximo ocorre quando $t = \tau$ e tem o valor de

$$\theta_{\max} = \frac{M_0 \tau}{I_{yy}} e^{-1} \quad (81)$$

Para uma perturbação cossenoidal do tipo

$$M_y = M_0 \cos \omega_0 t \quad (82)$$

como no caso do momento da pressão de radiação, o estado-fixa de resposta é

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t - \psi_0) \quad (83)$$

onde a amplitude é dada por

$$\theta_{\max} = \frac{M_0 \tau^2}{I_{yy}} \frac{1}{[(1 - \tau^2 \omega_0^2)^2 + (2\tau \omega_0)^2]^{1/2}} \quad (84)$$

e o ângulo de fase é dado por

$$\psi_0 = \tan^{-1} \frac{2\tau \omega_0}{1 - \tau^2 \omega_0^2} \quad (85)$$

Para $\tau \omega_0 \ll 1$, a equação (83) pode ser reduzida a

$$\theta = \frac{M_0 \tau^2}{I_{yy}} \cos \omega_0 t \quad (86)$$

O ganho, K_θ , é obtido com base no erro fixo e na constante de tempo do sistema.

Notando que o torque controlador no satélite é produzido por um momento de roda, pode-se usar a equação (71) e obter

$$I_w \dot{\Omega} = -K_\theta (\tau_\theta \dot{\theta} + \theta) \quad (87)$$

A transformada de Laplace da equação (87) para um ângulo inicial nulo, $\theta(0)=0$, é

$$\Omega(s) = -\frac{K_\theta}{I_w s} (\tau_\theta s + 1) \theta(s) + \frac{\Omega_n}{s} \quad (88)$$

onde Ω_n denota a velocidade angular inicial da roda. Considerando um sistema amortecido criticamente onde $\zeta_\theta=1$, $\tau_\theta = 2\tau$, pode-se usar as equações (77) e (78) e escrever

$$\Omega(s) = -\frac{2\tau s + 1}{I_w s (\tau s + 1)^2} M_{ys}(s) + \frac{\Omega_n}{s} \quad (89)$$

Para uma perturbação impulsiva de magnitude $M_y = M_0 \delta(t)$, $M_{ys} = M_0$, a velocidade da resposta do momento de roda é

$$\Omega(t) = -\frac{M_0}{I_w} \left[1 + \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) e^{-t/\tau} \right] + \Omega_n \quad (90)$$

A resposta no estado fixo (“steady-state response”), obtida fazendo $t \rightarrow \infty$ é

$$\Omega_{ss} = -\frac{M_0}{I_w} + \Omega_n \quad (91)$$

Observando as equações (80) e (91) é fácil notar que o efeito do termo de longo período de um momento perturbador impulsivo é a atitude do satélite manter-se constante. Mas a velocidade do momento de roda muda como se o momento perturbador atuasse na roda diretamente. O sinal negativo na equação (91) é devido ao fato do momento angular ser negativo ao longo do eixo pitch.

Para um torque perturbador periódico, tal como o dado pela equação (82), a transformada de Laplace da resposta da velocidade da roda é

$$\Omega(s) = -\frac{(2\tau s + 1)sM_0}{I_w s(\tau s + 1)^2 (s^2 + \omega_0^2)} + \frac{\Omega_n}{s} \quad (92)$$

Notando que para $\tau\omega_0 \ll 1$, a resposta para um estado estacionário é reduzida a

$$\Omega_{ss} = -\frac{M_0}{I_w \omega_0} \text{sen } \omega_0 t + \Omega_n \quad (93)$$

Similarmente, um torque perturbador temporal conduzirá a uma velocidade de roda infinita ao menos que um momento externo ao longo do eixo pitch seja aplicado, tal como no jatos de gás controladores, para reduzir a variação da velocidade da roda. Deste modo os torques temporais exigiram periodicamente que os jatos de gás sejam acionados para manter a velocidade da roda nos limites permitidos. Este procedimento chama-se “momentum wheel desaturation”. Momentos perturbadores cíclicos resultam numa velocidade de roda cíclica com um valor médio Ω_n . O momento de roda é geralmente projetado de tal maneira que a variação da velocidade de roda devido ao momento perturbador cíclico fique nos limites permitidos.

Como mostrado na figura 9, o torque controlador é proporcional ao erro pitch, θ , e à taxa de variação do erro pitch, $d\theta/dt$. O erro pitch pode ser determinado através de sensores de atitude, tais como os sensores da Terra (“earth sensors”). Entretanto, para determinar a taxa de variação do erro, “rate gyros” são necessários. “Rate gyros” não são capazes de detectar variações muito baixas enquanto estiverem sendo solicitados por um tempo longo. A prática comum é usar “lead compensation”.

3.5.2) CONTROLE DOS EIXOS ROLL E YAW

Usando a equação (68), a transformada de Laplace da equação de movimento no eixo roll e yaw é

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha} + M_{\alpha\alpha} \\ M_{\alpha} + M_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}s^2 + \omega_0 h & hs \\ -hs & I_{xx}s^2 + \omega_0 h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{Bmatrix} \quad (94)$$

Para um satélite onde não atuam controladores, $M_x = M_z = 0$, o movimento é o mesmo que num satélite estabilizado por duplo spin. No caso simétrico, $I_x = I_z$, a função transformada entre o ângulo yaw e o torque yaw é

$$\frac{\psi(s)}{M_z(s)} = \frac{I_x s^2 + \omega_0 h}{(I_x s^2 + \omega_0 h)(I_x s^2 + \omega_0 h) + h^2 s^2} \quad (95)$$

Então a equação característica pode ser escrita na forma abaixo

$$s^4 + (2\omega_0\omega_n + \omega_n^2)s^2 + \omega_0^2\omega_n^2 = 0 \quad (96)$$

onde $\omega_n = h/I_x$ é a frequência de nutação. As raízes da equação característica são

$$\begin{aligned} s^2 &= -\frac{\omega_n^2}{2} \left[\left(1 + 2\frac{\omega_0}{\omega_n} \right) \pm \sqrt{1 + 4\frac{\omega_0}{\omega_n}} \right] \\ &= -\frac{\omega_n^2}{2} \left[\left(1 + 2\frac{\omega_0}{\omega_n} \right) \pm \left(1 + 2\frac{\omega_0}{\omega_n} - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_n}\right)^2 + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (97)$$

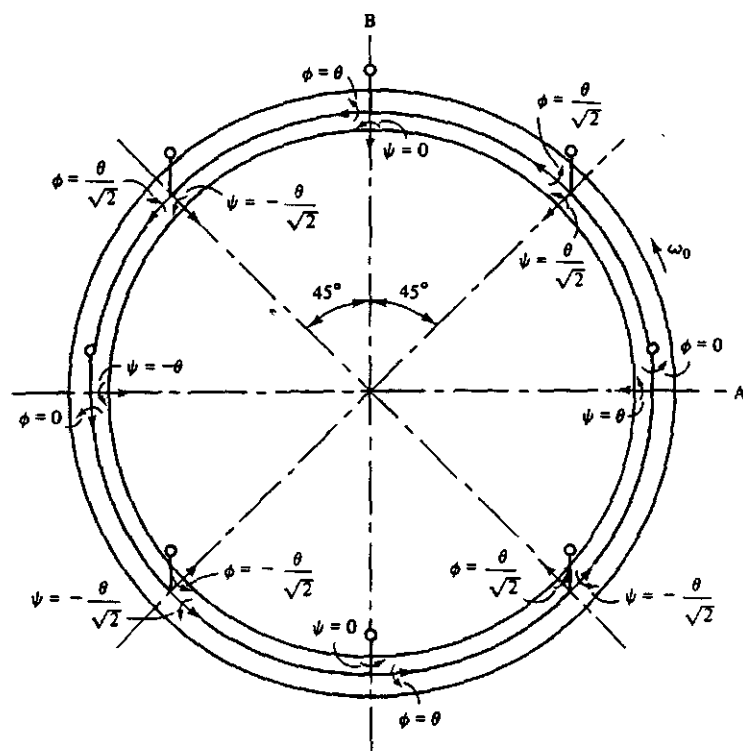


Figura 11 – Coupling roll e yaw

Note que quando $\frac{\omega_0}{\omega_n} \ll 1$, os pólos são

$$s = \pm j\omega_n$$

$$s = \pm j\omega_0$$

Consequentemente o movimento de força livre consiste de dois movimentos periódicos. O primeiro movimento é o movimento de nutação com frequência igual a ω_n e o segundo movimento consiste de movimentos roll e yaw acoplados com uma velocidade orbital ω_0 . A figura 11 mostra um acoplamento roll e yaw com nutação nula. O ângulo θ entre a normal à órbita e o vetor momento angular surge como o erro yaw θ no ponto A, com um erro roll nulo. Após um quarto período, no ponto B, ângulo θ surge como um erro roll só. Consequentemente há um intercâmbio entre os erros roll e yaw em cada quarto período da órbita. É necessário apenas perceber e controlar um erro diretamente, sendo roll ou yaw, como outro erro é controlado indiretamente devido ao efeito de agrupamento. É mostrado posteriormente que para satélites de comunicação, o erro roll é grande impacto na precisão da antena e é mais fácil ser percebido que o erro yaw. Portanto, para um sistema fixo de momento de roda, o erro roll é percebido e controlado diretamente e o erro yaw é controlado indiretamente. Os métodos abaixo podem ser usados para controlar os erros roll e yaw.

