



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS BURACOS NEGROS E A ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

Mário Raia Neto

Relatório de Iniciação Científica
do programa PIBIC, orientado
pelo Dr. Luiz Claudio Lima
Botti.

INPE
São Paulo
2020

LISTA DE GRÁFICOS

1	Regiões do cone de luz. Fonte: Acervo do autor	14
2	Regiões causais do cone de luz	15
3	Trajectoria tipo-luz nas coordenadas de Schwarzschild.	20
4	Trajectoria tipo-tempo nas coordenadas de Schwarzschild.	20
5	Diagrama de Kruskal-Szekeres	22
6	Cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)	25
7	Superfícies correspondentes aos cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)	26
8	Secção do TW para $b(r) = \sqrt{r_0 r}$.	28
9	Gráfico de revolução de $b(r) = \sqrt{r_0 r}$.	29
10	Propriedade do diagrama de mergulho $b(r)$.	30
11	Diagramas de Mergulho: (a) $\Omega = 1,02$. (b) $\Omega = 0,64$. (c) $\Omega = 0,076$. Para um raio mínimo de $r_0 = 1$.	36
12	(a) NEC para $\Omega = 1,02$. (b) DEC para $\Omega = 1,02$.	37
13	Divisão do espaço-tempo no formalismo $3+1$.	38
14	Elementos de volume espacial do Warp Drive	39
15	Função "top-hat"	40
16	expansão dos elementos de volume	42
17	Estruturas de um AGN	43
18	Quasi-período de 3,3 ks	44

LISTA DE SÍMBOLOS

∇_μ - Derivada Covariante

$\mu, \nu, \alpha \dots$ - Índices gregos com valores $\mu, \nu, \alpha \dots = \{0, 1, 2, 3\}$

$i, j, k \dots$ - Índices latinos com valores $i, j, k \dots = \{1, 2, 3\}$

$(-, +, +, +)$ - Convenção do tensor métrico neste trabalho.

τ - Tempo próprio.

χ - Pressão Radial (tensão); componente T_{11} do tensor energia-momento.

σ - Densidade de energia medida por um observador em repouso; componente T_{00} do tensor energia-momento.

$g_{\mu\nu}$ - Tensor Métrico

$b(r)$ - Função "Shape"

$\Phi(r)$ - Função "Redshift"

Ω - Parâmetro de Densidade

ds^2 - Elemento de Linha

∇ - Sem índice abaixo, significa meramente um operador derivativo: ∇f , um gradiente ; $\nabla \cdot V$ um divergente; $\nabla \times V$ um rotacional; $\nabla^2 f$ um laplaciano e assim por diante.

G - Constante Gravitacional de Newton

$G_{\mu\nu}$ - Tensor de Einstein

Δ - Variação média. Ocorre que, na métrica de Kerr, o símbolo é utilizado também para igualar uma identidade $\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2$.

RESUMO

Este trabalho trata de algumas soluções das Equações de Einstein: Buracos Negros, Buracos de Minhoca ("Wormholes") e Motores de Dobra ("Warp Drive" de Alcubierre). Os aspectos principais sobre a natureza dos buracos negros de Schwarzschild foram estudados, bem como uma rápida revisão sobre a métrica de Kerr e Reissner-Nordstörn.

O projeto, focou-se principalmente em produzir uma modificação na métrica dos "Wormholes" para um função $b(r) = \frac{r}{e^{\Omega(r-r_0)}}$; tal função é uma modificação da função dada por (SAMANTA, 2019); tal modificação ocorre em Ω : o parâmetro de Densidade dado pela Cosmologia.

ABSTRACT

This work deals with some solutions of Einstein's Equations: Black Holes, Wormholes and the Alcubierre's Warp Drive . The main aspects about the nature of Schwarzschild black holes were studied, as well as a quick review of the Kerr and Reissner-Nordstörn geometries.

The project focused on producing a modification in the "Wormholes" metric for a function $b(r) = \frac{r}{e^{\Omega(r-r_0)}}$; such a function is a modification of the function given by (SAMANTA,2019) ; such modification occurred with Ω : the Density parameter given by Cosmology.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer e dedicar este projeto, primeiramente, aos meus pais, aos meus irmãos e meu orientador pelo apoio contínuo. Agradeço, também aos meus amigos da UFSCar e do IFSC.

Agradeço, também, ao Centro de Radioastronomia e Astrófica Mackenzie (CRAAM) pelo espaço fornecido e introdução ao mundo acadêmico.

Agradeço cordialmente o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), o PIBIC, o CNPq e o MCTI pelo apoio financeiro, estrutural e pela oportunidade de estudar questões fascinantes da Relatividade Geral.

Agradeço e dedico esse projeto também a você: Rachel Comminatto, sobre quem logo terminarei de escrever páginas de aventuras.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 OBJETIVOS	7
3 METODOLOGIA	8
4 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA	8
5 RELATIVIDADE ESPECIAL	12
5.1 RELATIVIDADE ESPECIAL E GRAVITAÇÃO	15
6 RELATIVIDADE GERAL	16
6.1 CONDIÇÕES DE ENERGIA	17
7 BURACOS NEGROS	18
7.1 BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD	19
7.2 BURACOS NEGROS DE KERR	22
7.3 BURACOS NEGROS COM CARGA	23
8 ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL	25
8.1 BURACOS DE MINHOCA	25
8.1.1 EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA UM BURACO DE MINHOCA ATRAVES- SÁVEL	30
8.1.2 BURACOS DE MINHOCA ATRAVESSÁVEIS PARA UMA FUNÇÃO Ω - <i>SHAPE</i>	32
8.2 "WARPDRIVE" DE ALCUBIERRE	37
9 BURACOS NEGROS ASTROFÍSICOS: SINAIS QUASI-PERIÓDICOS E A MASSA DO QUASAR 3C 273	43
10 CONCLUSÕES E RESULTADOS OBTIDOS	45
11 PERSPECTIVAS FUTURAS	45
12 REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi formulada há mais de 100 anos atrás, em 1915, pelo físico alemão Albert Einstein (EINSTEIN,1905). Muito se fez após a realização da TRG, tais como o desenvolvimento do estudo de estrelas e do próprio universo (WEINBERG,1972). A equação mestre da Relatividade Geral é dada então por (29), onde suas soluções são diversas (STEPHANI,2003) e compreendem então as soluções particulares para o estudo de Buracos Negros, Buracos de Minhoca e Warp Drives.

Os buracos negros são então soluções onde detém interesse astrofísico direto para o estudo de Quasares e formação de galáxias (HARTLE,2014). Em verdade buracos negros, também, sofrem de problemas intrínsecos (como singularidades) e oferecem o local de estudo para os limites da TRG.

Os buracos de minhoca surgem da interessante possibilidade de propor uma solução particular para as equações de Einstein (29) e então procurar uma forma do tensor energia-momento, que deveria ser satisfeita para sustentar tal solução. Buracos de Minhoca oferecem, ulteriormente, a possibilidade teórica da conexão de duas regiões assintoticamente planas, conectadas por uma "ponte".

Por fim, no mesmo espírito dos buracos de minhoca, os "Warp Drives" também oferecem meios de trabalhar matematicamente e extrair consequências interessante sobre a natureza da gravitação.

Neste relatório parcial, foi dada ênfase para os buracos de minhoca, pois foi proposta uma modificação em uma função particular da solução de Morris-Thorne (MORRIS e THORNE,1988), que possibilitou inserir o parâmetro de densidade Ω , para determinar o formato da "ponte" do Buraco de Minhoca.

O presente relatório parcial diz respeito então a um apanhado geral sobre os principais pontos da gravitação, relatividade especial e relatividade geral; bem como a análise mais detalhada sobre buracos de minhoca

2 OBJETIVOS

O intuito do presente trabalho é então o estudo da Teoria da Relatividade Geral, suas principais previsões e a física de algumas de suas soluções: os Buracos Negros, os "Wormholes" e o "Warpdrive" de Alcubierre.

Os objetivos específicos são então tratar de forma precisa (porém introdutória) interiores estelares modelados pela solução de Schwarzschild na presença de um tensor energia-momento não nulo, o colapso gravitacional, os quatro tipos principais de buracos negros, a estrutura causal dos espaços-tempos que geram buracos negros e do espaço-tempo de Minkowski, e o caráter

exótico de algumas soluções da Relatividade Geral com respeito às *condições de energia*.

Para isso, o presente trabalho propõe estudar os principais pontos e resultados da Teoria da Relatividade Especial (TRE) e da Gravitação Newtoniana. Em seguida, a TRG será estudada a fim de se analisar suas grandes conclusões (não levando em conta modelos cosmológicos) e a física de seis soluções que satisfazem as Equações de Campo de Einstein: a solução de Schwarzschild, a solução de Kerr, a solução de Reissner-Nordström, a solução de Kerr-Newman, os "Wormholes" e a solução de Alcubierre no formalismo $3 + 1$ ("Warpdrive"). O projeto visa, também, estudar os principais pontos formais da matemática utilizada na TRG.

3 METODOLOGIA

Tratando-se de um projeto essencialmente teórico e, ainda mais, como a teoria que pretende-se estudar já é muito bem estabelecida, a metodologia a ser adotada será então estudar o texto teórico das principais referências do levantamento bibliográfico.

Os materiais necessários serão então os próprios textos das referências e eventuais utilizações de softwares como Maple e Mathematica para o cálculo dos tensores geométricos.

4 GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

A interação gravitacional fora muito bem explicada pela quantidade vetorial chamada *Força Gravitacional*:

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|^2} \hat{r} \quad (1)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. O vetor força gravitacional é uma quantidade proveniente da teoria Newtoniana do movimento. Essa quantidade encerra o que é chamada de *Lei da Gravitação Universal de Newton*. A lei da gravitação universal nos diz que uma partícula pontual dotada de massa M , no ponto 1 exerce uma força \vec{F}_g , atrativa, que varia com o inverso do quadrado da distância, em uma outra partícula de massa m , no ponto 2. Sua universalidade reside no fato de que todas as partículas dotadas de massa, satisfazem a equação acima, ou ainda, produzem naturalmente essa força.

A partir da equação (1), define-se o campo gravitacional produzido pela partícula dotada de massa M :

$$\frac{\vec{F}_g}{m} =: \vec{g} \quad (2)$$

Essa quantidade definida é a mediadora da força gravitacional entre as partículas m e M , isto é a massa M produz um campo mediador da interação descrita pela lei da gravitação universal. De fato todas as partículas massivas produzem a quantidade que media a interação gravitacional pelo universo: o campo gravitacional \vec{g} . Com essa descrição, a noção de "força à distância", é substituída pela noção de campo mediador desta interação.

Agora, como a Força Gravitacional produzida pela massa M é uma força conservativa, tem-se que a equação (1) pode ser reescrita em termos de uma função potencial chamada de *Potencial Gravitacional* Φ :

$$\vec{F}_g = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) \quad (3)$$

E então, utilizando a noção de campo gravitacional definida acima, tem-se diretamente que:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) \quad (4)$$

Como \vec{g} é um campo radial, ele detém apenas variações com respeito à distância r , e isso implica que (4) é pode ser escrita como:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_2) = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} = -\frac{GM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|^2}\hat{r} \quad (5)$$

Integrando (5), obtém-se:

$$\Phi = -\frac{GM}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|} \quad (6)$$

De modo geral, o potencial é bem mais complicado pois M não necessariamente é pontual, a massa geradora de campo pode estar distribuída ao longo de um volume, o que implica que o potencial gravitacional é devido a um contínuo de massa distribuída ao longo de um volume:

$$\Phi = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|} dV \quad (7)$$

Com a noção de campo gravitacional devido a uma massa M , pode-se calcular o fluxo deste campo através de uma superfície S que encerra esta massa geradora de campo :

$$I = \oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS \quad (8)$$

O produto escalar pode ser calculado como:

$$\langle \vec{g}, \vec{n} \rangle = |\vec{g}| |\vec{n}| \cos(\theta) = \frac{-GM \cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} \quad (9)$$

Então, o fluxo resulta em:

$$I = \oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = -GM \oiint_S \frac{\cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} dS = -GM \oiint_S d\Omega \quad (10)$$

onde $d\Omega =: \frac{\cos(\theta)}{\|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\|^2} dS$ é o elemento de ângulo sólido.