WHECON control system. Neste método o torque controlador é aplicado ao longo do eixo roll através de jatos de gás e é proporcional ao erro roll, ϕ , e à taxa de variação do erro roll, $d\phi/dt$. Os jatos de gás são controlados por dispositivos que apenas ligam e desligam. É necessário então um modulador para transformar o sinal de controle num sinal que liga e desliga os jatos de gás. A prática mais comum é usar um modulador "pseudorate", como mostrado na figura 12. Um "Schmitt trigger" com histerese e feedback do polo real produz uma série de pulsos cuja média é proporcional ao erro e à taxa de variação do erro. Este processo é às vezes chamado de "derivedrate increment system" pois oferece um método de sintetizar a taxa de variação angular quando a medição direta não é possível. Os jatos de gás controladores são acionados de tal modo que fornece um torque controlador ao longo do eixo roll e yaw também. Os torques controladores ao longo dos eixos roll e yaw são

$$M_{\alpha} = -K \cos \alpha (\tau s + 1) \phi(s) \quad (98)$$

$$M_{\omega} = K \sin \alpha (\tau s + 1) \dot{\phi}(s) \quad (99)$$

onde K é o ganho, determinado pela força do jato e um braço de momento, α é o ângulo offset, e τ é a constante de avanço de tempo de um circuito "pseudorate". Substituindo as equação (148) e (149) na equação (144) obtém-se

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha} \\ M_{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}s^2 + \omega_0 h + K \cos \alpha (\tau s + 1) & hs \\ -K \sin \alpha (\tau s + 1) - hs & I_{zz}s^2 + \omega_0 h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{Bmatrix} \quad (100)$$

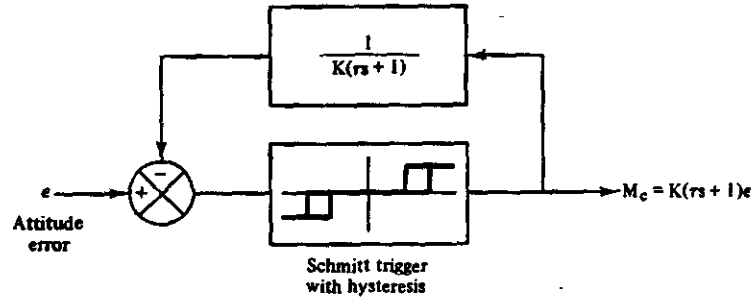


Figura 12 – Diagrama de bloco para uma “modulação pseudorate”

A equação característica correspondente a equação (100) é

$$s^4(I_{xx}I_{zz}) + s^3(K\tau I_{zz} \cos \alpha) + s^2[h\{\omega_0 I_{xx} + \omega_0 I_{zz} + h + K\tau \sin \alpha\} + K \cos \alpha I_{zz}] + s[h(K\tau \omega_0 \cos \alpha + K \sin \alpha)] + (\omega_0^2 h^2 + \omega_0 h K \cos \alpha) = 0 \quad (101)$$

De acordo com o critério de Routh, a condição de estabilidade necessária é que todos os coeficientes da equação característica sejam positivos. Os coeficientes são positivos “estáveis” para valores positivos de K , τ , α , e h . Consequentemente, num sistema de momento de roda fixo, o momento angular da roda é mantido ao longo do eixo pitch negativo.

O momento angular da roda é determinado principalmente pela precisão yaw requerida. Na ausência de nutação, e perturbação e dos torques controladores, o ciclo orbital roll-yaw será um círculo como mostrado na figura 11. Entretanto, na presença da zona morta roll e do torque roll-yaw perturbador temporal o ciclo orbital roll yaw será mostrado na figura 13. Quando o erro roll passa a zona morta, o jato de gás offset lança uma série de pulsos para manter o erro roll na zona morta roll. Isso continua, devido ao movimento orbital, até que o erro roll deixe a fronteira e cruze a zona morta. O erro yaw ψ_1 e o tempo t_1 de saída da zona morta limite ϕ_D , e o erro yaw ψ_2 e o tempo t_2 para alcançar o limite oposto $-\phi_D$ são dados abaixo

$$\cos v_1 = \frac{\omega_0 \phi_D h}{2T_s} \quad (102)$$

$$\psi_1 = -\frac{T_s \sin v_1}{\omega_0 h} \quad (103)$$

$$\phi_D (1 + \cos(v_2 - v_1)) + \psi_1 \sin(v_2 - v_1) + (v_2 - v_1) \frac{\sin v_2 T_s}{\omega_0 h} = 0 \quad (104)$$

$$\psi_2 = \psi_1 \cos(v_2 - v_1) - \phi_D \sin(v_2 - v_1) + (v_2 - v_1) \cos v_2 \frac{T_s}{\omega_0 h} \quad (105)$$

onde

$$v_1 = \omega_0 t_1 \quad (106.a)$$

$$v_2 = \omega_0 t_2 \quad (106.b)$$

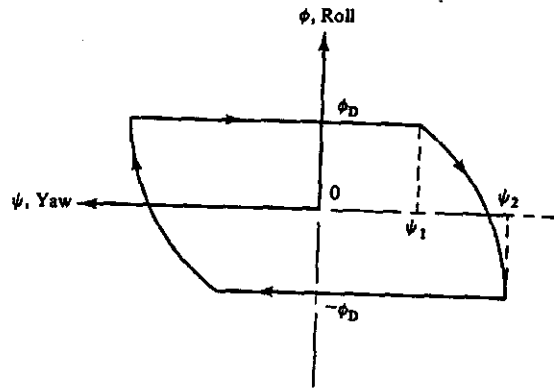


Figura 13 – Ciclo orbital roll-yaw

Nas equações (102-105), T_s é o torque perturbador temporal roll/yaw. O ângulo yaw ψ_2 na zona morta ϕ_D representa o máximo erro yaw e tem influência na magnitude do momento angular. Para obter ψ_1 , pode ser usada a linearização iterativa.

Para os torques perturbadores, $T_{bx}(s) = T_{bx}/s$ e $T_{bz}(s) = T_{bz}/s$, no qual são constantes as coordenadas do corpo fixo e cíclico nas coordenadas inerciais, o erro no estado fixo (steady-state error) da equação (100) vale

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= \frac{T_{bx}}{\omega_0 h + K \cos \alpha} \\ &\cong \frac{T_{bx}}{K \cos \alpha} \quad \text{para } \rightarrow K \cos \alpha \gg \omega_0 h \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \psi_{ss} &= \frac{1}{\omega_0 h} \left(T_{bz} + \frac{T_{bx} K \sin \alpha}{\omega_0 h + K \cos \alpha} \right) \\ &\cong \frac{T_{bz} + T_{bx} \tan \alpha}{\omega_0 h} \quad \text{para } \rightarrow K \cos \alpha \gg \omega_0 h \end{aligned} \quad (108)$$

Da equação (108), o erro yaw para estado fixo é inversamente proporcional a magnitude do momento angular. Devido ao offset yaw, o ciclo orbital roll-yaw, como mostrado na figura 13, já não é simétrico. O erro yaw máximo combinado será a soma do erro yaw ψ_2 no ciclo orbital roll-yaw com o erro yaw compensador devido ao torque perturbador constante do corpo fixado. O momento angular da roda é selecionado tal qual que o erro yaw fique no limite da precisão yaw especificada.

O ganho, K , é escolhido grande o suficiente para garantir a capacidade de captura roll e uma rápida resposta roll transiente. Para selecionar o ângulo offset, α , e a constante de tempo, τ , é necessário analisar as raízes da equação característica (101). Deve ser notado que as análises linearizadas se aplicam somente quando o erro roll é meramente maior que ϕ_D . Os parâmetros selecionados com esta base podem não ser os melhores parâmetros para uma operação “normal on orbit” quando o movimento roll está dentro da zona morta.

Assumindo que $\omega_0 \ll \omega_n$ e $h \tan^2 \alpha \gg \omega_0 I$ função transformada do loop aberto do eixo roll é:

$$G(s)H(s) = \frac{KI_{zz} \cos \alpha (s + \omega_0 / \tan \alpha) (s + h \tan \alpha / I_{zz}) (\tau s + 1)}{I_{xx} I_{zz} (s^2 + h^2 / I_{xx} I_{zz}) (s^2 + \omega_0^2)} \quad (109)$$

O "root locus" para controlador de loop-fechado roll-yaw é mostrado na figura 14. A raiz (zero) do compensador "derived-rate" fornece o amortecimento do polo da frequência de nutação. O amortecimento do polo frequência de órbita é devido ao ângulo de offset, α . Assumindo que

$$h \gg \frac{\tau \omega_0}{\tan \alpha} \quad (110)$$

$$K \cos \alpha \gg \frac{4\omega_0 h I_{xx}}{I_{zz}} \quad (111)$$

e que a frequência natural de um loop-fechado e as taxas de amortecimento associadas são dadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K \cos \alpha}{NI_{xx}}} \quad \zeta_1 = \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{NK \cos \alpha}{I_{xx}}} \quad (112)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{N\omega_0 h}{I_{zz}}} \quad \zeta_2 = \frac{\tan \alpha}{2} \sqrt{\frac{Nh}{I_{zz} \omega_0}} \quad (113)$$

onde

$$N = \frac{1}{1 + h^2 / (I_{zz} K \cos \alpha)} \quad (114)$$

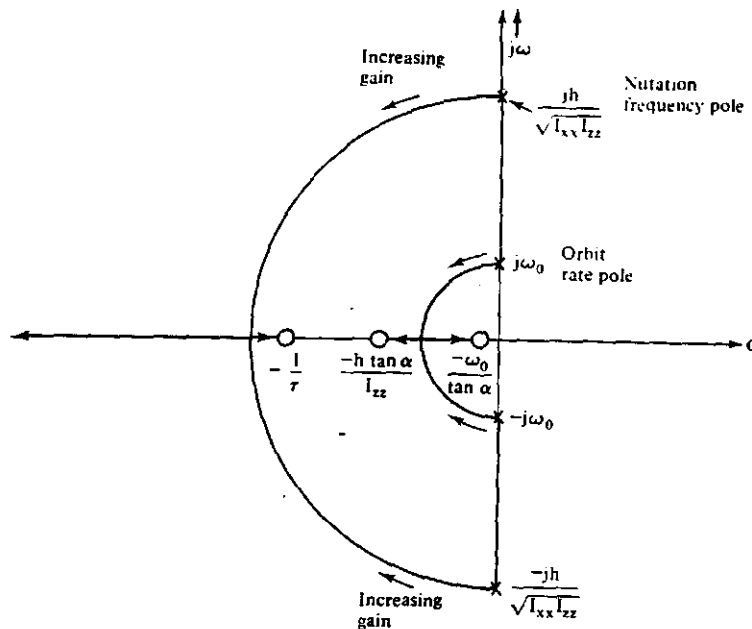


Figura 14 – "Root-locus" para um acoplamento roll-yaw

O parâmetro N da equação pode ser considerado um fator de correção com o valor nominal de unidade.

Para fornecer um alto amortecimento e uma rápida resposta para perturbação, valores de τ e α são nominalmente escolhidos para amortecer criticamente o sistema. O ângulo offset do jato de gás, α , é selecionado para amortecer criticamente o modo de frequência orbital ω_2 . Considerando $\zeta_2 = 1$ na equação (113), a equação de projeto para α é

$$\alpha = \tan^{-1} 2 \sqrt{\frac{I_x \omega_0}{Nh}} \quad (115)$$

A constante de avanço de tempo, τ , é selecionada para amortecer criticamente a frequência de nutação do movimento. Assumindo $\zeta_1 = 1$ na equação (112), a equação de projeto para τ é dada por

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{I_x}{NK \cos \alpha}} \quad (116)$$

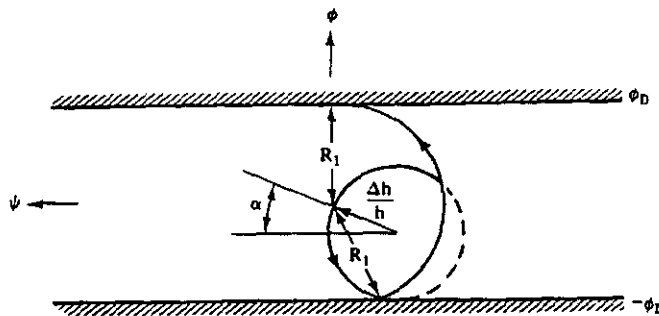


Figura 15 – Limite superior para impulso bit

Impulse bit. Um dos parâmetros de projeto mais crítico para um sistema de momento de roda fixo é o “mínimo impulso bit” dos jatos de gás offset. O salto (“bound”) superior que conduz a um erro roll completamente transversal à zona morta por meio de um simples pulso, como mostrado na figura 21.

É assumido que o contato a fronteira $-\phi_D$ da zona morta é feita com uma nutação inicial de magnitude $\Delta h/h$ e um pulso simples que conduz a um erro roll para a outra fronteira, ϕ_D . Da geometria, o salto (“bound”) superior para Δh é

$$\Delta h \leq \frac{2\phi_D h}{1 + \sin \alpha + \sin(45^\circ + \alpha/2)} \quad (117)$$

É também desejável criar um impulso bit mínimo grande o suficiente de maneira que a ciclo limitado pelos dois lados, se isso ocorrer, conduz o disparo de apenas um pulso por contato de fronteiro. Se o erro roll não é reduzido rápido suficiente, a presença de um sensor de barulho causará um disparo múltiplo do jato de gás. Da figura 16 segue que o caso limite é quando AB (ou CD) é normal à fronteira da zona morta. Distó, pode-se concluir que o salto (“bound”) inferior no Δh deve satisfazer a inequação

$$\Delta h \geq \frac{2\phi_D h \tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (118)$$

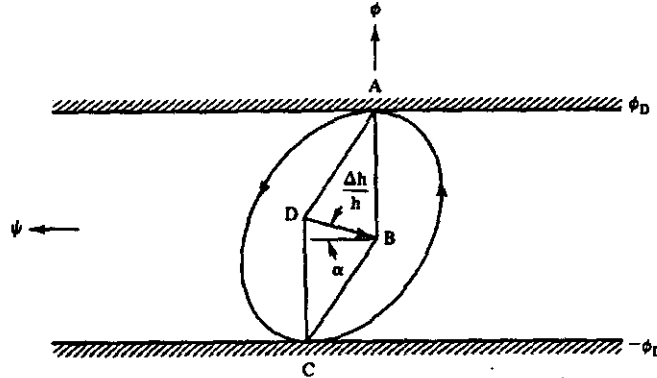


Figura 16 – Limite inferior para um impulso bit

Two-pulse modulation. A principal característica deste método, que também utiliza os jatos de gás que fornecem os torques controladores ao longo de ambos os eixos roll e yaw, é que quando o erro roll permanece na zona morta, os jatos de gás são disparados na seqüência de modulação de dois pulsos. A figura 17 mostra o diagrama de bloco da seqüência de controle do sistema. Como o a atitude roll do satélite alcança a fronteira positiva da zona morta no ponto A, mostrado na figura 18, o X/Z thruster para mudar o momento angular de Δh . Após um intervalo de tempo ΔT , o qual fica normalmente entre 7/12 e 5/8 do período de nutação e é equivalente a δ entre 30 e 45 graus, o segundo pulso do mesmo jatom de gás é disparado. O segundo pulso não apenas muda o momento angular de Δh mas também reduz o ângulo de nutação. A técnica da modulação de dois pulsos amortece a nutação e reduz o erro roll.

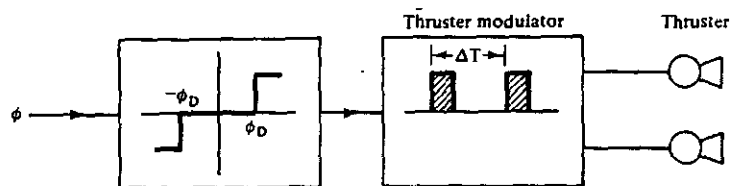


Figura 17 – Diagrama de bloco de um controle de modulação de dois pulsos

Torque magnético. O torque controlador dos eixos roll e yaw pode ser produzido usando o campo magnético da Terra. Tal sistema consiste de uma bobina que produz um dipolo magnético quando a corrente flui ao redor da bobina. O dipolo magnético, M , é proporcional a “ampere-turns” e a área encoberta pela bobina, e a direção normal ao plano da bobina. O torque, TC , atuando no satélite é

$$\vec{T}_c = \vec{M} \times \vec{B} \quad (119)$$

onde \vec{M} é o dipolo magnético da bobina e \vec{B} o campo magnético da Terra. Como mostrado na figura 19, no campo magnético da Terra, \vec{B} , é modelado como dipolo localizado inclinado a longitude de 69 graus oeste e a latitude de 78,3 graus norte.

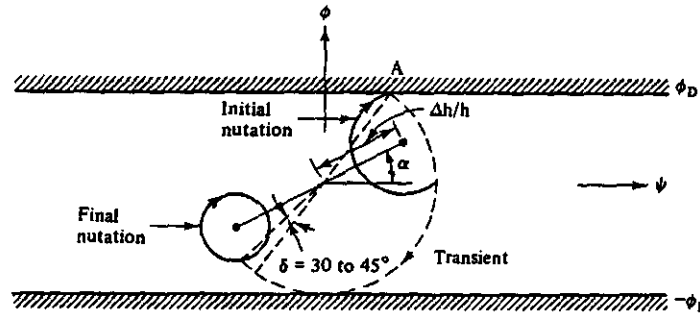


Figura 18 – Diagrama de controle rool-yaw

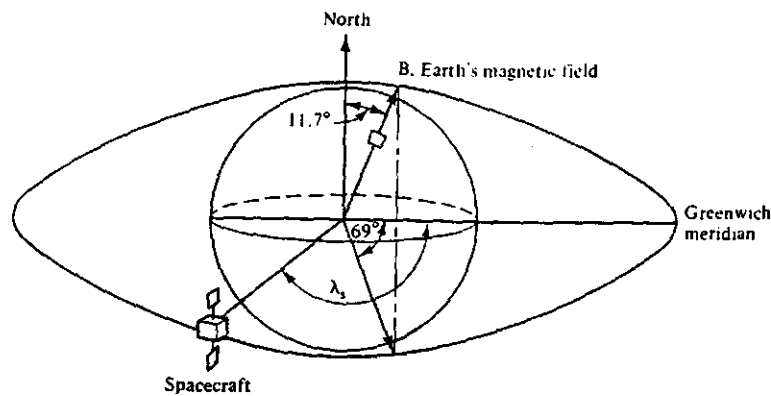


Figura 19 – Campo magnético da Terra

O campo magnético da Terra nas coordenadas de órbita é

$$B_x = B_e \text{sen}(11,7^\circ) \text{sen}(\lambda_s - 69^\circ) \quad (120.a)$$

$$B_y = -B_e \text{cos}(11,7^\circ) \quad (120.b)$$

$$B_z = -B_e \text{sen}(11,7^\circ) \text{cos}(\lambda_s - 69^\circ) \quad (120.c)$$

onde λ_s é a longitude oeste do satélite sincronizado. Vamos considerar uma bobina cujo o dipolo magnético é

$$M_x = -M \text{sen} \alpha \quad (121.a)$$

$$M_y = 0 \quad (121.b)$$

$$M_z = -M \text{cos} \alpha \quad (121.c)$$

Utilizando as equações (119) a (121), o torque magnético no satélite torna-se

$$T_x = M \text{cos} \alpha B_y = -MB_e \text{cos}(11,7^\circ) \text{cos} \alpha \quad (122.a)$$

$$\begin{aligned}
T_y &= M \sin \alpha B_z - M \cos \alpha B_x \\
&= -MB_e \sin(11,7^\circ) \sin(\alpha + \lambda_s + -69^\circ)
\end{aligned} \tag{122.b}$$

$$T_z = -M \sin \alpha B_y = MB_e \cos(11,7^\circ) \sin \alpha \tag{122.c}$$

Das equações (98),(99) e (122), pode-se concluir que os torques controladores ao longo dos eixos roll e yaw podem ser produzidos igualmente para aqueles de um jato de gás com um ângulo compensador dado por

$$K(\tau\dot{\phi} + \phi) = MB_e \cos(11,7^\circ) \tag{123}$$

A dinâmica de controle para um torque magnético são similares àquela utilizada no WHECON, exceto o ganho, K, que para um torque magnético é muito menor. O dipolo magnético pode ser produzido por duas bobinas, uma bobina yaw que produz um dipolo magnético ao longo do eixo yaw, M_z , e uma bobina roll que produz um dipolo magnético ao longo do eixo roll, M_x . A direção do torque controlador pode ser invertida mudando a direção da corrente nas bobinas. Deve ser notado que um satélite pode possuir dipolos magnéticos que interagem com o campo magnético da Terra produzindo um torque magnético no satélite, que pode ser considerado como uma parte do torque perturbador. Torques magnéticos podem ser também utilizados para compensar os torques solares perturbadores, como no Intelsat V.