A integração sobre o ângulo sólido é igual a 4π , por isso, o fluxo fica então:

$$I = -GM \oiint_S d\Omega = -GM4\pi \quad (11)$$

O significado físico do que foi feito diz respeito ao conceito das linhas de campo do campo gravitacional, gerado pela massa m , que passam pela superfície que encerra M . Essas linhas tem a mesma direção do campo gravitacional, e por isso nos mostram sua intensidade.

Agora, combinando (8) e (11), tem-se:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = -4\pi GM \quad (12)$$

O resultado desta combinação de equações leva então à lei de campo fundamental da gravitação (de forma análoga ao campo elétrico gerado por uma carga pontual), a chamada *lei de gauss para a gravitação*. A interpretação física por trás de (12) reside em perceber que o campo gravitacional \vec{g} é gerado por uma massa (ou carga gravitacional, ou ainda massa gravitacional) M .

Por outro lado, ao considerar uma distribuição contínua de matéria, a quantidade $-4\pi GM$ deverá ser integrada sobre um volume:

$$M = \rho(x, y, z) dV \implies -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (13)$$

Sendo assim, é possível escrever:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_V -4\pi G\rho(\vec{r})dV \quad (14)$$

Porém, ao utilizar o teorema da divergência em (8), tem-se:

$$\oiint_S \langle \vec{g}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{g}dV \quad (15)$$

E assim,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{g} dV = \iiint_V -4\pi G\rho(\vec{r})dV \implies \iiint_V [\nabla \cdot \vec{g} + 4\pi G\rho(\vec{r})] dV = 0 \quad (16)$$

Da equação (16), concluí-se a forma diferencial da lei de gauss para a gravitação, ou ainda, as equações de campo para a interação gravitacional:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (17)$$

A equação (17) é uma equação de campo em termos de quantidades vetoriais. Quase sempre é mais conveniente efetuar-se os cálculos em termos de quantidades totalmente escalares, que no caso da gravitação é possível devido a presença da função potencial que emerge da natureza do campo ser conservativo. Sendo assim, utilizando a equação (4) em (17):

$$\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) - 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (18)$$

Utilizando o fato da identidade matemática de que $\nabla \cdot (\vec{\nabla}f) = \nabla^2 f$, temos então que as equações de campo ficam definidas para o potencial gravitacional:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (19)$$

A equação (19) é a *equação de Poisson* para o potencial gravitacional, e ela nos diz que dada uma distribuição de matéria ρ , ela altera o potencial gravitacional do espaço. Similarmente, dado um determinado potencial gravitacional, podemos nos perguntar que distribuição de matéria ρ que o gera.

Considerando agora uma região onde $\rho(\vec{r}) = 0$, obtém-se as chamadas *equações de*

vácuo da gravitação Newtoniana, dadas pela *equação de Laplace*:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0 \quad (20)$$

O significado físico da equação (20) é então a de mostrar quais são os potenciais para uma região *afastada* da distribuição de matéria.

5 RELATIVIDADE ESPECIAL

Em 1905 Einstein¹ introduziu a relatividade especial como um meio para reconciliar o Eletromagnetismo de Maxwell com o princípio da relatividade de Galileu Einstein então postulou que a relatividade de Galileu deveria ser estendida a todos os fenômenos físicos. Juntamente com esse novo princípio de relatividade, Einstein também postulou que deveria existir uma velocidade limite: a velocidade da luz. Não obstante, a velocidade da luz deveria ser independente do movimento relativo entre os referenciais.

Com esses dois postulados, o grupo de transformações que Einstein derivou levava a uma relação conjunta, das grandezas de espaço e tempo e isso implicou em uma nova perspectiva da Mecânica. As transformações que Einstein derivou são chamadas de *Transformações de Lorentz*. Sem perda de generalidade com respeito ao conteúdo físico da cinemática, as transformações podem ser dadas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}t\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \right. \quad (21)$$

é possível ainda, deixar as equações (14) em termos da mesma unidade de distância:

¹Einstein (1905)

$$\begin{cases} x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} t \right) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \end{cases} \quad (22)$$

Com as transformações de Lorentz, todas as quantidades dinâmicas são automaticamente transcritas a um domínio de validade por onde a descrição correta de fenômenos detém um fator γ apreciável. Essa nova dinâmica é chamada de *Dinâmica Relativística*.

Das transformações de Lorentz é possível mostrar uma propriedade, dada pela expressão (23), com respeito a invariância da seguinte quantidade (SARD,1970):

$$- ct' + x' + y' + z' = -ct + x + y + z \quad (23)$$

A equação (23) define um objeto fundamental para o estudo da física relativística, o intervalo invariante entre eventos:

$$\Delta s^2 =: -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (24)$$

Ou ainda, em termos de deslocamentos infinitesimais:

$$ds^2 =: -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (25)$$

A quantidade ds^2 define o que é chamado de *elemento de linha*, isto é, a quantidade que mede o comprimento infinitesimal de um arco.

É possível ver que o elemento de linha utilizado na Relatividade Especial revela um caráter quadri-dimensional da natureza. Em verdade, o espaço que detém o elemento de linha (25) cria o conceito de *espaço-tempo*. Um espaço-tempo é o local de todos os eventos. Um evento é um ponto no espaço-tempo cujas coordenadas são dadas por três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal conjuntas em uma quádrupla:

$$P = P(ct, x, y, z) \quad (26)$$

O espaço-tempo utilizado na Relatividade Especial é chamado de *espaço-tempo de Minkowski*.

Em 1908 Minkowski percebeu que poderia traduzir o postulado de Einstein sobre a invariância da velocidade da luz de forma mais geométrica, ao notar a equivalência entre o segundo postulado de Einstein e a invariância do intervalo entre dois eventos definido acima pela equação (23).

O intervalo definido em (24) ou (25) detém a propriedade de não ser positivo-definido e a consequência física é a separação de eventos com respeito ao sinal do intervalo.

$$\begin{cases} \Delta s^2 > 0, \text{Tipo - tempo} \\ \Delta s^2 = 0, \text{Tipo - luz} \\ \Delta s^2 < 0, \text{Tipo - espaço} \end{cases}$$

Cada um dos sinais define uma região diferente do espaço-tempo. Os eventos separados por uma distância tipo-tempo, são eventos que estão separados de tal maneira que o envio de sinais entre os dois detém velocidades menores do que a luz, já os eventos separados por uma distância tipo-luz, são eventos que estão separados de tal maneira que o envio de sinais entre os dois ocorre na velocidade da luz tão somente, por fim eventos separados por uma distância tipo-espaço, são eventos que estão separados de tal maneira que o envio de sinais entre os dois detém velocidades maiores do que a luz.

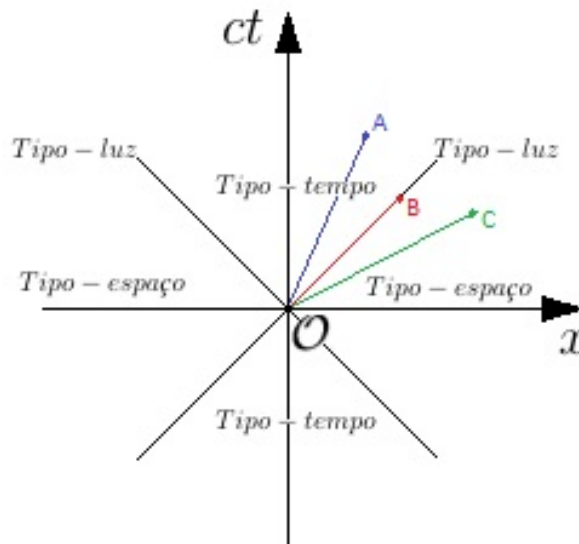


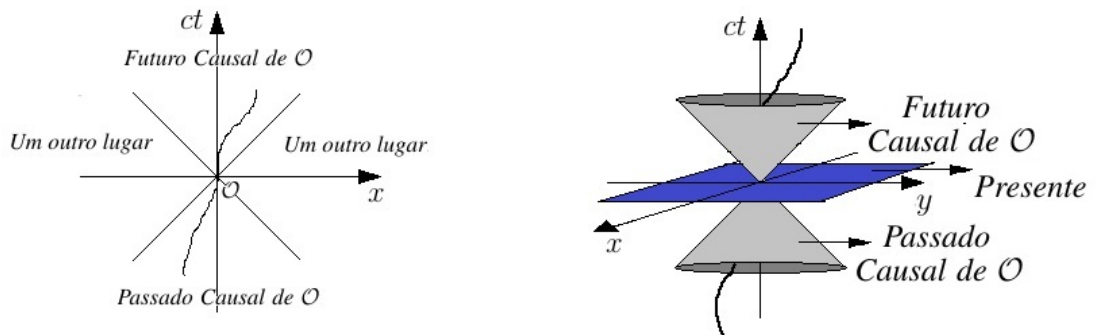
Figura 1: Regiões do cone de luz. Fonte: Acervo do autor

Com essas regiões definidas, pode-se definir o objeto chamado *cone de luz*. O cone de luz, é uma superfície definida por trajetórias tipo-luz, que separa as regiões tipo-tempo, tipo-luz e tipo-espaço com respeito a um evento \mathcal{O} , como mostra a figura 1.

Esse fato ainda infere uma noção de *causalidade* entre eventos. Como os eventos \mathcal{O} e A ocorrem dentro do cone de luz, um sinal enviado de \mathcal{O} para A viaja com velocidades menores que as da luz, logo \mathcal{O} antecede a A por um intervalo de tempo, já um sinal enviado de \mathcal{O} a B viaja com a velocidade da luz e isso também infere que \mathcal{O} antecede a A . Por outro lado, um evento \mathcal{O} jamais terá alguma relação causal com um evento C pois necessitaria enviar sinais com velocidades maiores que a luz.

O conjunto de todos os eventos que podem ser influenciados por \mathcal{O} chama-se: *Futuro causal de \mathcal{O}* ; é o ramo superior do cone de luz. Ainda mais, o conjunto de todos os eventos que podem influenciar \mathcal{O} chama-se: *Passado Causal de \mathcal{O}* ; é o ramo inferior do cone de luz. Por outro lado, o conjunto de todos os eventos que não podem influenciar ou serem influenciados por \mathcal{O} chama-se²: *Um outro lugar*.

Por fim, define-se conjunto de todos os eventos que estão sobre a mesma superfície de simultaneidade com respeito a \mathcal{O} de *Presente*. Esses fatos podem ser vistos nas figuras 2a e 2b.



(a) Regiões do cone de luz com a região tipo-espaço. (b) Superfície de simultaneidade (presente). Fonte: Acervo do autor

Figura 2: Regiões causais do cone de luz

Dada a noção de causalidade acima, conclui-se que, em geral, as partículas massivas detêm trajetórias dentro do cone de luz dadas pelo tempo próprio (HARTLE,2014):

$$\tau = \int_{t_0}^t dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} \quad (27)$$

Uma trajetória de partícula massiva no espaço-tempo chama-se *Linha de Mundo*.