3.6 – SISTEMA DE RODAS DE REAÇÃO NOS TRÊS EIXOS

Um sistema de rodas de reação nos três eixos pode ser considerado como uma combinação dos sistemas de controle roll, yaw e pitch independentemente (fig. 20). Cada eixo é controlado variando a velocidade da roda de reação em resposta ao erro de atitude. O sistema requer uma roda de reação com momento angular nominal nulo e o sensor de atitude para cada eixo (roll, pitch e yaw)

Introduzindo a equação (46) e (54) na equação (47) e desprezando a inércia transversal da roda, as equações de movimento para um sistema de rodas de reação nos três eixos são

$$\begin{aligned}
M_{\alpha} + M_{\alpha x} &= I_{xx} \ddot{\phi} + [4\omega_0^2(I_{yy} - I_{zz}) - \omega_0 h_y] \phi + [-h_y - \omega_0(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})] \dot{\psi} \dots \\
&\quad + \dot{\theta} h_z - \omega_0 h_z + \dot{h}_x
\end{aligned} \tag{124.a}$$

$$\begin{aligned}
M_{\gamma} + M_{\gamma y} &= I_{yy} \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \theta (I_{xx} - I_{zz}) + \omega_0 h_x \phi - h_z \dot{\phi} + \omega_0 h_z \psi \dots \\
&\quad + h_x \dot{\psi}_x + \dot{h}_y
\end{aligned} \tag{124.b}$$

$$\begin{aligned}
M_{\omega} + M_{\omega z} &= I_{zz} \ddot{\psi} + [\omega_0^2(I_{yy} - I_{xx}) - \omega_0 h_y] \psi + [h_y + \omega_0(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy})] \dot{\phi} \dots \\
&\quad - h_x \dot{\theta} + \omega_0 h_x + \dot{h}_z
\end{aligned} \tag{124.c}$$

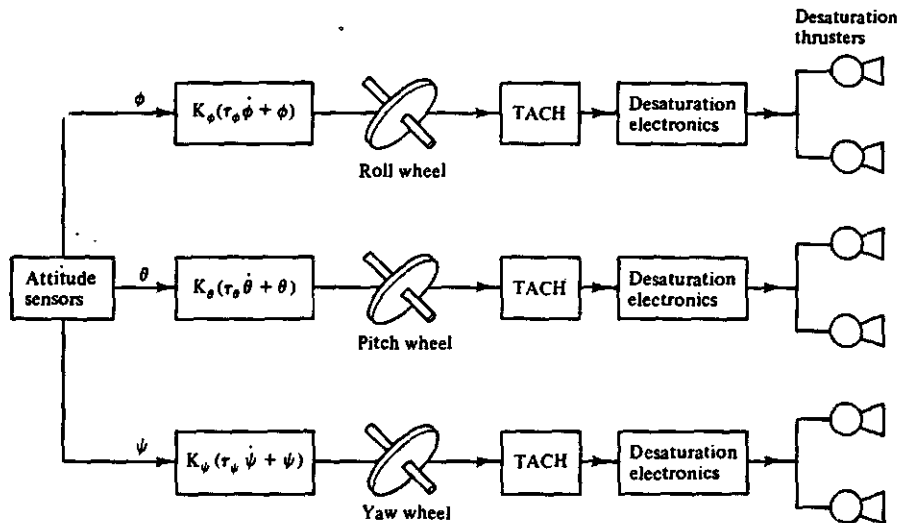


figura 20 – Diagrama de bloco de um sistema de controle e reação nos três eixos

Entretanto as equações (124) são acopladas, mas como h_x , h_y , h_z e ω_0 são pequenos, os termos de acoplamento são pequenos. Se os termos de acoplamento são desprezados, as equações de movimento em relação aos eixos pitch, roll e yaw se tornam independentes, e conseqüentemente eles podem ser controlados independentemente. Os torques controladores são aplicados permitindo que as taxas de variação do momento angular sejam

$$\dot{h}_x = K_\phi (\tau_\phi \dot{\phi} + \phi) \quad (125.a)$$

$$\dot{h}_y = K_\theta (\tau_\theta \dot{\theta} + \theta) \quad (125.b)$$

$$\dot{h}_z = K_\psi (\tau_\psi \dot{\psi} + \psi) \quad (125.c)$$

A dinâmica de controle de cada eixo é muito parecido com a dinâmica de controle do eixo pitch de um sistema de momento de roda fixo. A momentos perturbadores temporais (no sistema de coordenadas orbitais) conduzirão a uma alta velocidade inaceitável ao menos que os jatos de gás controladores ou outros dispositivos forem utilizados para aplicar um momento externo ao longo do eixo da roda para reduzir a sua velocidade. Conseqüentemente, os torques temporais irão requerer uma desaturação (desaturation) das rodas de reação. Momentos perturbadores cíclicos resultam numa velocidade de roda cíclica e não requerem desaturação (desaturation), se a variação na velocidade estiver nos limites permitidos da velocidade da roda.

3.7 - EFEITOS DA FLEXIBILIDADE ESTRUTURAL

Nas sessões anteriores, o satélite era considerado um corpo rígido. No satélite entretanto, a flexibilidade aparece de varias fontes, tais como os painéis solares, antenas, e a

estrutura de suporte da antena. No futuro, espera-se que o satélite seja muito mais mecanicamente flexível, devido à desenvolvimento das antenas e dos painéis solares. Estes satélites exigirão avançados conceitos de controle de atitude. Na última década, extensivas pesquisas tem sido efetuadas para estudar a interação entre a flexibilidade estrutural e os sistemas de controle de atitude. A maioria dos conceitos avançados tem sido propostos para o controle de atitude de satélite. Vamos mostrar um exemplo simples para discutir os fundamentos de flexibilidade e interação com o controle de atitude.

Vamos considerar uma torção de flexibilidade de um painel solar no eixo pitch representado torção da mola e um disco, como mostrado na figura 21. As equações de movimento deste sistema são

$$I_b \ddot{\theta}_b + K(\theta_b - \theta_s) = T \quad (126)$$

$$I_s \ddot{\theta}_s + K(\theta_s - \theta_b) = 0 \quad (127)$$

onde I_b e I_s são as inércias do eixo pitch do corpo central e dos painéis solares, θ_b e θ_s são os ângulos pitch do corpo e do painel solar, K é a rigidez de torção, e T é o torque externo ao longo do eixo pitch. Sendo

$$\theta_r = \theta_s - \theta_b \quad (128)$$

Adicionando a equação (126) e (127) e utilizando a equação 128, obtém-se

$$I_T \ddot{\theta}_b = T - I_s \ddot{\theta}_r \quad (129)$$

$$\ddot{\theta}_r + \omega_n^2 \theta_r = -\ddot{\theta}_b \quad (130)$$

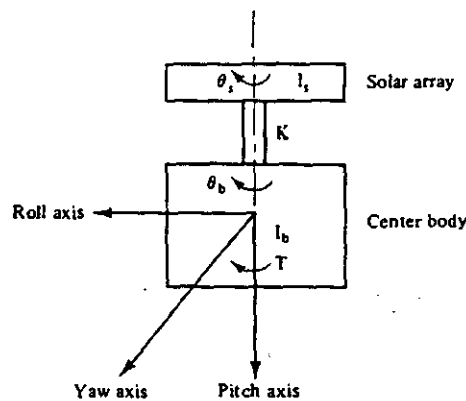


Figura 21 – Modelo de flexibilidade de um painel solar

Onde $I_T = I_b + I_s =$ inércia pitch total

$\omega_n = \sqrt{K/I_s} =$ frequência natural fixada da base do painel solar

Fazendo a transformada de Laplace da equação (129) e (130), θ_b pode ser expressada como

$$I_T s^2 \theta_b(s) = T(s) + \frac{I_s s^4 \theta_b(s)}{s^2 + \omega_n^2} \quad (131)$$

A função transformada nesta forma é mostrada na figura 22.a . Aqui os efeitos da flexibilidade são introduzidos como um torque regenerativo (“feedback”). Reagrupando os termos na equação (181) obtém-se

$$\frac{\theta_b(t)}{T} = \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 I_b (s^2 + \Omega_n^2)} \quad (132)$$

onde Ω_n é a frequência natural livre do satélite e é dada por

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 + \frac{I_s}{I_b}} \quad (133)$$

A função transformada, fatorando os termos do denominador, é dada por

A função transformada na forma da equação (134) é representada na figura 22.b . Aqui o ângulo pitch do corpo consiste de dois componentes. O primeiro componente, θ_R , é obtido assumindo todo satélite como sendo um corpo rígido e o segundo componente, θ_f , é

$$\theta_b = T \left[\frac{1}{I_T s^2} + \frac{I_s}{I_b I_T (s^2 + \Omega_n^2)} \right] \quad (134)$$

devido a flexibilidade do painel solar. Usando a função transformada da equação (132), o controle do eixo pitch é modificado como mostra a figura 22.c. Aqui a frequência natural da base fixada do painel solar, ω_n , é a raiz da função transformada da malha-aberta e a frequência natural do satélite, Ω_n , é o polo. A origem locus ("root locus") do controle do eixo pitch é mostrado na figura 23. O sistema é estável, entretanto os modos flexíveis são suavemente amortecidos.

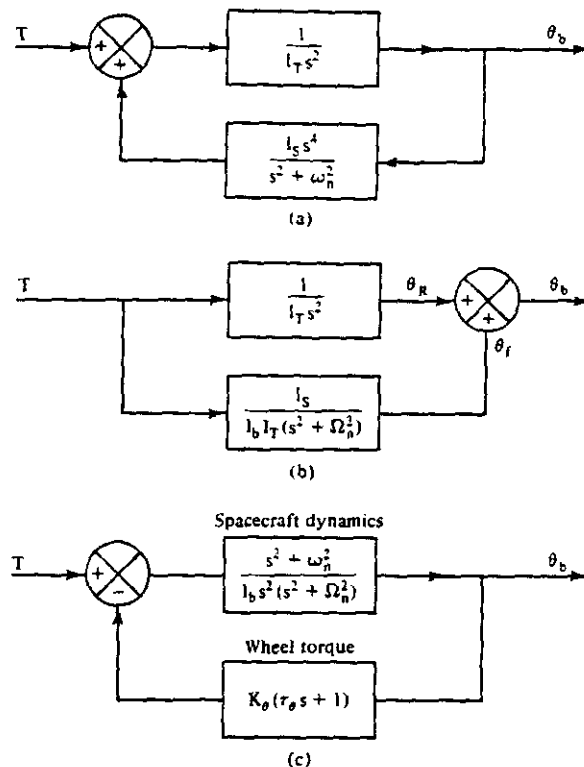


Figura 22 – Transformadas das funções para o eixo pitch

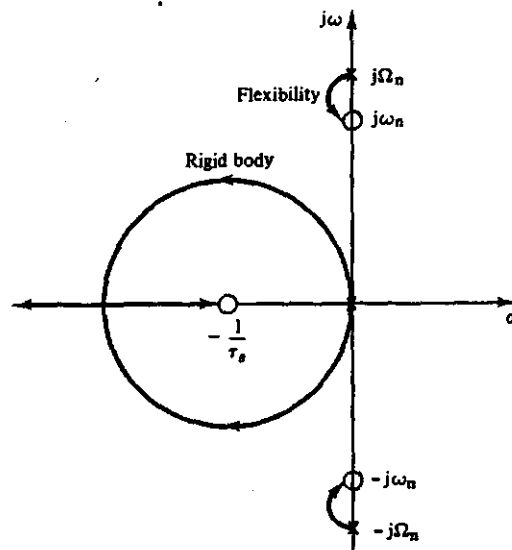


Figura 23 – “Root locus” para o controle do eixo pitch com flexibilidade

Para evitar a interação da flexibilidade com os controladores de atitude, é desejável ter um alto amortecimento estrutural e uma ampla separação entre as frequências de controle e as frequências estruturais.

4 – RESULTADOS

4.1 – SITUAÇÃO PRÁTICA

Os conceitos apresentados neste relatório serão utilizados numa situação prática envolvendo um satélite flexível onde serão determinados alguns de seus parâmetros para o sistema de controle de atitude.

Neste caso será determinado os parâmetros do sistema de controle de atitude que consiste de um momento de roda fixado com jatos de gás para um satélite cuja as propriedades de massa são:

$$\begin{array}{ll}
 A = 16.3m^2 & I_{xx} = 2700Kg.m^2 \\
 \rho_s = 0.2 & I_{yy} = 1360Kg.m^2 \\
 \rho_d = 0 & I_{zz} = 2200Kg.m^2
 \end{array}$$

Onde :

A = Área do painel solar
 ρ_s = coeficiente de “specular reflection”
 ρ_d = coeficiente de “diffuse reflection”

As componentes do “CM-CP (centro de massa - centro de pressão) offset” são $x=0.03m$, $y=0.03m$, e $z=-0.33m$. O torque do jato de gás roll vale $0.615 N.m$. O torque para a “desaturação devido ao jato de gás” equivale a $0.422 N.m$ com um tempo de pulso igual a $0.2 s$. Os erros de controle de atitude permitidos são:

$$0.05^\circ \rightarrow roll / pitch$$

$$0.2^\circ \rightarrow yaw$$

Com esses dados determinar os torques solares perturbadores, o momento angular da roda, o ângulo de desalinhamento (ângulo offset) para o jato de gás roll e a constante de avanço de tempo para os controladores do eixo pitch e eixos roll-yaw.

Solução : Os torques solares perturbadores são calculados utilizando as equações 62,63 e 64. No equinócio, $\delta=0$, então

$$K_1 = 1 + \rho_s = 1.2$$

$$K_2 = 0$$

Nas coordenadas do corpo do satélite, os torques solares são determinados utilizando as equações 62 em N.n como

$$M_s = 4.644 \times 10^{-6} \times 16.3 \left\{ \begin{array}{l} 0.03 \times 1.2 \cos \alpha \vec{I} \\ (-0.33 \times 1.2 \sin \alpha - 0.03 \times 1.2 \cos \alpha) \vec{J} \\ -0.03 \times 1.2 \sin \alpha \vec{K} \end{array} \right\}$$

$$= 2.72 \times 10^{-6} \cos \alpha \vec{I} + (3.0 \times 10^{-5} \sin \alpha - 2.72 \times 10^{-6} \cos \alpha) \vec{J} - 2.72 \times 10^{-6} \sin \alpha \vec{K}$$

Similarmente no solstício de verão, com $\delta=23.5$ graus, os torques solares perturbadores são

$$M_s = (2.36 \times 10^{-6} \cos \alpha + 7.30 \times 10^{-6}) \vec{I} - (2.60 \times 10^{-5} \sin \alpha + 2.36 \times 10^{-6} \cos \alpha) \vec{J} + (0.664 \times 10^{-6} - 2.36 \times 10^{-6} \sin \alpha) \vec{K}$$

Nas coordenadas inerciais, os torques solares são determinados utilizando as equação (64)

Equinócio :

$$M_s = 2.72 \times 10^{-6} \cos \alpha \vec{I}_0 + (3.0 \times 10^{-5} \sin \alpha - 2.72 \times 10^{-6} \cos \alpha) \vec{J}_0$$

Solstício de verão:

$$M_s = (2.36 \times 10^{-6} + 7.30 \times 10^{-6} \cos \alpha - 0.66 \times 10^{-6} \sin \alpha) \vec{I}_0 - (2.60 \times 10^{-5} \sin \alpha + 2.36 \times 10^{-6} \cos \alpha) \vec{J}_0 + (7.30 \times 10^{-6} \sin \alpha + 0.66 \times 10^{-6} \cos \alpha) \vec{K}_0$$

Controle roll-yaw: Dos cálculos acima, a constante do torque solar roll-yaw nas coordenadas inerciais, T_s , no equinócio vale:

$$T_s = 2.72 \times 10^{-6} \text{ N.m}$$

Vamos assumir que a zona morta roll vale:

$$\phi_D = 0.03^\circ$$

Para um dado valor de momento angular, o erro yaw, ψ_2 , pode ser calculado das equações 102 a 105. Para $h=35$ N.m.s, ψ_2 é 0.15 graus. Os torques roll-yaw constantes para um corpo fixado no equinócio são nulos. No solstício de verão, estes torques valem:

$$T_{bx} = 7.30 \times 10^{-6} \text{ N.m}$$

$$T_{bz} = 0.634 \times 10^{-6} \text{ N.m}$$

Substituindo os valores numéricos na equação 108, e assumindo que $\alpha=8$ graus,

Consequentemente o erro yaw total devido ao torque solar roll-yaw inercialmente fixados, ψ_2 , e os torques solares que atuam no corpo fixado serão menores que 0.2 graus. Consequentemente, o momento angular de 35 N.m.s é escolhido para a roda.

O ganho "autopilot", K, é o máximo torque controlador disponível dividido pelo alcance linear do sensor. Assumindo que o alcance linear é mais ou menos 3 graus, o ganho K, vale:

$$K = \frac{0.615 \times 180}{3\pi} = 11.74 \text{ N.m / rad}$$

$$\psi_{ss} = \frac{0.664 \times 10^{-6} + 7.30 \times 10^{-6} \tan 8}{2\pi / (24 \times 60 \times 60) \times 35} \frac{180}{\pi} = 0.038^\circ$$

Assumindo que $\cos \alpha \cong 1$, o fator de correção N é dado pela equação (114), tal que:

$$N = \frac{1}{1 + h^2 / I_{zz} K} = \frac{1}{1 + 35 / (2200 \times 11.74)} = 0.955$$

O ângulo de desalinhamento (ângulo offset), α é obtido utilizando a equação (115)

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} 2 \sqrt{\frac{I_{zz} \omega_0}{Nh}} \\ &= \tan^{-1} 2 \sqrt{\frac{2200 \times 2\pi}{24 \times 60 \times 60 \times 0.955 \times 35}} = 7.8^\circ \end{aligned}$$

A constante de avanço de tempo, τ , é obtida utilizando a equação (116)

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{I_{xx}}{NK \cos \alpha}} = 2 \sqrt{\frac{2700}{0.955 \times 11.74 \times 0.99}} = 31.2 \text{ s}$$

O limite superior para um impulso bit do jato de gás roll, Δh , da equação (117) vale

$$\begin{aligned} \Delta h &\leq \frac{2\phi_D h}{1 + \sin \alpha + 2 \sin(45 + \alpha/2)} \\ &\leq \frac{2 \times 0.03 \times \pi \times 35}{180(1 + \sin 7.8 + 2 \sin 48.9)} \\ &\leq 0.01387 \text{ N.m.s} \end{aligned}$$

O limite inferior para um impulso bit do jato de gás roll vale

$$\begin{aligned}\Delta h &\leq \frac{2\phi_D h \tan \alpha}{\cos \alpha} \\ &\leq \frac{2 \times 0.03 \times \pi \times 35 \times \tan 7.8}{180 \times \cos 7.8} \\ &\leq 0.00507 N.m.s\end{aligned}$$

Estes limites para o impulso bit implicam que o tempo de impulso deve ser menor que 0.022s e maior que 0.0082s. O tempo de impulso escolhido foi 0.015s.

Controle Pitch: O projeto do controle pitch pode ser baseado no erro pitch máximo permitido durante a “desaturação da roda”(wheel desaturation). O impulso do torque “desaturation”, M_y , é:

$$M_y = 0.422 \times 0.2 = 0.0844 N.m.s$$

O erro pitch devido ao impulso “desaturation” é dado pela equação (80). Da equação (81), a constante de tempo do sistema é dado por

$$\tau = \frac{\theta_{\max} I_{yy} e}{M_y}$$

Assumindo que $\theta_{\max} = 0.04^\circ$ e mantendo 0.01 graus para outras fontes de erro,

$$\tau = \frac{0.04 \times \pi \times 1360 \times 2.718}{180 \times 0.0844} = 31s$$

A constante de erro na equação (79) é definido como

$$\tau = \sqrt{\frac{I_{yy}}{K}}$$

Ou

$$K = \frac{I_{yy}}{\tau^2}$$

Substituindo os valores numéricos na equação acima tem-se

$$K = \frac{1360}{(31)^2} = 1.41 N.m / rad$$

A constante de avanço de tempo τ_θ da equação (77) é dada por:

$$\tau_\theta = 2 \sqrt{\frac{I_{yy}}{K_\theta}} = 2\tau = 2 \times 31 = 62s$$

4.2 – SIMULAÇÕES

Para plotar os gráficos seguintes foram utilizadas as ferramentas do Matlab de solução de equações diferenciais. Todos os programas utilizados para plotar os gráficos estão listados no apêndice deste relatório.