5.1 RELATIVIDADE ESPECIAL E GRAVITAÇÃO

Dado o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski uma tentativa de tratar da gravitação Newtoniana no contexto do espaço-tempo é tratar de um espaço com o elemento de

²Em tradução direta do inglês *Elsewhere*

linha:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (28)$$

onde Φ é o potencial gravitacional que satisfaz a equação (13).

6 RELATIVIDADE GERAL

As equações de campo de Einstein (ECE)³ são, atualmente, a forma mais adequada para tratar da interação gravitacional, dadas pelas equações (29);

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (29)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. As equações (29) são formadas por duas partes: o primeiro membro à esquerda, $G_{\mu\nu}$, trata de toda a informação geométrica do espaço-tempo. O segundo membro à direita, $T_{\mu\nu}$ trata de toda a informação acerca da distribuição de matéria-energia do espaço. Com a igualdade entre os tensores $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$, pode-se então codificar o que se entende por interação gravitacional: Uma mudança na geometria do espaço-tempo dada uma distribuição de matéria-energia. Por outro lado, dada uma distribuição de matéria-energia pode-se estudar quais geometrias satisfazem tal distribuição.

As soluções que satisfazem as equações são chamadas funções métricas⁴:

$$g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (30)$$

Ou ainda, expressas pelo elemento de linha (ou primeira forma fundamental na geometria Riemanniana):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (31)$$

As funções métricas (de agora em diante chamadas apenas de métricas), definem quais serão, de fato, as geometrias do espaço-tempo. Dada uma métrica, é possível então verificar sua validade como solução, por meio das equações de Einstein e definir todo o movimento de partículas com ou sem massa, em um espaço-tempo por meio das equações geodésicas:

³Einstein (1915)

⁴Note que a métrica de Minkowski,(25), é uma solução

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = u^\alpha \left(\partial_\alpha u^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\beta \right) = 0 \quad (32)$$

onde $\nabla_\alpha u^\mu$ é a derivada covariante da 4-velocidade e as quantidades de três índices $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são chamados símbolos de Christoffel de tipo 1, ou, a grosso modo, símbolos de conexão. Por convenção temos então que os símbolos de Christoffel são dados por (WEINBERG, 1972):

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right) \quad (33)$$

É possível ainda reescrever as equações (29) da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^\mu_{\mu} g_{\mu\nu} \right) \quad (34)$$

Com as equações de Einstein reescritas como em (27) tem-se que, quando o tensor energia-momentum é nulo, isto é, quando não existe a presença de energia, chega-se as *Equações de Campo de Einstein no Vácuo* (um análogo da equação de Poisson para gravitação Newtoniana)

$$T_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{8\pi G}{c^4} \left(0 - \frac{1}{2} 0 g_{\mu\nu} \right) \implies$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (35)$$

6.1 CONDIÇÕES DE ENERGIA

Conforme, Alcubierre (2008), nada pode ser dito, em princípio, sobre a viabilidade física das soluções das equações de campo com respeito as propriedades da matéria que é fonte do campo gravitacional, pois é possível que qualquer espaço-tempo seja uma solução das equações de campo simplesmente definindo um tensor energia-momentum na forma:

$$T_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} \frac{c^4}{8\pi G} \quad (36)$$

A partir da definição dada por (36), em geral encontra-se tensores energia-momentum que correspondem a conteúdos de matéria não realísticos.

Sendo assim, deve-se impor certos critérios, a cerca do conteúdo de matéria, chamados de *condições de energia*. De forma geral, existem 3 principais condições de interesse, para o presente trabalho, que devem ser satisfeitas: *Weak Energy Condition* (WEC) , *Strong Energy Condition* (SEC) e *Null Energy Condition* (NEC) (ALCUBIERRE,2008). Essas condições são relacionadas com o tensor energia-momentum e com o tensor de Ricci das seguintes formas:

- *Weak Energy Condition*: $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \implies \rho \geq 0$
- *Strong Energy Condition*: $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \implies \rho + \sum_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}} \geq 0$
- *Null Energy Condition*: $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \implies \rho + p_{\mathcal{A}}$

Onde $p_{\mathcal{A}}$ são as pressões principais, $\mathcal{A} \in \{1, 2, 3\}$ é um conjunto de índices que denota as componentes das pressões principais, ρ é a densidade de energia e v^γ e k^γ são, respectivamente, vetores tipo-tempo e tipo-luz.

A WEC, infere que a densidade de energia vista por todos os observadores deve ser não negativa para todos os observadores tipo-tempo; a SEC infere que a densidade de energia mais a soma das pressões principais deve ser não negativa para todos os observadores tipo-tempo. Por fim, a NEC impõe que a densidade de energia mais qualquer uma das pressões principais deve ser não negativa, para qualquer observador tipo-luz (ALCUBIERRE,2008).

A título de ilustração, para um tensor energia-momentum de um *fluido perfeito*, dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g_{\mu\nu}p \quad (37)$$

Onde p é a pressão, ρ a densidade de energia e u^γ é a 4-*velocidade* do observador. As condições de energia implicam que a matéria deve satisfazer (ALCUBIERRE,2008):

- $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \implies \rho \geq 0$
- $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \implies (\rho + 3p) \geq 0$
- $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \implies \rho + p \geq 0$

7 BURACOS NEGROS

Uma classe de soluções que satisfazem as equações de Einstein na forma:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (38)$$

São chamadas de *soluções de vácuo*. Os Buracos Negros são soluções que satisfazem as equações acima. A Relatividade Geral produz duas soluções que satisfazem as equações acima e que geram buracos negros : a *solução de Schwarzschild*, e a *solução de Kerr*.

7.1 BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

Em 1916 Schwarzschild conseguiu resolver analiticamente as Equações de Campo de Einstein no vácuo, para uma geometria estática, esfericamente simétrica, sem momentum angular e sem carga elétrica e magnética.

Essa geometria revelou então qual deveria ser o aspecto do espaço-tempo exterior de um corpo esférico, tal como uma estrela ou um planeta.

A métrica de Schwarzschild é então:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (39)$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton e M pode ser interpretada como a massa.

Nota-se que quando $r \rightarrow \infty$ a métrica de Schwarzschild torna-se igual a métrica de Minkowski, isto é, a métrica é *assintoticamente plana*. Isso significa que o espaço-tempo é plano uma distância afastada da fonte de curvatura. Abaixo, na figura 3, está um gráfico que mostra as trajetórias tipo-luz e uma trajetória tipo-tempo⁵:

⁵A representação dos pequenos cones de luz tem apenas caráter didático para enfatizar o fato de que nas coordenadas de Schwarzschild, a inclinação das retas que definem o cone de luz, muda de forma contínua. Quando $r \rightarrow \infty$ as retas que definem o cone de luz detém inclinação de $\frac{\pi}{4}$, isto é, igual a situação em um espaço-tempo plano.

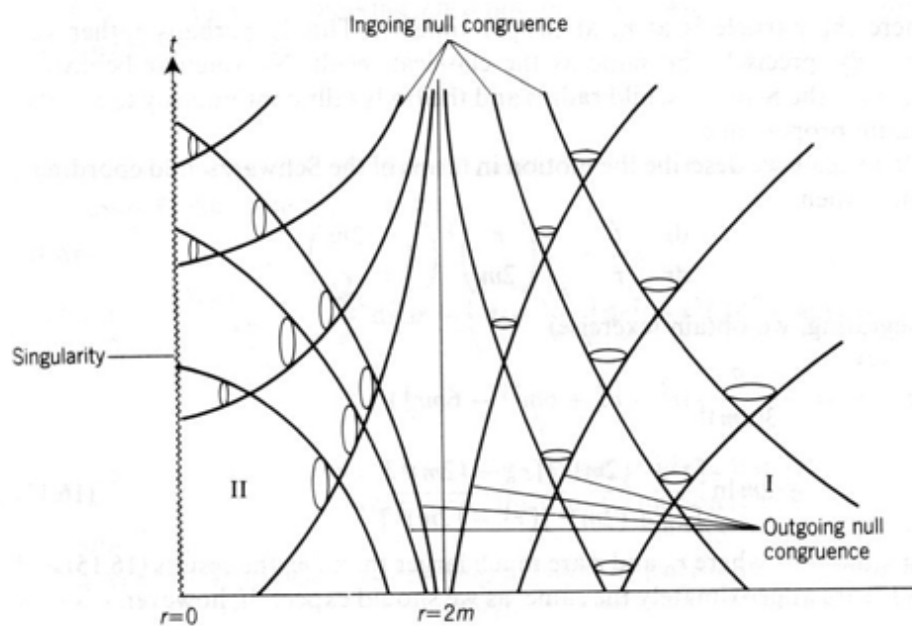


Figura 3: Trajetória tipo-luz nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: extraído de (D'INVERNO,2014)

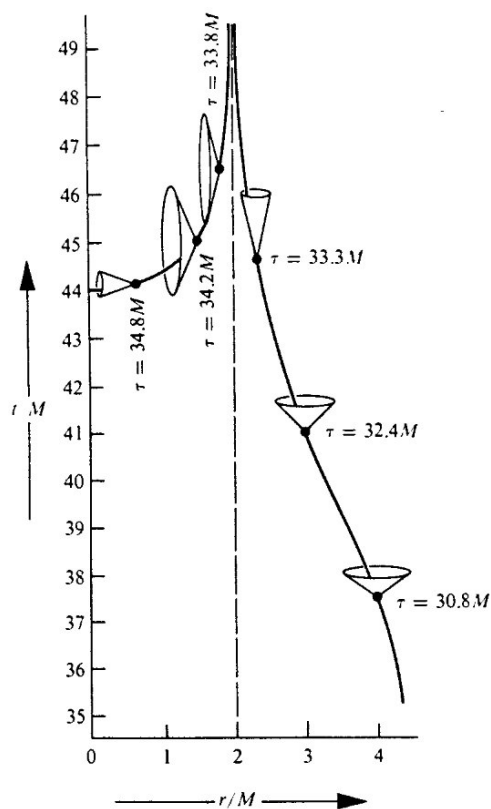


Figura 4: Trajetória tipo-tempo nas coordenadas de Schwarzschild. Fonte: extraído de (D'INVERNO,2014)

Nota-se que existem dois pontos interessantes com respeito à métrica de Schwarzschild, quando $r = \frac{2GM}{c^2}$ e $r = 0$. Nestes pontos, tem-se que a métrica exibe um *comportamento singular*. A métrica de Schwarzschild exibe, de fato, um comportamento singular real apenas em $r = 0$. Em verdade, basicamente, existem dois tipos de singularidade: as *singularidades coordenadas* e as *singularidades físicas*, Hartle (2014), e essa distinção reside no fato de que singularidades coordenadas são passíveis de remoção por transformações de coordenadas, isto é, por um número suficiente de transformações de coordenadas, chega-se a um sistema de coordenadas onde é possível ter um comportamento regular das trajetórias tipo-tempo e tipo-luz na vizinhança do ponto anteriormente singular; singularidades físicas não são possíveis de serem removidas do espaço-tempo por transformações de coordenadas. A superfície $r = \frac{2GM}{c^2}$, nas coordenadas de Schwarzschild, é um ponto singular de grande interesse, esse ponto chama-se *Horizonte de Eventos*.