4.2.1) RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A equação de controle do eixo pitch para $M_{sy} = 0$ assume a seguinte forma :

$$M_{sy} = I_y \ddot{\theta} + K_{\theta} \tau_{\theta} \dot{\theta} + K_{\theta} \theta$$

No item anterior os parâmetros K_{θ} e τ_{θ} foram determinados. Realizando uma simulação no software Matlab foi resolvida a equação diferencial acima. Para certos valores de tempo foi plotado um gráfico do erro pitch θ e da velocidade $\dot{\theta}$ (linhas tracejadas) mostrados abaixo:

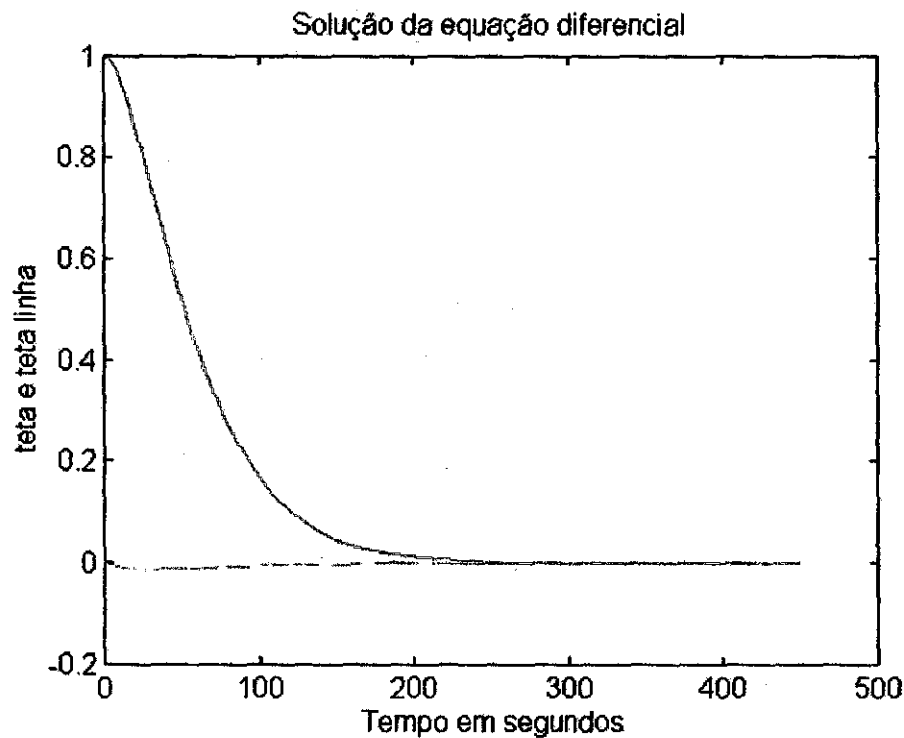


Figura 24 – Solução gráfica da equação diferencial de controle do eixo pitch

4.2.2) INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NOS ERROS DE ATITUDE E NAS VELOCIDADES

Nesta seção modificaremos os parâmetros da seção anterior e veremos a influência destes no resultado final.. Os traços pontilhados no gráfico indicam o novo erro ou a nova velocidade obtida com a mudança do parâmetro.

- Aumentando o valor do ganho em 50% do seu valor inicial e mantendo a constante de avanço de tempo constante.

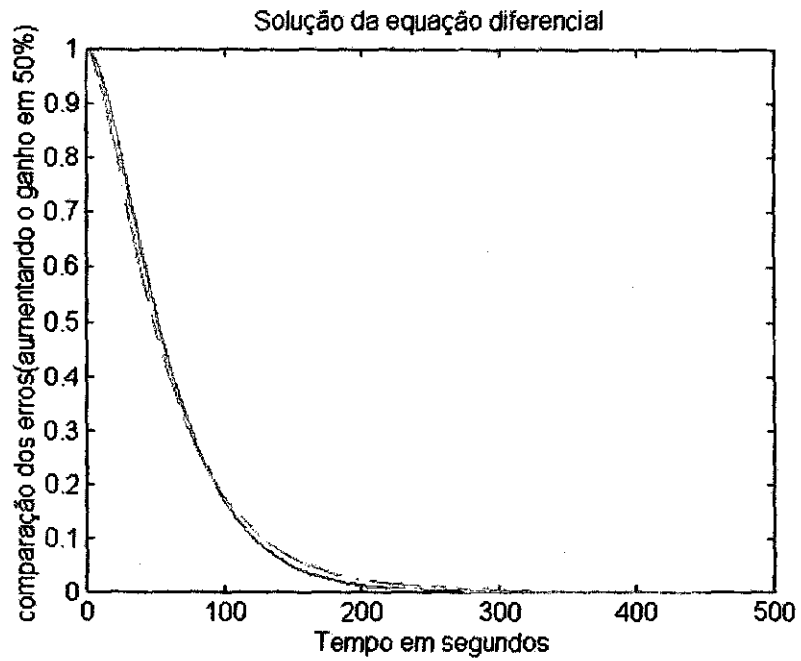


Figura 25 – Comparação dos erros aumentando o ganho em 50%

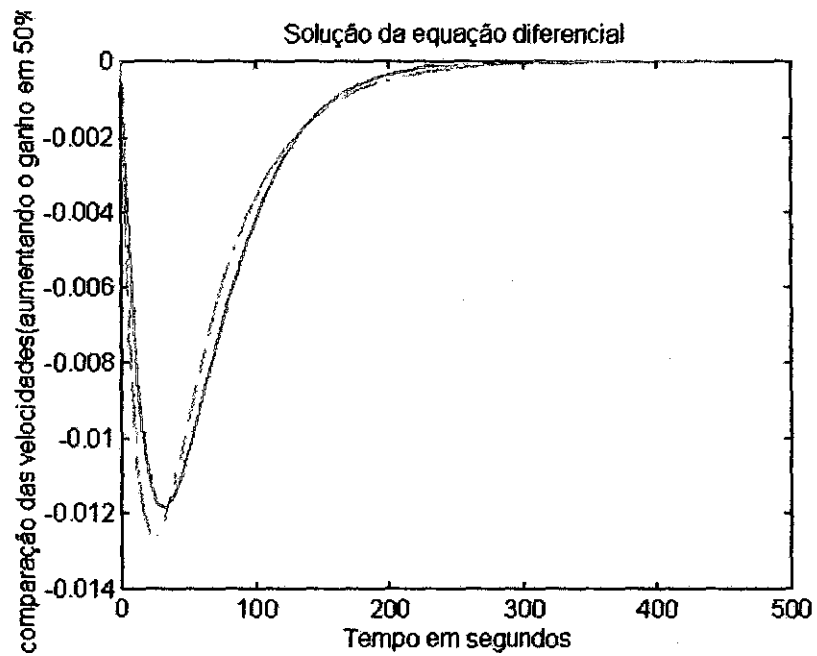


Figura 26 – Comparação das velocidades ao aumentar o ganho em 50%

- Diminuindo o valor do ganho em 50%, e mantendo a constante de avanço de tempo constante.

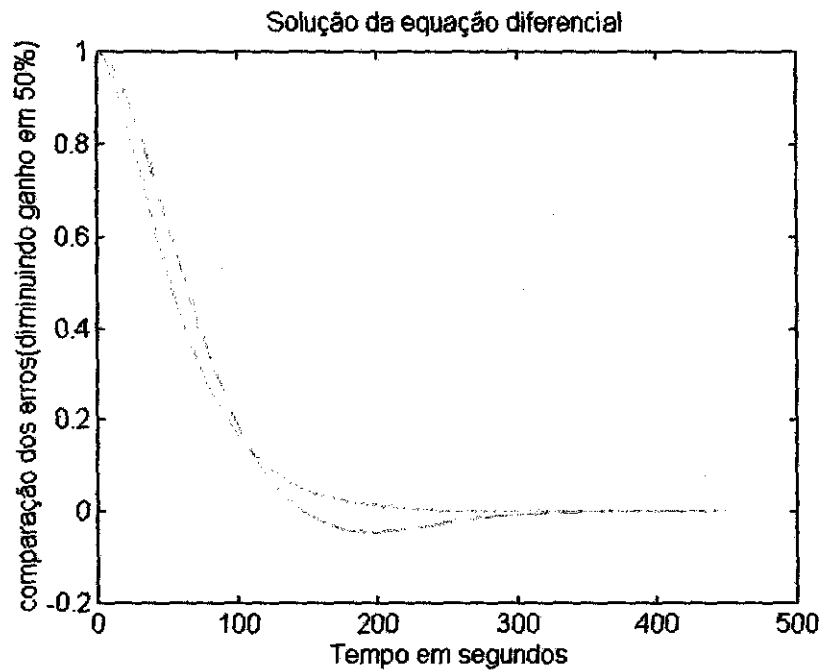


Figura 27 – Comparação dos erros ao diminuir o ganho em 50% mantendo a constante de avanço de tempo(t_{al}) constante

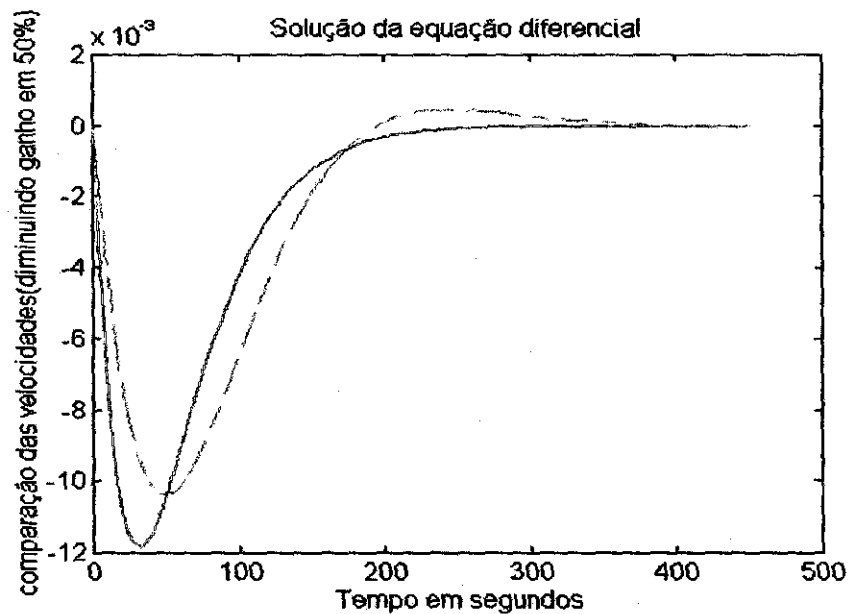


Figura 28 – Comparação das velocidades ao diminuir o ganho em 50% mantendo a constante de avanço de tempo(t_{al}) constante

- Mantendo o ganho constante e aumentando em 50% o valor da constante de avanço de tempo

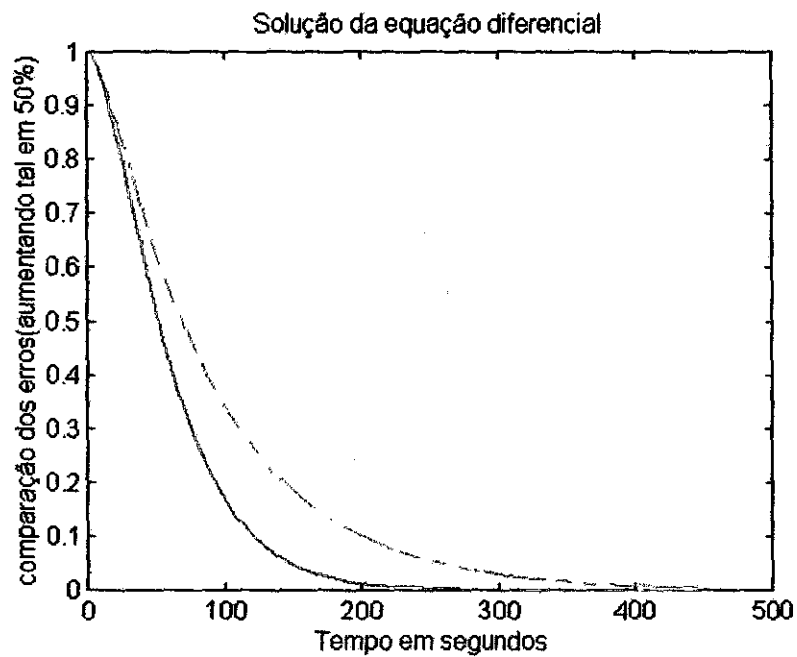


Figura 29 – Comparação dos erros ao aumentar a constante de avanço de tempo(tal) em 50% mantendo o ganho constante

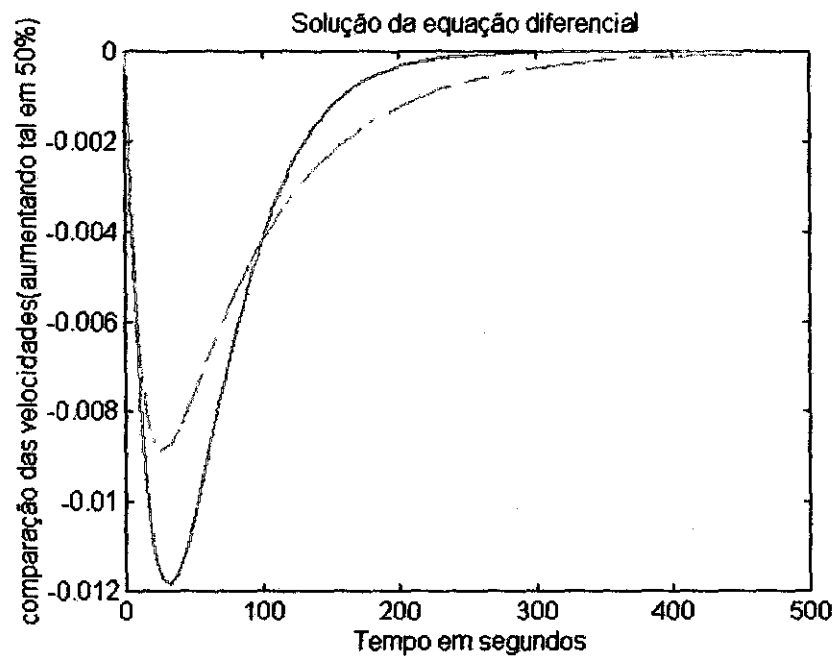


Figura 30 – Comparação das velocidades ao aumentar a constante de avanço de tempo em 50% mantendo o ganho constante

- Mantendo o ganho constante e diminuindo em 50% o valor da constante de avanço de tempo

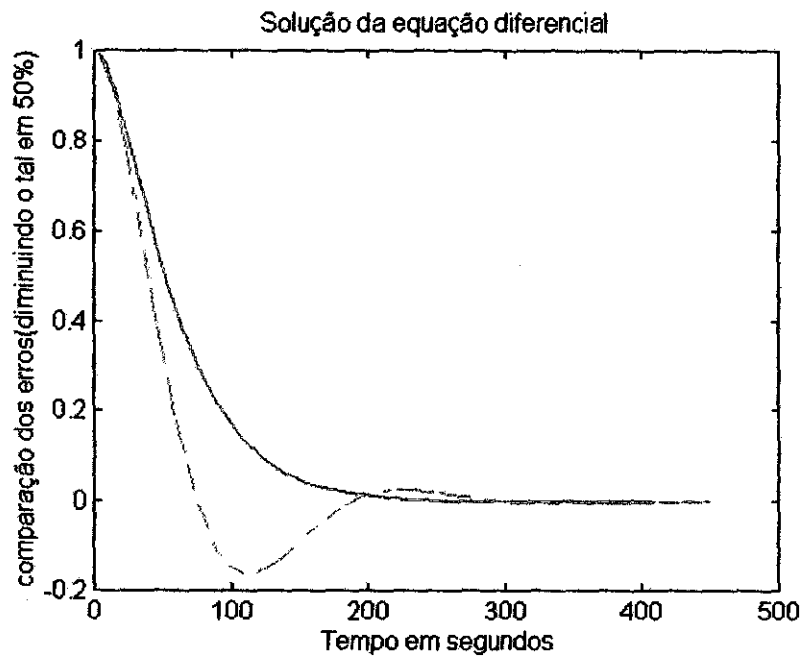


Figura 31 – Comparação dos erros ao aumentar a constante de avanço de tempo(tal) em 50% mantendo o ganho constante

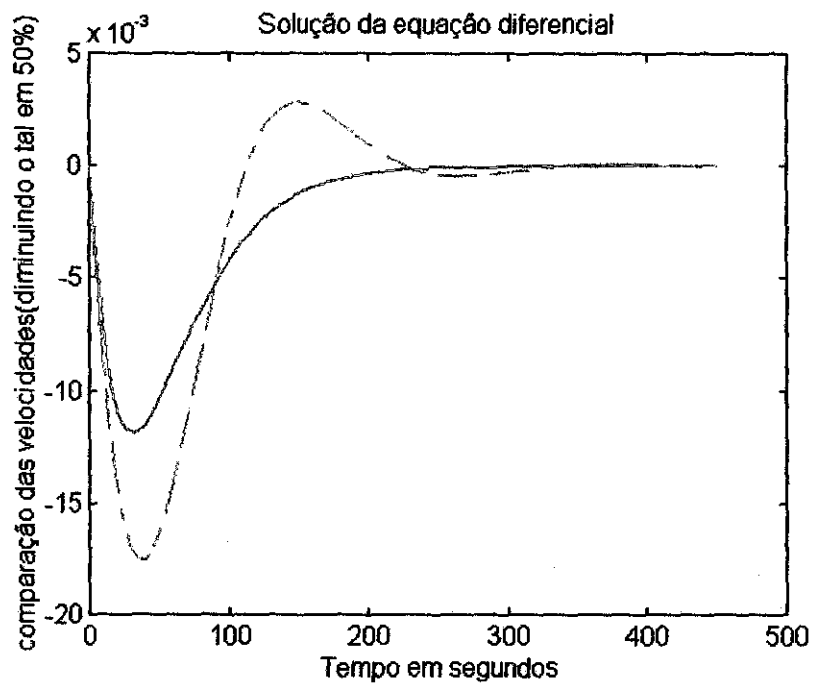


Figura 32 – Comparação das velocidades ao aumentar a constante de avanço de tempo(tal) em 50% mantendo o ganho constante

- Diminuindo em 50% o valor do ganho e da constante de avanço de tempo

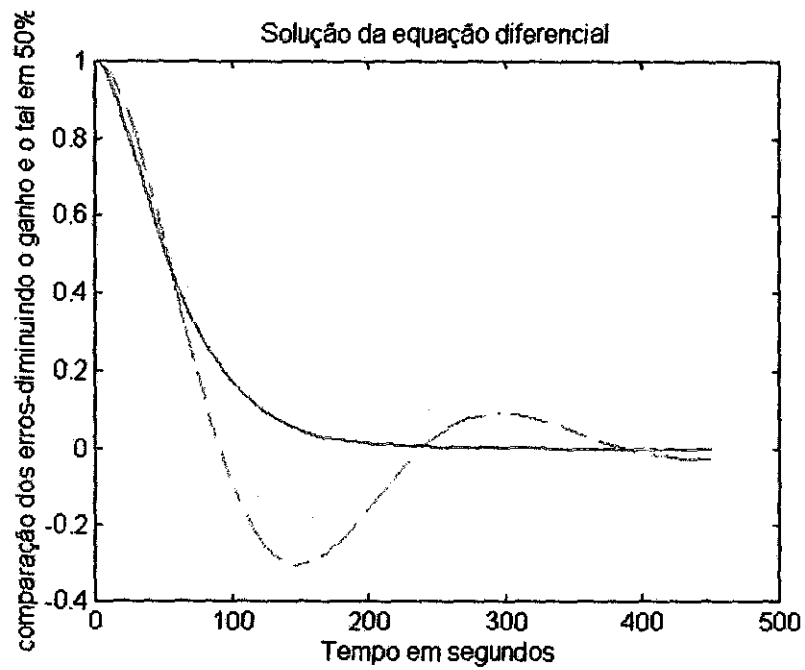


Figura 33 – Comparação dos erros ao diminuir a constante de avanço de tempo(tal) e o ganho em 50%