É possível remover o caráter singular de $r = \frac{2GM}{c^2}$ com o auxílio da métrica de Kruskal-Szekeres⁶ (CARROLL,2003):

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (40)$$

Sendo assim, dada a métrica de Kruskal-Szekeres, é possível produzir o *diagrama de Kruskal* para a solução de Schwarzschild. Esse diagrama permite tratar de forma mais clara o espaço-tempo de Schwarzschild com respeito às trajetórias tipo-tempo e tipo-luz, pois diferentemente das coordenadas de Schwarzschild, os raios de luz que definem a abertura dos cones de luz permanecem, em todos os pontos do espaço-tempo, a um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

⁶aqui faz-se o uso de $c = 1$

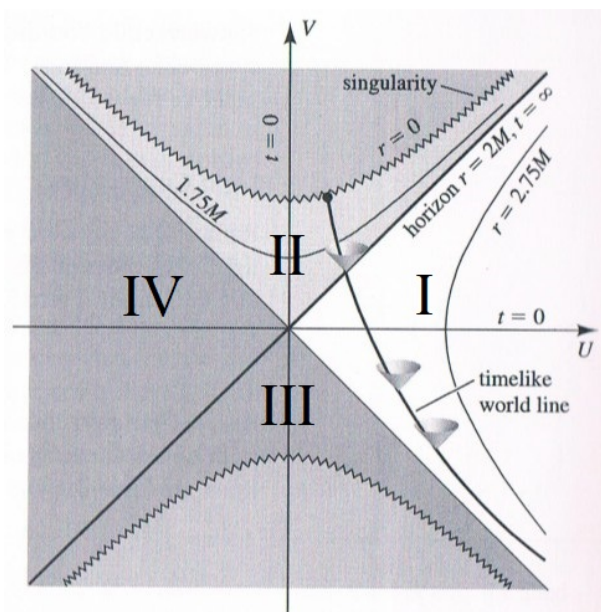


Figura 5: Diagrama de Kruskal-Szekeres

Utilizando a métrica (40), verifica-se que o gráfico é qualitativamente diferente do produzido pela solução de Schwarzschild. As superfícies de valores constantes de r são hipérbolas e as de t constante são retas. Entretanto, o caráter das coordenadas temporais e espaciais da métrica após região delimitada pela superfície $r = \frac{2GM}{c^2}$, continua o mesmo: o futuro causal permanece sempre direcionado ao ponto $r = 0$. Nota-se ainda que, exatamente em $r = \frac{2GM}{c^2}$, a superfície é tipo-luz.

O espaço-tempo de Schwarzschild, visto com as coordenadas de Kruskal, produz quatro regiões do espaço-tempo: I e IV assintoticamente planas; II e III que são regiões interiores ao horizonte de eventos. A região II é chamada de *buraco negro* e a região III é chamada de *buraco branco*.

7.2 BURACOS NEGROS DE KERR

Em 1963 Kerr⁷ encontrou uma solução das equações de campo de Einstein para uma simetria não mais esférica, mas sim axial. Essa solução introduz o momentum angular nos corpos esféricos modelados pela métrica de Schwarzschild. Essa métrica chama-se *métrica de Kerr* e é dada por⁸ (CARROLL,2003):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2Mar \sin^2(\theta)}{\rho^2} [dt d\phi + d\phi dt] +$$

⁷Kerr (1963)

⁸Nesta métrica, utilizamos as unidades naturais $c = G = 1$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta) \right] d\phi^2 \quad (41)$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (42)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad (43)$$

$$a = \frac{J}{M} \quad (44)$$

Onde J é o momentum angular

7.3 BURACOS NEGROS COM CARGA

É possível ainda adicionar o campo eletromagnético nas equações de campo de Einstein. Ao fazer tal consideração, chega-se a duas outras soluções que geram buracos negros: a *solução de Reissner-Nordström* e a *solução de Kerr-Newman*. Respectivamente a solução estática com carga elétrica e magnética e a solução com momentum angular com carga elétrica e magnética (CARROLL,2003).

Sendo assim, as equações de campo consideram um tensor energia-momentum não nulo dado por:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\gamma} F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \quad (45)$$

Onde $F_{\mu\gamma}$ é o *Tensor Eletromagnético* dado por:

$$F_{\mu\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & -B_y \\ E_x/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_x/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, as equações de campo de Einstein ficam:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[F_{\mu\gamma} F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right] \quad (46)$$

A primeira solução que envolve o campo eletromagnético e as equações de campo de Einstein, é a solução de Reissner-Nordström. Essa solução é uma solução estática e esfericamente simétrica, e por conta do tensor energia momentum ser não nulo mas não envolver nenhum outro campo além do eletromagnético, essa solução pode ser chamada de solução de *Eletrovácuo*.

A métrica de Reissner-Nordström é⁹:

$$ds^2 = -\Sigma dt^2 + \Sigma^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (47)$$

Onde

$$\Sigma = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \right) \quad (48)$$

e Q é a carga elétrica e P a carga magnética.

De modo similar, existe ainda a solução de Kerr-Newman que define um buraco negro com rotação, carga elétrica e magnética. Utilizando a métrica de Kerr, é possível determinar a métrica de Kerr-Newman (CARROLL,2003):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr - G(Q^2 + P^2)}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMr - G(Q^2 + P^2)a \sin^2(\theta)}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta) \right] d\phi^2 \quad (49)$$

Onde Δ e ρ são as seguintes funções (CARROLL,2003):

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr - G(Q^2 + P^2) + a^2 \quad (50)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \quad (51)$$

⁹com $c = 1$

$$a = \frac{J}{M} \quad (52)$$

Onde J é o momentum angular

8 ALGUMAS SOLUÇÕES EXÓTICAS DA RELATIVIDADE GERAL

8.1 BURACOS DE MINHOCA

Com os buracos negros de Schwarzschild, é possível chegar a conclusão de que na solução evidenciada pelo diagrama de Kruskal, existe uma espécie de conexão entre as duas regiões assintoticamente planas. O método para chegar a essa conclusão é então considerar *cortes* com respeito a uma das coordenadas angulares juntamente com a técnica matemática de mergulho de superfícies (CARROLL,2003):

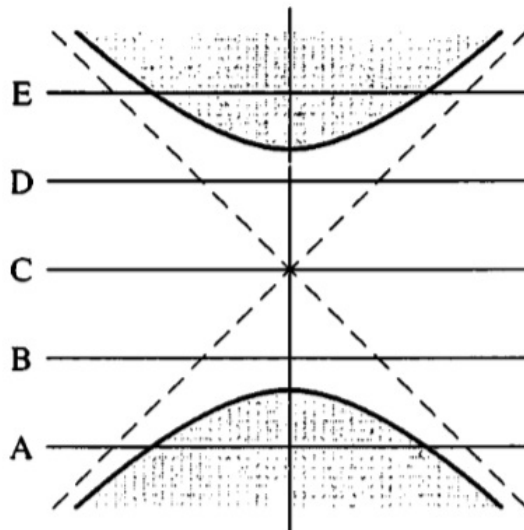


Figura 6: Cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)

O que correspondem ao seguinte *diagrama de mergulho*

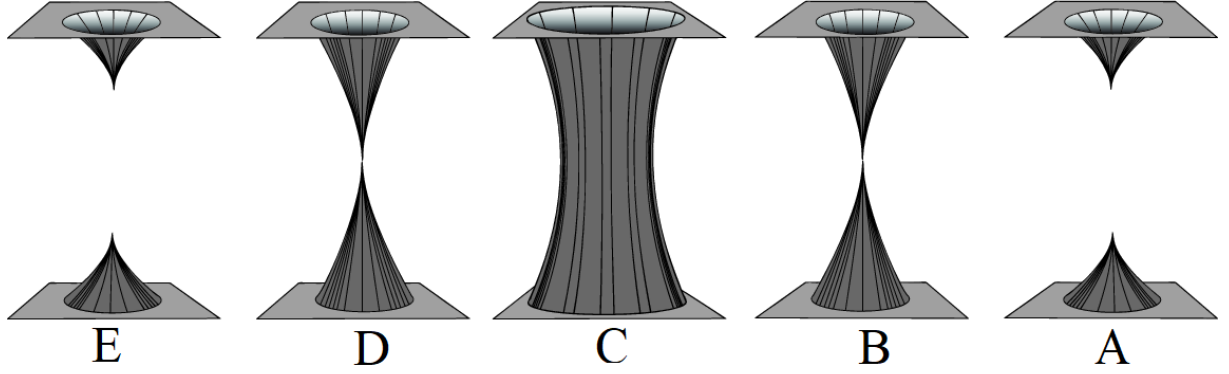


Figura 7: Superfícies correspondentes aos cortes no Diagrama de Kruskal (CARROLL,2003)

Entretanto, no caso de Schwarzschild, os dois universos estão causalmente desconectados, isto é, a formação do "wormhole" não admite curvas tipo-tempo transitarem entre as duas regiões assintoticamente planas. Conforme, Morris e Thorne (1988), é possível definir uma métrica sobre a qual é possível construir um "wormhole" dito *atravessável*:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + (1 - b(r)/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (53)$$

Onde $\Phi(r)$ e $b(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial r (MORRIS e THORNE,1988).

A função "*shape*" determina o próprio aspecto do Buraco de Minhoca Atravessável (Traversable Wormhole (TW)) e, devido a esse fato, pode-se estudar consequências úteis, para um dado $b(r)$, quando é construído seu *diagrama de mergulho*. O diagrama de mergulho é uma seção bi-dimensional ao longo – sem perda de generalidade – do plano equatorial, o que significa que se considera um momento fixo de tempo, de coordenadas $t = T$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Transportando essas considerações para a métrica (53), temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\Phi(r)}dt^2 + \left\{1 - \frac{b(r)}{r}\right\}^{-1} dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2 \right] = \\ &= -e^{2\Phi(r)}d(T)^2 + \left\{1 - \frac{b(r)}{r}\right\}^{-1} dr^2 + r^2 \left[d\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)d\phi^2 \right] \implies \\ & ds^2_{(2D)} = \left\{1 - \frac{b(r)}{r}\right\}^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \end{aligned} \quad (54)$$

A razão para a forma de (54) se deve, evidentemente, a fatos simples do cálculo elementar, como o diferencial de uma constante é zero: $d(c) = 0$ e $\sin(\pi/2) = 1$.

A métrica (54) pode ser visualizada em um espaço tridimensional euclidiano em virtude de uma incorporação com um elemento de linha cilíndrico:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (55)$$

Com (55), pode-se incorporar a métrica (54) da seguinte maneira:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (56)$$

Onde em (55) é apenas fatorado o termo dr^2 na soma $(dz^2 + dr^2)$. Em virtude do aspecto bidimensional, pode-se igualar (54) a (55), como:

$$ds_{(2D)}^2 = \left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (57)$$

então pode-se derivar a equação da superfície de mergulho:

$$\begin{aligned} ds_{(2D)}^2 &= \left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \implies \\ &\implies \left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} dr^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 \iff \\ &\iff \left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} = 1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \iff \\ &\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} - 1 \iff \\ &\frac{dz}{dr} = \sqrt{\left\{ 1 - \frac{b(r)}{r} \right\}^{-1} - 1}. \end{aligned} \quad (58)$$

É possível reorganizar a (58) para um formato mais adequado:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1}}. \quad (59)$$

A forma de $z(r)$ fornece então a secção de TW; pode-se ver sua forma pela integração de (59), o que é possível quando especificamos a forma de $b(r)$. Uma forma simples de $b(r)$ foi dada como:

$$b(r) = \sqrt{r_0 r}. \quad (60)$$

Então, a forma qualitativa do TW é:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\sqrt{r_0 r}} - 1}} \iff \\ \int_0^z dz &= \pm \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\sqrt{r_0 r}} - 1}} dr \iff \\ z(r) &= \pm \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\sqrt{r_0 r}} - 1}} dr. \end{aligned} \quad (61)$$

Agora, será preciso integrar (61) para traçar a forma do TW. O resultado da integração é então,

$$z(r) = \pm \frac{4}{3} (\sqrt{r_0 r} + 2r_0) \sqrt{-1 + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_0}}}. \quad (62)$$

O gráfico é dado pela Figura 8:

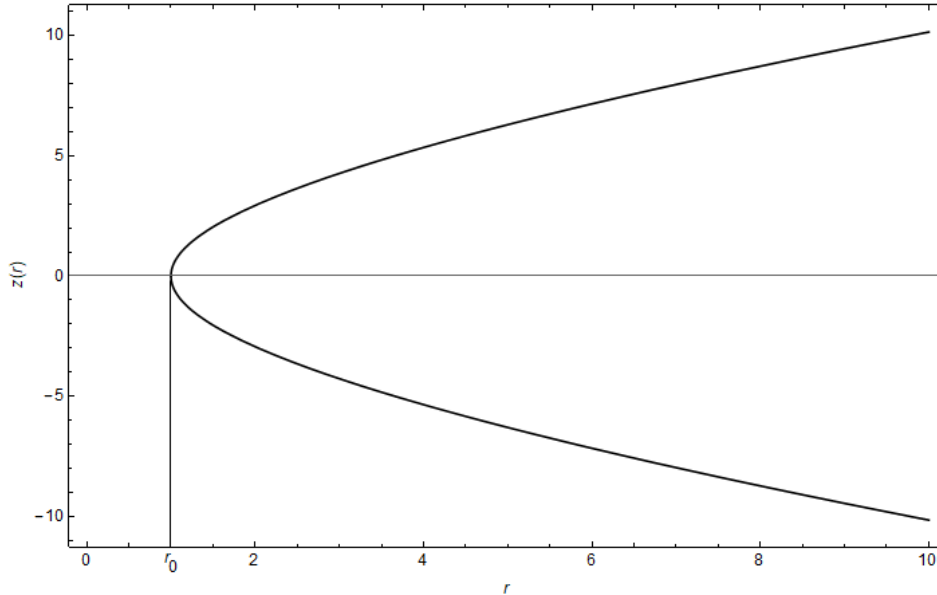


Figura 8: Secção do TW para $b(r) = \sqrt{r_0 r}$.

Pode-se ver prontamente o significado de r_0 : é o raio mínimo do TW e, de fato, tal raio especifica uma região inteira chamada de *Garganta*. Rotacionando a secção em torno do eixo z -, será obtida a forma característica do TW: a de uma estrutura conectando duas regiões do espaço-tempo por uma "ponte":

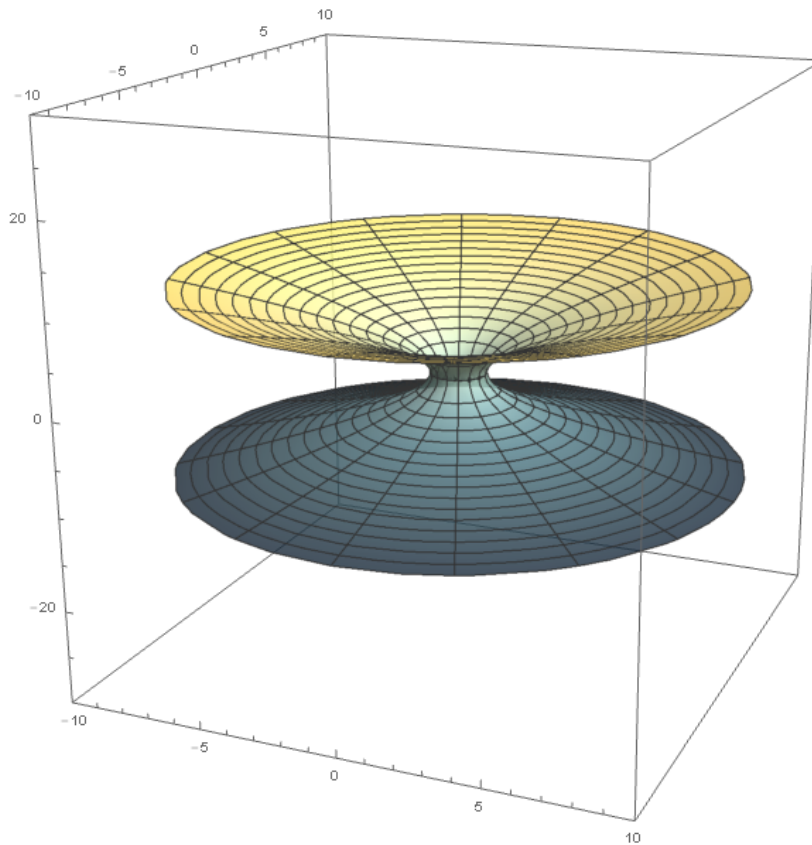


Figura 9: Gráfico de revolução de $b(r) = \sqrt{r_0 r}$.

A função $b(r)$ deve satisfazer algumas propriedades fundamentais para ser elegível a uma forma para inserir na métrica (53). A primeira delas é:

$$b(r_0) = r_0. \quad (63)$$

O requisito de raio mínimo dado por (63) dá origem a outro requisito que $b(r)$ deve satisfazer; a derivada de (59) deve ser divergente nesse raio mínimo r_0 . Em símbolos, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dz}{dr} = \infty. \quad (64)$$

Isso se deve a um fato geométrico simples: a linha tangente no ponto $(r_0, b(r_0))$ deve ser perpendicular (Figura 10); tal região divide a região superior do espaço-tempo e a região inferior do espaço-tempo.

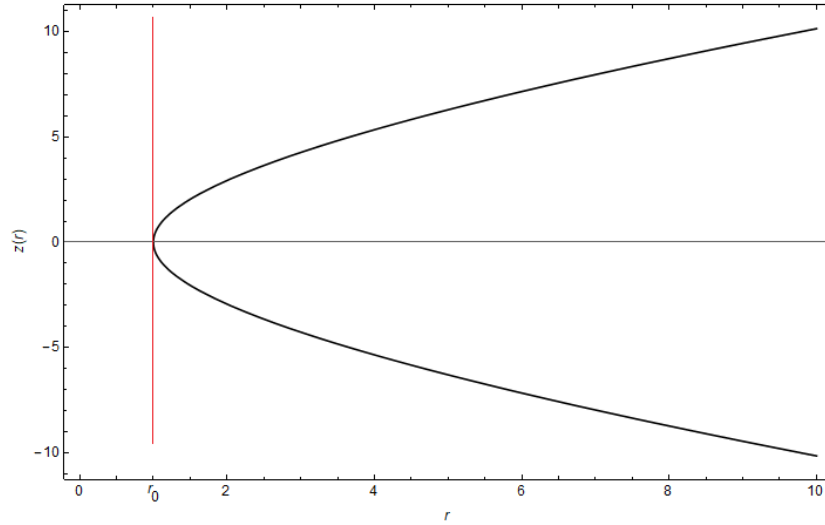


Figura 10: Propriedade do diagrama de mergulho $b(r)$.

Para a forma particular, dada por (MORRIS e THORNE, 1988), tem-se então:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dz}{dr} = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\sqrt{r_0 r}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{\sqrt{r_0 r_0}} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r_0} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1}} = \infty.$$

Outro requisito de $b(r)$ é devido ao comportamento assintótico do espaço-tempo definido. Por exemplo, longe de um buraco negro de Schwarzschild, espera-se uma região com pouca influência gravitacional. Traduzir esse fato físico para a matemática significa que, para valores grandes de r , a derivada (59) será zero. De fato, a métrica Morris-Thorne é um exemplo de métrica plana assintótica, o que significa que, para valores maiores de r , o espaço-tempo é um espaço-tempo de Minkowski. Colocando em termos matemáticos, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dz}{dr} = 0. \quad (65)$$

Para a forma particular, dada por, tem-se então:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dz}{dr} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\sqrt{r_0 r}} - 1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{r^2}{r_0 r}} - 1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1}}$$

Uma análise cuidadosa do limite do denominador mostra,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{r}{r_0}} = \infty.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{\infty - 1}} = 0 \implies$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dz}{dr} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1}} = 0 \quad (66)$$

Também devem ser satisfeitas outras condições:

1. **Flaring-out Condition:**

$$\frac{1}{2b^2} \left(b(r) - r \frac{d}{dr} [b(r)] \right) > 0, \quad \forall r \geq r_0 \quad (67)$$

2.

$$\frac{d}{dr} [b(r_0)] < 1 \quad (68)$$

3.

$$1 - \frac{b(r)}{r} > 0 \quad (69)$$

4.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b(r)}{r} = 0 \quad (70)$$

8.1.1 EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA UM BURACO DE MINHOCA ATRAVESSÁVEL

Gravidade é uma manifestação de curvatura do espaço-tempo. A dinâmica da interação gravitacional é dada pelas Equações de Campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} =: R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (71)$$

Os componentes do tensor de Einstein para a métrica (53), são dados por:

$$G_{00} = \frac{e^{2\Phi(r)} b'(r)}{r^2} \quad (72)$$

$$G_{11} = \frac{2r^2 \Phi'(r) - b(r)(1 + 2r\Phi'(r))}{r^2(r - b(r))} \quad (73)$$

$$G_{22} = \frac{-b(r)(-1 + r\Phi'(r) + 2r^2\Phi'(r)^2 + 2r^2\Phi''(r) + r(-b'(r)(1 + r\Phi'(r)) + 2r(\Phi'(r) + r\Phi'(r)^2 + r\Phi''(r))))}{2r} \quad (74)$$

$$G_{33} = \frac{-\sin^2(\theta)[b(r)(-1 + r\Phi'(r) + 2r^2\Phi'(r)^2 + 2r^2\Phi''(r) + r(-b'(r)(1 + r\Phi'(r)) + 2r(\Phi'(r) + r\Phi'(r)^2 + r\Phi''(r))))]}{2r} \quad (75)$$

Caso seja um tensor de energia-momento de fluido perfeito genérico como :

$$T_{\mu\nu} = \text{Diag}[\sigma(r)c^2, -\chi(r), p(r)_2, p(r)_3], \quad (76)$$

pode-se determinar a própria natureza da matéria dos buracos de minhoca no espaço-tempo:

$$\begin{cases} \sigma(r) = \frac{c^2}{8\pi G} G_{00} \\ \chi(r) = -\frac{c^4}{8\pi G} G_{11} \\ p_2 = \frac{c^4}{8\pi G} G_{22} \\ p_3 = \frac{c^4}{8\pi G} G_{33} \end{cases} \quad (77)$$

Em particular, pode-se calcular a massa do buraco de minhoca que integra a densidade de energia como:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \frac{c^2}{8\pi G} G_{00} = \frac{c^2}{8\pi G} \frac{e^{2\Phi(r)} b'(r)}{r^2} \iff \\ &\iff \frac{1}{e^{2\Phi(r)}} \frac{8\pi G}{c^2} \sigma(r) r^2 = b'(r) \iff \\ b'(r) &= \frac{1}{e^{2\Phi(r)}} \frac{8\pi G}{c^2} \sigma(r) r^2. \end{aligned} \quad (78)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} db(r) &= \frac{1}{e^{2\Phi(r)}} \frac{8\pi G}{c^2} \rho(r) r^2 dr \iff \\ b(r) &= b(r_0) + \frac{8\pi G}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{e^{2\Phi(r)}} \sigma(r) r^2 dr \end{aligned} \quad (79)$$

A equação (79) pode ser reescrita como,

$$b(r) = 2Gm(r), \quad (80)$$

onde $m(r)$ é dado por:

$$m(r) = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{e^{2\Phi(r)}} \sigma(r) r^2 dr \quad (81)$$

O significado físico de (79) é o da massa efetiva do Buraco de Minhoca. Portanto, tem-se, para um modelo específico dado por (VISSER,1996), em que $\Phi(r) = 0$ e $b(r) = \frac{r_0^2}{r}$,

$$m(r) = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{e^{2 \times 0}} \sigma(r) r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \sigma(r) r^2 dr \implies$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \sigma(r)r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{c^2}{8\pi G} G_{00} r^2 dr = \\
& = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{c^2}{8\pi G} \frac{e^{2 \times 0} b'(r)}{r^2} r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r b'(r) dr = \\
& = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r \left[\frac{r_0^2}{r} \right]' dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r \left(-\frac{r_0^2}{r^2} \right) dr \\
& \frac{r_0}{2G} + \frac{-r_0^2}{2G} \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{r^2} \right) dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{-r_0^2}{2G} \left\{ \left[\frac{-1}{r} \right] + \left[\frac{1}{r_0} \right] \right\} = \\
& = \frac{r_0}{2G} + \frac{r_0^2}{2G} \left\{ \left[\frac{1}{r} \right] - \left[\frac{1}{r_0} \right] \right\} = \frac{r_0^2}{2Gr}
\end{aligned}$$

Em dimensões de massa, tem-se

$$m(r) = \frac{c^2 r_0^2}{2Gr} \quad (82)$$

8.1.2 BURACOS DE MINHOCA ATRAVESSÁVEIS PARA UMA FUNÇÃO Ω -SHAPE

Estende-se a função shape dada por (SAMANTA,2019) para uma "função shape" que contém o parâmetro de densidade Ω ; chama-se esse tipo de função de " Ω - shape function" para buracos de minhoca atravessáveis. A função é dada por:

$$b(r) = r e^{-[\Omega(r-r_0)]}. \quad (83)$$

O Ω é dado pela cosmologia padrão. Este parâmetro pode ser (WEINBERG,1972):

$$\begin{cases} 0 < \Omega < 1 \\ \Omega = 0 \\ \Omega > 1 \end{cases} \quad (84)$$

A verificação do valor real do parâmetro de densidade definirá, portanto, a própria forma do buraco de minhoca atravessável.

Usando (83) em (53), a métrica se torna:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left\{ 1 - \frac{r e^{-[\Omega(r-r_0)]}}{r} \right\}^{-1} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] \quad (85)$$

Agora, devido à natureza do parâmetro de densidade, uma constante cosmológica que

não desaparece poderia ser considerada nas Equações de Campo de Einstein; as equações do campo devem ser corrigidas, como:

$$G_{\mu\nu} =: R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (86)$$

As equações são extremamente simplificadas em uma base ortonormal de 4-vetores, onde as Equações de campo de Einstein são reescritas com quantidades "hat", isto é os tensores reescritos em uma base ortonormal de vetores ou, *tetrada* (VISSER,1996):

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} =: R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}R\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \Lambda\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (87)$$

A interpretação de uma constante cosmológica pode ser realizada no contexto de um tipo de tensor de momento-energia (OLIVEIRA,2003):

$$\begin{aligned} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}R\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \Lambda\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] \implies \\ \implies \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \Lambda\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \right] &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \implies \\ R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}R\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \end{aligned} \quad (88)$$

Agora, a forma do $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ é tal como a equação (76); para determinar a forma de $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)}$, pode-se afirmar que o conteúdo energético é zero: considera-se as regiões de vácuo. Portanto,

$$\begin{aligned} T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0 \implies R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}R\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[0 + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)} \right] \iff \\ R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}R\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)}. \end{aligned} \quad (89)$$

Pode-se considerar uma região distante da fonte de energia, tendo uma contribuição devido ao vácuo. No referencial ortonormal, o tensor $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)}$ é dado por (OLIVEIRA,2003):

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\Lambda)} = \begin{pmatrix} \Lambda \frac{c^4}{8\pi G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \frac{c^4}{8\pi G} \end{pmatrix} \quad (90)$$

As equações dinâmicas para o TW, considerando um tensor energia-momento de fluido perfeito tal como (76) (OLIVEIRA,2003):

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{b'(r)}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{0}\hat{0}} + T_{\hat{0}\hat{0}}^{(\Lambda)} \right] \quad (91)$$

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = -\frac{b(r)}{r^3} + \frac{2\Phi'(r)}{r} - \frac{2\Phi'(r)b(r)}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{1}\hat{1}} + T_{\hat{1}\hat{1}}^{(\Lambda)} \right] \quad (92)$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) - \right. \\ \left. - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b(r))} + \frac{\Phi'(r)}{r} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{2}\hat{2}} + T_{\hat{2}\hat{2}}^{(\Lambda)} \right] \quad (93)$$

$$G_{\hat{3}\hat{3}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) - \right. \\ \left. - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b(r))} + \frac{\Phi'(r)}{r} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\hat{3}\hat{3}} + T_{\hat{3}\hat{3}}^{(\Lambda)} \right] \quad (94)$$

Usando as equações de campo de Einstein, pode-se determinar o aspecto do fluido perfeito necessário para suportar o "Wormhole" (OLIVEIRA,2003):

$$\sigma(r) = \frac{c^2}{8\pi G} \left\{ \frac{b'(r)}{r^2} - \Lambda \right\} \quad (95)$$

$$p_r(r) \equiv \chi(r) = \frac{c^4}{8\pi G} \left\{ \frac{b(r)}{r^3} - \frac{2\Phi'(r)}{r} + \frac{2\Phi'(r)b(r)}{r} - \Lambda \right\} \quad (96)$$

$$p_\theta(r) = p_\phi(r) = \frac{c^4}{8\pi G} \left\{ \left(1 - \frac{b(r)}{r} \right) \left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r - b(r))} \Phi'(r) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r - b(r))} + \frac{\Phi'(r)}{r} \right] + \Lambda \right\} \quad (97)$$

Usando diagramas de mergulho, pode-se traçar sua garganta. Considerando a função integrada:

$$z(r) = \pm \left[\frac{2 \tan^{-1} \left(\sqrt{-1 + e^{[\Omega(r-r_0)]}} \right)}{\Omega} \right] \quad (98)$$

Então, usando as soluções \pm de (98), temos:

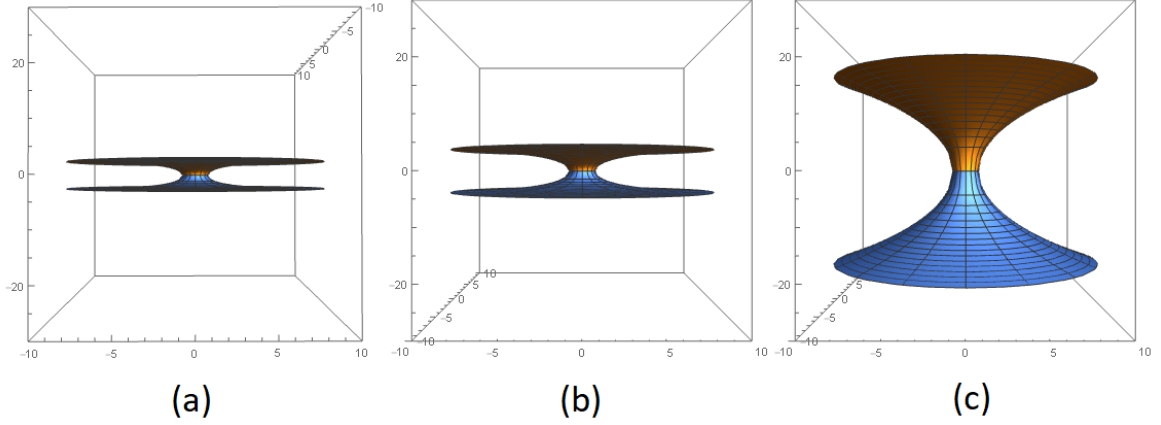


Figura 11: Diagramas de Mergulho: (a) $\Omega = 1,02$. (b) $\Omega = 0,64$. (c) $\Omega = 0,076$. Para um raio mínimo de $r_0 = 1$.

A massa efetiva dessa classe de buracos de minhoca é (para $\Phi(r) = 0$),

$$\begin{aligned}
 m(r) &= \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{e^{2 \times 0}} \sigma(r) r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \sigma(r) r^2 dr \implies \\
 &= \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \sigma(r) r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{c^2}{8\pi G} G_{00} r^2 dr = \\
 &= \frac{r_0}{2G} + \frac{4\pi}{c^2} \int_{r_0}^r \frac{c^2}{8\pi G} \frac{e^{2 \times 0} b'(r)}{r^2} r^2 dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r b'(r) dr = \\
 &= \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r \left[r e^{-[\Omega(r-r_0)]} \right]' dr = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \int_{r_0}^r \left(e^{-(r-r_0)\Omega} - e^{-(r-r_0)\Omega} r \Omega \right) dr = \\
 &= \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \left\{ \left[e^{-r\Omega + r_0\Omega} r \right] - \left[e^{-r_0\Omega + r_0\Omega} r_0 \right] \right\} = \frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \left\{ \left[e^{-r\Omega + r_0\Omega} r \right] - \left[r_0 \right] \right\} \implies
 \end{aligned}$$

Em unidades do SI tem-se:

$$m(r) = c^2 \left[\frac{r_0}{2G} + \frac{1}{2G} \left(e^{-r\Omega + r_0\Omega} r - r_0 \right) \right]. \quad (99)$$

Usando as equações de campo de Einstein, pode-se observar a tensão (ou pressão radial) na região da garganta $b(r_0) = r_0$:

$$\chi_0 = \frac{c^4}{8\pi G} \left\{ \frac{r_0}{r_0^3} - \Lambda \right\} \quad (100)$$

Além disso, também pode-se explorar as condições de energia:

$$\begin{cases} NEC : \sigma + \chi \geq 0 \\ DEC : \sigma - |\chi| \geq 0 \end{cases} \quad (101)$$

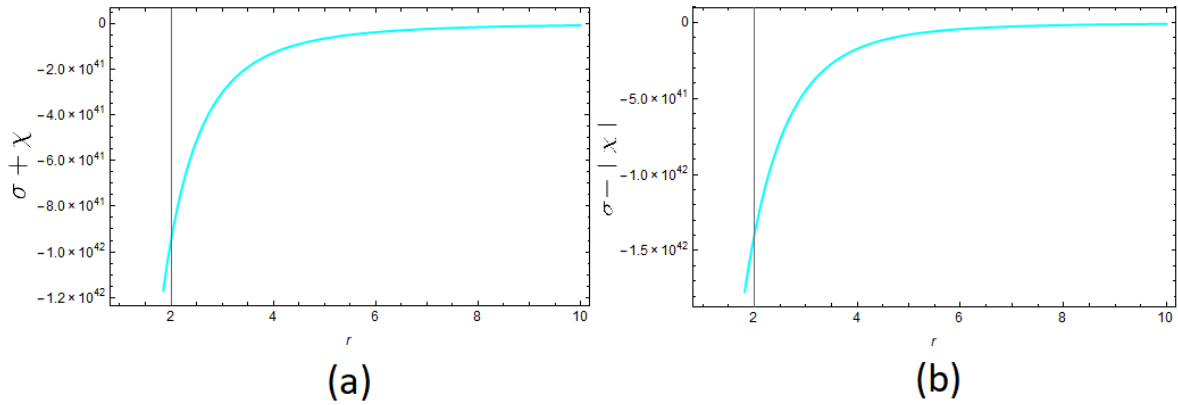


Figura 12: (a) NEC para $\Omega = 1, 02$. (b) DEC para $\Omega = 1, 02$.

8.2 "WARPDRIVE" DE ALCUBIERRE

Uma das grandes conclusões da TRE é a de que nada pode transitar mais rápido do que a luz. Por outro lado, na TRG o fato é válido apenas localmente. Sendo assim, em 1994 o físico mexicano Miguel Alcubierre explorou a possibilidade de uma geometria capaz de levar informação (um astronauta e uma nave por exemplo) de forma a garantir que localmente o observador se mova dentro do cone de luz (e por tanto com velocidade menor que a da luz) mas o espaço-tempo se comporte de tal maneira que seja possível transitar grandes distâncias em um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno (ALCUBIERRE, 1994).