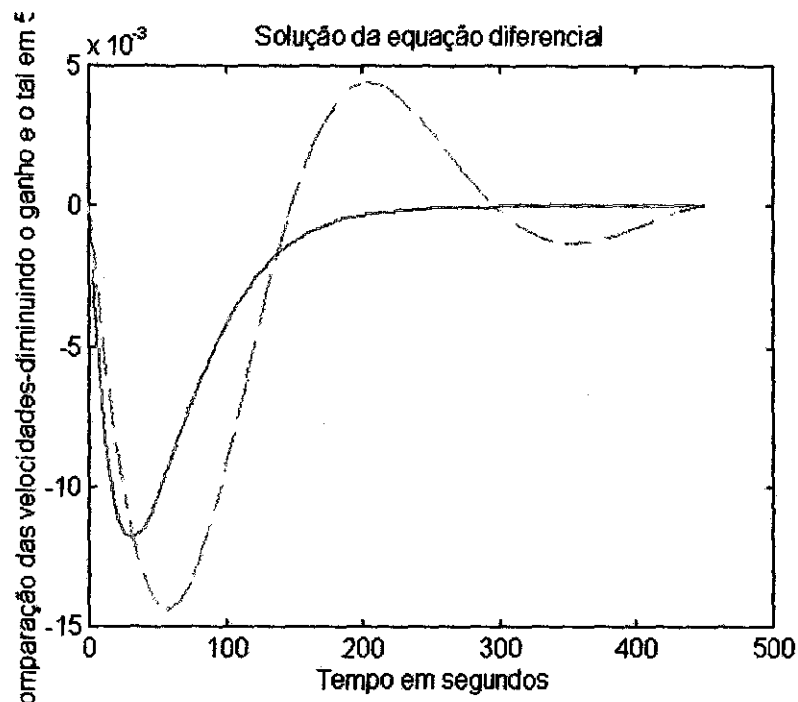


Figura 34 – Comparação das velocidades ao diminuir a constante de avanço de tempo(tal) e o ganho em 50%

- Aumentando em 50% o valor do ganho e da constante de avanço de tempo

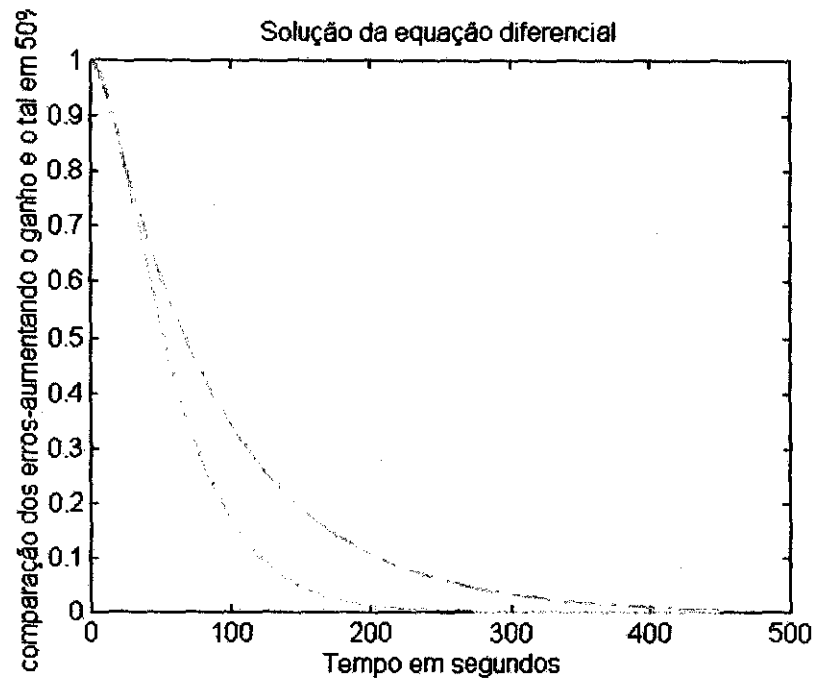


Figura 35 – Comparação dos erros ao aumentar o ganho e a constante de avanço de tempo(tal) em 50%

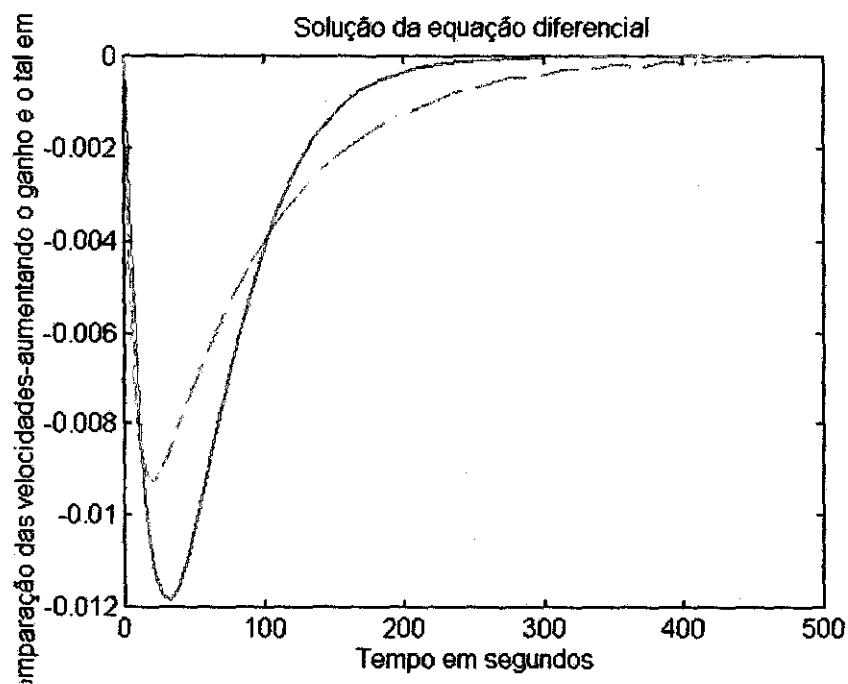


Figura 36 – Comparação das velocidades ao aumentar o ganho e a constante de avanço de tempo(tal) em 50%

5) COMENTÁRIOS FINAIS

Utilizando as equações de controle foram determinados os parâmetros do sistema de controle de atitude de um satélite flexível numa situação prática. Em posse dos parâmetros foi realizada uma simulação onde a constante de avanço de tempo e o ganho foram modificados em $\pm 50\%$ observando o comportamento do sistema.

Observando os gráficos notou-se que as modificações foram prejudiciais na grande maioria dos casos onde os novos erros e velocidades foram amortecidos num intervalo de tempo maior. Isso indica que ao modificar os parâmetros pré determinados no item 4.1, a estabilização do satélite é obtida com maior dificuldade.

Com base nestes gráficos pode-se concluir que o método de determinação dos parâmetros do sistema de controle de atitude de um satélite flexível mostrado no item 4.1 deste relatório mostrou-se eficiente indicando os melhores valores necessários para se obter uma estabilização de atitude eficiente e em tempo mínimo.

6) APÊNDICE

6.1) Aumentando o valor do ganho(k) em 50% do seu valor inicial e mantendo a constante de avanço de tempo(tal) constante.

```
function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
function yprime=tarefa2(t,y);
k=2.115;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);
```

```
[t2,y]=ode23('tarefa2',0,450,[1;0]);
y3=y(:,1);
y4=y(:,2);
```

```
plot(t1,y1,t2,y3,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros(aumentando o ganho em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y4,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades(aumentando o ganho em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
```

6.2) Diminuindo o valor do ganho(k) em 50%, e mantendo a constante de avanço de tempo(tal) constante

```
function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
```

```

tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

function yprime=tarefa3(t,y);
k=0.705;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);

```

```

[t2,y]=ode23('tarefa3',0,450,[1;0]);
y5=y(:,1);
y6=y(:,2);

```

```

plot(t1,y1,t2,y5,'-')
whitebg
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros(diminuindo ganho em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y6,'-')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades(diminuindo ganho em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')

```

6.3) Mantendo o ganho(k) constante e aumentando em 50% o valor da constante de avanço de tempo(tal)

```

function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

function yprime=tarefa4(t,y);
k=1.41;
tal=93;

```

```

Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);

```

```

[t2,y]=ode23('tarefa4',0,450,[1;0]);
y7=y(:,1);
y8=y(:,2);

```

```

plot(t1,y1,t2,y7,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros(aumentando tal em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y8,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades(aumentando tal em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')

```

6.4) Mantendo o ganho(k) constante e diminuindo em 50% o valor da constante de avanço de tempo(tal)

```

function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

function yprime=tarefa5(t,y);
k=1.41;
tal=31;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];

```

```

[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);

```

```
[t2,y]=ode23('tarefa5',0,450,[1;0]);
y9=y(:,1);
y10=y(:,2);
```

```
plot(t1,y1,t2,y9,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros(diminuindo o tal em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y10,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades(diminuindo o tal em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
```

6.5) Diminuindo em 50% o valor do ganho(k) e da constante de avanço de tempo(tal)

```
function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
function yprime=tarefa6(t,y);
k=0.705;
tal=31;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);
```

```
[t2,y]=ode23('tarefa6',0,450,[1;0]);
y11=y(:,1);
y12=y(:,2);
```

```
plot(t1,y1,t2,y11,'--')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros(diminuindo o ganho e o tal em 50%)')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y12,'--')
```

```
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades(diminuindo o ganho e o tal em 50%')
title('Solução da equação diferencial')
```

6.6) Aumentando em 50% o valor do ganho(k) e da constante de avanço de tempo(tal)

```
function yprime=tarefa1(t,y);
k=1.41;
tal=62;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
function yprime=tarefa7(t,y);
k=2.115;
tal=93;
Msy=2.7200e-006;
Iyy=1360;
yprime=[y(2)
        -(k*tal*y(2))/Iyy-(k/Iyy)*y(1)+Msy/Iyy];
```

```
[t1,y]=ode23('tarefa1',0,450,[1;0]);
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);
```

```
[t2,y]=ode23('tarefa7',0,450,[1;0]);
y13=y(:,1);
y14=y(:,2);
```

```
plot(t1,y1,t2,y13,'-')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação dos erros-aumentando o ganho e o tal em 50%')
title('Solução da equação diferencial')
pause
plot(t1,y2,t2,y14,'-')
xlabel('Tempo em segundos'),ylabel('comparação das velocidades-aumentando o ganho e o tal em 50%')
title('Solução da equação diferencial')
```