A métrica que Alcubierre propôs utiliza o formalismo 3+1 da Relatividade Geral, onde, a grosso modo, ocorre uma divisão no espaço-tempo quadridimensional em hipersuperfícies tipo-espaço, curvas, tridimensionais e no tempo (unidimensional); indicado na figura 13.

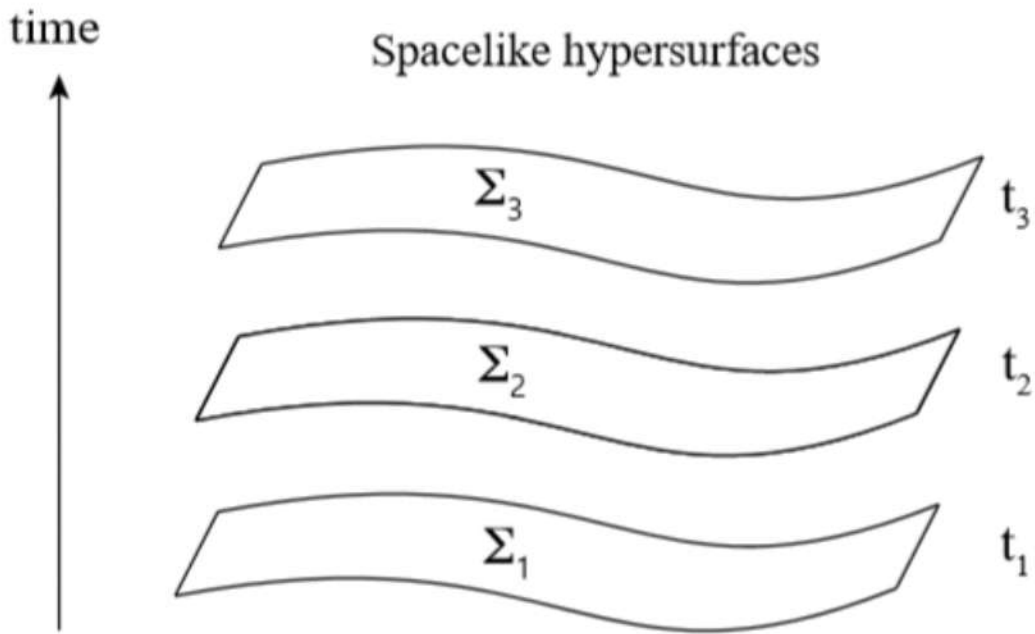


Figura 13: Divisão do espaço-tempo no formalismo 3 + 1. Fonte: extraído de (ALCUBIERRE,2008)

Conforme, Alcubierre (2008), o tensor métrico neste formalismo fica:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \\
 &= -(\alpha^2 - \beta_i\beta^i)dt^2 + 2\beta_idx^i dt + \gamma_{ij}dx^i dx^j
 \end{aligned} \tag{102}$$

Onde algumas quantidades particulares deste formalismo são: β_i o "shift vector" que relaciona as coordenadas espaciais nas diferentes hipersuperfícies tipo-espaço e α é a *função de lapso* que relaciona os intervalos de tempo próprio entre as hipersuperfícies tipo-espaço (ALCUBIERRE,2008).

A métrica proposta por Alcubierre é:

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_s f(r_s(t))dt)^2 + dy^2 + dz^2 \tag{103}$$

Tal geometria é solução das equações de Einstein e, grosso modo, tem como propósito permitir um observador deslocar-se por distâncias interestelares e sem efeitos dilatação temporal entre o ponto A e B . Por definição um "Warp Drive"(ou, em tradução livre, *Motor de Dobra Espaço-temporal*) é uma geometria curva que obedece localmente as leis da relatividade especial mas que globalmente, e para um observador assintoticamente plano, viaja de forma superluminal.

A ideia é que um observador, chamado de *Nave*, transita entre o ponto A e B , extremamente distâtes ($\approx 1UA$), apenas utilizando a curvatura do espaço-tempo. Ainda mais, espacialmente falando, o mecanismo que permite tal deslocamento é dado quando espaço é contraído à frente da Nave e expandido em sua traseira (Figura 15):

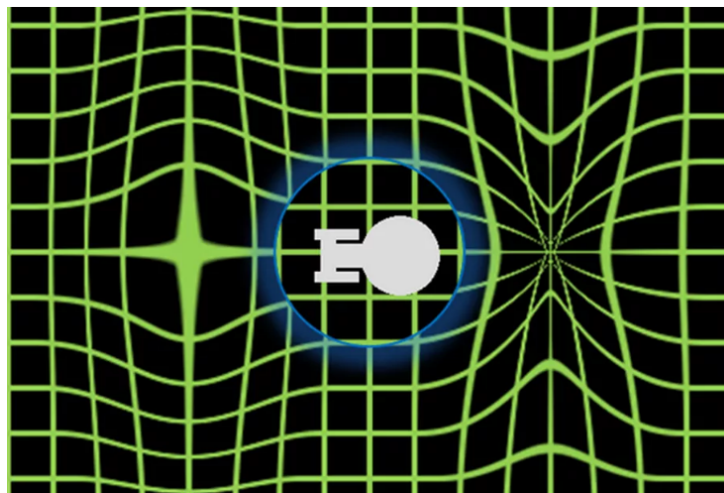


Figura 15: Elementos de volume espacial expandidos atrás da nave e contraídos à sua frente criando o mecanismo de "propulsão"do "Warp Drive".

Ainda mais, essa solução prevê que do ponto de vista tridimensional, a nave está compreendida em uma espécie de região esférica chamada de "bolha de curvatura". Tal bolha determina o aspecto espacial do sistema, isto é: A nave compreendida dentro de uma bolha que é resultado da curvatura do espaço-tempo dado pela geometria (103).

Agora, o conceito dado acima é fundamentado, como foi dito, pela Relatividade Geral. Ocorre que, baseado nesta necessidade de criar o mecanismo de "empurrar a nave", a métrica (103) cumpre a tarefa de "empurrar" a nave ao longo de uma trajetória $x_s(t)$ (ALCUBIERRE,1994).

De fato, alguns parâmetros essenciais da métrica são então: a coordenada radial r_s , a velocidade da "bolha de curvatura" $v_s(t)$ e a função "top-hat" $f(r_s)$. Sendo assim, tem-se que:

$$r_s = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2} \quad (104)$$

$$v_s = \frac{dx_s(t)}{dt} \quad (105)$$

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2\tanh(\sigma R)} \quad (106)$$

Onde R é o raio mínimo da bolha de curvatura e σ é o parâmetro de "espessura" da bolha de curvatura.

A função $f(r_s)$ obedece então à propriedade de que quando $\sigma \rightarrow \infty$, isto é:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(r_s) = \begin{cases} 1, & r_s \in [-R, R] \\ 0, & r_s > R \end{cases} \quad (107)$$

Onde o gráfico da função "top-hat" é dado (Figura 16)

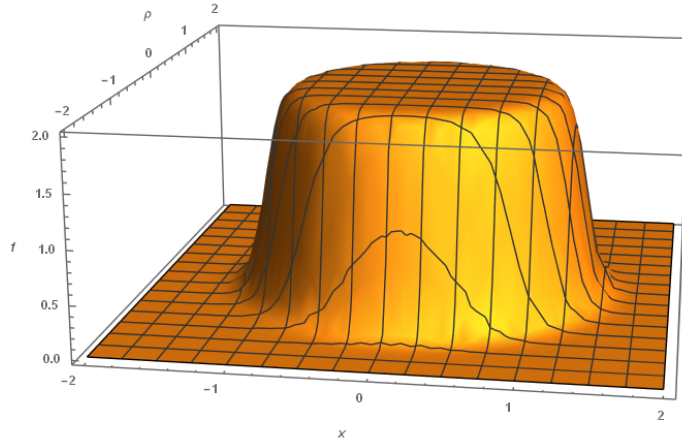


Figura 16: Função $f(r_s)$. Onde $\rho =: \sqrt{y^2 + z^2} \iff \rho^2 = y^2 + z^2$

Nota-se, tabmé, que espaço-tempo dado por (103) é plano fora da bolha de curvatura, isto é, quando $f(r_s) = 0$ tem-se que a métrica "exterior" é a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_s f(r_s(t)) dt)^2 + dy^2 + dz^2 \iff ds^2 = -dt^2 + (dx - v_s \cdot 0 dt)^2 + dy^2 + dz^2 \iff$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (108)$$

Ainda mais, para as superfícies tipo-espaço $dt = 0 \iff t = k, k \in \mathbb{R}$, tem-se que a própria geometria espacial é também plana, isto é:

$$ds_{3D}^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (109)$$

Com tais informações é possível determinar precisamente o mecanismo de propulsão da nave. As superfícies tipo-espaço são denominadas *Superfícies de Cauchy* e se tais superfícies detém geometrias planas, então toda a curvatura origina-se da curvatura extrínseca, dada pelo tensor (ALCUBIERRE,2008):

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \left(\partial_i \beta_j - \partial_j \beta_i \right) \quad (110)$$

Daí, em posse de (110), pode-se verificar o comportamento da expansão dos elementos de volume associado ao movimento da nave. Tal expansão é, em verdade, uma quantidade precisa definida como (ALCUBIERRE,1994):

$$\Theta =: -\alpha \text{Tr}(K) = -\alpha K^i_i \quad (111)$$

Mostra-se então que para quantidades definidas tais como (ALCUBIERRE,2008):

$$\alpha = 1 \quad (112)$$

$$\beta_x = -v_s f(r_s) \quad (113)$$

$$\beta_y = \beta_z = 0 \quad (114)$$

Tem-se que a expansão fica:

$$\Theta = v_s \frac{x_s(t)}{r_s} \frac{df(r_s)}{dt} = v_s \frac{x_s(t)\sigma}{2r_s} \left[\frac{\tanh^2(\sigma(r_s + R)) - \tanh^2(\sigma(r_s - R))}{2\tanh(\sigma R)} \right] \quad (115)$$

Cujo gráfico é:

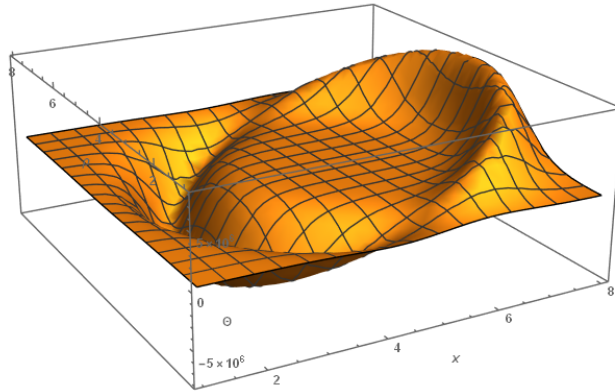


Figura 17: Expansão dos elementos de volume, dados por Θ .

É possível ver então que a expansão volumétrica à frente da nave é negativa, o que infere uma contração; na traseira da nave, a expansão é positiva o que infere uma expansão. Tal mecanismo gera então o movimento da nave.

O grande problema de tal geometria e mecanismo é então verificado quando calcula-se, por exemplo, a densidade de energia necessária para sustentar este espaço-tempo. As condições fraca e dominante não são satisfeitas, pois a densidade de energia é uma quantidade negativa, sempre (ALCUBIERRE,2008)

$$\rho = T^{00} = \frac{1}{8\pi} G^{00} = -\frac{v_s^2(y^2 + z^2)}{32\pi r_s^2} \quad (116)$$

Um fluido que detém, por exemplo, propriedades tais como (116), é chamado de *matéria exótica*, no caso dos "warp drives", é salutar denominar de "*Hyperfuel*" ou "Híper-combustível".

9 BURACOS NEGROS ASTROFÍSICOS: SINAIS QUASI-PERIÓDICOS E A MASSA DO QUASAR 3C 273

A teoria apresentada até agora, diz respeito ao modelo puro e simples. Contudo, o contraponto observacional é de suma importância. É claro que, as soluções exóticas não detêm tal contraponto observacional, mas toda a teoria de Buracos negros é bem aplicada à observação dos corpos do universo.

Em especial existe um tipo de objeto astrofísico chamado de *Quasar*, que faz parte de um conjunto de objetos denominados de Núcleos Ativos de Galáxias (em inglês: Active Galaxy Nuclei (AGNs)).

Um quasar, masi geralmente um AGN, detém como objeto central um buraco negro supermassivo que produz comportamentos diferentes de Galáxias não ativas, como por exemplo explosões de Raios Cósmicos tais como Raios-X e Raios- γ .

A grosso modo, a atividade de um AGN pode ser verificada pelo surgimento de Jatos de matéria relativística que "são expelidos" por processos de interação do disco de acreção (canibalização de matéria) do buraco negro. O modelo pictórico-didático é dado por:

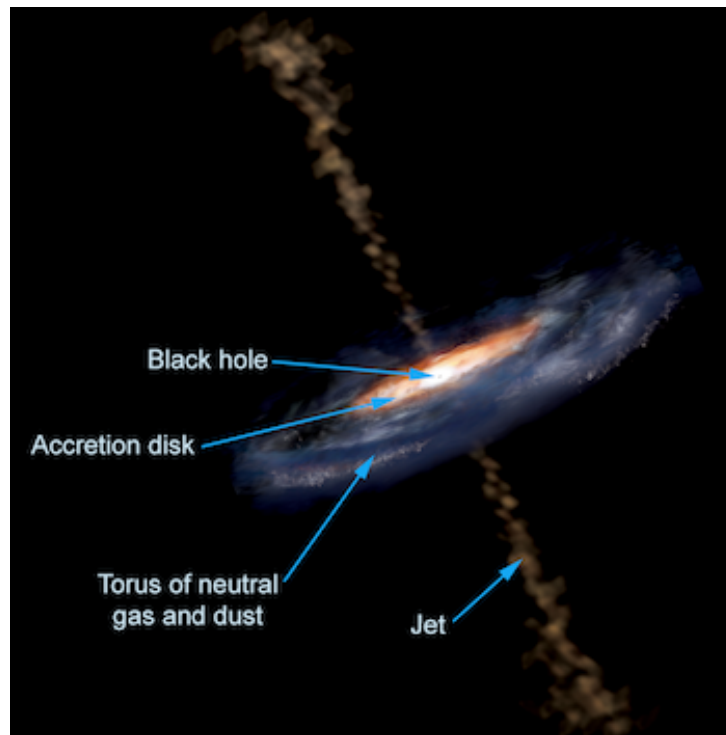


Figura 18: Estruturas de um AGN.

Existe um AGN, especificamente o Quasar 3C 273, no qual o estudo de ESPAILLAT *et al*, 2006, relaciona sinais quasi-periódicos e a massa do buraco negro de 3C 273.

O ponto central da análise foi que a massa obtida até então determinou um valor de

$7,3 \times 10^6 M_{solar}$ massas solares. Contudo, tal valor entrou em conflito com valores de massa previamente determinados para buracos negros supermassivos.

Tais modos de oscilação são originados então no disco de acreção do buraco negro supermassivo em um sistema binário fonte de raios-X (em inglês: X-Ray Binary (XRB)). Tais modos de oscilação restringem então a massa de tais buracos negros.

No caso de 3C 273 tem-se então que o modo de oscilação determinado pelo período de $3,3ks$ restringe a massa do buraco negro ao valor de $7,3 \times 10^6 M_{solar}$ massas solares.

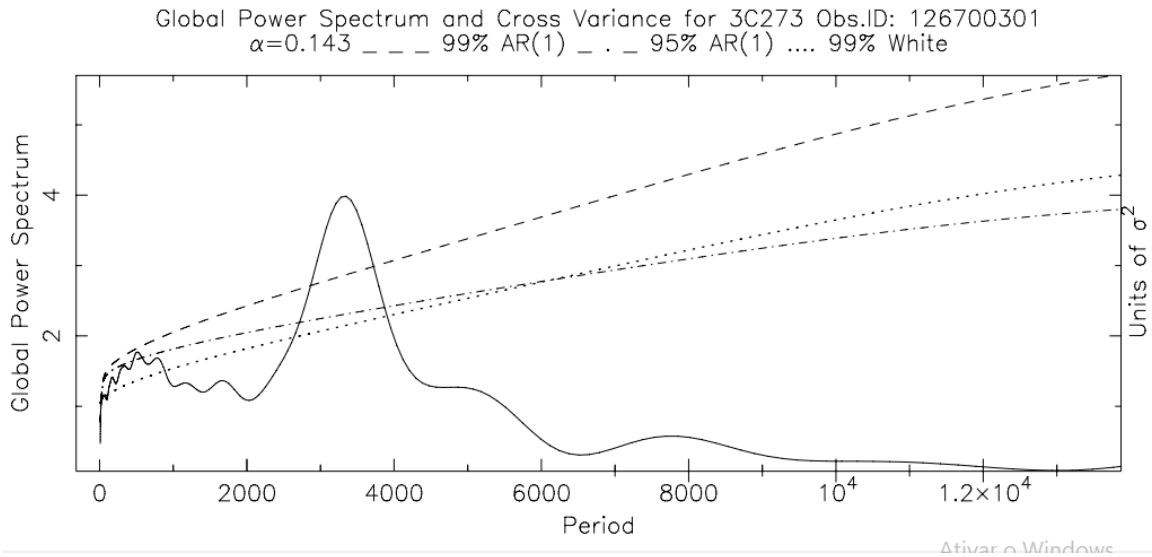


Figura 19: Quasi-período de 3,3 ks.

Ocorre que tal valor não concorda com outros métodos tais como o mapa de reverberação (KASPI *et al*, 2000) o qual estima a massa de 3C 273 para um valor de $2,35 \times 10^9 M_{solar}$ massas solares.

Especula-se então que outro processo astrofísico esteja ocorrendo no disco de acreção de 3C 273, que não apenas movimento dinâmico.

10 CONCLUSÕES E RESULTADOS OBTIDOS

Foram apresentadas as características mais elementares sobre os diferentes assuntos do objeto de estudo do presente trabalho, isto é, uma análise geral das soluções da Relatividade Geral, de interesse astrofísico: os buracos negros.

Quanto aos "wormholes", um estudo sobre suas características elementares (como a garganta), foi feito. No entanto, pôde-se perceber que a solução (53) original (MORRIS e THORNE,1988) detém uma função $b(r)$ na qual é possível propor diversas formas e então precisar exatamente o formato da garganta do "wormhole". Dada essa liberdade, foi proposta então uma nova função $b(r) = \frac{r}{e^{\Omega(r-r_0)}}$; tal função é uma modificação da função dada por (SAMANTA,2019), onde o caráter de nova função aparece em Ω ser o parâmetro de Densidade dado pela Cosmologia (WEINBERG,1972). Ocorre então que tal parâmetro detém valores específicos e para cada valor obtém-se um tipo de gargante diferente. Ainda mais, tais valores de Ω são obtidos pela observação experimental e daí reside um singelo resultado interessante, pois para um valor atual de $\Omega = 1,02$, obtém-se um tipo específico de garganta.

11 PERSPECTIVAS FUTURAS

Muito ainda deverá ser concluído com relação à solução do "Warp Drive". No entanto, neste relatório final, tratou-se principalmente de "Wormholes" e pode-se propor uma modificação ligeira na função de (SAMANTA,2019), criando-se assim uma nova estrutura de garganta para o "Wormhole". Um estudo com viés experimental sobre a interação entre o buraco negro e o comportamento das partículas numa órbita próxima ao horizonte de eventos e observações de raios-x e gama em curvas de luz em Quasares, será feito, para tentar estudar periodicidades no movimento de partículas próximas ao buraco negro.

11 REFERÊNCIAS

ALCUBIERRE.M; **An Introduction to 3+1 Numerical Relativity**. 2.ed. Oxford University Press: Cambridge,2008.

ALCUBIERRE.M; **Warpdrives: Hyper-fast travel within general relativity**,Classical and Quantum Gravity,v.11,n.5,p.L73,1994.

CARROLL.S; **Spacetime and Geometry**. 1.ed. Pearson: Chicago,2003.

CHARLES W.M; THORNE.S.K; WHEELER.J.A; KAISER.I.D; **Gravitation**. 2.ed. San Francisco: Clarendon Press,2017.

D'INVERNO.R; **Introducing Einstein's Relativity**. 1.ed. New York: Princeton University Press,1992.

EINSTEIN,A; **On the Electrodynamics of Moving Bodies**,Annalen der Physik,v.17,n.322,p.891–921,1905.

EINSTEIN,A; **The Field Equations of Gravitation**,Preussische Akademie der Wissenschaften,p.844–847,1915.

HARTLE.J; **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. 2.ed.Pearson: Santa Barbara,2014.

MICHAEL.S, MORRIS and THORNE.K.S.; **Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity**,Am.J.Phys,v.56,n.5,p.395,1988.

SARD.R.D.; **Relativistic Mechanics: special relativity and classical particle dynamics**. 1.ed.Benjamin,INC: New York,1970.

SCHWARZSCHILD.K; **On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory**,1913.

WEINBERG.S.; **Gravitation and Cosmology: principles and applications of general theory of relativity** . 1.ed.New York: Wiley,1972.

LOBO.F.S.N; **Exotic solutions in General Relativity**,arxiv:0710.4474v1, 2007, p. 9-16.

KIM.S; **Flare-out Condition of a Morris-Thorne Wormhole and Finiteness of Pressure**,Journal of the Korean Physical Society,Vol.63,n.10,2013. 2007, p.1887-1888.

LOBO.F.S.N; **Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions**,Springer, Vol.189, 2017, p.11-23.

- RAINE.D; **Black Holes: a student text**, Imperial College Press, 2015, p.183-195.
- VISSER.M; **Lorentzian Wormholes**, Springer, AIP Press, 1995, p.99-115.
- ROMERO.G; VILA.G; **Introduction to Black Hole Astrophysics**, Springer, 2014, p.263-267.
- SAMANTA.G.C, et al; **Traversable Wormholes with Exponential Shape Function in Modified Gravity and in General Relativity**, arxiv:1811.06834v2.
- MISHRA. A.K, et al; **Traversable Wormholes in $f(R, T)$ Gravity**, Astrophys Space Sci, 2020.
- SAMANTA.G.C, et al; **Traversable Wormholes $R + \alpha R^n$ Gravity**, Eur.Phys.J.C. 2020.
- KAR.S; **Quantifying energy condition violations in traversable wormholes**, arxiv:0405103v1.
- KIM.S; LEE.H; **Exact Solutions of a Charged Wormhole**, PHYSICAL REVIEW D. v.63. 2001.
- BUTCHER.L.M; **Traversable Wormholes and Classical Scalar Fields**, PHYSICAL REVIEW D. v.91. 2015.
- MORAES.P.H.R.S; DE PAULA.W; CORREA.R.A.C; **Charged wormholes in $f(R, T)$ extended theory of gravity**, arxiv:1710.07680v2.
- MÜLLER.T; GRAVE.F; **Catalog of Spacetimes**, arxiv:0904.4184v3, p.54
- OLIVEIRA.Q.S, et al; **Morris -Thorne wormholes with a cosmological constant**, arxiv:gr-qc/0302049v2.
- STEPHANI.H, et al; **Exact Solutions to Einstein's Field Equations**. 2ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2003